JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES GIRAUD

Sur les équations de type elliptique et la méthode des approximations successives

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 269-300.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__269_0>

Sur les équations de type elliptique et la méthode des approximations successives;

PAR M. GEORGES GIRAUD,
Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

C'est en 1890 que M. Picard appliqua pour la première fois la méthode des approximations successives à des équations aux dérivées partielles [1]. Ce Mémoire original fut suivi de plusieurs autres, généralisant, notamment, pour des types de plus en plus étendus d'équations, le célèbre problème de Dirichlet.

Un des précieux avantages de la méthode des approximations successives est qu'elle permet souvent de se passer de toute hypothèse d'holomorphie : c'est ce qui arrive dans la théorie des fonctions implicites, dans celle des équations différentielles et même dans celle des équations aux différentielles totales. Le travail qui va suivre a pour objet de montrer que cette méthode permet d'attaquer le problème de Dirichlet généralisé pour des équations de type elliptique tout à fait générales; les seules hypothèses faites sont relatives à la continuité de dérivées jusqu'à un certain ordre et à des conditions de Lipschitz (d'exposant quelconque), auxquelles doivent satisfaire certaines d'entre ces dérivées.

Le cadre de ce travail rend nécessaire de passer sous silence cer-

[1] *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890).

taines propositions [1], qui ont cependant de l'importance pour donner sa pleine valeur au résultat final. La méthode suivie ici n'est d'ailleurs pas celle qui a conduit à ces propositions : dans l'intérêt de la brièveté, on s'est ici rapproché autant que possible de la méthode d'un travail antérieur [2], de façon à pouvoir y renvoyer pour des démonstrations omises ici; mais l'étendue des résultats en est diminuée.

C'est seulement à la fin de ce travail (n° **18**), que sont abordées les équations non linéaires et que se trouve l'application de la méthode des approximations successives; mais tout le reste est consacré à préparer cette application. Il serait désirable de perfectionner cette théorie préparatoire; notamment si l'on pouvait trouver des conditions commodes où l'on serait assuré de la non-nullité des déterminants de Fredholm rencontrés dans cette théorie, cela aurait vraisemblablement une répercussion immédiate sur l'application finale.

1. *Définition.* — Nous aurons, dans la suite, à faire un fréquent usage des conditions de Lipschitz généralisées. On sait ce qu'on entend par là; soient X un point d'un espace à un nombre quelconque de dimensions et $\varphi(X)$ une fonction de ce point, k et h deux nombres positifs, dont le second est au plus égal à *un*; on dit que $\varphi(X)$ satisfait à une condition de Lipschitz généralisée, si X et Y étant deux points quelconques dont la distance est r, on a toujours

$$|\varphi(X)-\varphi(Y)| < kr^h \qquad (0 < h \leqq 1).$$

Nous exprimerons plus brièvement le même fait en disant que $\varphi(X)$ *est continu* (L): h se nommera l'exposant de cette continuité (L), et k le coefficient.

2. Soit D un domaine borné de l'espace à m dimensions

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m);$$

ici et dans la suite, nous regarderons ce domaine comme ouvert, et

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 187, 1928, p. 489 et 632.

(2) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 43, 1926, p. 1 à 128. Ce Mémoire sera, dans la suite, désigné par la lettre D; il s'y trouve une erreur signalée ci-après (n° **14**).

nous désignerons par S sa frontière, prise dans le sens associé au sens $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de son intérieur.

Soit $G(X, A)$ une fonction de deux points de D ou de S, X ayant comme coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et A, $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Cette fonction est supposée continue quand les deux points sont différents, et l'on fait la même hypothèse pour les dérivées $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$.

Posons, ici et dans la suite,

$$L(X, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2}.$$

Nous supposerons que

$$(2,1) \qquad G(X, A) = O[L^{1-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = O[L^{-m}(X, A)].$$

Soit encore $\varpi(A)$ une fonction continue dans $D + S$; posons

$$(2,2) \qquad F(X) = \int_D^{(m)} G(X, A)\, \varpi(A)\, d(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Je dis que $F(X)$ *est continu* (L) *dans* $D + S$.

La démonstration consiste à faire jouer à $G(X, A)$ le rôle que joue $\frac{\partial H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)}{\partial x_\alpha}$ dans le mémoire cité (¹). Si M est une limite supérieure de $|\varpi(A)|$ dans D, si N est le plus grand des facteurs constants impliqués dans les symboles O des conditions (2,1) et k un facteur constant, on trouve

$$(2,3) \qquad |F(X) - F(Y)| < kMNL(X, Y) \log \frac{L_0}{L(X, Y)},$$

L_0 désignant une longueur supérieure à la distance de deux points quelconques de D.

3. Ajoutons aux hypothèses précédentes que les $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ et les $\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ sont continus pour $X \neq A$, et que

$$(3,1) \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} = O[L^{h-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = o[L^{-1-m}(X, A)]$$
$$(0 < h \leqq 1;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m);$$

(¹) D., p. 38, théorème 3.

supposons, en outre, que $\varpi(A)$ soit continu (L) d'exposant h :

(3,2) $$|\varpi(X)-\varpi(A)| = O[L^h(X, A)];$$

alors F(X) *admet des dérivées continues* (L) *dans tout domaine fermé intérieur à* D.

La démonstration du premier point, que F(X) a des dérivées continues, consiste encore à faire jouer à G(X, A) le rôle des dérivées de $H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)$ dans le mémoire cité [1]. On trouve

(3,3) $$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = & \int_D^{(m)} \frac{\partial G(X, A)}{\partial x_\alpha}[\varpi(A)-\varpi(X)]\,d(a_1, \ldots, a_m) \\ & + \varpi(X)\int_D^{(m)}\left[\frac{\partial G(X, A)}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\alpha}\right]d(a_1, \ldots, a_m) \\ & -(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\varpi(X)\int_S^{(m-1)} G(X, A)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),\end{aligned}$$

la notation $(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$ désignant la permutation circulaire de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, qui amène a_α au premier rang, de laquelle on supprime a_α.

Passons à la démonstration du second point, que $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ est continu (L). Nous nous plaçons dans un domaine fermé dont tous les points sont à une distance de S au moins égale à $\delta > 0$. Nous considérons dans ce domaine deux points X et Y dont la distance est inférieure à *un* et à $\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1+h}$. Soit

$$l = \frac{1}{1+h}.$$

Considérons une hypersphère S′ de centre X et de rayon

$$2L^l(X, Y);$$

Y sera intérieur à cette hypersphère, elle-même intérieure à D. Soient D″ l'intérieur de S′, D′ la partie restante de D; nous prendrons S′ dans le sens associé au sens $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de D″.

(1) D., p. 41, théorème 4.

D'après (3,3), nous avons

$$(3,31)\quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \int_{D'}^{(m)} \frac{\partial G(X, A)}{\partial x_\alpha} w(A)\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+ \int_{D''}^{(m)} \frac{\partial G(X, A)}{\partial x_\alpha} [w(A) - w(X)]\, d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$+ w(X) \int_{D''}^{(m)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right] d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$-(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} w(X) \int_{S'}^{(m-1)} G(X, A)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

Si l'on veut avoir $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ au point Y, il suffit de remplacer X par Y au second membre.

Formons maintenant la différence. Dans D', nous écrirons, en désignant par Ξ un point du segment de droite qui joint les deux points,

$$\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(Y, A) = O[L(X, Y) L^{-1-m}(\Xi, A)],$$

comme le montre le théorème des accroissements finis. Mais

$$L(\Xi, A) \geqq L(X, A) - L(X, \Xi) > \frac{1}{2} L(X, A);$$

donc

$$\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(Y, A) = O[L(X, Y) L^{-1-m}(X, A)].$$

Nous devons multiplier par $w(A)$ et intégrer dans D'. On augmentera le résultat en remplaçant la fonction intégrée par sa valeur absolue, et en remplaçant D' par la région $2L'(X, Y) < L(X, A)$. Nous prendrons comme variables d'intégration $L(X, A)$ et $m-1$ paramètres qui seront ceux des points d'une hypersphère de centre X et de rayon $L(X, A)$. En intégrant d'abord par rapport à ces paramètres, on obtient le facteur constant $\frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$ à faire sortir du signe $\int$. En intégrant alors par rapport à $L(X, A)$, on voit que

$$\int_{D'}^{(m)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(Y, A)\right] w(A)\, d(a_1, \ldots, a_m) = O[L^{1-\varepsilon}(X, Y)].$$

Chacune des quatre fonctions intégrées dans D'' (deux avec X, deux avec Y) est $O[L^{h-m}(X, A)]$ ou $O[L^{h-m}(Y, A)]$; chacune de ces quatre intégrales est donc $O[L^{h}(X, Y)]$.

