JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HAAG

Sur le frottement dans les cames et engrenages et dans les trains épicycloïdaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 209-229.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__209_0>

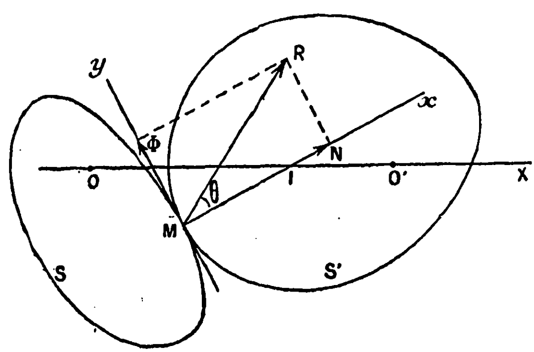
Sur le frottement dans les cames et engrenages et dans les trains épicycloïdaux;

PAR J. HAAG.

I. — Frottement des cames et engrenages.

1. *Condition générale d'équilibre d'une came.* — On étudie habituellement l'influence du frottement dans les engrenages plans, en considérant successivement les cas de l'engrenage extérieur, de l'engrenage intérieur avec roue conductrice et de l'engrenage intérieur avec pignon conducteur. Chacun de ces trois cas se subdivise lui-même en deux, suivant que le frottement est *rentrant* ou *sortant*. Cela donne en tout six cas différents.

Fig. 1.



Nous allons les traiter simultanément, par une méthode algébrique générale, qui s'appliquera à une came de forme quelconque.

Soient S et S′ les deux cames (*fig.* 1), O et O′ leurs centres de rotation respectifs, M leur point de contact, Mx leur normale commune, orientée *vers l'extérieur de* S, et My leur tangente commune, orientée dans un sens tel que le sens de Mx vers My soit le sens positif de rotation du plan. Soit enfin I le point de rencontre de Mx avec la ligne des centres OO′, laquelle sera supposée orientée dans le sens OX, qui va de O vers O′.

Nous poserons

$$(1)\qquad \overline{\mathrm{OI}} = \rho, \qquad \overline{\mathrm{O'I}} = \rho', \qquad \overline{\mathrm{OO'}} = \rho - \rho' = a > 0;$$

$$(2)\qquad \widehat{\mathrm{OX}, \mathrm{M}x} = \alpha, \qquad \overline{\mathrm{IM}} = z.$$

Soient $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ la réaction de S sur S′, N sa composante normale et Φ sa composante tangentielle ou *force de frottement*. Soient, en outre, C et C′ les couples algébriques respectivement appliqués à S et à S′.

Si l'on néglige le frottement de S′ sur son axe O′ et si l'on appelle x, y les coordonnées de O′ par rapport aux axes $x\mathrm{M}y$, la condition d'équilibre de S′ s'écrit

$$\mathrm{C}' + \mathrm{N}y - \Phi x = 0.$$

Or, en projetant

$$\overrightarrow{\mathrm{MO'}} = \overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IO'}}$$

sur Mx et sur My, on a

$$x = -z - \rho' \cos\alpha, \qquad y = \rho' \sin\alpha;$$

d'où

$$\mathrm{C}' + \Phi(z + \rho' \cos\alpha) + \mathrm{N}\rho' \sin\alpha = 0.$$

Introduisons l'angle $\theta = \widehat{\mathrm{M}x, \mathrm{MR}}$. Nous avons

$$(3)\qquad \Phi = \mathrm{N} \operatorname{tang}\theta.$$

En portant dans l'équation ci-dessus, il vient

$$(4)\qquad \mathrm{C}' = \frac{-\mathrm{N}}{\cos\theta}\left[\rho' \sin(\alpha + \theta) + z \sin\theta\right].$$

L'équation d'équilibre de S s'obtient en changeant C′ en C, ρ' en ρ et N en $-$N, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction :

$$(5)\qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{N}}{\cos\theta}\left[\rho \sin(\alpha + \theta) + z \sin\theta\right].$$

En éliminant N, il vient

$$\frac{C'}{C} = -\frac{\rho' \sin(\alpha+\theta) + z \sin\theta}{\rho \sin(\alpha+\theta) + z\sin\theta}. \tag{6}$$

Voilà tout ce que nous apprend la Mécanique rationnelle.

2. Si nous supposons maintenant que la liaison est unilatérale, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune adhérence entre les cames, N *doit être positif;* sinon, il y a *décollement.*

Si nous admettons, en outre, les lois du frottement, en appelant φ l'angle de frottement, on doit avoir, *pour l'équilibre*,

$$-\varphi < \theta < \varphi. \tag{7}$$

Lorsque θ atteint l'une des limites $\pm\varphi$, la came se met en mouvement; il y a *démarrage.*

Si la came fonctionne d'un *mouvement uniforme* ou si son inertie est négligeable, on a $\theta = \pm\varphi$ pendant tout le mouvement ([1]).

Pour savoir le sens du démarrage ou du fonctionnement uniforme, il faut se rappeler que le vecteur $\vec{\Phi}$ est de sens opposé au vecteur $\vec{G}$, vitesse de glissement de S′ sur S.

