JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. GOSSE

Des invariants des équations $s = f(x, y, z, p, q)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 301-325.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__301_0>

Des invariants des équations $s=f(x, y, z, p, q)$;

PAR R. GOSSE.

1. Dans le fascicule XII du *Mémorial des Sciences mathématiques* (1) j'ai signalé l'intérêt qu'il y aurait à déterminer les équations $s=f$ qui admettent un invariant pour un seul système de caractéristiques. Leur découverte est liée à celle de conditions simples, nécessaires à l'existence de l'invariant. M. Gau (2) a découvert les premières de ces conditions; j'en ai donné d'autres dans ma Thèse (3) et M. Laîné en a récemment déterminé de nouvelles (4). Mais il arrive, dans certains cas, soit que ces conditions soient d'une discussion difficile, soit qu'elles soient impuissantes à imposer à la fonction f une forme assez maniable pour qu'on puisse la soumettre avec succès à la condition nécessaire et suffisante de Darboux. Il ne me paraît alors y avoir d'autre alternative que la recherche de nouvelles conditions nécessaires simples.

J'ai amorcé cette recherche, aux pages citées de mon fascicule du *Mémorial*, lorsqu'il n'existe aucune fonction $\lambda(x, y, z, p)$, d'ordre $\leqq 2$, telle que l'on ait

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y}+\lambda \frac{\partial f}{\partial p}=0.$$

Je me propose dans ce travail de compléter cette étude et de montrer comment on peut résoudre le même problème quand la condition (A) est satisfaite.

(1) Pages 39-41.
(2) GAU, *Thèse de doctorat*, Gauthier-Villars, 1911, p. 34 à 39.
(3) GOSSE, *Thèse de doctorat*, Privat (Toulouse), 1921, p. 36 et 37.
(4) LAINÉ, *Thèse de doctorat*, Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1928.

2. Une des grosses difficultés qui se présentent dans ce genre de questions est la complication, croissante avec n, des expressions $\frac{d^n f}{dx^n}$. Je suis d'abord parvenu à leur donner une forme condensée en introduisant les nouveaux symboles

$$\mathrm{H}(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial q},\qquad \mathrm{H}[\mathrm{H}(\varphi)]=\mathrm{H}_2(\varphi)\ldots,$$

$$\mathrm{F}(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q},\qquad \mathrm{F}[\mathrm{F}(\varphi)]=\mathrm{F}_2(\varphi)\ldots,$$

où φ est une fonction quelconque de x, y, z, p, q. On vérifie sans peine les identités

$$\frac{\partial\mathrm{H}(\varphi)}{\partial p}\equiv\mathrm{H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)+\mathrm{F}(\varphi),\qquad \frac{\partial\mathrm{F}(\varphi)}{\partial p}\equiv\mathrm{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

$$\mathrm{H}[\mathrm{F}(\varphi)]-\mathrm{F}[\mathrm{H}(\varphi)]\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\mathrm{F}(f)\right].$$

On peut alors écrire :

$$\frac{df}{dx}=p_2\frac{\partial f}{\partial p}+\mathrm{H}(f),$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=p_3\frac{\partial f}{\partial p}+p_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+p_2\left[2\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\mathrm{F}(f)\right]+\mathrm{H}_2(f),$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3f}{dx^3}={}&p_4\frac{\partial f}{\partial p}+p_3\mathrm{M}_3^3+p_2^3\frac{\partial^3 f}{\partial p^3}+p_2^2\left[3\mathrm{H}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)+3\mathrm{F}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right]\\&+p_2\left[3\mathrm{H}_2\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+2\mathrm{H}[\mathrm{F}(f)]+\mathrm{F}[\mathrm{H}(f)]\right]+\mathrm{H}_3(f),\end{aligned}$$

en posant, avec M. Gau [1],

$$\mathrm{M}_k^k=k\left[p_2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]+\mathrm{F}(f).$$

On a alors

$$\frac{d^4f}{dx^4}=p_5\frac{\partial f}{\partial p}+p_4\mathrm{M}_4^4+3p_3^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+p_3\mathrm{R}+\ldots,$$

en n'écrivant pas les termes d'ordre inférieur à 3 et en posant

$$\begin{aligned}\mathrm{R}={}&6p_2^2\frac{\partial^3 f}{\partial p^3}+p_2\left[12\mathrm{H}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)+10\mathrm{F}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+3\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right]\\&+6\mathrm{H}_2\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+3\mathrm{H}[\mathrm{F}(f)]+\mathrm{F}[\mathrm{H}(f)].\end{aligned}$$

---

(1) GAU, *Thèse de doctorat*, Gauthier-Villars (1911).

On aura par suite

$$\frac{d^5 f}{dx^5} = p_6 \frac{\partial f}{\partial p} + p_5 \mathrm{M}_5^5 + p_4 \left[\frac{d\mathrm{M}_4^4}{dx} + 6 p_3 \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \mathrm{R} \right] + \ldots,$$

et si l'on pose, pour $n > 5$,

$$\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} = p_n \frac{\partial f}{\partial p} + p_{n-1} \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} + p_{n-2} \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} + \ldots,$$

on aura

$$\frac{d^n f}{dx^n} = p_{n+1} \frac{\partial f}{\partial p} + p_n \mathrm{M}_n^n + p_{n-1} \mathrm{M}_n^{n-1} + \ldots,$$

avec

$$\mathrm{M}_n^{n-1} = \mathrm{M}_{n-1}^{n-2} + \frac{d}{dx} \mathrm{M}_{n-1}^{n-1}.$$

On en déduit, par un calcul facile, que

$$\mathrm{M}_n^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial p} + n \frac{d\mathrm{F}(f)}{dx} - \frac{\partial f}{\partial q} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f) \right).$$

C'est là l'expression qui figure dans le calcul que j'ai amorcé, dans mon fascicule du *Mémorial*, lorsque la condition (A) n'est pas satisfaite. Si elle l'est, nous verrons plus loin qu'on retombe sur le même symbole.

Sa valeur explicite va nous permettre de simplifier et de compléter les conditions nécessaires simples que j'ai déjà signalées dans le travail que je viens de rappeler.

