JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE JANET

Les systèmes comprenant autant d'équations aux dérivées partielles que de fonctions inconnues. Caractéristiques singulières des systèmes normaux. Caractéristiques ordinaires des systèmes anormaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 339-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__339_0>

Les systèmes comprenant autant d'équations aux dérivées partielles que de fonctions inconnues. Caractéristiques singulières des systèmes normaux. Caractéristiques ordinaires des systèmes anormaux.

PAR MAURICE **JANET**.

Pour un système d'équations aux dérivées partielles (analytiques) comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues, on n'a pas donné jusqu'ici, à ma connaissance, de théorème général d'existence en dehors du cas *normal* (dit de *Cauchy-Kowalevsky*) où, grâce éventuellement à un changement de variables, le système est résoluble par rapport à des dérivées d'ordre maximum des diverses inconnues, les dérivations étant toutes relatives à une même variable [1]. Nous donnerons ici un théorème de cette espèce applicable aux *systèmes anormaux* dont M. Hadamard a défini les multiplicités *caractéristiques* dans une Note parue il y a quelques années dans le *Bulletin de la Société Mathématique* [2]. Nous aurons ainsi occasion, d'une part, de compléter cette définition même, d'autre part, de préciser une distinction essen-

---

(1) Les systèmes *anormaux* n'échappent pas, bien entendu, aux méthodes générales connues telles que celle de Riquier ou de M. Cartan; nous voulons seulement dire que l'on n'a pas jusqu'ici précisé le degré de généralité de la solution, en tant que dépendant de la définition des ces systèmes ($H = 0$, $K \neq 0$, par exemple).

(2) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXXIV, 1906, p. 48. Des systèmes anormaux de définition particulière, qui font partie de la classe considérée ici, ont été étudiés par nous dans les Notes suivantes: *C. R. Acad. Sc.*, t. 172, p. 1637; t. 173, p. 124; t. 186, p. 418; et *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, 1926.

tielle entre les diverses *caractéristiques singulières* que peuvent présenter les *systèmes normaux*.

Nous nous plaçons au point de vue analytique (local). Si l'on veut étudier une équation aux dérivées partielles au point de vue de la physique mathématique, on doit avant tout se demander de quelle nature sont ses caractéristiques (réelles et distinctes, ou imaginaires, ou confondues, etc.); deux Mémoires classiques, l'un de M. Picard (1890), pour les cas elliptique et hyperbolique; l'autre, de M. Appell (1892), pour le cas parabolique [1], Mémoires qui ont été la source de nombreux travaux, montrent combien les problèmes à poser sont différents dans ces différents cas. Or, la définition même des caractéristiques résulte de l'étude analytique (locale) de l'équation : discussion du problème de Cauchy. Il en est de même évidemment pour un système.

1. Considérons un système S_0 comprenant N équations aux dérivées partielles aux N fonctions [2] inconnues $u^1, u^2, \ldots, u^N$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour simplifier un peu l'exposition, nous supposerons ces équations du premier ordre, et linéaires par rapport aux dérivées du premier ordre qui y entrent. Désignons par $u^k_{hij\ldots}$ la dérivée [3] de la fonction u^k par rapport aux variables, distinctes ou non, $x_h, x_i, x_j, \ldots$. Le système s'écrit

$$(1) \qquad \mathrm{E}_s \equiv a^i_{ks} u^k_i + b_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}),$$

a^i_{ks}, b_s désignent des fonctions analytiques données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u^1, u^2, \ldots, u^N$; les signes de sommation par rapport aux indices i $(1, 2, \ldots, n)$ et $k(1, 2, \ldots, \mathrm{N})$ ont été supprimés [4], comme nous le ferons toujours par la suite.

---

(1) E. Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, p. 145). — P. Appell, *Sur l'équation* $z_{x^2} - z_y = 0$ et *la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, p. 187).

(2) On ne confondra pas les *indices supérieurs* avec des exposants; u^2 *ne désigne pas le carré de* u^1.

(3) Au lieu de hhj, nous écrirons, d'ailleurs, h^2j, au lieu de n répété λ fois n^λ etc...