Restent les intégrales étendues à S'; on les écrira :

$$-(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}w(X)\int_{S'}^{(m-1)}[G(X, A)-G(Y, A)]\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$-(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}[w(X)-w(Y)]\int_{S'}^{(m-1)}G(Y, A)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

On appliquera le théorème des accroissements finis à la fonction intégrée dans la première ligne et l'on trouvera que cette première ligne vaut $O[L^{1-l}(X, Y)]$. La seconde ligne vaut évidemment $O[L^{h}(X, Y)]$.

Si l'on remarque que

$$1-l=lh=\frac{h}{1+h}<h,$$

on conclut de ce calcul que $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ est continu (L) d'exposant $\frac{h}{1+h}$, ce qu'il fallait démontrer (¹).

Si M est supérieur à $|w(A)|$ dans D et à la constante impliquée dans (3,2) et si N est supérieur aux constantes impliquées dans (2,1) et (3,1), on voit que le coefficient de continuité (L) est $\frac{kMN}{h}$, k ne dépendant que de D et de δ.

4. Ce résultat subsiste *a fortiori* si l'on suppose que $w(X)$ a des dérivées continues. Mais, dans ce cas, si l'on suppose en outre que

$$(4,1)\qquad \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)=O[L^{h-m-1}(X, A)],$$

le premier membre étant continu pour $X\neq A$, on peut augmenter l'exposant de la continuité (L).

En effet, on a alors (²),

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=\int_{D}^{(m)}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)w(A)+G(X, A)\frac{\partial w(A)}{\partial a_\alpha}\right]d(a_1, \ldots, a_m)$$
$$-(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\int_{S}^{(m-1)}G(X, A)\,w(A)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

(¹) Les hypothèses sur les dérivées secondes de G n'interviennent qu'à propos de la continuité (L).

(²) D., p. 34 et 35, formules (2,31) à (2,4).

Si l'on récrit la même chose pour le point Y et qu'on fasse la différence, on trouve (comme au n° **2**) que ce qui se rapporte à D est $O[L^h(X, Y)]$ si $h < 1$ et $O\left[L(X, Y)\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right]$ si $h = 1$. Ce qui se rapporte à S est dérivable sous le signe $\int$, puisque A n'est pas sur S. Donc l'exposant de continuité (L) peut être pris égal à h si $h < 1$, aussi peu inférieur à *un* que l'on veut si $h = 1$. Le coefficient est $k\frac{MN}{h}$, k ne dépendant que de D et de δ (N doit être supérieur encore à la constante impliquée dans (4,1) et M aux valeurs absolues des dérivées de w), pourvu que h soit inférieur à un nombre fixe inférieur à *un*.

5. Nous avons maintenant à donner des propositions concernant les fonctions telles que $G(X, A)$.

Supposons que $G(X, A)$ et $H(X, A)$ soient continus pour $X \neq A$, et que

$$(5,1) \qquad G(X, A) = O[L^{\lambda-m}(X, A)], \qquad H(X, A) = O[L^{\mu-m}(X, A)] \qquad (\lambda > 0,\ \mu > 0);$$

posons

$$(5,2) \qquad K(X, A) = \int_D^{(m)} G(X, C)\, H(C, A)\, d(c_1, c_2, \ldots, c_m).$$

Il est bien connu que $K(X, A)$, qui est continu pour $X \neq A$, peut s'écrire

$$(5,3) \qquad K(X, A) = O[L^{\lambda+\mu-m}(X, A)] \quad \text{si } \lambda + \mu < m,$$

$$(5,31) \qquad K(X, A) = O\left[\log\frac{L_0}{L(X, A)}\right] \quad \text{si } \lambda + \mu = m,$$

et que K est toujours continu si $\lambda + \mu > m$.

Nous ajouterons que si N_1 et N_2 sont les constantes impliquées dans les symboles O des formules (5,1) et si N est celle du symbole de la formule (5,3), on aura, $\lambda + \mu$ étant inférieur à un nombre fixe inférieur à m,

$$(5,4) \qquad N = kN_1N_2\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right),$$

où k ne dépend que de D.

6. Supposons maintenant que, λ et μ étant au moins égaux à *un* (¹), les dérivées $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ soient continues pour $X \neq A$ et que

$$(6,1) \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = O[L^{\lambda-m-1}(X, A)], \qquad \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = O[L^{\mu-m-1}(X, A)],$$

$$(6,2) \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} = O[L^{\lambda+h-m-1}(X, A)] \qquad (0 < h \leqq 1).$$

On peut affirmer alors que $\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}$ est continu pour $X \neq A$, et que, si X et A restent à une distance de S au moins égale à $\delta > 0$,

$$(6,3) \qquad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = O[L^{\lambda+\mu-m-1}(X, A)] \qquad \text{si } \lambda + \mu < m + 1,$$

$$(6,4) \qquad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = O\left[\log \frac{L_0}{L(X, A)}\right] \qquad \text{si } \lambda + \mu = m + 1.$$

et que cette dérivée est toujours continue si $\lambda + \mu > m + 1$.

Si $\lambda > 1$, ces résultats s'obtiennent en dérivant sous le signe $\int$. Si $\lambda = 1$, on y parvient en reproduisant pour le cas actuel des calculs déjà faits pour un cas particulier dans le mémoire cité (²). En partageant D en deux parties D′ et D″, cette dernière contenant X et ayant pour frontière S′, on trouve

$$\begin{aligned}(6,5) \quad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = & \int_{D'}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, C)\, H(C, A)\, d(c_1, \ldots, c_m) \\ & - (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \int_{S'}^{(m-1)} G(X, C)\, H(C, A)\, d(c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\alpha-1}) \\ & + \int_{D''}^{(m)} \left\{ \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, C) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, C) \right] H(C, A) \right. \\ & \qquad \left. + G(X, C) \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}(C, A) \right\} d(c_1, \ldots, c_m),\end{aligned}$$

où S′ est pris dans le sens associé au sens $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ de D″. Cette formule est encore valable pour $\lambda > 1$ (³).

(¹) Cette hypothèse est faite pour abréger.

(²) D., p. 58 à 62, nᵒˢ 11 et 12.

(³) Et aussi pour $0 < \lambda < 1$, $h > 1 - \lambda$.

La constante impliquée dans la formule (6,3) peut être prise égale à $\frac{kN_1N_2}{\lambda+h-1}$, k ne dépendant que de D et δ, et N_1 et N_2 étant les constantes relatives à G et à H dans les conditions (5,1), (6,1) et (6,2), pourvu que $\lambda+\mu$ reste inférieur à un nombre fixe inférieur à $m+1$.

7. Ajoutons aux hypothèses précédentes que les $\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}$ sont continus pour $X \neq A$, et que

$$(7,1) \qquad \frac{\partial H(X, A)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H(X, A)}{\partial a_\alpha} = O[L^{\mu+h-m-1}(X, A)].$$

Alors les $\frac{\partial K}{\partial a_\alpha}$ sont continus pour $X \neq A$ et

$$(7,2) \qquad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial a_\alpha} = O[L^{\lambda+\mu+h-m-1}(X, A)],$$

pourvu que X et A restent à une distance de S au moins égale à $\delta > 0$.

En effet on trouve dans tous les cas

$$(7,3) \quad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial a_\alpha}$$
$$= -(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}\int_S^{(m-1)} G(X, C)\,H(C, A)\,d(c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\alpha-1})$$
$$+\int_D^{(m)}\left\{\left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, C)+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, C)\right]H(C, A)\right.$$
$$\left.+\,G(X, C)\left[\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}(C, A)+\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}(C, A)\right]\right\}d(c_1, \ldots, c_m),$$

ce qui conduit immédiatement au résultat (7,2).

Si l'on donne encore une même valeur N_1 aux constantes relatives à G dans nos hypothèses (5,1), (6,1), (6,2) et une même valeur N_2 aux constantes relatives à H dans (5,1), (6,1), (7,1) et si $\lambda+\mu$ reste inférieur à un nombre fixe inférieur à $m+1$, la constante impliquée dans (7,2) peut être prise égale à

$$kN_1N_2\left(\frac{1}{\lambda+h-1}+\frac{1}{\mu+h-1}\right),$$

k ne dépendant que de D et δ.

8. Si l'on ajoute encore aux hypothèses que les dérivées secondes de G et de H, du type $\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}$ ou $\frac{\partial^2 G}{\partial a_\beta \partial x_\alpha}$, sont continues pour $X \neq A$, celles de G valant $O[L^{\lambda-m-2}(X, A)]$ et celles de H, $O[L^{\mu-m-2}(X, A)]$, on peut affirmer que K satisfait aux mêmes conditions en remplaçant λ ou μ par $\lambda+\mu$.