3. Supposons, en effet, que l'équation donnée admette deux involutions d'ordre n et n' supérieur à 3, sans que la condition (A) soit satisfaite. Les conditions de M. Gau donnent, α et β étant deux fonctions de x, y, z, p,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y} + (n-1) \left[\alpha \mathrm{H}(f) + \mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) \right] + \mathrm{F}(f) = 0.$$

Je me bornerai ici à l'étude du cas où l'on peut leur adjoindre la condition

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y, z, p) + \mathrm{F}(f) = 0.$$

J'ai d'ailleurs montré qu'on a aussi

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \mu M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0,$$

en posant

$$\mu = (n-1)\alpha r + \beta,$$

si n est supérieur à 5, h étant une fonction d'ordre $\leqq 3$. Cette condition s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \mu\left[(n-2)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + F(f)\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p} + n\frac{dF(f)}{dx}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - F(f)\right).$$

Mais l'ensemble des conditions de M. Gau s'écrit

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + (n-1)\frac{d}{dx}\frac{df}{\partial p} + F(f) = 0.$$

On a donc

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu - \gamma) + (n-1)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dx}(\mu - \gamma) + (n-1)\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

De plus,

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{dF(f)}{dx} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mu^2}{2} + \mu\left[(n-1)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + F(f)\right] = 0.$$

En posant

$$H = h - \left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{d}{dx}(\mu - \gamma) - n\frac{d\gamma}{dx} - \frac{\mu^2(n-2)}{2(n-1)},$$

la condition en h vient

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\mu F(f)}{(n-1)} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - F(f)\right],$$

H étant au plus d'ordre 3. On voit immédiatement qu'il ne peut être que linéaire en r. Posons alors $H = ur + v$. On a

$$r\frac{\partial u}{\partial y} + u\left[r\frac{\partial f}{\partial p} + H(f)\right] + \frac{\partial v}{\partial y} + F(f)\left(\alpha r + \frac{\beta}{n-1}\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial q}\left[r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - F(f)\right],$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial f}{\partial p} + \alpha \mathrm{F}(f) = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + u \mathrm{H}(f) + \frac{\beta \mathrm{F}(f)}{(n-1)} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \mathrm{F}(f)\right].$$

Mais comme

$$\frac{\partial(\alpha\gamma)}{\partial y} = -\gamma\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) - \alpha \mathrm{F}(f),$$

la première condition s'écrit en posant $\omega = u - \alpha\gamma$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial f}{\partial q} + \gamma\right).$$

La seconde vient

$$\frac{\partial v}{\partial y} + (\omega + \alpha\gamma)\mathrm{H}(f) + \frac{\beta \mathrm{F}(f)}{n-1} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \mathrm{F}(f)\right).$$

En tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta\gamma}{n-1} - \gamma^2\right) + \alpha\gamma \mathrm{H}(f) + \gamma\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \mathrm{F}(f)\right] + \frac{\beta \mathrm{F}(f)}{n-1} = 0$$

et posant

$$w = v - \frac{\beta\gamma}{n-1} + \gamma^2,$$

il vient

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \omega \mathrm{H}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial q} + \gamma\right)\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \mathrm{F}(f)\right].$$

La condition en α donne, si l'on pose $\alpha = \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}\frac{\partial a}{\partial p}$, a ne contenant que x, y, z, p,

$$f = \frac{ab + b_1 - \frac{\partial a}{\partial y} - q\frac{\partial a}{\partial z}}{\frac{\partial a}{\partial p}},$$

où b et b_1 ne contiennent que x, y, z, q. L'équation s'écrit donc

$$\frac{da}{dy} = ab + b_1$$

et l'on a les identités

$$\frac{\partial a'}{\partial y} + a'\frac{\partial f}{\partial p} = a'b, \qquad a'\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(ab + b_1) - \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{H}(a),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(f) &= \frac{1}{a'}\mathrm{F}(ab + b_1) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a'}\frac{\partial a}{\partial z}\right) - \frac{b}{a'}\frac{\partial a}{\partial z}\\ &= \frac{1}{a'}\left[a\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b_1) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a'}\frac{\partial a}{\partial z}\right)\right],\end{aligned}$$

où a' représente $\frac{\partial a}{\partial p}$.

On a d'ailleurs, en posant $\alpha_1 = \frac{\beta - \gamma}{n-1} + \gamma$,

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \alpha \mathrm{H}(f) + \frac{\partial}{\partial p}\mathrm{H}(f) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \alpha_1 a'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p}a'\mathrm{H}(f) = \alpha_1 a'\left(b - \frac{\partial f}{\partial p}\right)$$

et, en posant $\alpha_1 \alpha' = \frac{\partial \alpha_2}{\partial p}$ et intégrant,

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + a'\mathrm{H}(f) = \alpha_2 b + b_2(x, y, z, q),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial y}[\alpha_2 - \mathrm{H}(f)] + \mathrm{H}(ab + b_1) = \alpha_2 b + b_2$$

et, en posant $\alpha_2 - \mathrm{H}(a) = \rho$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + a\mathrm{H}(b) + \mathrm{H}(b_1) = \rho b + b_2.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial p} + a'\mathrm{H}(b) + a\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b_1) = b\frac{\partial \rho}{\partial p},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{a'}\frac{\partial \rho}{\partial p} + \mathrm{H}(b) + \frac{a\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b_1)}{a'} = 0.$$

L'équation en γ donne d'ailleurs

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma - \frac{1}{a'}\frac{\partial a}{\partial z}\right) + \frac{1}{a'}[a\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b_1)] = 0.$$

D'où en posant

$$\gamma - \frac{1}{a'}\frac{\partial a}{\partial z} = g(x, y, z, p), \qquad \frac{1}{a'}\frac{\partial \rho}{\partial p} - g = h(x, y, z, p),$$

$$\frac{\delta g}{\delta y} + \frac{1}{a'}[a\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b_1)] = 0,$$

$$\frac{\delta h}{\delta y} + \mathrm{H}(b) = 0.$$

Les conditions en ω et ϖ s'écrivent alors

$$\frac{\delta\omega}{\delta y} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{ab' + b'_1}{a'} + g(x, y, z, p)\right),$$

$$\frac{\delta\varpi}{\delta y} + \omega\mathrm{H}(f) = \left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \mathrm{F}(f)\right]\left(\frac{ab' + b'_1}{a'} + g(x, y, z, p)\right),$$

en posant

$$b' = \frac{\partial b}{\partial q}, \qquad b'_1 = \frac{\partial b_1}{\partial q}.$$

On a ainsi en g, h, ω, ϖ quatre conditions simples qui lient les trois fonctions a, b et b_1. Les conditions en g et h supposent l'existence de 2 involutions d'ordre supérieur à 3. Les conditions en ω et ϖ exigent que l'involution d'ordre minimum soit d'ordre supérieur à 5. Quand il n'en est pas ainsi, on retombe sur des calculs tout à fait analogues et l'ensemble des formules obtenues permet une discussion complète du problème qui nous occupe : j'en exposerai les résultats dans un prochain travail.