Lorsqu'il y a équilibre, il est entendu que la came reste au repos. Néanmoins, le mouvement *tend à se produire* dans un certain sens ([2]). Ce sens est celui dans lequel le mouvement aurait lieu effectivement, si l'angle de frottement devenait égal à 0. Nous appellerons *vitesses naissantes* tout système de vitesses angulaires ω et ω', qui, attribuées respectivement à S et à S′, produiraient un mouvement ayant le sens en question. Les signes de ces vitesses sont faciles à déterminer.

On a d'abord, eu égard à la liaison cinématique imposée par le contact des deux cames,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{\rho}. \tag{8}$$

([1]) En réalité, l'angle φ dont il s'agit ici est l'angle de frottement de glissement, qui est généralement plus petit que l'angle de frottement au repos.

([2]) Il se produit d'ailleurs un peu, aussitôt après l'application des couples C et C′, grâce au jeu qui existe toujours entre les deux cames. Ce mouvement imperceptible se poursuit jusqu'au moment où la déformation élastique des deux pièces en contact a fait naître la réaction R.

On en déduit que la vitesse angulaire de S′ par rapport à S est

$$\omega' - \omega = \frac{\omega a}{\rho'}.$$

Par suite, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{G}$ sur My est

$$G = \frac{\omega a z}{\rho'}. \tag{9}$$

Comme Φ a le signe de θ [1] et le signe opposé à G, on doit avoir, en se rappelant que a est positif,

$$\omega z \rho' \theta < 0. \tag{10}$$

Cela détermine évidemment le signe de ω.

3. *Rendement virtuel.* — Imaginons que les cames soient animées de leurs vitesses naissantes ω et ω'. La puissance virtuelle *fournie* à S est $C\omega$. La puissance virtuelle *reçue* par S′ est $-C'\omega'$. Nous appellerons *rendement virtuel* le rapport

$$r = \frac{-C'\omega'}{C\omega} = -\frac{C'}{C}\cdot\frac{\rho}{\rho'}, \tag{11}$$

ou, d'après (6),

$$r = \frac{\sin(\alpha+\theta) + \frac{z}{\rho'}\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta) + \frac{z}{\rho}\sin\theta}. \tag{12}$$

La différence

$$p = 1 - r = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\frac{z\sin\theta}{\sin(\alpha+\theta) + \frac{z}{\rho}\sin\theta} \tag{13}$$

mesure la fraction de puissance motrice virtuelle absorbée par le frottement. Elle est donc égale *a priori* à

$$p = \frac{-\Phi G}{C\omega}, \tag{14}$$

ce qu'on vérifie sans peine à l'aide des formules (3), (9), (5) et (1).

---

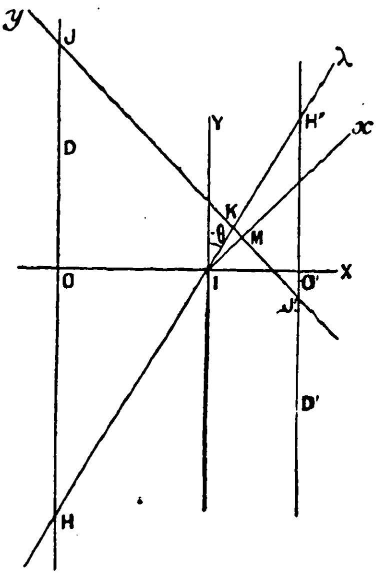
[1] En supposant toutefois $N > 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas décollement.

Si ω est véritablement une vitesse naissante, c'est-à-dire satisfait à l'inégalité (10), ΦG est négatif, en supposant toutefois N positif; donc, p a le signe de $C\omega$. On en déduit le *signe que doit avoir* C pour que N soit effectivement positif, c'est-à-dire *pour qu'il n'y ait pas décollement.* Ce signe est celui de ω *si* $r < 1$; *la came* S *est conductrice.* C'est le signe opposé *si* $r > 1$; *la came* S *est conduite.*

Si r *est négatif,* $C\omega$ et $C'\omega'$ sont de même signe, d'après (11). Comme $r < 1$, ce signe est positif. Autrement dit, *les deux cames sont conductrices.* Cet état particulier d'équilibre ne peut donc avoir lieu si le mécanisme est utilisé comme il doit l'être dans la pratique, une came devant conduire l'autre.

4. *Représentation géométrique du rendement virtuel.* — La formule (12) est susceptible d'une représentation géométrique fort élégante.

Fig. 2.



Menons les droites D, D' et IY, perpendiculaires à OO' en O, O' et I (*fig.* 2). Traçons ensuite la droite $I\lambda$ telle que

$$\widehat{IY, I\lambda} = -\theta.$$

Cette droite rencontre D en H, D′ en H′ et My en K. On a, en projetant $\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ sur OX,

$$-\rho = \overline{\mathrm{IH}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \overline{\mathrm{IH}} \sin\theta.$$

De même, en projetant $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ sur $\mathrm{I}x$,

$$z = \overline{\mathrm{IK}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha\right) = \overline{\mathrm{IK}} \sin(\alpha + \theta);$$

d'où

$$\overline{\mathrm{KH}} = \overline{\mathrm{IH}} - \overline{\mathrm{IK}} = -\frac{\rho}{\sin\theta} - \frac{z}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{-\rho\left[\sin(\alpha+\theta) + \frac{z}{\rho}\sin\theta\right]}{\sin\theta\sin(\alpha+\theta)}.$$