Plus généralement, si toutes les dérivées de G jusqu'à l'ordre $2p$ qu'on obtient en prenant au plus p variables de dérivation parmi les x_α et p au plus parmi les a_β, sont continues pour $X \neq A$, les dérivées d'ordre $q(q \leqq 2p)$ valant $O[L^{\lambda-m-q}(X, A)]$, et l'opération $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial a_\alpha}$ appliquée, quand cela est possible d'après ces hypothèses, une ou plusieurs fois à l'une de ces dérivées ou à G (l'indice α pouvant changer à chaque application), ne changeant pas l'ordre par rapport à $L(X, A)$, sauf si l'on applique p opérations de cette sorte à G, auquel cas le résultat est $O[L^{\lambda+h-m-1}(X, A)](0<h \leqq 1)$; si H satisfait aux mêmes hypothèses où l'on a seulement remplacé λ par μ; alors K possède les mêmes propriétés en remplaçant λ par $\lambda+\mu$ (¹).

Cela se voit par application répétée de la formule (6,5).

9. Soit maintenant D_1 un domaine à $m-1$ dimensions, situé sur la multiplicité $x_m=0$. Soit D le domaine des points dont les $m-1$ premières coordonnées sont celles de points de D_1 et pour lesquels $|x_m|$ est moindre qu'une longueur donnée.

Soient $\varphi(A)$ une fonction continue dans D_1 et $G(X, A)$ une fonction continue quand X et A ne coïncident pas, X appartenant à D et A à D_1; on suppose encore que les $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ sont continus dans les mêmes conditions et que

$$(9,1) \qquad G(X, A)=O[L^{2-m}(X, A)], \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}=O[L^{1-m}(X, A)].$$

Alors la fonction

$$F(X)=\int_{D_1}^{(m-1)} G(X, A)\,\varphi(A)\,d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

est continue (L) *dans* D.

(¹) Nous supposons toujours, pour simplifier, $\lambda \geqq 1$, $\mu \geqq 1$; autrement, il faudrait $h>1-\lambda$, $h>1-\mu$.

D'une façon générale, nous désignerons par X_1 le point qui se déduit d'un point quelconque X en remplaçant x_m par zéro (X_1 est la *projection* de X sur $x_m = 0$).

Soient D''_1 la partie commune à D_1 et à l'intérieur d'une hypersphère de centre X et de rayon $2L(X, Y)$ et D'_1 la partie restante de D_1 (D''_1 peut ne pas exister). On a

$$(9,3)\quad F(X) - F(Y) = \int_{D''_1}^{(m-1)} [G(X, A) - G(Y, A)]\, w(A)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ + \int_{D'_1}^{(m-1)} [G(X, A) - G(Y, A)]\, w(A)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

L'intégrale étendue à D''_1 peut se décomposer en deux, dont chacune vaut $O[L(X, Y)]$.

L'imitation d'un raisonnement déjà employé (nº **2**) montre que l'intégrale étendue à D'_1 peut s'écrire

$$L(X, Y)\, O\left[\int_r^{L_0} \frac{\rho^{m-2}\, d\rho}{(\rho^2 + x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}}\right],$$

où r désigne $\sqrt{4L^2(X, Y) - x_m^2}$ si cette quantité est réelle, et zéro dans le cas contraire. L'intégrale est aussi

$$\int_{\frac{r}{|x_m|}}^{\frac{L_0}{|x_m|}} \frac{t^{m-2}\, dt}{(1 + t^2)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Supposons d'abord qu'on ait

$$r \leqq |x_m| \sqrt{3};$$

notre intégrale est moindre que celle qui serait prise avec la limite inférieure zéro; elle vaut évidemment $O\left[\log \frac{L_0}{|x_m|}\right]$; mais si $r \leqq |x_m| \sqrt{3}$,

$$|x_m| \geqq L(X, Y);$$

le résultat peut donc aussi s'écrire $O\left[\log \frac{L_0}{L(X, Y)}\right]$.

Si maintenant $|x_m| < L(X, Y)$, on peut écrire

$$\int_{\frac{r}{|x_m|}}^{\frac{L_0}{|x_m|}} \frac{t^{m-2}\,dt}{(1+t^2)^{\frac{m+1}{2}}} < \int_{\frac{r}{|x_m|}}^{\frac{L_0}{|x_m|}} \frac{dt}{t} = \log\frac{L_0}{r} < \log\frac{L_0}{L(X, Y)} - \frac{1}{2}\log 3\,;$$

le résultat est donc encore $O\left[\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right]$.

Revenons à (9,2); on voit que

$$F(X) - F(Y) = O\left[L(X, Y)\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right], \tag{9,3}$$

ce qui exprime le fait annoncé.

Si $|w(A)| < M$, et si les constantes de (9,1) sont prises égales à N, celle de (9,3) peut être prise égale à kMN, k ne dépendant que de D_1.

10. Si nous ajoutons les hypothèses que les $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ sont continus pour $X \neq A$ et que

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right| < NL^{h+1-m}(X, A) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{10,1}$$

$$|w(A) - w(X_1)| < ML^h(X_1, A), \tag{10,2}$$

F(X) admet, par rapport aux variables autres que x_m, des dérivées continues même sur D_1; si en outre les $\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}$ existent (sauf peut-être pour $\alpha = \beta = m$) et sont continus pour $X \neq A$, et si

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right| < NL^{-m}(X, A), \tag{10,3}$$

ces dérivées de F(X) sont continues (L) dans toute partie de D dont les points restent à une distance de la frontière S_1 de D_1 supérieure à une longueur positive δ.

En effet, tant que $x_m \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = & \int_{D_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[w(A) - w(X_1)]\,d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ & + w(X_1)\int_{D_1}^{(m-1)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ & - (-1)^{m(\alpha-1)} \int_{S_1}^{(m-2)} w(X_1)\,G(X, A)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}), \end{aligned} \tag{10,4}$$

S_1 étant pris dans le sens associé au sens $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ de D_1. Or, le second membre est continu même pour $x_m = 0$, car les intégrales convergent uniformément; le théorème sur la dérivation d'une limite prouve donc que la formule (10,4) est valide même pour $x_m = 0$, ce qui démontre le premier point.

Pour démontrer le second point, on peut se borner au cas où

$$L(X, Y) < 1, \qquad L(X, Y) < \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1+h}.$$

Soit l l'inverse de $1 + h$. Soient D''_1 la partie commune à D_1 et à l'intérieur d'une hypersphère de centre X et de rayon $L^l(X, Y)$, et D'_1 le reste de D_1; S'_1 sera la frontière de D''_1 prise dans le sens associé au sens $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ de D''_1. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = &\int_{D'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} \varpi(A)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ &-(-1)^{m(\alpha-1)} \varpi(X_1) \int_{S'_1}^{(m-2)} G(X, A)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \\ &+ \int_{D''_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[\varpi(A) - \varpi(X_1)]\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ &+ \varpi(X_1) \int_{D''_1}^{(m-1)} \left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, A)\right] d(a_1, \ldots, a_{m-1}).\end{aligned}$$

En appliquant à cette expression des procédés déjà employés (n^{os} **3** et **9**), on trouve que $\dfrac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ est continu (L) d'exposant $\dfrac{h}{1+h}$; le coefficient est $k\dfrac{MN}{h}$, où k ne dépend que de D et de δ.

11. Si l'on fait maintenant les hypothèses que $\varpi(A)$ a des dérivées continues, et que $\dfrac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ a, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des dérivées continues pour $X \neq A$ et inférieures en valeur absolue à $NL^{h-m}(X, A)$, on peut augmenter l'exposant de la condition de Lipschitz. En effet,

$$(11,1)\quad \begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = &\int_{D_1}^{(m-1)} \left\{\left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A) + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}(X, A)\right] \varpi(A) \right.\\ &\left. + G(X, A) \frac{\partial \varpi(A)}{\partial a_\alpha}\right\} d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ &-(-1)^{m(\alpha-1)} \int_{S_1}^{(m-2)} G(X, A)\, \varpi(A)\, d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).\end{aligned}$$

La seconde intégrale a des dérivées continues et, en appliquant à l'autre des raisonnements déjà vus (n° **9**), on voit que l'exposant de la condition de Lipschitz est h si $h<1$ avec un coefficient $\frac{k\mathrm{MN}}{h}$ si $\left|\frac{\partial w}{\partial a_\alpha}\right|<\mathrm{M}$ et si h est inférieur à un nombre fixe inférieur à *un*. Si $h=1$,

$$\left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X})-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{Y})\right|<k\mathrm{MNL}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\log\frac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})};$$

k ne dépend que de D et de δ.

12. Après ces généralités, considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\Sigma_\alpha b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=f(\mathrm{X}) \tag{12,1}$$
$$(\alpha,\beta=1,2,\ldots,m;\quad a_{\alpha,\beta}=a_{\beta,\alpha}),$$

qui soit dn type elliptique, c'est-à-dire que les $a_{\alpha,\beta}$ peuvent être regardés comme les coefficients d'une forme quadratique définie; on fera en sorte que cette forme soit positive et que son discriminant soit *un;* on désignera par $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}$ le mineur de $a_{\alpha,\beta}$ dans ce discriminant.

Nous aurons encore à supposer que $f(\mathrm{X})$ et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont continus (L) et que les dérivées des b_α et de c sont continues. Toutes ces conditions sont satisfaites dans un domaine borné D.