4. Supposons maintenant que la condition (A) soit satisfaite.

Je rappellerai d'abord le lemme suivant, qui est vrai, que λ soit du second ordre ou d'ordre inférieur :

S'il n'existe aucune involution d'ordre inférieur à m et supérieur à 2, toute fonction d'ordre m telle que

$$\frac{\delta u}{\delta y} + \mathrm{K}\,u\,\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

K *étant une constante, est égale à* $\mathrm{X}(x)\lambda^{\mathrm{K}}$,

Supposons alors qu'il existe une involution d'ordre $n > 3$, sans qu'il en existe d'ordre compris entre n et 2. On a, par hypothèse, ω désignant une fonction d'ordre au plus égal à $n-1$,

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}+\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)=\omega\frac{\partial f}{\partial p}. \tag{1}$$

En posant $\omega'=\dfrac{\partial\omega}{\partial p_{n-1}}$, on en tire :

$$\frac{\partial\omega'}{\partial y}+M_{n-1}^{n-1}=0. \tag{2}$$

En supposant ω' d'ordre m ($2<m\leqq n-1$), le lemme montre, après une dérivation par rapport à p_m, que

$$\omega'=\lambda X_0 p_m+\psi(x, \ldots, p_{m-1}), \qquad X_0\neq 0,$$

d'où

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+\lambda X_0\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right)+M_{n-1}^{n-1}=0, \tag{3}$$

ψ étant au plus d'ordre $m-1$. Si $m-1$ vaut 2, il existe une fonction $g(x, y, z, p, r)$ vérifiant la condition

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\lambda X\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+M_{n-1}^{n-1}=0. \tag{4}$$

Si $m-1$ est supérieur à 2, en désignant par des accents les dérivées par rapport à p_{m-1}, on a successivement

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y}+\psi'\frac{\partial f}{\partial p}+\lambda X_0 M_{m-1}^{m-1}=0 \qquad \frac{\partial\psi''}{\partial y}+2\psi''\frac{\partial f}{\partial p}=0;$$

d'où

$$\psi'=X_0X_1\lambda^2 p_{m-1}+\lambda X_0\psi_1(x, y, z \ldots p_{m-2}).$$

Donc

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\lambda X_1\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right)+M_{m-1}^{m-1}=0 \qquad (m-1>2).$$

C'est une relation de la forme (3) et un raisonnement d'induction complète montre qu'il existe certainement une fonction $g(x, y, z, p, r)$ vérifiant la condition

$$\frac{\partial g}{\partial y}+\lambda X\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)+M_l^l=0 \qquad (l\geqq 3). \tag{I'}$$

5. Supposons maintenant que λ soit du premier ordre. Il ne saurait y avoir d'involution d'ordre 2 sans qu'il existât un invariant du deuxième ordre, cas complètement étudié par MM. Goursat, Lainé et moi-même.

S'il existe un invariant d'ordre $n > 2$, on a, à la fois, la relation (Γ) et la relation

$$\frac{\partial\lambda(x, y, z, p)}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

d'où l'on tire les identités

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\log\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}.$$

La relation (Γ) s'écrit alors, en posant $\gamma = g - r\frac{d\log\lambda}{dx}$,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \lambda X\left\{r^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + r\left[2H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + F(f)\right] + H_2(f)\right\} + F(f) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) + \frac{\partial\gamma}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda X\left[2\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + F(f)\right] = 0.$$

L'identité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\gamma}{\partial r} + 2X\frac{d\log\lambda}{dx}\right) + \lambda X\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = 0$$

montre alors que l'équation

$$\lambda X p_3 + \gamma - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial p}{\partial r} + 2X\frac{d\log\lambda}{dx} = \text{const.}$$

est toujours en involution avec la proposée, si X n'est pas nul. En laissant provisoirement de côté le cas où l'invariant donné est du troisième ordre, nous devrons prendre X nul. La fonction γ doit alors être de la forme

$$\gamma = r\lambda\xi(x) + \theta(x, y, z, p)$$

et la fonction θ vérifie la condition

$$(5) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} + \lambda\xi(x)H(f) + F(f) = 0$$

que j'ai obtenue, par une voie moins rapide, dans le fascicule XII du *Mémorial.*

M. Lainé [1] a fait fort justement remarquer qu'il fallait aussi considérer le cas où λ contient r. Dans ce cas, il existe nécessairement une involution du deuxième ordre.

En désignant par φ une fonction du premier ordre au plus, nous prendrons toujours $\lambda = \frac{1}{r + \varphi}$ et nous écrirons la condition en λ sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathrm{H}(f) = \varphi \frac{\partial f}{\partial p}. \tag{6}$$

La condition (Γ) donne, en y remplaçant g par $\lambda\gamma(x, y, z, p, r)$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{X}p_3 + \gamma) = \frac{\partial f}{\partial p}(\mathrm{X}p_3 + \gamma) - (r + \varphi)\left[l \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{F}(f)\right].$$

et, comme d'après (6),

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + (r + \varphi)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p},$$

il existe une fonction $u(x, y, z, p, r)$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \xi(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{F}(f) = 0. \tag{7}$$

En dérivant deux fois par rapport à r, on trouve facilement que

$$u = \xi_1(x)\,\mathcal{L}(r + \varphi) + \xi(r + \varphi)\,\alpha(x, y, z, p) + \beta(x, y, z, p)$$

et l'on obtient les conditions

$$\xi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \xi_1\frac{\partial f}{\partial p} + \xi\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \varphi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right] + \mathrm{F}(f) = 0.$$

Si ξ est nul, on a la seule condition

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} + \xi_1(x)\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{F}(f) = 0.$$

---

[1] LAINÉ, Note aux *C. R. de l'Acad. des Sc.* (23 janvier 1928) et *Thèse de doctorat*.

