JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MARCHAUD

Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 337-425.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__337_0>

Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles;

PAR A. MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour objet l'étude des relations entre les propriétés différentielles des fonctions de variables réelles et celles de leurs différences, considérées comme fonction des accroissements. Il s'agira non seulement des dérivées entières, mais aussi des dérivées généralisées de Riemann-Liouville. Les deux premiers Chapitres sont consacrés aux fonctions d'une seule variable. Le dernier traite, pour simplifier, des fonctions de deux variables; l'extension à un nombre quelconque de variables se ferait aisément.

Dans le Chapitre premier, je donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de dérivées continues jusqu'à un ordre α entier ou non, et leur expression par une intégrale définie, qui explicite la variation continue de la dérivée avec l'indice. Ces résultats sont nouveaux. Ils s'obtiennent en considérant la dérivée comme une intégrale d'ordre négatif, après avoir transformé l'expression de l'intégrale d'ordre α de manière qu'elle puisse conserver un sens quand on y remplace α par un nombre non positif. Par exemple, pour que la fonction $f(x)$, *continue* dans $(0, 1)$, admette dans cet intervalle, ouvert à gauche, des dérivées continues jusqu'à l'ordre α inclus, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_0 t^{-\alpha-1}\left[f(x-t)-\frac{n}{1}f(x-2t)+\frac{n(n-1)}{2!}f(x-3t)-\ldots\right]dt \quad (\alpha<n)$$

soit uniformément convergente dans tout intervalle $(\delta^2, 1)$. Et l'on a

$$f^{(\alpha')}(x)=\frac{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha'-1}\left[f(x-t)-\frac{n}{1}f(x-2t+\ldots\right]dt}{\displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha'-1}e^{-t}(1-e^{-t})^n\,dt} \qquad (\alpha'\leqq\alpha).$$

Dans l'intégrale du numérateur, f est prolongée par zéro à gauche de l'origine.

De plus, en substituant à α' un nombre négatif $-\beta$ ou zéro, on obtient au second membre l'intégrale d'ordre β de $f(x)$ ou $f(x)$.

Enfin, on peut remplacer les différences par des combinaisons linéaires beaucoup plus générales.

Au Chapitre II, je commence par étudier les différences envisagées au point de vue de leur ordre infinitésimal par rapport à l'accroissement, plus précisément les fonctions $\omega_n(\delta)$ définies de la manière suivante :

Soit $f(x)$ une fonction *bornée* dans $(0, 1)$, $\omega_n[\delta, f(x)]$, et plus brièvement $\omega_n(\delta)$, désigne la limite supérieure de la différence $|\Delta_h^n f(x)|$ pour tous les couples (x, h) tels que les points x et $x+nh$ appartenant à l'intervalle, on ait $|h|\leqq\delta$. Pour une fonction continue, $\omega_1(\delta)$ est ce que M. de la Vallée Poussin [1] appelle son module de continuité.

Utilisant alors le théorème fondamental du Chapitre I, je retrouve, en la complétant, une proposition déduite par M. P. Montel [2] des propriétés de l'approximation d'une fonction bornée par des polynomes :

---

[1] De la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, p. 7 (Gauthier-Villars).

[2] P. Montel, *Sur les polynomes d'approximation* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 46, 1918, p. 163).

La fonction $f(x)$ admet, dans $(0, 1)$, toute dérivée continue dont l'ordre α fait converger l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha-1}\omega_n(t)\,dt$. Lorsque n est la partie entière de $\alpha+1$, $\omega_1[\delta, f^{(\alpha)}(x)]$ est au moins de l'ordre de

$$\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_n(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, la limitation est un peu moins simple. Si l'intégrale diverge, avec $\alpha < n$, la fonction ne peut admettre de dérivée bornée d'ordre supérieur à α.

Pour terminer, je donne, sous une forme un peu différente, un théorème de M. L.-E.-J. Brouwer (¹), et une application à la dérivée seconde généralisée, comprenant comme cas particulier le théorème de Schwartz sur les fonctions linéaires.