Posons

$$\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A})=\Sigma_{\alpha,\beta}\mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\mathrm{A})(x_\alpha-a_\alpha)(x_\beta-a_\beta).$$

Nous chercherons d'abord une solution particulière (¹) qui soit du type

$$u(\mathrm{X})=-\lambda\int_{\mathrm{D}}^{(m)}\rho(\mathrm{A})\mathrm{H}^{\frac{2-m}{2}}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,d(a_1,\ldots,a_m) \tag{12,2}$$
$$\left(m>2;\quad \lambda=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}}\right),$$

(¹) Artifice de E. E. Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 24, 1907, p. 275-317).

ρ étant une fonction inconnue. Nous calculons d'abord $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ en dérivant sous le signe $\int$. Si nous supposons que $\rho(A)$ est continu (L), d'exposant h, on peut appliquer à $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ les conclusions de (3) : les dérivées secondes existent et sont continues (L) d'exposant $\frac{h}{1+h}$ dans tout domaine fermé intérieur à D. On forme ainsi $\mathcal{F}(u)$, ce qui conduit (¹) à l'équation en ρ,

$$(12,3) \qquad \rho(X) - \lambda \int_D^{(m)} K(X, A)\rho(A)\, d(a_1, \ldots, a_m) = f(X);$$

c'est une équation de Fredholm ; on a posé

$$\begin{aligned}(12,4) \quad K(X, A) &= \mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] \\ &= (m-2) H^{-\frac{m-2}{2}}(X, A)\, \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(A)] \\ &\quad \times [m A_{\alpha,\gamma}(A) A_{\beta,\delta}(A) - A_{\alpha,\beta}(A) A_{\gamma,\delta}(A)](x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta) \\ &\quad - (m-2) H^{-\frac{m}{2}}(X, A)\, \Sigma_{\alpha,\beta}\, b_\alpha(X) A_{\alpha,\beta}(A)(x_\beta - a_\beta) \\ &\quad + c(X) H^{\frac{2-m}{2}}(X, A).\end{aligned}$$

Il est aisé d'ailleurs de vérifier que la solution de (12,3), si elle existe, est continue (L). En effet, il est évident qu'elle est continue ; donc, d'après (2), l'intégrale est continue (L) ; comme $f(X)$ l'est aussi, il en est de même de ρ. Ainsi u est bien solution de (12,1).

Mais, pour suivre de plus près le travail cité, nous allons retrouver ce résultat autrement. Soit $N(X, A)$ le noyau résolvant de (12,3), obtenu soit par le quotient des deux séries de Fredholm, soit par la série

$$N(X, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(X, A),$$

qui est convergente dès que la mesure de D est assez petite, ce qui montre que le déterminant de Fredholm n'est alors pas nul ; K_n désigne

(¹) D., p. 34 à 43.

le résultat de la réitération de $K(X, A) = K_1(X, A)$. On a

$$(12,5)\quad \begin{cases} u(X) = -\lambda \int_D^{(m)} G(X, A) f(A)\, d(a_1, \ldots, a_m), \\ G(X, A) = H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) + \int_D^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, C)\, N(C, A)\, d(c_1, \ldots, c_m). \end{cases}$$

Les dérivées de $u(X)$ se calculent par dérivation sous le signe $\int$ à l'aide de celles de $G(X, A)$ qui se calculent de la même façon. L'application répétée de (6) et de (7) prouve que l'on peut appliquer au résultat la conclusion de (3) (sauf ce qui a trait à la condition de Lipschitz) : nous retrouvons donc que les dérivées secondes de $u(X)$ sont continues [mais la condition de Lipschitz échappe à ce raisonnement (1)].

En opérant sur (12,5) comme sur (12,2) et en utilisant le fait que G est solution de $\mathcal{F}(G) = 0$, on trouve alors que $\mathcal{F}(u) = f(X)$.

13. Supposons maintenant que D admette comme frontière une multiplicité S dont les coordonnées des points s'expriment par des fonctions de $m-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ dont les dérivées sont continues (L). Il n'est pas nécessaire que les mêmes paramètres servent pour l'hypersurface S entière : il suffit que chaque point de celle-ci soit *intérieur* à une région dans toute l'étendue de laquelle on puisse se servir d'un même système de paramètres.

Proposons-nous de trouver une solution de (12,1), continue dans $D + S$ (nous regardons D comme *ouvert*), à dérivées secondes continues dans D et qui se réduise sur S à une fonction continue donnée $f_1(Y)$ (naturellement cette fonction sera, suivant la région où se trouvera Y, exprimée à l'aide d'un système de paramètres convenant à cette région). Nous supposerons toutefois que les hypothèses de (12), relatives à $f(X)$, aux $a_{\alpha,\beta}$, aux b_α et à c sont remplies dans une région D_1 comprenant D et S à son intérieur.

Nous commencerons par faire le changement d'inconnue

$$(13,1)\quad u(X) = -\lambda \int_{D_1}^{(m)} G(X, A) f(A)\, d(a_1, \ldots, a_m) + v(X),$$

(1) Et pourtant ce raisonnement utilise la continuité (L) des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$, au lieu que le premier n'utilisait que la continuité de ces dérivées.

$G(X, A)$ étant calculé comme dans (12), *mais à l'aide de* D_1. Alors $v(X)$ doit satisfaire à l'équation qui se déduit de (12,1) en remplaçant $f(X)$ par *zéro* (équation homogène) et prendre sur S des valeurs continues connues. Nous cherchons alors si cette question n'aurait pas une solution du type

$$(13,2)\qquad v(X) = -2\lambda \int_S^{(m-1)} \sigma(A) \times \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}),$$

où S est pris dans le sens correspondant au sens $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de D et où σ est une fonction à déterminer. On peut remarquer que, dans nos hypothèses, les $\frac{\partial G}{\partial a_\beta}$ existent [c'est ce que nous nommerons un potentiel de double couche de densité $\sigma(A)$].

D'après ce qu'on a vu (n^{os} **5** et **8**), la partie de $\frac{\partial G}{\partial a_\beta}$ qui provient de ce qui suit le premier terme $H^{\frac{2-m}{2}}$ de G est $O[L^{2-m}(X, A)]$; donc, d'après (9), l'intégrale correspondante est continue (L) même sur S si σ est continue. Quant à ce qui provient du premier terme de G, l'intégrale correspondante subit sur S le saut brusque connu [1], et l'on parvient ainsi à l'équation de Fredholm,

$$(13,3)\qquad \sigma(Y) - 2\lambda \int_S^{(m-1)} \sigma(A) \times \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(Y)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) = f_2(Y),$$

dans laquelle

$$(13,31)\qquad f_2(Y) = f_1(Y) + \lambda \int_{D_1}^{(m)} G(Y, A) f(A)\, d(a_1, \ldots, a_m);$$

Y désigne un point quelconque de S. On peut démontrer [2] que le déterminant de cette équation n'est pas nul si D_1, et par suite D, sont assez petits dans toutes leurs dimensions et bornés par un seul contour.

---

(1) D., p. 69 à 81; le fait que les coordonnées de S, exprimées en fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ ont seulement des dérivées continues (L), au lieu de dérivées secondes continues, n'entraîne qu'une modification insignifiante du passage cité.

(2) D., p. 81 à 86; le raisonnement n'est valable que pour un seul contour.

14. Dans le but d'étudier la façon dont les dérivées de v jusqu'au second ordre se comportent sur S, nous supposerons maintenant que les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c ont des dérivées jusqu'au troisième ordre continues dans D_1, celles de $a_{\alpha,\beta}$ étant, en outre, continues (L).

Alors notre fonction K(X, A) possède les propriétés de la fonction nommée G au n° **8** avec $p = 3$; il en résulte que les dérivées, par rapport aux x_α de la fonction actuellement nommée G possèdent les mêmes propriétés; en particulier, G peut être dérivé jusqu'à sept fois, dont trois fois par rapport aux a_α et quatre fois par rapport aux x_α (¹).

Considérons l'équation

$$(14,1) \qquad \mathcal{G}(v) = \Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2(a_{\alpha,\beta}v)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Sigma_\alpha \frac{\partial(b_\alpha v)}{\partial x_\alpha} + cv = 0,$$

qu'on nomme l'adjointe de $\mathcal{F}(u) = 0$ (v n'a aucun rapport avec la fonction définie ci-dessus). Soit $G^*(X, A)$ la fonction jouant, pour cette équation, le même rôle que G pour (12, 1); G^* est supposé formé à l'aide du domaine D_1. Cette fonction G^* peut, avec les hypothèses faites, être dérivée jusqu'à trois fois, dont deux fois par rapport aux x_α et une fois par rapport aux a_α.