On en déduit $\overline{\mathrm{KH'}}$ en remplaçant ρ par ρ'. En divisant les deux expressions obtenues et comparant à (12), il vient

$$r = \frac{\overline{\mathrm{KH'}}}{\overline{\mathrm{KH}}} \cdot \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\overline{\mathrm{KH'}}}{\overline{\mathrm{KH}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{IH}}}{\overline{\mathrm{IH'}}} = \frac{\overline{\mathrm{KH'}}}{\overline{\mathrm{KH}}} : \frac{\overline{\mathrm{IH'}}}{\overline{\mathrm{IH}}}, \tag{15}$$

ce qui s'exprime finalement par le *rapport anharmonique* (¹)

$$r = (\mathrm{H'HKI}). \tag{16}$$

Si l'on se reporte à ce qui a été dit au numéro précédent, on peut déduire immédiatement de cette formule le *tableau de conduite* ci-après :

Premier cas : I est entre O et O′ $\left\{\begin{array}{l}\text{K sur IH}' : \text{S conduit.}\\ \text{K sur IH} : \text{S}' \text{ conduit.}\\ \text{K extérieur à HH}' : \text{S et S}' \text{ conduisent.}\end{array}\right.$

(¹) On en déduit, si l'on veut, d'après une propriété connue du rapport anharmonique,

$$p = 1 - r = (\mathrm{H'KHI}) = (\mathrm{HIH'K}) = \frac{\overline{\mathrm{H'H}}}{\overline{\mathrm{H'I}}} \cdot \frac{\overline{\mathrm{KI}}}{\overline{\mathrm{KH}}}.$$

On peut aussi représenter géométriquement la formule (5). En projetant H en E sur My, on trouve, par un calcul facile,

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{C}}{\overline{\mathrm{HE}}\,\mathrm{tang}\,\theta},$$

la mesure algébrique $\overline{\mathrm{HE}}$ étant évaluée suivant $\mathrm{I}x$.

Deuxième cas : I est à droite de OO′	K sur IH′ : S conduit. K extérieur à IH : S′ conduit. K sur HH′ : S et S′ conduisent.
Troisième cas : I est à gauche de OO′	K extérieur à IH′ : S conduit. K sur IH : S′ conduit. K sur HH′ : S et S′ conduisent.

Signalons encore la formule suivante, obtenue en comparant (11) et (15) :

$$\frac{C'}{C} = -\frac{\overline{KH'}}{\overline{KH}} = -\frac{\overline{KJ'}}{\overline{KJ}} \tag{17}$$

On peut dire que la condition d'équilibre est la même que s'il n'y avait pas frottement, les points O, O′, I étant remplacés par J, J′, K.

5. *Étude graphique de l'équilibre et du fonctionnement.* — Étant donnée une came de forme absolument quelconque, il nous est maintenant très facile d'étudier graphiquement ses conditions d'équilibre et de fonctionnement.

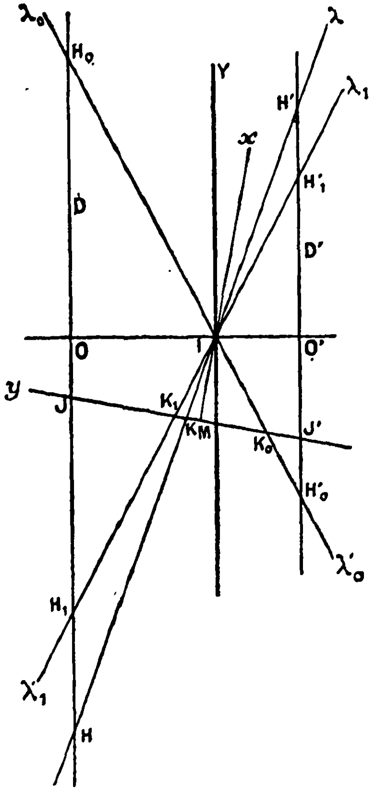
Menons les deux droites $I\lambda_0$ et $I\lambda_1$, faisant l'angle φ avec IY (*fig.* 3). Les couples C et C′ étant donnés, ainsi que la tangente commune My aux deux profils, construisons le point K, qui divise JJ′ dans le rapport $-\frac{C'}{C}$, conformément à (17). *Pour qu'il y ait équilibre, il faut que ce point soit dans l'un des deux angles* $\lambda_0 I \lambda_1$ *et* $\lambda'_0 I \lambda'_1$, puisque θ doit être compris entre $-\varphi$ et $+\varphi$.

Cette condition étant supposée remplie, il faut encore *voir s'il n'y a pas décollement.* A cet effet, on détermine le signe de la vitesse naissante ω, par l'inégalité (10). Le tableau de conduite du n° 4 indique si S doit tendre à conduire ou à être conduite, c'est-à-dire si C doit avoir le signe de ω ou le signe opposé.

Par exemple, dans le cas de la figure 3, qui est celui des *engrenages*, le rapport $\frac{C}{C'}$ doit être compris entre $-\frac{\overline{K_0 J}}{\overline{K_0 J'}}$ et $-\frac{\overline{K_1 J}}{\overline{K_1 J'}}$. En outre, θ est positif; donc, d'après (10), ω doit être négatif, car ρ' et z le sont. Enfin, le tableau de conduite nous apprend que S′ doit tendre à conduire; donc C et C′ doivent être positifs. C'est bien ce qu'indique le bon sens sur la figure 1.