(4) Pour lire les formules écrites dans ce qui suit, il y a lieu d'avoir présente à l'esprit la convention suivante : si, dans un terme monome, on aperçoit une *même lettre*

Toute solution (indéfiniment dérivable) du système S_0 satisfait à chaque système S_λ obtenu en dérivant λ fois par rapport à x_n (totalement) les équations $E_s = 0$ qui constituent S_0. En posant

$$(2) \qquad \frac{\delta}{\delta x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} + u_h^k \frac{\partial}{\partial u^k} + u_{ih}^k \frac{\partial}{\partial u_i^k} + u_{ijh}^k \frac{\partial}{\partial u_{ij}^k} + \ldots,$$

les équations qui constituent S_λ s'écrivent [1]

$$\frac{\delta^\lambda E_s}{\delta x_n^\lambda} \equiv a_{ks}^i u_{in^\lambda}^k + \lambda \frac{\delta a_{ks}^i}{\delta x_n} u_{in^{\lambda-1}}^k + \ldots + \frac{\delta^\lambda a_{ks}^i}{\delta x_n^\lambda} u_i^k + \frac{\delta^\lambda b_s}{\delta x_n^\lambda} = 0.$$

Considérons une multiplicité à $n-1$ dimensions

$$(M_{n-1}) \quad x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Une fonction U de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devient sur M_{n-1} une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dont nous désignerons les dérivées successives par $\frac{dU}{dx_i}, \frac{d^2U}{dx_i\,dx_j}, \ldots$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$. C'est ce que nous ferons en particulier pour les fonctions u^k et leurs dérivées par rapport à x_n. Les valeurs sur M_{n-1} des $u^k, u_n^k, u_{n^2}^k, \ldots$, sont des fonctions de $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui satisfont [2] aux équations déduites de $S_0, S_1, S_2, \ldots$, en y remplaçant les $u_{in^\lambda}^l$ par

$$(3) \qquad \frac{du_{n^\lambda}^l}{dx_i} - P_i u_{n^{\lambda+1}}^l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \left(P_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right).$$

Le système S_0 se présente alors comme un système de N équations linéaires par rapport aux N inconnues u_n^k, le système S_λ comme un système de N équations linéaires par rapport aux N inconnues $u_{n^{\lambda+1}}^k$.

Les déterminants formés avec les coefficients des inconnues sont tous les mêmes, à savoir :

$$(4) \qquad H \equiv \| -a_{1s}^i P_i \quad -a_{2s}^i P_i \quad \ldots \quad -a_{Ns}^i P_i \|$$

---

deux fois comme indice (indice affecté d'ailleurs à deux arguments différents du terme monome), on doit comprendre que, dans ce terme, on donne à l'indice toutes les valeurs dont il est susceptible et que l'on fait la somme de tous les termes ainsi obtenus.

(1) *Voir* Note (3), page précédente.

(2) *Cf.* HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 265.

où l'on convient $P_n = -1$, et où les différentes lignes s'obtiennent en donnant à s les valeurs $1, 2, \ldots, N$.

Nous supposerons $H = 0$ *sur toute la multiplicité* M_{n-1}. C'est ce qui arrive si M_{n-1} est multiplicité *caractéristique* (¹) du système S_0 supposé *normal*, ou encore si le système S_0 est *anormal*, ce deuxième cas étant caractérisé par la circonstance que l'égalité $H = 0$ est une identité en $x_1, x_2, \ldots, x_n, u^1, u^2, \ldots, u^N, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