On a alors (²):

$$(14,2) \quad G(C, A) - G^*(A, C)$$
$$= \lambda \int_{S_2}^{(m-1)} \Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \Big\{ \Sigma_\beta \Big[a_{\alpha,\beta}(X)\, G^*(X, C) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(X, A) - G(X, A) \frac{\partial(a_{\alpha,\beta}G^*)}{\partial x_\beta} \Big] + b_\alpha(X)\, G(X, A) G^*(X, C) \Big\}$$
$$\times\, d(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1}),$$

où S_2 est une hypersurface intérieure à D_1, contenant D à son intérieur et prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de son intérieur; A et C sont deux points intérieurs à S_2. *Le premier membre est donc continu.* On peut dériver le second membre jusqu'à trois fois par rapport aux a_α [ce qui montre que $G^*(X, A)$ peut être dérivé trois

(¹) C'est par erreur que, dans D., p. 56, on n'a pas fait intervenir la continuité (L) des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ dans les calculs de la dérivation de G.

(²) D., p. 67 à 69.

fois par rapport aux x_α] et une fois par rapport aux c_α. On en conclut que $G_A[\mathcal{G}(X, A)]$ *et ses dérivées sont des fonctions continues.*

15. Nous supposerons encore que les coordonnées x_α des points de S ont, par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, des dérivées troisièmes continues (L). Nous introduirons un autre paramètre λ_m, nul sur S, tel que les coordonnées des points de S et des points suffisamment voisins de S soient des fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dont les dérivées troisièmes sont continues (L) et que, réciproquement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ s'expriment en fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ à dérivées troisièmes continues (L). Pour fixer les idées, si les coordonnées des points de S sont

$$x_\alpha = f_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{15,1}$$

et si

$$\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})}{d(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1})} \neq 0,$$

on pourra prendre comme formules de transformation les $m-1$ premières formules (15,1) auxquelles on joindra

$$x_m = f_m(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}) \pm \lambda_m; \tag{15,2}$$

le double signe étant choisi de façon que

$$\frac{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{d(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)} > 0; \tag{15,3}$$

les conditions seront satisfaites pour une partie suffisamment petite de S ayant à son intérieur un point arbitraire : cela nous suffit.

Nous écrirons l'équation (12,1) dans le système de variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ et nous prendrons comme variables d'intégration, dans (13,2), les paramètres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ de A. Dans ce système de variables, A désignera le point $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ correspondant à X (ou à Y; dans ce cas, $\lambda_m = 0$) et M, le point $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$.

L'équation (12,1) devient

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial\lambda_\alpha \partial\lambda_\beta} + \Sigma_\alpha b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial \lambda_\alpha} + c' u = f'(A), \tag{15,4}$$

où $f'(A)$ désigne ce que devient $f(X)$ par le changement de variables et où

$$(15,41)\quad \left\{\begin{aligned} a'_{\alpha,\beta} &= \Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\lambda_\beta}{\partial x_\delta},\\ b'_\alpha &= \Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \frac{\partial^2\lambda_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} + \Sigma_\gamma b_\gamma \frac{\partial\lambda_\alpha}{\partial x_\gamma},\\ c' &= c,\end{aligned}\right.$$

de sorte qu'en désignant par $D'(\Lambda)$ le déterminant des $a'_{\alpha,\beta}$, le déterminant (15, 3) vaut $D'^{-\frac{1}{2}}$.

Soit $H'(\Lambda, M)$ ce que devient $H(X, \Lambda)$ avec les nouvelles variables. H' n'est pas un polynome en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, mais

$$H'(\Lambda, M) = D'^{-1}\Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(M)(\lambda_\alpha - \mu_\alpha)(\lambda_\beta - \mu_\beta) + O[L^3(\Lambda, M)].$$

Soit encore $G'(\Lambda, M)$ la fonction $G(X, \Lambda)$ exprimée avec les nouvelles variables.

Quand X tend vers un point de la partie d'hypersurface S considérée, que nous nommerons S', tout ce qui, dans (13,2), provient du reste de l'hypersurface a des dérivées quatrièmes continues, même en ce point de S'. Nous serons donc amenés à étudier ce qui provient de S', c'est-à-dire

$$(15,5)\quad (-1)^m 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma'(M)}{\sqrt{D'(M)}} \Sigma_\beta a'_{m,\beta}(M) \frac{\partial G'(\Lambda, M)}{\partial \mu_\beta} d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1});$$

$\sigma'(M)$ désigne $\sigma(\Lambda)$ exprimé à l'aide de $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ (sur S', $\mu_m = 0$). On trouve d'ailleurs que cette expression est la somme de

$$(15,51)\quad (-1)^m (m-2) 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma'(M)}{\sqrt{D'(M)}} (\lambda_m - \mu_m) H'^{-\frac{m}{2}}(\Lambda, M)\, d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}),$$

et d'une intégrale portant sur $O[L^{2-m}(\Lambda, M)]$.

Dans l'intégrale de l'équation (13,3), le terme (15,51) disparaît ($\lambda_m = \mu_m = 0$). Nous allons examiner si l'on peut appliquer à cette intégrale les propositions (2) à (4) (après remplacement de m par $m-1$). Il en est indubitablement ainsi pour ce qui provient de la partie

$$\int_D^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, C) N(C, A)\, d(c_1, \ldots, c_m),$$

de la fonction $\mathcal{G}$. Dans le reste, il suffit de s'occuper de ce qui provient de S'. Nous employons pour cela la notation suivante : posons

$$\lambda_\alpha - \mu_\alpha = \delta\mu_\alpha \qquad (a = 1, 2, \ldots, m),$$

ces quantités étant regardées comme des différentielles de variables indépendantes; le même symbole δ servira à noter les différentielles totales des fonctions de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ et Δ désignera les différences correspondantes. L'intégrale à étudier s'écrit

$$-(m-2)2\lambda\int_{S'}^{(m-1)} \sigma(A)\,H^{-\frac{m}{2}}(Y, A)\,\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}(y_\alpha - a_\alpha)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$$

$$+(m-2)\,\lambda\int_{S'}^{(m-1)} \sigma(A)\,H^{-\frac{m}{2}}(Y, A)\,\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}$$
$$\times\, a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial A_{\gamma,\varepsilon}}{\partial a_\beta}(y_\gamma - a_\gamma)(y_\varepsilon - a_\varepsilon)\,d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}).$$

La seconde intégrale ne donnera lieu à aucune difficulté; la première s'écrit, en tenant compte de la nullité de (15, 51),

$$-(m-2)2\lambda\int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma'(M)}{\sqrt{D'(M)}}\,H'^{-\frac{m}{2}}(A, M)\,\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}(-1)^{(m-1)(\varepsilon-1)}$$
$$\times\, a_{\alpha,\beta}(A)A_{\beta,\gamma}(A)(\Delta a_\gamma - \delta a_\gamma)\frac{\partial\mu_\varepsilon}{\partial a_\alpha}\,d(\mu_{\varepsilon+1}, \ldots, \mu_{\varepsilon-1}).$$

Le fait que le coefficient de $\sigma'(M)$ sous le signe $\int$ est $O[L^{2-m}(A, M)]$ est ainsi mis en évidence; on voit aussi qu'on peut le dériver jusqu'à cinq fois, dont trois par rapport aux λ_α et deux par rapport aux μ_α, chaque dérivation abaissant l'ordre d'une unité, car il en est ainsi de $\Delta a_\gamma - \delta a_\gamma$ qui donne lieu aux identités

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_\theta}(\Delta a_\gamma - \delta a_\gamma) = \Delta\frac{\partial a_\gamma}{\partial\mu_\theta}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\lambda_\theta\,\partial\lambda_\varkappa}(\Delta a_\gamma - \delta a_\gamma) = \frac{\partial^2 x_\gamma}{\partial\lambda_\theta\,\partial\lambda_\varkappa},$$

où l'on voit que les ordres décroissent d'une unité à chaque dérivation; une dérivation de plus par rapport aux λ_α ne changerait plus l'ordre;

d'autre part,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)(\Delta a_\gamma-\delta a_\gamma)=\Delta\frac{\partial a_\gamma}{\partial\mu_0}-\delta\frac{\partial a_\gamma}{\partial\mu_0},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_x}+\frac{\partial}{\partial\mu_x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)(\Delta a_\gamma-\delta a_\gamma)=\Delta\frac{\partial^2 a_\gamma}{\partial\mu_0\,\partial\mu_x}-\delta\frac{\partial^2 a_\gamma}{\partial\mu_0\,\partial\mu_x};$$

la première de ces expressions est $O[L^2(A, M)]$, et la seconde $O[L^{1+h}(A, M)]$, si les dérivées troisièmes des x_α par rapport aux λ_β sont continues (L) d'exposant h; une dérivation de celle-ci par rapport à λ_α donnerait $O[L^h(A, M)]$; enfin,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_x}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)(\Delta a_\gamma-\delta a_\gamma)=\Delta\frac{\partial^2 a_\gamma}{\partial\mu_0\,\partial\mu_x},$$

qui est $O[L(A, M)]$, et une dérivation de plus donne $O[1]$.