Si, laissant C fixe, on fait croître C′, le point K se déplace vers K_1. Lorsqu'il atteint K_1, *le démarrage se produit*, S′ devenant effective-

Fig. 3.



ment conductrice et tournant dans le sens positif. Le *rendement réel* de la came est alors $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{(H'_1 H_1 K_1 I)} = (H_1 H'_1 K_1 I) = \frac{\overline{K_1 H_1}}{\overline{K_1 H'_1}} : \frac{\overline{IH_1}}{\overline{IH'_1}}.$$

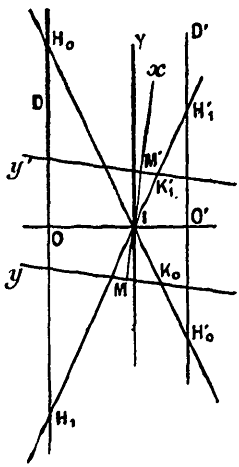
Observons qu'on est dans le cas du *frottement sortant*.

Supposons maintenant que C′ décroisse. Le point K se déplace vers K_0. Au moment où il traverse IY, on se trouve dans les conditions d'équilibre sans frottement : le mouvement naissant n'a plus de sens déterminé. Puis, θ devient négatif; donc, ω devient positif. En outre, S tend à devenir conductrice, car K passe sur IH'. Quand K atteint K_0, *le démarrage se produit*, S devenant effectivement conductrice et tournant dans le sens positif. Le rendement réel est alors r, soit $(H'_0 H_0 K_0 I)$. On se trouve d'ailleurs dans le cas du *frottement rentrant.*

On voit qu'avec une telle came, *le mouvement peut avoir lieu dans les deux sens, avec changement de conduite. La came est réversible.*

Si l'on considère deux positions de My symétriques par rapport à I (*fig.* 4), c'est-à-dire correspondant à deux valeurs opposées de z, les

Fig. 4.

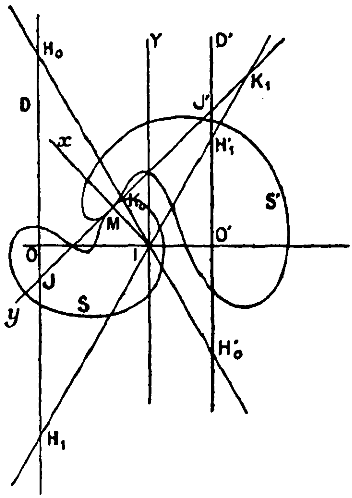


rendements correspondants sont $(H'_0 H_0 K_0 I)$ et $(H'_1 H_1 K'_1 I)$, en supposant que S tourne dans le sens positif. On voit que, si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, comme cela a lieu pour un engrenage, IK_0 est supérieur à IK'_1; donc, le premier rendement est inférieur au second. C'est en ce sens que l'on peut dire que *le frottement rentrant est plus nuisible que le frottement sortant.* Mais, si α était $> \frac{\pi}{2}$, on aurait la conclusion inverse. D'ailleurs, dans la pratique des engrenages, les différences sont toujours très faibles.

6. Considérons maintenant le cas de la figure 5. La condition d'équilibre est toujours que K se trouve sur le segment $K_0 K_1$. Si l'on a d'abord $\frac{C}{C'} = -\frac{\overline{K_0 J}}{\overline{K_0 J'}}$, il y a *démarrage;* S' conduit dans le sens positif.

Laissant maintenant C′ fixe, augmentons C de manière à essayer de produire le démarrage en sens inverse. Nous commençons, bien

Fig. 5.



entendu, par avoir l'équilibre. La vitesse naissante de S est d'abord négative, puis devient positive, dès que $\frac{C}{C'}$ dépasse $-\frac{\rho}{\rho'}$. Mais, le point K atteint J′ avant K_1. Donc, C *devient infini avant que le démarrage cherché se soit produit.* Celui-ci ne peut avoir lieu que si les deux cames sont conductrices, comme cela résulte d'ailleurs du tableau de conduite du n° 4. C'est le phénomène bien connu de *l'arc-boutement.* La came est *irréversible.*

7. Examinons maintenant la figure 6. On voit qu'il y a *arc-boutement dans les deux sens*, la came ne peut fonctionner.

Dans la figure 7, la came peut fonctionner dans les deux sens; mais, *c'est toujours* S *qui conduit*, dans le sens positif quand K est en K_1, dans le sens négatif quand K est en K_0. En outre, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le rapport $\frac{C}{C'}$ soit $< -\frac{\overline{K_1J}}{\overline{K_1J'}}$ ou bien $> -\frac{\overline{K_0J}}{\overline{K_0J'}}$ et non plus qu'il soit compris entre ces deux limites, comme dans le cas de la figure 3.

Supposons, par exemple, que le mouvement uniforme de S ait d'abord lieu dans le sens positif, ce qui correspond à la position K_1 du point K. Les deux couples sont alors positifs. Pour arrêter le mouvement, en supposant que C' garde une valeur constante, il faut

Fig. 6.