Supposons, de plus, que *l'un au moins des mineurs de* H *ne soit pas identiquement nul sur* M_{n-1}. Désignons d'une manière générale l'élément $-a^i_{ks} P_i$ par a_{ks} et le mineur correspondant par A^{ks}. Pour fixer les idées, nous supposerons $A^{11} \neq 0$ sur M_{n-1}; S_0 se réduit d'une part à une relation (différentielle) R_0 à laquelle doivent satisfaire les u sur M_{n-1}, et, d'autre part, à un système Σ_0 de $N - 1$ équations linéaires distinctes relativement aux N inconnues u^k_n; $S_{\lambda-1}$ se réduit de même, d'une part, à une relation (différentielle) $R_{\lambda-1}$ à laquelle doivent satisfaire les $u^k_{n^{\lambda-1}}$ sur M_{n-1}, et, d'autre part, à un système $\Sigma_{\lambda-1}$ de $N - 1$ équations linéaires distinctes relativement aux N inconnues $u^k_{n^\lambda}$. Les u^k étant supposées satisfaire à R_0 sur M_{n-1}, c'est aux systèmes $(\Sigma_0, R_1), (\Sigma_1, R_2), \ldots, (\Sigma_{\lambda-1}, R_\lambda), \ldots$ que doivent satisfaire respectivement sur M_{n-1} les $u^k_n, u^k_{n^2}, \ldots, u^k_{n^\lambda}, \ldots$. En donnant à λ les valeurs successives $1, 2, \ldots$, on pourra dire : $\Sigma_{\lambda-1}$ donne les $u^k_{n^\lambda}$ en fonction linéaire d'une indéterminée ρ_λ; en tenant compte de ces expressions, R_λ devient une relation R'_λ à laquelle doit satisfaire ρ_λ.

Supposons que les $\frac{\partial H}{\partial P_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *soient toutes nulles sur* M_{n-1} (nous excluons ainsi le cas où M_{n-1} serait une caractéristique *ordinaire* d'un système *normal* S_0). R'_λ est une relation *finie* (²) en ρ_λ $\Big($au lieu d'être comme dans le cas exclu une équation aux dérivées partielles en ρ_λ, du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées $\frac{d\rho_\lambda}{dx_i}\Big)$. Cette relation, quadratique (en général) pour $\lambda = 1$, est linéaire pour $\lambda \geqq 2$.

(¹) Dans le cas général, pour connaître H il faut connaître non seulement M_{n-1} mais aussi les valeurs des u sur M_{n-1}; il convient donc de dire, plus explicitement, que *le système* (M_{n-1}, u^k) est caractéristique. Dans le cas où les a^i_{ks} ne dépendent que des x et non des u, le langage abrégé employé dans le texte est entièrement correct.

(²) HADAMARD, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. XXXIV, 1906, p. 48.

Dans cette relation, nous écrirons le coefficient de ρ_λ, coefficient qui est une *fonction linéaire* (¹) *de* λ, sous la forme

$$K + \lambda L.$$

On trouve, d'une part,

$$(5) \qquad K = \frac{\Lambda^{1k}}{\Lambda^{11}} a'_{jk} \frac{d\Lambda^{j1}}{dx_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^i} \Lambda^{ik}$$

(dans la sommation par rapport à i, i varie de 1 à $n-1$ et non pas n), et, d'autre part,

$$(6) \qquad L = \frac{\partial H}{\partial x_n}$$

$\Big($dérivée totale de H par rapport à x_n, les P étant considérés comme des constantes

$$\frac{\partial H}{\partial x_n} = \frac{\partial H}{\partial x_n} + \frac{\partial H}{\partial u^k} u^k_n \Big).$$

Nous sommes amenés à distinguer deux cas bien différents :

1° K et L ne sont pas tous deux identiquement nuls sur M_{n-1} ;

2° K et L sont tous deux identiquement nuls sur M_{n-1} ;

à distinguer, par suite :

Pour les systèmes normaux (H non identiquement nul) des caractéristiques singulières de *première* et de *deuxième* espèce;

Parmi les systèmes anormaux (H identiquement nul) des systèmes anormaux de *première* et de *deuxième* espèce.