Dans le Chapitre III, on trouvera l'extension des résultats obtenus au Chapitre précédent, quand on fait des hypothèses sur une seule différence mêlée $\underset{(y)}{\Delta_\lambda^p}\ \underset{(x)}{\Delta_\delta^n} f(x, y)$ dans le carré $(\Delta) = \left\{\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{matrix}\right\}$, la fonction $f(x, y)$ étant supposée uniforme et bornée dans ce domaine.

Il est nécessaire, au préalable, d'étudier certaines fonctions particulières, qui jouent ici un rôle analogue à celui des polynomes dans le cas d'une seule variable : celles pour lesquelles la différence précédente est identiquement nulle et que j'appelle *pseudo-polynomes*. De même qu'un polynome satisfaisant à l'identité $\Delta_\delta^n f(x) \equiv 0$ est défini quand on connaît sa valeur pour un ensemble de n points, un pseudo-polynome est complètement déterminé par ses valeurs sur un *réseau*. J'appelle ainsi la figure représentée par les relations

$$R_n(x)\,S_p(y) = 0, \qquad \left\{\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{matrix}\right\},$$

où R_n et S_p désignent des polynomes de degré égal à l'indice, ayant toutes leurs racines réelles et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$.

Comme dans le cas d'une seule variable, on définit, à partir de la différence $\Delta^p\Delta^n f$, une fonction $\omega_{n,p}(\delta, \lambda)$. On démontre alors que, si

(¹) L.-E.-J. Brouwer, *Over differentie quotienten en differential quotienten* (*k. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam*, juin 1908, p. 38-45).

l'intégrale $\int_{\delta}\int_{\lambda} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \omega_{n,p}(t, u)\,dt\,du$ converge, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction admette toutes les dérivées continues

$$D^{(\beta')}_{y^{\beta'}} D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'}} = D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'}} D^{(\beta')}_{y^{\beta'}}, \qquad \begin{Bmatrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{Bmatrix}$$

est qu'on puisse trouver un réseau (n, p) tel que la fonction donnée possède sur les droites du réseau parallèles à Ox des dérivées continues $D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'}}$ et sur les parallèles à Oy des dérivées continues $D^{(\beta')}_{y^{\beta'}}$ (la continuité est entendue par rapport à la variable de dérivation).

Enfin, je termine par une application au cas où l'on fait des hypothèses sur deux différences $\underset{(x)}{\Delta^n}$ et $\underset{(y)}{\Delta^p}$, ce qui permet d'étendre une proposition due à M. P. Montel ([1]), et la généralisation du théorème de M. L.-E.-J. Brouwer.

La plupart des résultats contenus dans les deux derniers Chapitres ont été communiqués à l'Académie des Sciences ([2]) (24 mars 1924, 28 avril 1924). Ils avaient été obtenus par une méthode différente de celle du texte.

Je suis heureux d'exprimer ici ma vive gratitude à MM. Henri Lebesgue et Paul Montel dont les conseils et les encouragements m'ont été très précieux.

CHAPITRE I.

DÉRIVÉES D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE.

I. — Intégrale et dérivée généralisées de Riemann-Liouville.

1. Pour commencer, rappelons les définitions et les principales propriétés de l'intégrale et de la dérivée généralisées. Ces notions,

---

([1]) P. Montel, *Mémoire cité*, p. 191.

([2]) A. Marchaud, *Différences et Dérivées* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 178, 1924, p. 1057); *Différences et dérivées d'une fonction de deux variables* (*Ibid.*, p. 1467).

dont la première idée semble due à Leibnitz, ont été précisées par Liouville ([1]) et surtout par Riemann ([2]).

On sait que ce dernier appelle *intégrale d'ordre* α ($\alpha > 0$), d'une fonction $f(x)$, l'expression

$$\mathrm{I}_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt,$$

où a désigne une constante et $\Gamma(\alpha)$ la fonction eulérienne de seconde espèce. Lorsque α est entier $\mathrm{I}_a^{(\alpha)}$ est, comme on le voit facilement, le résultat obtenu en intégrant $f(x)$ α fois de suite à partir de a.

La *dérivée d'ordre* α, ($\alpha > 0$), se définit par la relation

$$\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) = \mathrm{D}^{(n)} \mathrm{I}_a^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{I}_a^{(n-\alpha)} f(x) \qquad n > \alpha.$$

Elle est indépendaute de l'*entier n* et se réduit à la dérivée ordinaire pour α entier [n° **3**].