Désignons par $P(A, M)$ le coefficient de $\sigma'(M)\,d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})$, de sorte que l'équation (13,3) devient

$$(15,6)\quad \sigma'(A)+\int_{S'}^{(m-1)}\sigma'(M)\,P(A, M)\,d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})=f'_2(A)+\ldots,$$

où $f'_2(A)=f_2(Y)$, et où les points tiennent lieu d'une fonction qui a des dérivées troisièmes continues.

D'après (2), l'intégrale est continue (L); donc, si $f'_2(A)$ est continu (L), il en est de même de $\sigma'(A)$. Mais alors, d'après (3), l'intégrale a des dérivées continues (L); donc, si $f'_2(A)$ a des dérivées continues, il en est de même de $\sigma'(A)$, et si les dérivées de $f'_2(A)$ sont continues (L), il en est de même de celles de $\sigma'(A)$.

Écrivons alors, d'après (4),

$$(15,7)\quad \frac{\partial\sigma'}{\partial\lambda_\alpha}+\int_{S'}^{(m-1)}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\lambda_\alpha}+\frac{\partial P}{\partial\mu_\alpha}\right)\sigma'(M)\right.$$
$$\left.+P(A, M)\frac{\partial\sigma'(M)}{\partial\mu_\alpha}\right]d(\mu_1, \ldots, \mu_{m-1})=\frac{\partial f'_2}{\partial\lambda_\alpha}+\ldots,$$

où l'on a fait rentrer dans les points une intégrale prise le long de la frontière C de S', qui a des dérivées troisièmes continues. On voit sur cette équation [1] que, si f'_2 a des dérivées secondes continues, il en est de même de σ', et si les dérivées secondes de f'_2 sont continues (L), il en est de même de celles de σ', mais avec un exposant égal à $\frac{h}{1+h}$ si ce nombre est inférieur à l'exposant de la continuité (L) des dérivées secondes de f'_2. Pour obvier à cet inconvénient, nous dériverons une fois de plus :

$$(15,8)\quad \frac{\partial^2\sigma'}{\partial\lambda_\alpha\partial\lambda_\beta}+\int_{S'}^{(m-1)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_\beta}+\frac{\partial}{\partial\mu_\beta}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial\lambda_\alpha}+\frac{\partial P}{\partial\mu_\alpha}\right)\sigma'(M)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial\lambda_\alpha}+\frac{\partial P}{\partial\mu_\alpha}\right)\frac{\partial\sigma'}{\partial\mu_\beta}+\left(\frac{\partial P}{\partial\lambda_\beta}+\frac{\partial P}{\partial\mu_\beta}\right)\frac{\partial\sigma'}{\partial\mu_\alpha}+P\frac{\partial^2\sigma'}{\partial\mu_\alpha\partial\mu_\beta}\right]$$
$$\times\, d(\mu_1,\ldots,\mu_{m-1})=\frac{\partial^2 f'_2}{\partial\lambda_\alpha\partial\lambda_\beta}+\ldots;$$

on voit ainsi que les exposants des conditions de Lipschitz des dérivées secondes sont les mêmes pour σ' et f'_2 si celui-ci ne dépasse pas h et si $h<1$; si l'exposant correspondant à f'_2 dépasse h, celui de σ' est h; si h et l'exposant correspondant à f'_2 valent *un* [2],

$$\Delta\frac{\partial^2\sigma'}{\partial\mu_\alpha\partial\mu_\beta}=O\left[L(A,M)\log\frac{L_0}{L(A,M)}\right].$$

16. Nous pouvons maintenant passer à l'étude des dérivées de v lui-même. Nous allégerons la notation en supposant que S' se réduit à $x_m=0$; les calculs qui viennent d'être faits nous permettent de ne pas nous soucier du système de variables qui a servi à former $G(X,A)$: les calculs seront vrais quel que soit ce système. Toutefois, nous prendrons comme valeur du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ une fonction quelconque positive D (et non plus *un*). On a ainsi

$$(16,1)\quad v(X)=(-1)^m 2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\Sigma_\alpha a_{m,\alpha}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\alpha}\,d(a_1,\ldots,a_{m-1})+\ldots,$$

les points tenant lieu d'une intégrale étendue au reste de S et dont les dérivées troisièmes sont continues en tout point intérieur à S'.

---

[1] On y voit aussi que l'exposant de la continuité (L) des dérivées de σ' est le même que celui des dérivées de f'_2, pourvu que ce dernier soit inférieur à *un*.

[2] L_0 n'a plus la même valeur que plus haut.

Quand X est intérieur à D, l'intégrale a comme dérivée par rapport à x_α

$$(16,2)\qquad (-1)^m 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right)\Sigma_\beta a_{m,\beta}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}d(a_1,\ldots,a_{m-1})$$
$$-(-1)^m 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\Sigma_\beta a_{m,\beta}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}d(a_1,\ldots,a_{m-1}).$$

La première intégrale est la somme de

$$(16,21)\qquad (-1)^{m-1} m(m-2)\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} H^{-\frac{m+2}{2}}(X,A)\,\Sigma_{\beta,\gamma}\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\frac{A_{\beta,\gamma}}{D}\right)$$
$$\times (x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma)(x_m-a_m)\,d(a_1,\ldots,a_{m-1}),$$

et d'une intégrale portant sur $O[L^{2-m}(A, M)]$ et qui est continue même sur S'.

L'intégrale (16,21), en lui ajoutant une intégrale prise sur le reste de S, et qui par suite n'entraîne pas de difficulté, s'écrit

$$(16,3)\qquad -m(m-2)\lambda \int_{S}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} H^{-\frac{m+2}{2}}(X,A)\,\Sigma_{\beta,\gamma}\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\frac{A_{\beta,\gamma}}{D}\right)(x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma)$$
$$\times \Sigma_\delta(-1)^{(m-1)(\delta-1)}(x_\delta-a_\delta)\,d(a_{\delta+1},\ldots,a_{\delta-1}).$$

On peut encore remplacer

$$\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} H^{-\frac{m+2}{2}}(X,A)\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\frac{A_{\beta,\gamma}}{D}\right)$$

par

$$\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}} H^{-\frac{m+2}{2}}(A,X)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{A_{\beta,\gamma}}{D}\right),$$

X_1 ayant le même sens que dans la proposition (9); cela n'ajoute qu'une intégrale portant sur $O[L^{2-m}(A, M)]$, continue sur S'. Nous avons ainsi une intégrale portant sur le produit de

$$\Sigma_\delta(-1)^{(m-1)(\delta-1)}(x_\delta-a_\delta)\,d(a_{\delta+1},\ldots,a_{\delta-1}),$$

par une fonction homogène d'ordre $-m$ des $x_\beta - a_\beta$; on peut donc (¹) déformer S sans changer le résultat. On en profite pour amener S à coïncider avec

$$H(A,X)=r^2,$$

(¹) D., p. 69.

et l'on parvient (1) à la valeur

$$(16,31)\qquad -\sigma(X_1)\,\Sigma_{\beta,\gamma}a_{\beta,\gamma}(X)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{A_{\beta,\gamma}}{D}\right);$$

si X vient sur $S'(x_m=0)$, on n'a plus que la moitié de cette valeur. Donc, quand X tend vers un point de S', la première intégrale (16, 2) tend vers une limite qui s'obtient en ajoutant la moitié de (16, 31) à l'intégrale, X étant au point limite.

Pour la deuxième intégrale (16,2), nous distinguerons deux cas, selon que α n'est pas ou est égal à m.

Si $\alpha\neq m$, une intégration par parties fournit le résultat; en appelant C la frontière de S', prise dans le sens correspondant au sens choisi de S', on trouve

$$(16,4)\qquad 2\lambda\int_{C}^{(m-2)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}(-1)^{m\alpha-1}\Sigma_\beta a_{m,\beta}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}\times d(a_{\alpha+1},\ldots,a_{m-1},a_1,\ldots,a_{\alpha-1})$$
$$+(-1)^m 2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left(\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right)\Sigma_\beta a_{m,\beta}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}d(a_1,\ldots,a_{m-1});$$

la première intégrale est continue quand X vient sur S' et la seconde a une limite, car c'est un potentiel de double couche.