Si ξ n'est pas nul, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\alpha \frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0.$$

Les identités

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial p}=\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}-\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)-\mathrm{F}(f), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\lambda\left(p_3+\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}$$

conduisent alors à la condition

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\left(p_3+\frac{d\varphi}{dx}\right)(\xi-1)+u-\frac{\partial \varphi}{\partial p}-\alpha(r+\varphi)\right]=0;$$

il y a un invariant du troisième ordre, si ξ n'est pas égal à 1. En réservant encore le cas où il en est ainsi, la seule condition qui reste est la condition en α et il est clair qu'on doit avoir

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\alpha(r+\varphi)+\eta(x).$$

Ainsi, des quatre conditions H de M. Lainé, les deux premières seules sont utiles. La troisième, ou bien exprime qu'il y a un invariant du troisième ordre, ou bien donne une identité. Quant à la quatrième, l'analyse précédente suffirait à prouver qu'elle est une conséquence identique des deux premières : un calcul direct montre qu'il en est bien ainsi.

En résumé, quand λ est du deuxième ordre et qu'il n'y a pas d'involution d'ordre 3, on a un des deux groupes de conditions

$$(\mathrm{G}) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mathrm{H}(f)=\varphi\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y}+\xi_1\frac{\partial f}{\partial p}+\mathrm{F}(f)=0,$$

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mathrm{H}(f)=\varphi\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y}+\alpha\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0.$$

6. Nous allons maintenant reprendre la discussion du n° **2**, où λ représente indifféremment une fonction du premier ou du deuxième ordre.

Si l'on pose

$$\sigma_1=\xi\lambda r+\theta+l\frac{d\xi\lambda}{dx}$$

ou

$$\sigma_l = u + (l - \xi)\frac{d\xi\lambda}{dx}$$

suivant que λ est du premier ou du second ordre, on a toujours

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial y} + M_l^l = 0,$$

σ_l étant d'un ordre supérieur d'une unité à celui de λ.

La relation (2) montre alors que

$$\omega = p_{n-1}(\sigma_{n-1} + X_{n-1}) + \omega_1(x, \ldots, p_{n-2})$$

et (1) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + (\sigma_{n-1} + X_{n-1})\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}} - p_{n-1}M_{n-1}^{n-1} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) \\ = \frac{\partial f}{\partial p}[\omega_1 + p_{n-1}(\sigma_{n-1} + X_{n-1})].\end{aligned}$$

Si l'on convient de désigner par $\left(\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)\right)$ ce qui reste de $\frac{d^k f}{dx^k}$ quand on en a supprimé les termes en p_{k+1} et p_k, on a

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + (\sigma_{n-1} + X_{n-1})\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) + \left(\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)\right) = \omega_1\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Supposons $n > 5$. En dérivant par rapport à p_{n-2}, il vient

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \omega_1}{\partial p_{n-1}} + (\sigma_{n-1} + X_{n-1})M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0.$$

Supposons que $\frac{\partial \omega_1}{\partial p_{n-2}}$ soit une fonction φ_1 d'ordre effectif m. Si $m \leqq 3$, il y a une fonction d'ordre $\leqq 3$ vérifiant (8). Sinon

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_m} = 0,$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial \omega_1}{\partial p_{n-2}} = X_1\lambda[p_m + \omega_2(x_1, \ldots, p_{m-1})] \qquad (X_1 \neq 0),$$

d'où

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + \frac{(\sigma_{n-1} + X_{n-1})M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2}}{X_1\lambda} = \omega_2\frac{\partial f}{\partial p},$$

et par suite, la relation

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \omega_2}{\partial p_{m-1}} + M_{m-1}^{m-1} = 0$$

analogue à (2). Si $m>5$, on en tirera la relation

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega_3}{\partial p_{m-2}}+(\sigma_{m-1}+\lambda_{m-1})\,\mathrm{M}_{m-2}^{m-2}+\mathrm{M}_{m-1}^{m-2}=0$$

qui est analogue à 5. On voit donc, en remarquant que θ et u — et par suite σ_l — ne sont définis qu'à une fonction de x près, qu'il existe certainement une fonction $\gamma(x, y, z, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$, d'ordre au plus égal à 5, telle que

$$\text{(G)}\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial y}+\sigma_{l-1}\,\mathrm{M}_{l-2}^{l-2}+\mathrm{M}_{l-1}^{l-2}=0 \qquad (l \geqq 3),$$

toutes les fois que l'équation étudiée admettra une involution d'ordre $n>5$.

En désignant par γ_1 l'expression

$$\gamma_1=\gamma-\sigma_{l-2}-\frac{(l-1)}{2}\left(\frac{d\mathcal{L}\lambda}{dx}\right)^2-\frac{(l-1)(l-2)\,d^2\mathcal{L}\lambda}{dx^2},$$

(G) s'écrit

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}+\frac{d\mathcal{L}\lambda}{dx}\mathrm{F}(f)+(l-1)\frac{d\mathrm{F}(f)}{dx}+\frac{\partial f}{\partial q}\left[\mathrm{F}(f)-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right]=0.$$

En posant, si λ est du premier ordre,

$$\mu=\gamma_1-(l-1)\frac{d}{dx}(\xi\lambda r+\theta),$$

et, si λ est du second ordre,

$$\mu=\gamma_1-(l-1)\frac{d}{dx}\left[u+\xi\lambda\left(p_3+\frac{d\varphi}{dx}\right)\right],$$

on arrive à la condition

$$\text{(G}_1\text{)}\qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}+\mathrm{F}(f)\frac{d\mathcal{L}\lambda}{dx}=\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\mathrm{F}(f)\right),$$

où μ est une fonction de $x, y, z, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$.