Ces fonctions dépendent, en général, de la constante a, qu'il sera commode de rappeler en indice. Lorsque, dans une question, elle sera fixée une fois pour toutes, nous utiliserons les notations plus simples $f_\alpha(x)$ et $f^{(\alpha)}(x)$ respectivement pour $\mathrm{I}_a^{(\alpha)} f(x)$ et $\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$. Celles-ci permettent de représenter sans ambiguïté, la valeur prise par l'intégrale ou la dérivée, quand on donne à x une valeur particulière. On remarque, en effet, que $f_\alpha(x+h)$ n'est pas égale à $\mathrm{I}_a^{(\alpha)} f(x+h)$, mais à $\mathrm{I}_{a-h}^{(\alpha)} f(x+h)$.

Enfin, on posera :

$$\mathrm{I}^{(0)} f(x) = f_0(x) = f(x), \qquad \mathrm{D}^{(0)} f(x) = f^{(0)}(x) = f(x).$$

Me bornant au réel, je supposerai $x \geqq a$.

Dans certains cas on peut prendre $a = -\infty$. Par exemple si

$$f(x) = e^{kx} \qquad (k > 0).$$

([1]) *Mémoire sur le Calcul des différentielles à indices quelconques* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. **13**, 1832, p. 71).

([2]) *Œuvres complètes*, E. WEBER et DEDEKIND, p. 331-344.

On a, pour cette fonction,

$$\mathrm{I}_{-\infty}^{(\alpha)} e^{kx} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{k(x-t)}\, dt = k^{-\alpha} e^{kx}$$

et

$$\mathrm{D}_{-\infty}^{(\alpha)} e^{kx} = \mathrm{D}^{(n)} k^{\alpha-n} e^{kx} = k^\alpha e^{kx}.$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'égalité

$$\mathrm{D}^{(n)} e^{kx} = k^n e^{kx},$$

qui sert de point de départ à Liouville.

2. Supposons f sommable et bornée. On démontre aisément l'identité fondamentale

$$(1) \qquad \mathrm{I}_a^{(\alpha')}[\mathrm{I}_a^{(\alpha)} f(x)] = \mathrm{I}_a^{(\alpha+\alpha')} f(x).$$

Le premier membre s'écrit, en effet,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\alpha')} \int_0^{x-a} t^{\alpha'-1}\, dt \int_a^{x-t} (x-t-u)^{\alpha-1} f(u)\, du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\alpha')} \int_a^x f(u)\, du \int_0^{x-u} t^{\alpha'-1} (x-u-t)^{\alpha-1}\, dt.$$

Ce qui donne, en posant $t = v(x-u)$,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\alpha')} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\alpha'-1} f(u)\, du \int_0^1 v^{\alpha'-1} (1-v)^{\alpha-1}\, dv = \mu . \mathrm{I}_a^{(\alpha+\alpha')} f(x);$$

où μ désigne une constante indépendante de f et de a. En prenant $f = e^x$, $a = -\infty$, on voit qu'elle est égale à 1.

$f(x)$ étant bornée, $\mathrm{I}_a^{(\alpha)} f(x)$ est continue. On déduit alors de (1) que $\mathrm{I}_a^{(\beta)} f(x)$ admet toutes les dérivées d'ordre entier inférieur à β, avec

$$(2) \qquad \mathrm{D}^{(p)} \mathrm{I}_a^{(\beta)} f(x) = \mathrm{I}_a^{(\beta-p)} f(x) \qquad (p < \beta).$$

Ces dérivées sont continues. Lorsque β est entier la dérivée d'ordre β existe « presque partout » ; partout, si $f(x)$ est continue.

3. Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse, et considérons maintenant la dérivée d'ordre α. La relation précédente montre que $D_a^{(\alpha)} f(x)$ ne dépend pas de l'entier n, et se réduit à la dérivée ordinaire lorsque α est entier. Elle se généralise aisément. Soit $\alpha \leqq \beta$, on a

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x) = D^{(n)} I_a^{(n-\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x) = D^{(n)} I_a^{(n+\beta-\alpha)} f(x),$$

c'est-à-dire

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x) = I_a^{(\beta-\alpha)} f(x) \qquad (\alpha \leqq \beta). \tag{2'}$$

Ces dérivées sont continues.