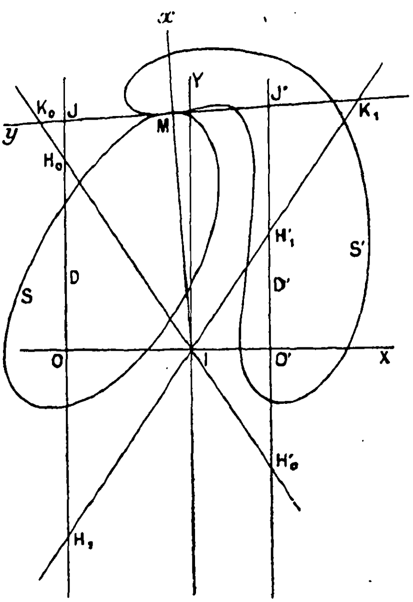
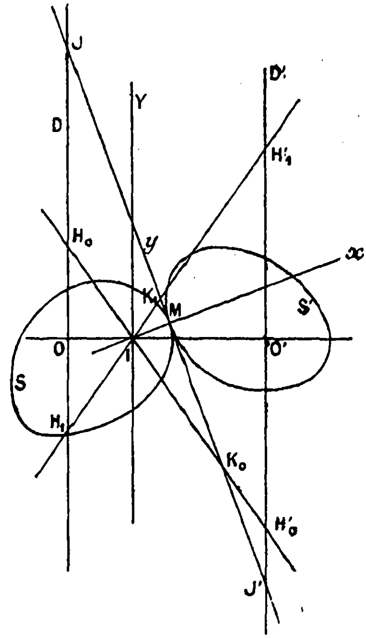


Fig. 7.



diminuer C. L'équilibre persiste si C décroît jusqu'à zéro (K en J), puis jusqu'à $-C'$ (K à l'infini), puis jusqu'à $-\infty$ (K en J'). Le second démarrage ne peut donc être obtenu en diminuant C.

Partons maintenant du mouvement uniforme correspondant à la position K_0 du point K. Il est produit en donnant aux deux couples des valeurs négatives. Si, laissant C' fixe, on veut arrêter le mouvement, il faut, comme tout à l'heure, diminuer C algébriquement. Mais, on l'augmente alors en valeur absolue, en lui gardant le sens négatif, et l'équilibre persiste si grande que soit cette valeur absolue.

On voit que, bien qu'il puisse tourner dans les deux sens, ce mécanisme *n'est pas, à proprement parler, réversible*. Il ne peut changer de sens que si l'on renverse le sens des deux couples. Sinon, *il s'arc-boute*.

8. *Rendement moyen d'un engrenage.* — Le rendement r est un *rendement instantané*, qui varie en général [1] pendant le fonctionnement de la came. Dans le cas particulier des engrenages, il est intéressant de connaître le *rendement moyen*.

Soient n et n' les nombres de dents des deux roues. Quand la roue conductrice, S par exemple, tourne de l'angle $\frac{2\pi}{n}$, dans le sens positif, le travail moteur est $T_m = C.\frac{2\pi}{n}$. Soit, d'autre part, T_f le travail absorbé par le frottement. Le rendement moyen est

$$r_m = \frac{T_m - T_f}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}.$$

Le *coefficient moyen de perte de puissance* est

$$p_m = 1 - r_m = \frac{T_f}{T_m}.$$

Le calcul exact de T_f dépend de la forme des dents. Il est très simple pour des *dents en développante de cercle*. L'angle α est alors constant et l'angle de rotation élémentaire $d\beta$ de S est lié à dz par la relation

$$(18) \qquad dz = R \sin\alpha \, d\beta,$$

en appelant R le rayon de la circonférence primitive. Le travail élémentaire de la force de frottement est

$$dT_f = pC\frac{dz}{R\sin\alpha},$$

p étant donné par la formule (13), où l'on doit faire $\rho = R$ et $\rho' = -R'$, en supposant l'engrenage *extérieur*. De plus, il faut prendre $\theta = -\varphi$ avant la ligne des centres et $\theta = +\varphi$ après.

Si la conduite a lieu sur une longueur égale au pas h, répartie en kh avant la ligne des centres et $(1-k)h$ après, z varie de $-kh \sin\alpha$ à zéro pour $\theta = -\varphi$ et de zéro à $(1-k)h \sin\alpha$ pour $\theta = +\varphi$. Le calcul des deux intégrales correspondantes n'offre aucune difficulté et l'on

---

[1] On peut toutefois déterminer le profil d'une came à rapport de transmission et à rendement instantané constants. C'est un petit problème de géométrie infinitésimale, qui peut être poussé facilement jusqu'au bout.

obtient

$$T_f = C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\left(h - \frac{R}{\sin\alpha \sin\varphi} X\right),$$

en posant

$$X = \sin(\alpha - \varphi) \log\left[1 + \frac{kh \sin\alpha \sin\varphi}{R \sin(\alpha - \varphi)}\right] + \sin(\alpha + \varphi) \log\left[1 + \frac{(1 - k) h \sin\alpha \sin\varphi}{R \sin(\alpha + \varphi)}\right].$$

Ce travail est minimum lorsque X est maximum, ce qui a lieu pour

$$k = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2 \sin\alpha \cos\varphi} = \frac{1}{2}(1 - f \cot\alpha).$$