2. *Caractéristiques singulières des systèmes normaux.* — Considérons une caractéristique *singulière de première espèce* d'un système normal, autrement dit une multiplicité M_{n-1} sur laquelle H et les $\frac{\partial H}{\partial P_i}$ sont identiquement nuls, tandis que K et L ne le sont pas tous deux. Sup-

(¹) Il peut se faire que H et tous les $\frac{\partial H}{\partial P_i}$ soient nuls sur M_{n-1} sans que $\frac{\partial H}{\partial x_n}$ le soit (voir le deuxième exemple du n° 2). Ce fait n'infirme en rien la conclusion de M. Hadamard, qui n'a en vue en réalité que le cas où H est identiquement nul et où, par suite $\frac{\partial H}{\partial x_n}$ l'est aussi; mais il entraînerait la nécessité d'un léger changement dans la rédaction de l'article cité plus haut (*Bull. Soc. Math.*, t. XXXIV, p. 48).

posons d'abord, ce qui arrivera en général, que $K+\lambda L$ ne soit identiquement nul pour aucune valeur entière de λ, supérieure ou égale à 2. Les relations R_0, Σ_0, R_1 étant supposées satisfaites sur M_{n-1} par les u^k et leurs dérivées premières par rapport à x_n, le calcul qui vient d'être fait montre que les dérivées de tous les ordres sont entièrement déterminées; il ne peut donc exister plus d'une solution holomorphe satisfaisant à la condition que les u et leurs dérivées premières, par rapport à x_n, prennent sur M_{n-1} les valeurs données (satisfaisant aux R_0, Σ_0, R_1). Dans bien des cas, par exemple si le système est linéaire et si $K+\lambda L$ n'est identiquement nul pour aucune valeur entière positive de λ, on pourra dire plus simplement : il ne peut exister plus d'une solution holomorphe telle que les fonctions u qui la composent prennent sur M_{n-1} des valeurs données (satisfaisant à R_0). C'est ce qui se passe pour le système (de la théorie de la chaleur)

$$
\begin{aligned}
v_x - u &= 0,\\
u_x - v_y &= 0.
\end{aligned}
$$

Il ne peut y avoir *plus d'une* solution holomorphe prenant sur la caractéristique $y=y_0$ un système de valeurs holomorphes données $\overline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$. [$\overline{u}(x)$ doit être, bien entendu, la dérivée de $\overline{v}(x)$; $\overline{v}(x)$ *n'est assujetti à aucune relation finie ou différentielle exprimable par une égalité*, mais il est soumis comme on sait à *certaines restrictions* pour qu'il existe effectivement une telle solution].

Supposons maintenant, toujours dans le cas d'une caractéristique de première espèce, que $K+\lambda_0 L$ soit identiquement nul, λ_0 étant un certain nombre entier supérieur ou égal à 2. Les relations R_0, Σ_0, R_1, ..., Σ_{λ_0-1}, R_{λ_0} étant supposées satisfaites sur M_{n-1} par les u^k, u^k_n, ..., $u^k_{n^{\lambda_0}}$, le calcul qui a été fait montre que les dérivées par rapport à x_n des ordres suivants sont entièrement déterminées; il ne peut exister *plus d'une* solution holomorphe telle que les dérivées par rapport à x_n des fonctions qui la composent, jusqu'à l'ordre λ_0 compris, prennent les valeurs données sur M_{n-1}. C'est ce qui se passe, par exemple, pour le système

$$
\begin{aligned}
-yu_y + v_x + \frac{5}{2}u &= 0,\\
u_x + xu_y + v_y &= 0,
\end{aligned}
$$

sur la caractéristique singulière de première espèce $y = \frac{x^2}{4}$; *les valeurs* d'une solution, *sur cette courbe*, $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$ sont liées par les *deux* relations

$$\frac{d^3\bar{u}}{dx^3} = 0, \qquad \frac{d\bar{v}}{dx} = -\frac{x}{2}\frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{5}{2}\bar{u}.$$

Le système $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$ ne dépend tout au plus ici que de *constantes arbitraires*; et $\bar{u}_y$, $\bar{v}_y$ sont déterminés en fonction de $\bar{u}$, $\bar{v}$,

$$\bar{u}_y = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2}, \qquad \bar{v}_y = -\frac{d\bar{u}}{dx} - \frac{x}{2}\bar{u}_y.$$

En revanche, $\bar{u}_{y^2}$ n'est assujettie à aucune relation finie ou différentielle exprimable par une égalité. Enfin,

$$\bar{v}_{y^2} = -\frac{d\bar{u}_y}{dx} - \frac{x}{2}\bar{u}_{y^2},$$

et les dérivées de u et v, par rapport à y, d'ordre supérieur au second, sont dès lors entièrement déterminées ([1]).