7. Si μ est d'ordre 5, on a certainement

$$\mu=\mathrm{X}_1\lambda(p_5+\mu_1)$$

et

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial y}+\left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right)-\mu_1\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\lambda\mathrm{X}_1}\left\{\frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\mathrm{F}(f)\right]-\mathrm{F}(f)\frac{d\mathcal{L}\lambda}{dx}\right\}.$$

On en tire

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial p_4}+M_4^3=0, \qquad \mu_1=p_4(\sigma_4+X_4)+\mu_2(x, y, z, \ldots, p_3),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}+(\sigma_4+X_4)\left(\frac{d^3f}{dx^3}\right)+\left(\left(\frac{d^4f}{dx^4}\right)\right)-\mu_2\frac{\partial f}{\partial p}\\ =\frac{1}{\lambda X_1}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-F(f)-F(f)\frac{d\xi\lambda}{dx}\right)\right].\end{aligned}$$

Si λ est d'ordre $\leqq 1$, σ_4 est d'ordre $\leqq 2$ et

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial p_3}+(\sigma_4+X_4)M_3^3+6p_3\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+R=0,$$

comme le montre l'expression de $\frac{d^4 f}{dx^4}$ calculée au n° **1**. C'est la relation (G) où $l=5$ et où γ est d'ordre $\leqq 3$. Comme on passe de γ à μ par addition d'expressions qui sont d'ordre $\leqq 3$, on est ramené à la relation (G_1) où μ est d'ordre $\leqq 3$.

Si λ est d'ordre 2, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial p_3}+(\sigma_4+X_4)M_3^3+6p_3\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}+R+\lambda(\xi-4)\left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)=F(f),$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial\mu_2}{\partial p_3}+\lambda p_4(\xi-4)+X_1\left[u+\xi\lambda\left(p_3+\frac{d\varphi}{dx}\right)\right]\right\}\\ +(\sigma_4+X_4)M_3^3+6p_3\frac{\partial^2 f}{\partial p^3}+R=0.\end{aligned}$$

C'est la relation (G) où $l=5$ et où γ est linéaire en p_4, et l'on est ramené à la relation (G_1) où μ est linéaire en p_4.

Supposons maintenant que μ soit d'ordre 4. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial p_4}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p_4}=0, \qquad \mu=X_1\lambda p_4+\mu_1,$$

μ_1 étant d'ordre $\leqq 3$. On peut donc remplacer dans tous les cas la fonction μ par une fonction de la forme

$$X_1\lambda p_4+\mu_1(x, y, z, p_1, p_2, p_3),$$

X_1 étant une fonction de x qui peut être nulle.

Pour continuer la discussion, nous allons désormais séparer le cas où λ est d'ordre $\leqq 1$, de celui où cette fonction est effectivement d'ordre 2.

8. Supposons d'abord λ d'ordre $\leqq 1$. J'ai montré dans ma Thèse que, si l'on pose

$$\lambda = \frac{\partial a(x, y, z, p)}{\partial p},$$

l'équation donnée s'écrit

$$\frac{da}{dy} = b(x, y, z, q) \qquad \left(f = \frac{b - q\dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial a}{\partial y}}{\dfrac{\partial a}{\partial p}} \right).$$

On en déduit facilement les identités

$$\lambda \mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(b) - \frac{\partial \mathrm{H}(a)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}[\lambda r + \mathrm{H}(a)] = \mathrm{H}(b),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda p_3 + \ldots) = \frac{d\mathrm{H}(b)}{dx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda p_4 + \ldots) = \frac{d^2 \mathrm{H}(b)}{dx^2}, \qquad \mathrm{F}(f) = \frac{\mathrm{F}(b)}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial a}{\partial z}}{\lambda}\right).$$

La condition (5) se transforme alors en la condition

$$\frac{\partial \tau(x, y, z, p)}{\partial y} + \xi \mathrm{H}(b) + \frac{\mathrm{F}(b)}{\lambda} = 0, \tag{9}$$

et la condition en μ en

$$\frac{\partial \omega(x, y, z, p_1, p_2, p_3)}{\partial y} = \mathrm{X} \frac{d^2}{dx^2}\mathrm{H}(b) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f)\left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d\mathfrak{L}\lambda}{dx}\right). \tag{10}$$

Nous allons d'abord démontrer que X est nul, s'il n'y a pas d'involution d'ordre 4. En effet, en posant

$$\omega_1 = \omega - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial a}{\partial z}\frac{d\mathfrak{L}\lambda}{dx} - \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2$$
$$+ [\lambda r + \mathrm{H}(a)]\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \tau}{\partial p} - \xi\tau\right) - \frac{\xi^2}{2}[\lambda r + \mathrm{H}(a)]^2.$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{F}(b)\left[\mathrm{H}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial q}\right] + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial b}{\partial q}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial a}{\partial z}\right]$$
$$+ \mathrm{H}(b)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \tau}{\partial p} - \xi\tau\right) - \frac{\mathrm{H}(a)}{\lambda}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\mathrm{F}(b)}{\lambda},$$

la relation (10) prend la forme

$$(11)\qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = X\frac{d^2 H(b)}{dx^2} + N.$$

D'où l'on conclut sans peine, si X n'est pas nul, que

$$\omega_1 = X\{X_0 - \tau - \xi[\lambda r + H(a)]\}\left[\lambda p_3 + r\frac{d\lambda}{dx} + \frac{dH(a)}{dx}\right] + u(x, y, z, p, r).$$

En remplaçant dans (11), ω_1 par sa valeur, et tenant compte de l'identité

$$H\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}H(\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial p}H(f),$$

on voit alors qu'il existe une fonction

$$v(x, y, z, p, r) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial r} - X_0\left\{\tau + \xi[\lambda r + H(a)]\right\}$$
$$- \tau^2 - 2\tau\xi[\lambda r + H(a)] - H(\tau) + \frac{H(a)}{\lambda}\frac{\partial\tau}{\partial p},$$

telle que

$$\frac{\partial v}{\partial y} + 2\xi\left[H_2(b) - H(a)\frac{F(b)}{\lambda} + \tau H(b)\right] + \frac{N}{X} = 0,$$

et, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda p_3 + r\frac{d\lambda}{dx} + \frac{dH(a)}{dx} + \tau[\lambda r + H(a)] + \frac{\xi}{2}[\lambda r + H(a)]^2\right\}$$
$$= \tau H(b) + H_2(b) - H(a)\frac{F(b)}{\lambda},$$

on peut conclure qu'il existe une fonction ω_2, linéaire en p_3, telle que l'on ait

$$(12)\qquad \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + N = 0,$$

(11) et (12) montrent, dans ce cas, qu'il y a une involution du quatrième ordre

$$\frac{d^2}{dx^2}[\lambda r + H(a)] = \frac{\omega_1 + \omega_2 + X_1(x)}{X(x)},$$

et nous pouvons, sous nos hypothèses, supposer X nul.