En posant $t = \frac{f\pi}{n}$, on trouve que le minimum de T_f est

$$2\pi C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\left[1 - \frac{\log(1 + t)}{t}\right].$$

Pratiquement, t est très petit. En réduisant le crochet à sa partie principale, on trouve la valeur suivante pour le rendement moyen :

$$r_m = 1 - \frac{f\pi}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

9. Le calcul exact peut encore se faire avec des dents épicycloïdales. Mais, il est beaucoup plus compliqué. D'ailleurs, il présente peu d'intérêt pratique. *Quelle que soit la forme des dents*, si elles sont petites, on peut admettre approximativement la formule (18) et réduire, d'autre part, le dénominateur de (13) à $\sin\alpha$, à condition que f soit assez petit. Dans ces conditions, on a la *formule approchée*

$$r_m = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)(2k^2 - 2k + 1). \tag{19}$$

Ce rendement moyen est maximum pour $k = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire *pour la conduite symétrique*. Il vaut alors $1 - \frac{f\pi}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)$.

Si, comme on le suppose habituellement, la conduite a lieu *entièrement après la ligne des centres*, on a, au contraire, $k = 0$; d'où

$$r_m = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right). \tag{20}$$

On retrouve une formule bien connue de la théorie des engrenages. Si l'engrenage est intérieur, la parenthèse doit simplement être remplacée par $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right|$.

Si la conduite a lieu sur une longueur λh inférieure au pas, comme dans les dents hélicoïdales, il suffit de remplacer f par λf. Si l'arc de conduite est, au contraire, supérieur au pas, f doit être majoré dans une certaine proportion, qu'il est d'ailleurs difficile d'évaluer, parce qu'on ne connaît pas exactement la répartition des efforts sur les dents en prise.

II. — Le frottement dans les trains épicycloïdaux.

10. *Rendement et équilibre d'un train fixe.* — Si un train d'engrenages est monté sur un châssis fixe, son rendement moyen est évidemment le produit des rendements moyens des engrenages simples qui le constituent, chacun de ces rendements étant donné par une formule telle que (20).

Chaque engrenage étant réversible, il en est de même du train. En outre, du fait qu'on applique la formule approchée (20), on admet que le rendement moyen est pratiquement le même quelle que soit la roue conductrice.

Soient r ce rendement, ω et ω' les vitesses angulaires des deux roues extrêmes A et A', en mouvement uniforme, C et C' les couples qui leur sont appliqués. Suivant que A conduit ou est conduite, on a

$$rC\omega + C'\omega' = 0, \tag{21}$$

ou bien

$$C\omega + rC'\omega' = 0. \tag{22}$$

Si $k = \frac{\omega}{\omega'}$ est la *raison* du train, ces équations s'écrivent

$$rkC + C' = 0, \tag{23}$$

$$kC + rC' = 0. \tag{24}$$

La condition d'équilibre est que le rapport $\frac{C}{C'}$ soit compris entre les deux limites définies par ces équations.

Comme pour les engrenages simples, il est commode d'introduire le *rendement virtuel*, que nous appellerons s et qui sera défini par l'égalité

$$skC + C' = 0. \tag{25}$$

La condition d'équilibre s'écrit alors

$$r < s < \frac{1}{r}. \tag{26}$$

Le signe de la *vitesse naissante* ω est défini par la condition

$$C\omega > 0, \qquad \text{si } s < 1; \tag{27}$$

$$C\omega < 0, \qquad \text{si } s > 1. \tag{28}$$

11. *Le train épicycloïdal du point de vue cinématique.* — Un train épicycloïdal est, comme l'on sait ([1]), constitué par un train d'engrenages monté sur un châssis pouvant tourner autour de l'axe d'une de ses roues extrêmes. Il possède en général deux degrés de liberté. Mais on peut lui imposer une liaison supplémentaire par le moyen d'un train fixe extérieur. Nous envisagerons d'abord cette hypothèse.

Soient donc les deux roues A et A′, montées folles sur le même axe O. Elles sont reliées par un train fixe T. Si k est la raison de ce train, on a

$$\frac{\omega}{\omega'} = k. \tag{29}$$

Un châssis B est monté fou sur l'axe O et peut tourner avec la vitesse angulaire α. Il porte un train mobile T′, dont les roues extrêmes sont A et A′. Si k est sa raison, on a

$$\frac{\omega - \alpha}{\omega' - \alpha} = k'. \tag{30}$$

Des équations (29) et (30), on tire

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{k(1 - k')}{k - k'}. \tag{31}$$

([1]) *Cf.* Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. I, p. 130.

12. *Condition d'équilibre sans frottement.* — Soient a, a', b les couples appliqués respectivement à A, A', B. Si l'on néglige les frottements, la condition d'équilibre ou de fonctionnement uniforme s'obtient immédiatement par le théorème des travaux virtuels ou des forces vives

$$ak + a' + b\frac{k - k'}{1 - k'} = 0. \tag{32}$$

13. *Condition d'équilibre avec frottement.* — Soient r et r' les rendements respectifs de T et de T'. Nous allons écrire séparément les conditions d'équilibre de T, de T' et de B.