Sur une caractéristique *singulière de seconde espèce*, au contraire, c'est-à-dire sur une multiplicité M_{n-1} pour laquelle H, les $\frac{\partial H}{\partial P_i}$, $\frac{\partial H}{\partial x_n}$, K sont identiquement nuls, les circonstances seront bien différentes; elles nécessitent une étude spéciale. Bornons-nous à l'exemple très simple du système

$$v_x = 0,$$
$$u_x - v_y = 0.$$

Sur la caractéristique $y = y_0$, deux solutions (holomorphes) peuvent coïncider ainsi que leurs dérivées par rapport à y jusqu'à un ordre donné, *aussi élevé qu'on le veut*, sans pour cela coïncider.

3. *Systèmes anormaux.* — Supposons maintenant que H soit identiquement nul; L l'est alors aussi. Nous nous bornerons aux *systèmes*

([1]) On trouverait des résultats analogues si le coefficient de u dans la première équation donnée, au lieu d'être $\frac{5}{2}$, était un nombre quelconque de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant un entier positif quelconque.

anormaux de première espèce : K n'est pas identiquement nul. Si, sur une multiplicité à $n-1$ dimensions M_{n-1}, K est identiquement nul, cette multiplicité doit être dite *caractéristique* ([1]).

Grâce aux identités $\frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_h} = 0$ résultant de $H \equiv 0$, la quantité

$$K \equiv \frac{A^{1k}}{A^{11}} a^i_{jk} \frac{dA^{j1}}{dx_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{jk}$$

peut s'écrire

$$K \equiv \frac{A^{1k}}{A^{11}} a^i_{jk} \frac{\partial A^{j1}}{\partial x_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{jk}, \tag{7}$$

i variant cette fois de 1 à n et non plus $n-1$, le signe $\frac{\partial}{\partial x_i}$ étant un signe de dérivation totale, les P dans les A étant considérés comme des constantes ([2]).

Au lieu de définir la multiplicité M_{n-1} par une équation de la forme

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

nous la représenterons plus symétriquement par

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

([1]) Hadamard, *Bull. Soc. Math.*, t. XXXIV, p. 48. — Dans le cas général, pour connaître K, il faut connaître non seulement M_{n-1}, mais aussi les valeurs des u et de leurs dérivées premières sur M_{n-1} : il convient donc de dire, plus explicitement, que *le système* (M_{n-1}, u^k, u^k_i) est caractéristique. Dans le cas d'un système *linéaire*, le langage abrégé employé dans le texte est entièrement correct.

([2]) On a, d'une part,

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial}{\partial x_n} + P_{hi} \frac{\partial}{\partial P_h};$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} a^i_{jk} P_i = a^n_{jk} - \mathrm{a}_{jk} \qquad \text{et} \qquad A^{1k} \mathrm{a}_{jk} = 0, \text{ même pour } j = 1,$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{a}_{j\lambda} \frac{\partial^2 A^{j1}}{\partial P_i \partial P_h} - a^h_{j\lambda} \frac{\partial A^{j1}}{\partial P_i} - a^i_{j\lambda} \frac{\partial A^{j1}}{\partial P_h} = \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_h} & \text{si } \lambda = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda \neq 1 \end{cases}$$

et, par suite,

$$A^{1k} a^i_{jk} \frac{\partial A_{j1}}{\partial P_h} P_{hi} = \frac{1}{2}\left(H \frac{\partial^2 A^{11}}{\partial P_i \partial P_h} - A^{11} \frac{\partial^2 H}{\partial P_i \partial P_h} \right) P_{hi}.$$

En posant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \omega_i,$$

on aura

$$\mathrm{P}_i = -\frac{\omega_i}{\omega_n};$$

a_{jk}, H, A^{jk}, K se présentent comme des fonctions homogènes de degré 0 des $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; en multipliant la première par ω_n, la seconde par ω_n^{N}, les deux autres par $\omega_n^{\mathrm{N}-1}$, nous obtiendrons des fonctions de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ que nous désignerons respectivement par a_{jk}, $\mathcal{H}$, A^{jk}, K. On aura, évidemment,

$$K = \frac{A^{1k}}{A^{11}} a^i_{jk} \frac{\partial A^{j1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{E}_k}{\partial u^j} A^{jk}.$$