Si la dérivée $D_a^{(\alpha)}$ existe en un point x_0, il en est de même de $D_{a'}^{(\alpha)}$, quel que soit $a' < x_0$. On a, en effet,

$$I_a^{(n-\alpha)} f(x) = I_{a'}^{(n-\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt:$$

d'où

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D_{a'}^{(\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{\ \alpha-1} f(t)\, dt.$$

Un calcul immédiat donne

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \qquad (\beta \geqq 0).$$

On en déduit

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = D^{(n)} . I_a^{(n-\alpha)} I_a^{(\beta)} . 1 = D^{(n)} \frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha}}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}$$

et, par suite,

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. \tag{3}$$

Faisons $\beta = 0$. Il vient

$$D_a^{(\alpha)}(1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

On voit que la dérivée d'ordre *non entier* $D_a^{(\alpha)}$ est en général infinie pour $x = a$.

4. Si $f(x)$ admet dans (a, a_1) une dérivée bornée d'ordre entier r, toutes les dérivées $D_a^{(\alpha')}$, $(\alpha' < r)$ existent et sont continues dans l'intervalle ouvert à gauche.

En effet, $f^{(r)}(x)$ est sommable, et l'on peut écrire

$$f^{(r-1)}(x) = \mathrm{I}_a^{(1)} f^{(r)}(x) + f^{(r-1)}(a),$$

ce qui donne, de proche en proche,

$$f(x) = \mathrm{I}_a^{(r)} f^{(r)}(x) + \sum_0^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a).$$

D'où l'on déduit, en utilisant les relations (2') et (3),

$$(4) \qquad \mathrm{D}_a^{(\alpha')} f(x) = \mathrm{I}_a^{(r-\alpha')} f^{(r)}(x) + \sum_0^{r-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha'}}{\Gamma(i+1-\alpha')} f^{(i)}(a).$$

La propriété subsiste quand on remplace r par un nombre non entier α. Considérons $\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$. Comme cette dérivée est en général infinie pour $x = \alpha$, je me placerai dans l'hypothèse où elle est *bornée dans un intervalle* (a', a_1) *intérieur à* (a, a_1).

Désignons par r la partie entière de α, et posons

$$\mathrm{I}_a^{(r+1-\alpha)} f(x) = \mathrm{F}(x).$$

On a

$$\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) = \mathrm{F}^{(r+1)}(x).$$

D'autre part, on peut écrire

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{I}_{a'}^{(r+1)} \mathrm{F}^{(r+1)}(x) + \mathrm{F}(a') + \sum_1^{r} \frac{(x-a')^i}{i!} \mathrm{F}^{(i)}(a')$$

et

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{I}_{a'}^{(r+1-\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{r-\alpha} f(t)\, dt.$$

Ce qui donne

$$\mathrm{I}_{a'}^{(r+1-\alpha)} f(x) = \mathrm{I}_{a'}^{(r+1)} \mathrm{F}^{(r+1)}(x) + \sum_1^{r} \frac{(x-a')^i}{i!} \mathrm{F}^{(i)}(a') + g(x),$$

en posant

$$g(x) = \mathrm{F}(a') - \frac{1}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{r-\alpha} f(t)\, dt.$$

Prenons maintenant les dérivées $D_{a'}^{(r+1-\alpha)}$ des deux membres. Il vient

$$f(x) = I_{a'}^{(\alpha)} F^{(r+1)}(x) + \sum_{1}^{r} \frac{(x-a')^{i+\alpha-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-r)} F^{(i)}(a') + D_{a'}^{(r+1-\alpha)} g(x).$$

Pour calculer cette dernière dérivée, remarquons que $g(x)$ admet, quel que soit $a' < x \leqq a_1$, une dérivée continue

$$g'(x) = -\frac{r-\alpha}{\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{a}^{a'} (x-t)^{r-\alpha-1} f(t)\, dt,$$

dont le module satisfait aux inégalités

$$|g'(x)| \leqq \frac{M}{\Gamma(r+1-\alpha)} [(x-t)^{r-\alpha}]_{a}^{a'} < \frac{M}{\Gamma(r+1-\alpha)} (x-a')^{r-\alpha},$$