Équilibre du train fixe. — Il faut chercher les couples appliqués à A et à A', *extérieurement à* T.

Les forces appliquées à A comprennent le couple a et les réactions des satellites du train mobile qui engrènent avec A. Soit x le moment résultant de ces réactions par rapport à O. Le couple total appliqué à A, extérieurement à T, est $a + x$.

Le couple analogue appliqué à A' est $a' + x'$, en appelant x' le moment résultant des réactions exercées par les satellites qui engrènent avec cette roue. Dès lors, si s désigne le rendement virtuel de T, on a

$$sk(a + x) + a' + x' = 0, \tag{33}$$

avec les inégalités (26).

De plus, le signe de la vitesse naissante ω est défini par la condition

$$(1 - s)(a + x)\omega > 0. \tag{34}$$

Équilibre du train mobile. — Il faut chercher les couples appliqués à A et à A', *extérieurement à* T'.

Soit C celui de ces couples qui est appliqué à A. La roue A est en équilibre sous l'action des couples C et x. Si l'on néglige le frottement qu'elle exerce sur son axe, on a $C + x = 0$; d'où $C = -x$. Le couple appliqué à A' est, de même, égal à $-x'$. Dès lors, si s' désigne le rendement virtuel de T', on a

$$s'k'x + x' = 0, \tag{35}$$

avec la double inégalité

$$r' < s' < \frac{1}{r'}. \tag{36}$$

Le signe de la vitesse naissante ω de A est déterminé par la condition

$$(1 - s')(-x)(\omega - \alpha) > 0$$

ou, en tenant compte de (31),

$$(1 - s')x\omega\frac{k'(1 - k)}{k(1 - k')} < 0,$$

soit enfin

$$P(1 - s')x\omega < 0, \tag{37}$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$P = kk'(1 - k)(1 - k'). \tag{38}$$

Équilibre du châssis. — Considérons, plus exactement, le système constitué par le châssis et les satellites. Il est soumis aux couples extérieurs $-x$, $-x'$ et b. Donc, si l'on néglige le frottement du châssis sur l'axe O, on a

$$b = x + x'. \tag{39}$$

Équilibre du mécanisme complet. — La condition de cet équilibre s'obtient en éliminant x et x' entre (33), (35) et (39), ce qui donne

$$(ska + a')(1 - s'k') + b(sk - s'k') = 0, \tag{40}$$

avec les conditions (26) et (36).

De plus, comme on doit pouvoir déterminer la vitesse naissante ω de manière à satisfaire à la fois aux inégalités (34) et (37), on doit avoir aussi

$$(1 - s)(a + x)P(1 - s')x < 0$$

ou, en tirant x de (35) et (39),

$$P(1 - s)(1 - s')b[a(1 - s'k') + b] < 0. \tag{41}$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer les deux nombres s et s' vérifiant (40), (26), (36) et (41). On peut toujours arriver à reconnaître s'il en est ainsi quand toutes les données sont numériques. Mais, la discussion générale paraît inextricable.

14. *Conditions de démarrage.* — Le démarrage se produit quand s et s' atteignent l'une des limites qui leur sont imposées par (26) et (36). Il y a *a priori* quatre manières différentes d'y arriver :

Cas AA : $s = r$, $s' = r'$; A conduit dans T et dans T'.

Cas AA' : $s = r$, $s' = \frac{1}{r'}$; A conduit dans T, A' dans T'.

Cas A'A : $s = \frac{1}{r}$, $s' = r'$; A' conduit dans T, A dans T'.

Cas A'A' : $s = \frac{1}{r}$, $s' = \frac{1}{r'}$; A' conduit dans T et dans T'.

Pour chacune de ces combinaisons, s et s' sont simplement assujettis à vérifier (41), ce qui donne les quatre inégalités

$$Pb[a(1 - k'r') + b] < 0 \quad \text{(AA)}; \tag{42}$$

$$Pb[a(r' - k') + br'] > 0 \quad \text{(AA')}; \tag{43}$$

$$Pb[a(1 - r'k') + b] > 0 \quad \text{(A'A)}; \tag{44}$$

$$Pb[a(r' - k') + br'] < 0 \quad \text{(A'A')}. \tag{45}$$

Dans chaque cas, le signe de la vitesse de démarrage est donné par l'une ou l'autre des inégalités (34) et (37). Par exemple, (37) devient

$$\omega P b(1 - r'k') < 0 \quad \text{(cas AA et A'A)}; \tag{46}$$

$$\omega P b(r' - k') > 0 \quad \text{(cas AA' et A'A')}. \tag{47}$$

15. *Supposons donnés les couples* a et b et cherchons à calculer a' de manière à produire le démarrage.

Les inégalités (42) et (44) sont contradictoires; donc, une d'elles et une seule est nécessairement vérifiée. Il en est de même pour (43) et (45). Il y a donc *toujours deux solutions*, pouvant se répartir comme il suit :

AA, AA'; AA, A'A'; AA', A'A; A'A, A'A'.

La valeur de a' produisant le mouvement est, chaque fois, donnée par (40), en remplaçant s et s' par les valeurs convenables.