La condition (11) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial u(x, y, z, p, r)}{\partial y} + X_0 \frac{d}{dx} H(b) = N$$

et donne

$$u = X_0 \left\{ \frac{\xi}{2} [\lambda r + H(a)]^2 + (\tau + X_1)[\lambda r + H(a)] \right\} + v(x, y, z, p).$$

Il reste la seule condition nouvelle

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v(x, y, z, p)}{\partial y} + X_0 \left[(\tau + X_1) H(b) - \frac{H(a) F(b)}{\lambda} + H_2(b) \right] \\ &\quad = F(b) \left[H\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial b}{\partial q} \left[H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial a}{\partial z} \right] \\ &\quad\quad + H(b)\left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tau}{\partial p} - \xi\tau\right) - \frac{H(a)}{\lambda} \frac{\partial}{\partial p} \frac{F(b)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Les équations que l'on cherche sont donc de la forme

$$\frac{da(x, y, z, p)}{dy} = b(x, y, z, q),$$

a et b vérifiant la condition précédente et la condition

$$\frac{\partial \tau(x, y, z, p)}{\partial y} + \xi H(b) + \frac{F(b)}{\dfrac{\partial a}{\partial p}} = 0.$$

Cette dernière condition limite beaucoup la forme de a et de b. La nouvelle condition permet de pousser la discussion jusqu'au bout. J'en développerai la marche dans un prochain travail.

9. Examinons maintenant l'hypothèse $\lambda = \dfrac{1}{r+\varphi}$.

Nous avons vu qu'il existe une fonction u telle que

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \xi \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} + F(f) = 0,$$

et l'on a (n° **5**) soit

$$\xi = 0, \qquad u = \xi_1(x) \mathcal{L}(r+\varphi) + \beta(x, y, z, p),$$

soit

$$\xi = 1, \qquad u = x\xi_1(r+\varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial p} + \eta(x).$$

En vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda p_4 + p_3 \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{d\varphi}{dx}\right)\right] = \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p},$$

la condition (G) peut s'écrire, μ_1 étant une fonction d'ordre au plus égal à 3,

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f)\right] + \mathrm{F}(f)\frac{d}{dx}\xi(r+\varphi) + \mathrm{X}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p},$$

et comme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\lambda\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right) - \frac{\xi}{2}\lambda^2\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right] = u\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f)\lambda\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right),$$

on voit qu'il existe une fonction $\omega(x, y, z, p_1, p_2, p_3)$ telle que

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mathrm{X}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p} + u\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f)\right].$$

1° $\xi = 0$. En posant

$$\omega_1 = \omega + \mathrm{X}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} - u\right).$$

on a

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \mathrm{X}\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \mathrm{X}(r+\varphi)\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$
$$+ u\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathrm{F}(f)\right].$$

On en tire

$$\omega_1 = \mathrm{X}\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \lambda\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} - u\right)\right]$$
$$- \mathrm{X}_1\lambda\left(p_3 + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \Lambda(x, y, z, p, r).$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial y} = \mathrm{X}(r+\varphi)\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\left[u(\mathrm{X}+1) - \mathrm{X}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \mathrm{X}_1 + \frac{\partial f}{\partial q}\right] - \frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{F}(f).$$

Si l'on pose

$$\frac{\partial^3\Lambda}{\partial r^3} = \frac{\Lambda_1}{(r+\varphi)^2},$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Lambda_1}{\partial r} + \frac{\partial\Lambda_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial p} + \xi_1(\mathrm{X}+1)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Cette condition exigerait qu'il existât une involution du troisième ordre.

On a donc

$$\xi_1(X + 1) = 0,$$

et l'on en conclut aisément que

$$\Lambda = \xi_2(x)\mathcal{E}(r + \varphi) + \gamma(r + \varphi)^2 + \gamma_1(r + \varphi) + \gamma_2,$$

les fonctions γ_1, γ_2, γ_3 ne contenant que x, y, z, p.

On est ainsi conduit aux conditions

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma \frac{\partial f}{\partial p} = X \frac{\partial^3 f}{\partial p^3}.$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial r} + \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial p} = X \left[H\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) - \varphi \frac{\partial^3 f}{\partial p^3} \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left[(X + 1)\beta - X \frac{\partial \varphi}{\partial p} + X_1 + \frac{\partial f}{\partial q} \right];$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial r} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial p} = \left[H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] \left[(X + 1)\beta - X \frac{\partial \varphi}{\partial p} + X_1 + \frac{\partial f}{\partial q} \right] - F(f) \frac{\partial f}{\partial q}.$$

On voit sans peine que la troisième condition est une conséquence des autres. Si X est nul, la première disparaît et l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi \frac{\partial f}{\partial p} - H(f), \qquad \frac{\partial \beta}{\partial r} + F(f) = 0, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \Gamma \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\beta + \frac{\partial f}{\partial q}\right).$$

Si X n'est pas nul, on a

$$\xi_1(1 + X) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi \frac{\partial f}{\partial p} - H(f), \qquad \frac{\partial \beta}{\partial r} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial p} + F(f) = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial^3 f}{\partial p^3}, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \Gamma \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left[(X + 1)\left(\beta + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \eta(x) \right].$$

On voit immédiatement que, si $\frac{\partial^2 f}{\partial p_2}$ est nul, l'analyse que nous venons de faire ne donne aucune condition nouvelle. Dans tous les autres cas, au contraire, elle en fournit au moins une.