Si $\alpha=m$, la fonction intégrée contient $\frac{\partial^2 G}{\partial a_m^2}$. Or, d'après (14), $\mathcal{G}_A[G(X,A)]$ est continu; cela permet d'exprimer $\frac{\partial^2 G}{\partial a_m^2}$ en fonction linéaire des autres dérivées jusqu'au second ordre et de cette fonction continue. La seconde intégrale (16,2) devient ainsi

$$(16,5)\qquad (-1)^m\, 2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{\gamma=1}^{m}a_{\beta,\gamma}(A)\frac{\partial^2 G(X,A)}{\partial a_\beta\,\partial a_\gamma}d(a_1,\ldots,a_{m-1})$$
$$+(-1)^{m-1}2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\left\{\sum_{\beta=1}^{m}h_\beta(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}+h_{m+1}G(X,A)+\mathcal{G}_A[G(X,A)]\right\}\times d(a_1,\ldots,a_{m-1}),$$

---

(1) D., p. 89 et 90; le dernier facteur de la formule (25, 4) de ce passage est à supprimer.

où $h_1, h_2, \ldots, h_m$ sont des combinaisons linéaires des b_α et des dérivées premières des $a_{\beta,\gamma}$: ces fonctions ont donc des dérivées secondes continues (L); h_{m+1} contient les dérivées des b_α, les dérivées secondes des $a_{\beta,\gamma}$ et c; ses dérivées sont continues (L). La première intégrale (16,5), à l'aide d'intégrations par parties, donne des intégrales étendues à C qui sont continues ainsi que leurs dérivées, des intégrales de même forme que la seconde intégrale (16,5) et qu'on peut faire entrer dans cette dernière en changeant les valeurs de $h_1, \ldots, h_{m+1}$, et enfin l'intégrale

$$(16,51) \quad (-1)^{m-1}2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\sum_{\beta=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial a_\beta}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right]\sum_{\gamma=1}^{m}a_{\beta,\gamma}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\gamma}d(a_1,\ldots,a_{m-1}).$$

Pour montrer que cette intégrale a une limite quand X tend vers un point de S', sans pour cela recourir à l'existence des dérivées secondes de σ, nous l'écrirons

$$\begin{aligned}(16,6) \quad & (-1)^{m-1}2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{\gamma=1}^{m}\left\{\frac{\partial}{\partial a_\beta}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right]-\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}}\right]\right\} \\ & \qquad \times a_{\beta,\gamma}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\gamma}d(a_1,\ldots,a_{m-1}) \\ & +(-1)^{m-1}2\lambda\sum_{\beta=1}^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}}\right]\int_{S'}^{(m-1)}\sum_{\gamma=1}^{m}a_{\beta,\gamma}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\gamma} \\ & \qquad \times d(a_1,\ldots,a_{m-1}).\end{aligned}$$

Or, la première intégrale est continue sur S', car elle porte sur $O[L^{2-m}(A,M)]$. Quant aux intégrales contenues dans le second terme de (16, 6), elles sont de la même forme que la partie de la seconde intégrale (16,5) qui contient les dérivées premières de G; il suffit donc de voir comment on traite celle-ci. On l'écrit

$$\begin{aligned}(16,61) \quad & (-1)^{m-1}2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\frac{h_m(A)}{a_{m,m}(A)}\sum_{\beta=1}^{m}a_{m,\beta}(A)\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta}d(a_1,\ldots,a_{m-1}) \\ & -(-1)^{m}\,2\lambda\int_{S'}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\sum_{\beta=1}^{m-1}\frac{h_\beta(A)a_{m,m}(A)-h_m(A)a_{m,\beta}(A)}{a_{m,m}(A)}\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\beta} \\ & \qquad \times d(a_1,\ldots,a_{m-1}).\end{aligned}$$

Or, le premier terme est un potentiel de double couche : il a donc une limite. Le second terme ne contient plus de dérivée par rapport à a_m; des intégrations par partie le changent en une intégrale étendue à C, continue sur S' et une intégrale portant sur $O[L^{2-m}(X, A)]$, qui, de même que ce qui reste dans (16,5), est aussi continu sur S'.

Donc, les dérivées de $v(X)$ tendent vers des limites quand X tend vers un point de S'; elles existent donc et sont continues même dans ce cas; on doit remarquer que les dérivées par rapport à une variable autre que x_m ont cette propriété pourvu seulement que les valeurs imposées sur S' aient des dérivées continues; la dérivée par rapport à x_m exige la continuité (L) des dérivées des valeurs données.

Nous voulons montrer, sans supposer rien de plus que cette continuité (L) des dérivées de $f_1(Y)$, que les dérivées de v sont continues (L); or, il suffit de le démontrer pour la première intégrale (16,6); toutes les autres, ou bien portent sur $O[L^{2-m}(X, A)]$ et sont continues (L) d'après (9), ou bien sont des potentiels de double couche à densité continue (L) qui jouissent de la même propriété, comme on le voit, en s'inspirant de ce qui a été fait pour (16,2) et de ce qui va être dit. Formons la différence des valeurs en X et en Y de la première intégrale (16,6) (Y n'est pas nécessairement sur S'); en nommant S_2 la partie de S' intérieure à $L(X, A) < 2L(X, Y)$ et S_1 le reste de S', enfin C_1 la frontière de S_2 prise dans le sens correspondant à celui qu'on a choisi sur S_2, cette différence est (nous donnons à β et à γ des valeurs fixes et nous divisons par $(-1)^{m-1}2\lambda$)

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_1}^{(m-1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_\beta}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}}\right] \right\} a_{\beta,\gamma}(A)\,\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\gamma}\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\
&-\int_{S_1}^{(m-1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_\beta}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right] - \frac{\partial}{\partial y_\beta}\left[\frac{\sigma(Y_1)}{\sqrt{D(Y)}}\right] \right\} a_{\beta,\gamma}(A)\,\frac{\partial G(Y, A)}{\partial a_\gamma}\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial y_\beta}\left[\frac{\sigma(Y_1)}{\sqrt{D(Y)}}\right] - \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}}\right] \right\} \int_{S_1}^{(m-1)} a_{\beta,\gamma}(A)\,\frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\gamma} \\
&\qquad d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\
&+\int_{S_2}^{(m-1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_\beta}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right] - \frac{\partial}{\partial y_\beta}\left[\frac{\sigma(Y_1)}{\sqrt{D(Y)}}\right] \right\} a_{\beta,\gamma}(A)\left[\frac{\partial G(X,A)}{\partial a_\gamma} - \frac{\partial G(Y,A)}{\partial a_\gamma}\right] \\
&\qquad \times d(a_1, \ldots, a_{m-1}).
\end{aligned}
$$

Or, chacune des intégrales étendue à S_2 est $O[L^h(X, Y)]$, en supposant que les dérivées de σ soient continues (L) d'exposant h.

L'intégrale qui figure dans le troisième terme est continue, et elle est multipliée par un facteur $O[L^h(X, Y)]$; elle est donc aussi de cette forme. Enfin le théorème des accroissements finis appliqué à la dernière intégrale montre qu'elle porte sur $L(X, Y) O[L^{h-m}(X, A)]$, ce qui, d'après les raisonnements de (9), donne $O[L^h(X, Y)]$ si $h < 1$ et $O\left[L(X, Y)\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right]$ si $h = 1$. Notre proposition est démontrée.

17. Nous voulons maintenant prouver que si les dérivées secondes de $f_1(Y)$ sont continues (L), il en est de même de celles de v.

Il suffit de le démontrer quand la seconde variable de dérivation n'est pas x_m; car alors l'équation (12,1) entraînera la même conclusion pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$.

Or, nous avons, dans le calcul précédent, rencontré des potentiels de double couche, dont la densité, dans nos hypothèses actuelles, a des dérivées continues (L); nous avons vu (16,4) qu'ils sont dérivables, leurs dérivées étant continues (L). Toutes les autres intégrales rencontrées ont, d'après (10), des dérivées continues. Pour affirmer que ces dérivées sont continues (L) si les dérivées secondes de σ le sont, il suffit de transformer la première intégrale (16,6); elle provenait de (16,51), que nous écrirons maintenant :

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{m-1} 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \sum_{\beta=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial a_\beta} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{a_{\beta,m}(A)}{a_{m,m}(A)} \sum_{\gamma=1}^{m} a_{m,\gamma}(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\gamma} d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\
&-(-1)^m\, 2\lambda \int_{S'}^{(m-1)} \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{\gamma=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial a_\beta} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{a_{m,m}(A)\, a_{\beta,\gamma}(A) - a_{\beta,m}(A)\, a_{\gamma,m}(A)}{a_{m,m}(A)} \\
&\qquad\qquad \times \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\gamma} d(a_1, \ldots, a_{m-1}).
\end{aligned}
$$

La première est un potentiel de double couche dont la densité a des dérivées continues (L). La seconde ne contient plus $\frac{\partial G}{\partial a_m}$; on peut faire disparaître les autres dérivées de G par des intégrations par parties; la continuité (L) des dérivées de l'intégrale résulte alors de (10). Notre proposition est démontrée.