Le déterminant $\mathcal{H}$, dont les éléments sont $a^i_{jk}\omega_i = a_{jk}$, étant nul, ses mineurs A^{jk} peuvent s'exprimer à l'aide de $2n$ quantités B^j, C^k de la manière suivante :

$$A^{jk} = \mathrm{B}^j . \mathrm{C}^k.$$

On a donc l'identité

$$\begin{aligned} A^{1k} a^i_{jk} \frac{\partial A^{j1}}{\partial x_i} &= \mathrm{B}^1 \mathrm{C}^k a^i_{jk} \left(\mathrm{C}^1 \frac{\partial \mathrm{B}^j}{\partial x_i} + \mathrm{B}^j \frac{\partial \mathrm{C}^1}{\partial x_i} \right) \\ &= A^{11} a^i_{jk} \mathrm{C}^k \frac{\partial \mathrm{B}^j}{\partial x_i} + \mathrm{B}^1 \frac{\partial \mathrm{C}^1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_i}. \end{aligned}$$

En tenant compte des égalités $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_i} = 0$, on peut donc écrire K sous la forme

(8) $$K = a^i_{jk} \mathrm{C}^k \frac{\partial \mathrm{B}^j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathrm{E}_k}{\partial u^j} A^{jk},$$

et [en tenant compte des égalités

$$a_{jk}\mathrm{C}^k = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}),$$

qui, étant des identités relativement aux ω, entraînent

$$a^i_{jk}\mathrm{C}^k + a_{jk}\frac{\partial \mathrm{C}^k}{\partial \omega_i} = 0 \Big]$$

sous la forme

(9) $$K = -a_{jk}\frac{\partial \mathrm{B}^j}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{C}^k}{\partial \omega_i} + \frac{\partial \mathrm{E}_k}{\partial u^j} A^{jk}.$$

Sous l'une ou l'autre des formes (8) ou (9), on reconnaît que A^{ik} est une fonction entière et homogène de degré $N-1$ en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Sur une multiplicité M_{n-1} *non caractéristique* pour le système S_0 donné, supposé *anormal de première espèce*, donnons-nous les valeurs (holomorphes) des fonctions u et de leurs dérivées par rapport à x_n d'ordres λ, $1 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$, satisfaisant sur M_{n-1} aux équations R_0, Σ_0, $R_1, \ldots, \Sigma_{\lambda_0-1}$, R_{λ_0}. Leurs dérivées par rapport à x_n d'ordres supérieurs à λ_0 sont entièrement déterminées. Il ne peut y avoir *plus d'une* solution holomorphe satisfaisant aux conditions initiales qui viennent d'être indiquées.

Y en a-t-il effectivement une? Autrement dit, les séries entières bien déterminées que l'on est amené à former pour représenter la solution holomorphe supposée, sont-elles convergentes dans un petit domaine à n dimensions? La question reste jusqu'ici en suspens, et c'est pour arriver à y répondre que nous allons faire tout d'abord une remarque importante sur les systèmes anormaux de première espèce.

4. *Si* S_0 *est un système anormal de première espèce, on peut tirer de* S_0, *par des dérivations d'ordre* $N-1$ *au plus, une équation d'ordre* $N-1$ *qui n'est pas conséquence algébrique du système* $(S_0 S_1 \ldots S_{N-2})$.

Les mineurs A^{1k} sont des formes algébriques d'ordre $N-1$ en $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, que nous désignerons par

$$\sigma^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} \quad \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = N-1).$$

Chacun d'eux symbolise une opération différentielle linéaire que nous effectuerons sur l'équation E_k. Nous ferons la somme des résultats obtenus en donnant à k toutes les valeurs de 1 à N. Autrement dit, nous écrirons l'équation (¹)

$$(e) \qquad \sigma^k_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n} \frac{\partial^{N-1} E_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0,$$

le symbole ∂ ayant le sens qui a été précisé plus haut : formule (2).