2° $\xi = 1$. En changeant X en $-$X et posant

$$\omega_1 = \omega + X \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} u^2,$$

on a

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} = X \frac{d}{dx} F(f) - u F(f) + \frac{\partial f}{\partial q}\left[\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p} - F(f) \right];$$

d'où l'on tire successivement

$$\omega = -\lambda X_1\left(p_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \Lambda(x, y, z, p, r),$$
$$\Lambda = X_2 \mathcal{L}(r + \varphi) + \gamma(r + \varphi) + \gamma_1,$$

γ et γ_1 étant des fonctions de x, y, z, p telles que

$$\frac{\eth \gamma}{\eth y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial p} = X \frac{\partial F(f)}{\partial p} - \alpha F(f) + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial f}{\partial q} + X_1\right),$$
$$\frac{\eth \gamma_1}{\eth y} + \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial p} = X\left[H[F(f)] - \varphi \frac{\partial F(f)}{\partial p}\right] - F(f)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial q} + X_1\right)\left[H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right].$$

En posant

$$\Gamma = 2(\gamma - \alpha X_1) + X\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p}(\alpha \varphi) - H(\alpha)\right],$$
$$\Gamma_1 = \gamma_1 + X \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

il vient

$$\frac{\eth \Gamma}{\eth y} + \Gamma \frac{\partial f}{\partial p} = (2 + X)\left[\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - \alpha F(f)\right],$$
$$\frac{\eth \Gamma_1}{\partial y} + \Gamma_1 \frac{\partial f}{\partial p} = -F(f)\left[X_1(x) + (1 + X)\left(\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right]$$
$$+ (1 + X)\frac{\partial f}{\partial q}\left[H\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right].$$

Ces conditions sont à joindre aux deux précédemment établies

$$\frac{\eth \varphi}{\eth y} = \varphi \frac{\partial f}{\partial p} + H(f), \qquad \frac{\eth \alpha}{\eth y} + \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Les conditions en Γ et Γ_1 ne disparaissent jamais en même temps si $\frac{\partial^2 f}{\partial p_2}$ n'est pas nul. Mais s'il en est ainsi, α est nul ; donc Γ l'est aussi et l'on peut satisfaire à la condition en Γ_1 en prenant

$$\Gamma_1 = X_1 = 1 + X = 0;$$

on n'a alors aucune condition nouvelle.

Ainsi, nous avons, dans tous les cas, ajouté au moins une condition nouvelle simple, nécessaire à l'existence d'un invariant, sauf quand l'équation donnée est linéaire en p. Nous allons étudier ce dernier cas.

10. Posons
$$f=p\omega(x, y, z, q)+\theta(x, y, z, q).$$

La condition en φ donne
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi\omega-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)-p\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial q}(\omega\theta)\right]-p^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}+\omega\frac{\partial\omega}{\partial q}\right).$$

Il suffit de dériver trois fois par rapport à p pour se convaincre que
$$\varphi=p^2\lambda(x, y, z)+p\mathrm{H}(x, y, z)+\mathrm{H}_1(x, y, z).$$

L'identification des termes en p^2 donne
$$\frac{\partial\omega}{\partial z}+\omega\frac{\partial\omega}{\partial q}+\omega\lambda+\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0.$$

J'ai déjà montré (¹) qu'un changement de variable $Z=u(x, y, z)$ permet de prendre $\lambda=0$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une involution du deuxième ordre peuvent donc s'écrire

$$q=\omega z+\psi(x, y, \omega), \tag{1}$$

et, en représentant par $\tau(x, y, z, \omega)$ ce que devient θ quand on y remplace q par cette valeur

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}+\frac{\tau-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{z+\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega}}+(\omega z+\psi)\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\omega}\,\frac{\tau-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{z+\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega}}+\frac{\partial\tau}{\partial x}+\mathrm{H}\tau-\mathrm{H}_1\omega+(\omega z+\psi)\frac{\partial\mathrm{H}_1}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{H}_1}{\partial y}=0. \tag{3}$$

La discussion de ces conditions n'est pas impossible, elle donnerait les formes que doivent prendre ω et θ, pour que l'équation admette une involution du deuxième ordre. Nous ajouterons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, l'hypothèse qu'il existe en outre une involution d'ordre supérieur à 2.

La relation (1) invite à poser
$$Z=\omega(x, y, z, q).$$

(¹) R. GOSSE, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XII, p. 51.

En calculant s au moyen de cette équation et de (1), on a

$$(4)\qquad \mathrm{P}\left(z+\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{Z}}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y, \mathrm{Z})=\theta(x, y, z, z\mathrm{Z}+\psi)=\varphi(x, y, \mathrm{Z}).$$

On en peut toujours tirer

$$(5)\qquad z=\rho(x, y, \mathrm{Z}, \mathrm{P}),$$

et en éliminant z entre (1) et (5), on a l'équation transformée

$$(6)\qquad \frac{d\rho}{dy}=\rho\mathrm{Z}+\psi(x, y, \mathrm{Z}).$$

Nous l'écrirons

$$s=q\,\omega(x, y, z, p)+\theta(x, y, z, p)$$

et l'on aura les relations

$$(7)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial z}+\omega\frac{\partial\rho}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}+\theta\frac{\partial\rho}{\partial p}=\rho z+\psi(x, y, z).$$

A toute involution du système X et d'ordre n de l'équation primitive correspond, comme le montre la relation (5), une involution du même système et d'ordre $n+1$. L'équation (6) admet donc une involution d'ordre 3 et une autre d'ordre supérieur. En laissant de côté le cas où elle admettrait aussi une involution d'ordre inférieur à 3, hypothèse qui conduit à des résultats connus, on retrouve le cas traité au n° **5** et nous nous bornerons encore à discuter le seul cas où l'on a les conditions

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\alpha\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}=0, \qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial y}+\alpha\mathrm{H}(f)+\mathrm{H}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\mathrm{F}(f)=0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\mathrm{F}(f)=0;$$