18. Soit maintenant

$$F(p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{m,m}; p_1, p_2, \ldots, p_m; u; x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

que nous écrirons aussi

$$F(p_{\alpha,\beta}; p_\alpha; u; x_\alpha),$$

une fonction de $\frac{m(m+1)}{2}+2m+1$ arguments ($p_{\alpha,\beta}=p_{\beta,\alpha}$) dont les dérivées huitièmes sont continues (L) d'exposant *un* dans un certain champ. Posons

$$(18,01) \quad a_{\alpha,\alpha}=\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\alpha}}, \qquad a_{\alpha,\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\beta}}(\alpha\neq\beta), \qquad b_\alpha=\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}, \qquad c=\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Soit $\mathcal{F}(u)$, ce qu'on obtient en remplaçant les p_α et les $p_{\alpha,\beta}$ par les dérivées premières et secondes de u, et soit u_0 une solution de

$$(18,1) \qquad \mathcal{F}(u)=0.$$

On suppose que, quand $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ varie dans un domaine ouvert D ou sur sa frontière S, les valeurs de nos $\frac{m(m+1)}{2}+2m+1$ arguments sont intérieures au champ, et que les $a_{\alpha,\beta}$ peuvent être regardés comme les coefficients d'une forme quadratique définie positive. On suppose que les coordonnées des points de S sont des fonctions de $m-1$ paramètres dont les dérivées neuvièmes sont continues (L) et dont les m déterminants fonctionnels ne s'annulent pas ensemble. On suppose que les dérivées huitièmes de u_0 sont continues (L). Enfin, on se donne une fonction φ des $m-1$ paramètres des points de S, dont les dérivées huitièmes sont continues (L). Je dis que, si D est assez petit dans toutes ses dimensions, et si t est assez petit, l'équation (18,1) admet une solution prenant sur S les mêmes valeurs que $u_0+t\varphi$.

La démonstration consiste à employer des approximations successives $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$; soient $a_{\alpha,\beta,n}, b_{\alpha,n}, c_n$ les valeurs des $a_{\alpha,\beta}, b_\alpha, c$ correspondant à u_n. On calculera d'abord une fonction h_0 telle que

$$(18,11) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta,0}\frac{\partial^2 h_0}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}+\Sigma_\alpha b_{\alpha,0}\frac{\partial h_0}{\partial x_\alpha}+c_0 h_0=0,$$

cette fonction prenant sur S les valeurs $t\varphi$, et l'on posera

$$(18,12) \qquad u_1=u_0+h_0.$$

Ensuite, ayant u_n, on déterminera (si c'est possible) une fonction h_n, nulle sur S, et telle que

$$(18,2)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta,n}\frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\Sigma_\alpha b_{\alpha,n}\frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha}+c_n h_n=-\mathcal{F}(u_n)\qquad (n\geqq 1),$$

et l'on posera

$$(18,21)\qquad u_{n+1}=u_n+h_n.$$

Si l'on suppose les dérivées huitièmes de u_n continues (L), il en sera de même de celles de h_n, et par suite, de celles de u_{n+1}. En effet, c'est évident pour les dérivées secondes, d'après ce qui vient d'être démontré. Pour les dérivées troisièmes, on peut démontrer qu'elles existent dans D, et en écrivant

$$\begin{aligned}&\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta,n}\frac{\partial^3 h_n}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\theta}+\Sigma_\alpha b_{\alpha,n}\frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha\,\partial x_\theta}+c_n\frac{\partial h_n}{\partial x_\theta}\\&=-\frac{\partial}{\partial x_\theta}\mathcal{F}(u_n)-\Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\partial a_{\alpha,\beta,n}}{\partial x_\theta}\frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Sigma_\alpha\frac{\partial b_{\alpha,n}}{\partial x_\theta}\frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial c_n}{\partial x_\theta}h_n.\end{aligned}$$

on voit que le second membre est continu (L) ce qui étend la proposition au troisième ordre; on procède de même pour les dérivées jusqu'au huitième ordre.

Toutefois, nos calculs précédents supposaient qu'on forme la fonction G à l'aide d'un domaine débordant D. Ici, on désignera par $\theta_\alpha(\alpha=1, 2, \ldots, m)$ les cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers l'intérieur de D; et, en posant

$$x_\alpha=\xi_\alpha+\theta_\alpha\lambda_m,$$

où les ξ_α sont les coordonnées des points de S, fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, les x_α sont fonctions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ dont les dérivées huitièmes sont continues (L). On prolongera hors de D, dans la région $\lambda_m<0$, les $a_{\alpha,\beta,n}$, $b_{\alpha,n}$, c_n, $\mathcal{F}(u_n)$ par des polynomes en λ_m du troisième degré, à coefficients dépendant de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, de façon à respecter la continuité sur S des fonctions et de leurs dérivées jusqu'au troisième ordre; on n'ira que jusqu'à une valeur de λ_m telle que l'équation reste de type elliptique dans le domaine étendu; la limite négative de λ_m *pourra être indépendante de n* à condition que u_n-u_0 et ses dérivées jusqu'au huitième ordre restent assez petits en valeur absolue.

Dans les mêmes conditions, nos équations linéaires successives sont toutes solubles (on suppose que S est d'un seul tenant).

Nous serons donc certains de la continuité (L) des dérivées huitièmes de u_n si nous le sommes de la continuité (L) des dérivées huitièmes de h_0; or, celle-ci s'établit par le même raisonnement, en s'appuyant sur la continuité (L) des dérivées huitièmes de φ.

Il faut cependant remarquer que l'exposant de cette continuité (L) diminue quand n augmente. Si nous l'appelons k_n pour les dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta,n}$, des $b_{\alpha,n}$, des c_n et de $\mathcal{F}(u_n)$, alors les dérivées cinquièmes de h_n seront continues (L) d'exposant $\frac{k_n}{1+k_n}$. On en déduit aisément que l'exposant de continuité (L) des dérivées troisièmes de $\mathcal{F}(u_{n+1})$ est $\frac{k_n}{1+k_n}$, et qu'on peut prendre le même exposant pour les dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta,n+1}$, $b_{\alpha,n+1}$, c_{n+1}. On aura donc

$$k_{n+1}=\frac{k_n}{1+k_n},$$

d'où

$$k_n=\frac{k_0}{1+nk_0}.$$

Soit alors M_n un nombre supérieur aux valeurs absolues de h_n et de ses dérivées jusqu'au huitième ordre, et au coefficient de la continuité (L) d'exposant $\frac{k_n}{1+k_n}$ de ces dernières. Soit encore N_n un nombre supérieur aux valeurs absolues de $\mathcal{F}(u_n)$ et de ses dérivées jusqu'au sixième ordre et au coefficient de la continuité (L) d'exposant k_n de ces dernières. On voit, d'après ce qui précède, que

$$M_n=\frac{gN_n}{k_n^2}, \qquad N_{n+1}=gM_n^2.$$

g étant une constante. Donc,

$$M_n=\frac{g^2}{k_n^2}M_{n-1}^2=\frac{g^2}{k_0^2}(1+nk_0)^2 M_{n-1}^2.$$

Le coefficient de M_{n-1}^2 étant évidemment moindre que AB^{α^n}, où α est une constante comprise entre *un* et *deux*, et où A et B sont deux constantes convenablement choisies, u_n et ses dérivées jusqu'au huitième ordre, tendent uniformément vers des limites dès que M_0 est assez petit, c'est-à-dire dès que t est assez petit. La limite u de u_n satisfait évidemment à l'équation; le théorème est donc démontré.

Remarquons toutefois que nous avons prouvé seulement la continuité des dérivées huitièmes de u et non leur continuité (L). A ne considérer que ce résultat, il semble qu'on ne puisse pas prendre u comme point de départ de nouvelles approximations successives, ce qui serait un grave inconvénient. Mais cet inconvénient n'existe pas; on aurait pu, en effet, supprimer des hypothèses la continuité (L) des dérivées huitièmes de u_0, qui résulte des autres hypothèses si les valeurs de u_0 sur S ont des dérivées huitièmes continues (L). Nous nous bornons à signaler ce point, dont la démonstration [1] se rattache à l'étude générale des dérivées de tout ordre des solutions de (18,1) et nous entraînerait hors du cadre de cet article, destiné à montrer une application de la méthode des approximations successives, introduite dans la science par M. Picard.

C'est parce que les propositions (16) et (17) supposent la continuité (L) des dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta}$ que nous avons été amenés à introduire les dérivées huitièmes de u_0. On voit donc que l'énoncé se simplifie si les $a_{\alpha,\beta}$ ne dépendent pas des dérivées secondes; la simplification est plus grande s'ils ne dépendent pas non plus des p_α, et encore plus grande s'ils ne dépendent pas non plus de u; dans ce dernier cas, il suffit de supposer la continuité (L) des dérivées quatrièmes de u_0 et de φ.

(1) Cette démonstration est analogue, même pour S, à la démonstration faite pour l'intérieur de D dans D., p. 110 (noter qu'il faut ajouter aux hypothèses de ce passage la continuité (L) des dérivées troisièmes de u), grâce à la proposition (17), qui n'a pas d'analogue dans le travail cité. Mais, pour le point qui nous occupe spécialement, il faudrait avoir établi la proposition (16) en nous servant seulement de la continuité (L) des dérivées *secondes* des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α et de c, ce que notre marche abrégée n'a pas permis.