Les seuls termes d'ordre N qui pourraient se présenter dans l'équation (e) sont des termes relatifs à la fonction u^1; or, ces termes dispa-

(¹) Si, du moins, nous supposons $N > 2$; le cas $N = 2$ se traite aisément.

raissent précisément grâce à l'identité

$$a_{1k} A^{1k} \equiv 0,$$

qui exprime que le système est *anormal*.

Dans (e), les dérivées d'ordre $N-1$ de u^j entrent linéairement, leur ensemble est symbolisé [1] par la forme d'ordre $N-1$ en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$,

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \frac{\partial A^{1k}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{1k}.$$

Joignons cette équation (e), d'ordre $N-1$ au plus, au système $(E_2, E_3, \ldots, E_N)$ dérivé $N-2$ fois (totalement) par rapport à x_h, h étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, n$ fixé d'ailleurs arbitrairement. Nous obtenons un système de N équations *normal*. En effet, le déterminant des formes caractéristiques est, au facteur $\omega_h^{(N-2)(N-1)}$ près,

$$\begin{aligned}
&A^{j1}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \frac{\partial A^{1k}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{1k}\right) \\
&= A^{11}\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} B^j \frac{\partial C^k}{\partial \omega_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{jk}\right) + C^1 \frac{\partial B^1}{\partial \omega_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

ce qui, en tenant compte des identités: $\mathcal{H} \equiv 0$, qui entraîne $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \equiv 0$, et $a_{jk} B^j \equiv 0$, qui entraîne

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} B^j + a_{jk} \frac{\partial B^j}{\partial x_i} = 0,$$

peut s'écrire comme le produit de A^{11} par

$$-a_{jk} \frac{\partial B^j}{\partial x_i} \frac{\partial C^k}{\partial \omega_i} + \frac{\partial E_k}{\partial u^j} A^{jk}.$$

Et cette expression est précisément (9) la quantité K qui, par hypothèse, *n'est pas identiquement nulle*.

Cela étant, considérons une multiplicité M_{n-1}

$$x_n - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

non caractéristique (n° **3**) pour le système S_0 donné; faisons le chan-

---

[1] *Cf.* M. JANET, *Sur la composition des expressions différentielles* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 55, 1927, p. 89).

gement de variables

$$x_n - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = x'_n, \qquad x_i = x'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

puis reprenons pour les nouvelles variables x' les anciennes notations x; cela revient à dire que dans les calculs des nos **1** et **3**, nous supposons que l'équation de M_{n-1} est $x_n = 0$, et que, en tenant compte [1], éventuellement, des valeurs des u et de leurs dérivées premières, supposées données sur M_{n-1} et satisfaisant aux relations (R_0, Σ_0, R_1), K ne soit pas identiquement nul pour $x_n = 0$.

Faisons une convention de langage : soient deux dérivées D, D', relatives soit à une même fonction inconnue, soit à deux fonctions inconnues différentes, dérivées dont les ordres en x_n sont k, k'; nous dirons que D est postérieure ou antérieure à D' suivant que k est supérieur ou inférieur à k'.

(Σ_1, R_2) donne les u_{n^2} en fonction de dérivées antérieures [2], et, d'une manière générale $(\Sigma_{\lambda-1}, R_\lambda)$ donne les u_{n^λ} en fonction de dérivées antérieures [2].

D'après la manière dont ces systèmes ont été obtenus, on voit qu'on ne pourra tirer de S_0 par dérivations et combinaisons d'autres relations entre les u et les u_n que le système (R_0, Σ_0, R_1) et toutes les équations qui s'en déduisent par dérivations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ayant écrit, pour déterminer les u_{n^λ}, $2 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$, les systèmes $(\Sigma_{\lambda-1}, R_\lambda)$, on pourra donc, pour déterminer les $u_{n^{\lambda_0+1}}$, au lieu d'écrire $(\Sigma_{\lambda_0}, R_{\lambda_0+1})$, dériver (totalement) par rapport à x_n le système $(\Sigma_{\lambda_0-1}, R_{\lambda_0})$, ou encore modifier d'abord le système $(\Sigma_{\lambda_0-1}, R_{\lambda_0})$ en tenant compte des équations, sur $x_n = 0$, $(R_0, \Sigma_0, \ldots, \Sigma_{\lambda_0-2}, R_{\lambda_0-1})$, de manière à obtenir un nouveau système T_{λ_0} donnant encore les $u_{n^{\lambda_0}}$ en fonction des dérivées antérieures, puis dériver (totalement) par rapport à x_n ce système T_{λ_0}.