α n'est ici pas autre chose que $\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{L}\frac{\partial\rho}{\partial p}$, et en intégrant la seconde condition, on a

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}=\beta z+\mathrm{G}(x, y, z, q)-\rho'\mathrm{H}(f), \qquad \left(\rho'=\frac{\partial\rho}{\partial p}\right).$$

L'identité

$$\rho'\mathrm{H}(f)=\mathrm{H}(\rho z+\psi)-\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{H}(\rho)$$

permet de l'écrire

$$\frac{\partial\mu_1(x, y, z, p)}{\partial y} = z\mu_1 + G(x, y, z, q) - \frac{\partial\psi}{\partial x} - p\frac{\partial\psi}{\partial z} - p\rho,$$

G est donc linéaire et l'on peut finalement mettre la condition sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x, y, z, p) = z\mu + g(x, y, z) - \frac{\partial\psi}{\partial x} - p\frac{\partial\psi}{\partial z} - p\rho.$$

En tenant compte des relations (7), on en déduit que μ est une fonction de $u(x, y, \rho)$ vérifiant la relation

$$(8)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho z + \psi) = uz + g - \frac{\partial\psi}{\partial x} - p\left(\rho + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

La relation en γ montre de même que $\gamma = v(x, y, \rho) - \omega$, v vérifiant la relation

$$(9)\qquad \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial\rho}(\rho z + \psi)\right]\frac{\partial\rho}{\partial p} + \rho + \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0.$$

En éliminant p entre (8) et (9) et posant $w = v - \frac{\partial u}{\partial\rho}$, on trouve

$$(10)\qquad \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho z + \psi)\right]\left[\rho + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right] = uz + g - \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho z + \psi).$$

Cette relation, ne contenant plus p, est une identité en ρ. En dérivant par rapport à ρ, on trouve une équation différentielle en ψ et $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ dont la seule solution convenable est

$$\psi = z\alpha(x, y) + \beta(x, y) + \sqrt{2z\mu(x, y) + \lambda(x, y)}.$$

En portant cette expression dans (10), un calcul élémentaire donne

$$\psi = \sqrt{\mu\left(2z + \frac{\partial \log h}{\partial y}\right)}, \qquad u = -\frac{h\rho^3}{2} - h_2\rho - h_3,$$
$$v = -h\rho^2 - h_1, \qquad \mu h = \frac{\partial h_1}{\partial y},$$

où les fonctions h ne contiennent que x et y. (8) et (9) donnent alors

$$p = \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{3}{2}\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{h}{2\mu}(\rho\psi + \mu)^2,$$

et l'on a tous les éléments nécessaires pour discuter le système (1), (2), (3) où

$$\psi=\sqrt{\mu\left(2\omega+\frac{\partial\mathcal{L}h}{\partial y}\right)},$$

$$\tau-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\left(z+\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}(h_2-h_1)+\frac{h}{2\mu}(z^2\psi^2+2\mu z\psi)\right].$$

La condition (2) montre que h ne dépend pas de y. On peut prendre

$$h=1,\qquad H=-(2z^2+2h_2-h_1).$$

La condition (3) donne alors $h_1=h_2$ et h_1 doit être solution de l'équation

$$(11)\qquad h_1\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\frac{\partial h_1}{\partial y}-\frac{\partial^2\mathcal{L}\frac{\partial h_1}{\partial y}}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{L}\frac{\partial h_1}{\partial y}}{\partial x}-h_1^2+3\frac{\partial h_1}{\partial x}=U(x).$$

Il paraît assez difficile de tirer h_1 de cette équation, mais on peut trouver des solutions dépendant de deux fonctions arbitraires. En dérivant par rapport à y, on a

$$\left(h_1-\frac{\partial\mathcal{L}\mu}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\mathcal{L}\mu}{\partial x\,\partial y}-2\mu\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\mathcal{L}\mu}{\partial x\,\partial y}-2\mu\right),$$

qui met en évidence les solutions de

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}\mu}{\partial x\,\partial y}=2\mu.$$

On trouve

$$h_1=\frac{-X'}{X+Y},\qquad \mu=\frac{X'Y'}{(X+Y)^2}.$$

Ainsi toutes les équations où

$$\psi=\sqrt{2\mu\omega},\qquad \tau=\frac{\partial\psi}{\partial x}+z\left(z+\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)(\omega z+2\psi),$$

μ ayant une valeur déduite de (11), admettent une involution du deuxième ordre. Nous allons montrer qu'elles en admettent une autre du troisième.

Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi qu'il existe une fonction $\sigma(x,y,z,p,r)$ telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}(p_3+\sigma)=\omega(p_3+\sigma).$$

Or, nous venons de démontrer qu'il existe une fonction φ telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}(r+\varphi)=\omega(r+\varphi).$$

On en tire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_z+\frac{d\varphi}{dx}\right)=\omega\left(p_z+\frac{d\varphi}{dx}\right)+(r+\varphi)\frac{d\omega}{dx}.$$

Il suffit donc qu'il existe une fonction ψ telle que

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\omega\psi-(r+\varphi)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}+\theta\frac{\partial\omega}{\partial q}\right).$$

En dérivant deux fois par rapport à r, on voit que $\psi=ur+v$ et qu'on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, y, z, p)+\frac{d\omega}{dx}=0, \qquad \frac{\partial v(x, y, z, p)}{\partial y}+u\mathrm{H}(f)=\omega v-\varphi\frac{d\omega}{dx}.$$

Mais l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi\omega-\mathrm{H}(f), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u\varphi+u\mathrm{H}(f)=u\varphi\omega-\varphi\frac{d\omega}{dx}.$$

Donc $v=u\varphi$ et la seule condition est la condition en u. On la discute immédiatement, en prenant comme variables x, y, z et ψ et l'on trouve, sous nos hypothèses, qu'elle admet la solution $-\frac{z^2}{2}+\mathrm{X}(x)$. Les équations étudiées admettent donc toutes l'invariant

$$\frac{p_z+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{z^2}{2}(r+\varphi)}{r+\varphi}.$$

Dans le cas étudié, nous avons ainsi complètement élucidé la difficulté qui provenait de l'évanescence de toutes nos conditions lorsque l'équation est linéaire en p.