Dans chaque cas, *les deux démarrages ont lieu avec une conduite différente dans le train mobile.*

Le sens du mouvement est donné par (46) pour la solution où A conduit dans T′ et par (47) pour l'autre. Le produit $\omega_1\omega_2$ des deux vitesses angulaires a le signe contraire à $(k'-r')\left(k'-\frac{1}{r'}\right)$. Donc, si k' est compris entre r' et $\frac{1}{r'}$, ω_1 et ω_2 sont de même signe; les deux mouvements ont lieu dans le même sens; le mécanisme est *irréversible*. On a la conclusion inverse, si $k'<r'$ ou si $k'>\frac{1}{r'}$.

16. *Donnons-nous maintenant* a et a' et cherchons les valeurs de b produisant le démarrage. Si l'on tire b de (40) et que l'on porte dans (41), il vient

$$P(1-s)(1-s')(a'+as'k')(a'+ask)<0,$$

ce qui donne lieu aux quatre inégalités

$$Px_1x_2<0 \quad (\text{cas AA}); \tag{48}$$
$$Px_3x_2>0 \quad (\text{cas AA}'); \tag{49}$$
$$Px_1x_4>0 \quad (\text{cas A}'\text{A}); \tag{50}$$
$$Px_3x_4<0 \quad (\text{cas A}'\text{A}'); \tag{51}$$

en posant

$$x_1=a'+ar'k', \qquad x_2=a'+ark, \qquad x_3=a'+\frac{ak'}{r'}, \qquad x_4=a'+\frac{ak}{r}. \tag{52}$$

Le sens du mouvement est déterminé par

$$\omega(r'k'-rk)x_1>0 \quad (\text{cas AA}); \tag{53}$$
$$\omega(k'-rr'k)x_3>0 \quad (\text{cas AA}'); \tag{54}$$
$$\omega(rr'k'-k)x_1<0 \quad (\text{cas A}'\text{A}); \tag{55}$$
$$\omega(rk'-r'k)x_3<0 \quad (\text{cas A}'\text{A}'). \tag{56}$$

La discussion complète serait longue, mais facile. Cherchons seulement à nous rendre compte du nombre de solutions que l'on peut obtenir.

Si $x_1x_2x_3x_4<0$, on a l'un des cas AA, A′A′ et l'un des cas AA′, A′A; donc deux solutions.

Si $x_1 x_3 > 0$ et $x_2 x_4 > 0$, on a AA et A′A′, ou bien AA′ et A′A; donc encore deux solutions.

Si $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_4 < 0$, on a tous les cas ou aucun, c'est-à-dire quatre ou zéro solutions. Cette circonstance peut d'ailleurs se présenter. Supposons, par exemple, $a = -1$, $k' > 0$, $k'rr' < k < \frac{k'}{rr'}$. On peut alors choisir a' compris entre $k'r'$ et $\frac{k'}{r'}$ et aussi entre kr et $\frac{k}{r}$, ce qui entraîne $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 < 0$, $x_4 < 0$. Si $P > 0$, ce qui a lieu, par exemple, si $k' < rr'$, il n'y a pas de solution. Si $P < 0$, par exemple si $1 < k' < \frac{1}{rr'}$ et si $k'rr' < k < 1$, il y a quatre solutions.

En résumé, *il peut y avoir* 0, 2 *ou* 4 *valeurs de b produisant le démarrage.*

17. *Équilibre du train à deux degrés de liberté.* — Supposons que le train fixe n'existe pas. Nous avons simplement la relation (30) entre les vitesses angulaires ω, ω', α.

Si l'on néglige les frottements, les conditions d'équilibre sont obtenues immédiatement par le principe des travaux virtuels. On doit avoir

$$a\omega + a'\omega' + b\frac{\omega - k'\omega'}{1 - k'} = 0,$$

quels que soient ω et ω'. D'où

$$(57) \qquad a + \frac{b}{1-k'} = 0, \qquad a' - \frac{bk'}{1-k'} = 0.$$

Si l'on veut tenir compte du frottement des engrenages, il suffit d'écrire séparément l'équilibre du train et l'équilibre du châssis, ce qui donne les équations

$$(58) \qquad as'k' + a' = 0, \qquad a + a' + b = 0,$$

auxquelles il faut joindre les inégalités (36). En tenant compte de ces dernières, on voit que, si l'on se donne par exemple a, les conditions d'équilibre sont que a' soit compris entre $-ak'r'$ et $-\frac{ak'}{r'}$, b étant en outre égal à $-(a + a')$.

Si a' devient égal à l'une des limites précédentes, l'équilibre est rompu. Supposons, par exemple, $a' = -ak'r'$. La roue menante, dans T′, est A. Donc, on doit avoir $a(\omega - \alpha) > 0$. Cela nous indique si ω devient supérieur ou inférieur à α, suivant le signe de a.

D'autre part, suivant que b est supérieur, inférieur ou égal à $-(a + a')$, α devient positif, devient négatif ou reste nul.

On ne peut évidemment préciser davantage et il est impossible, sans le secours de la Dynamique, de calculer les rapports mutuels des trois vitesses.

Remarque. — La théorie exposée dans la seconde partie de ce Mémoire n'a aucunement à se préoccuper de la constitution de chaque train. Elle s'applique donc tout aussi bien si l'on suppose que les trains T et T′ sont remplacés par des mécanismes quelconques réalisant les mêmes conditions cinématiques, admettant les mêmes rendements et réversibles.