Or, d'après la remarque qui a été faite au début du présent numéro, dès que $\lambda_0 = N - 1$, on est assuré d'obtenir, par un procédé qui a été indiqué, un système T_{λ_0} *normal*, c'est-à-dire donnant les $u_{n^{N-1}}$ en fonction de dérivées antérieures *d'ordre total au plus égal à* $N-1$. Le calcul des dérivées u_{n^λ} où $\lambda \geqq N$ sur $x_n = 0$ se fera simplement en déri-

---

[1] *Voir* la Note [1] du no 3.

[2] Nous sous-entendons « et des variables indépendantes ».

vant (totalement) par rapport à x_n, un certain nombre de fois, le système T_{N-1}.

La convergence des séries entières formées résulte donc immédiatement de la démonstration même du théorème bien connu de Cauchy-Kowalevsky.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

« Il existe une solution holomorphe et une seule du système S_0 telle que les fonctions qui la composent prennent ainsi que leurs dérivées premières sur M_{n-1} des valeurs arbitrairement données à l'avance, holomorphes, satisfaisant sur M_{n-1} à R_0, Σ_0, R_1, *si, du moins*, $K \neq 0$ », ou, plus simplement, dans certains cas, par exemple si S_0 est *linéaire* : « Il existe une solution holomorphe et une seule du système S_0 telle que les fonctions u qui la composent prennent sur M_{n-1} des valeurs arbitrairement données à l'avance, holomorphes, satisfaisant sur M_{n-1} à R_0, *si, du moins* $K \neq 0$. »

Alors que la solution d'un système normal dépendait de N fonctions arbitraires de $n-1$ variables, la solution d'un système anormal de première espèce dépend de $N-1$ fonctions arbitraires de $n-1$ variables (et de fonctions d'un nombre de variables inférieur à $n-1$).

Il sera évidemment aisé d'étendre successivement ce qui précède au cas d'un système d'ordre p supérieur à 1, linéaire par rapport aux dérivées d'ordre p, au cas d'un système d'ordre 1 non linéaire par rapport aux dérivées, au cas enfin d'un système d'ordre p non linéaire par rapport aux dérivées d'ordre p.

Il sera sans doute plus compliqué de faire l'étude générale des systèmes anormaux de seconde espèce : on peut prévoir, semble-t-il, que pour ces systèmes (supposés du premier ordre), la solution dépendra, en général, de $N-2$ fonctions arbitraires (1) de $n-1$ variables, puis, dans un cas particulier, de $N-3$ fonctions arbitraires de $n-1$ variables, et ainsi de suite.

5. Donnons un exemple simple, assez général, de système *anormal*

(1) Sans parler, bien entendu, de fonctions arbitraires d'un nombre moindre de variables.

de première espèce. Nous voulons parler des systèmes pour lesquels le déterminant $\mathcal{H}$ est *symétrique gauche* d'ordre N *impair*

$$(a_{jk} + a_{kj} \equiv 0).$$

Ces systèmes sont évidemment *anormaux*. On peut écrire

$$\dot{A}^{jk} = B^j B^k,$$

les $B_1, B_2, \ldots, B_N$ étant N formes d'ordre $\frac{N-1}{2}$ par rapport aux ω. Supposons, pour simplifier, que les a^i_{jk} ne dépendent pas des u et que les b soient nuls.

La condition pour qu'une multiplicité

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

soit *caractéristique* s'écrit sous la forme très simple

$$a_{jk}(B^j, B^k) = 0,$$

qui fait intervenir les *parenthèses* des quantités B deux à deux.