M désignant le module maximum de f. On voit alors que la relation (1) s'applique encore à $g'(x)$. Il en résulte

$$I_{a'}^{(\alpha-r)} I_{a'}^{(1)} g'(x) = I_{a'}^{(1)} I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x),$$

et comme $g(a') = 0$,

$$I_{a'}^{(\alpha-r)} g(x) = I_{a'}^{(1)} I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x).$$

D'où l'on déduit

$$D_{a'}^{(r+1-\alpha)} g(x) = I_{a'}^{(\alpha-r)} g'(x).$$

Ce qui donne, en remplaçant $g'(x)$ par sa valeur,

$$-\frac{r-\alpha}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{a'}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1}\, du \int_{a}^{a'} (u-t)^{r-\alpha-1} f(t)\, dt$$
$$= \frac{(r-\alpha)}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{a}^{a'} f(t)\, dt \int_{a'}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1}(u-t)^{r-\alpha-1}\, du.$$

La première quadrature s'effectue

$$\int_{a'}^{x} (x-u)^{\alpha-r-1} (u-t)^{r-\alpha-1}\, du = -\frac{(x-t)^{-1}}{\alpha-r} \left[\left(\frac{x-u}{u-t}\right)^{\alpha-r}\right]_{a'}^{x}.$$

Ce qui donne pour la dérivée

$$\frac{(x-a')^{\alpha-r}}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_{a}^{a'} (x-t)^{-1} (a'-t)^{r-\alpha} f(t)\, dt.$$

En définitive, on a, quel que soit $a' < x \leqq a_1$, la relation

$$(5) \qquad f(x) = \mathrm{I}_{a'}^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_1^r \frac{(x-a')^{i+\alpha-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-r)} \mathrm{F}^{(i)}(a')$$
$$+ \frac{(x-a')^{\alpha-r}}{\Gamma(\alpha-r).\Gamma(r+1-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{-1}(a'-t)^{r-\alpha} f(t)\,dt.$$

La différence $f(x) - \mathrm{I}_{a'}^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$ admet, pour ces valeurs, des dérivées entières de tous les ordres. Par suite, *toutes les dérivées* $\mathrm{D}_{a'}^{(\alpha')} f(x)$, *et par conséquent* $\mathrm{D}_a^{(\alpha')} f(x)$, $(\alpha' < \alpha)$, *existent et sont continues dans l'intervalle* (a', a_1) *ouvert à gauche, pourvu que* $\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$ *soit bornée dans* (a', a_1), $\quad a < a' < a_1$.

M. Montel [1] a établi ce résultat dans le cas où $\mathrm{D}_a^{(\alpha)}$ est bornée dans (a, a_1). On peut alors prendre $a' = a$, et la relation (5) devient

$$(5') \qquad f(x) = \mathrm{I}_a^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_1^r \frac{(x-a)^{i+\alpha-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-r)} \mathrm{F}^{(i)}(a).$$

On en déduit

$$\mathrm{D}_a^{(\alpha')} f(x) = \mathrm{I}_a^{(\alpha-\alpha')} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_1^r \frac{(x-a)^{i+\alpha-\alpha'-r-1}}{\Gamma(i+\alpha-\alpha'-r)} \mathrm{F}^{(i)}(a) \qquad (\alpha' < \alpha).$$

Pour que toutes ces dérivées soient continues en a, il faut et il suffit que les $\mathrm{F}^{(i)}(a)$ soient tous nuls, c'est-à-dire que $(x-a)^{-\alpha+1} f(x)$ tende vers zéro avec $x - a$. Ce qui a lieu nécessairement lorsque $r = 0$.

Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_a^{(\alpha')} f(x) &= \mathrm{I}_a^{(\alpha-\alpha')} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) \\ \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) &= \mathrm{D}_a^{(\alpha-\alpha')} \mathrm{D}_a^{(\alpha')} f(x) \end{aligned} \qquad (0 \leqq \alpha' \leqq \alpha).$$

Les dérivées d'ordre inférieur à α sont alors nulles en a.

5. La relation (5) ne permet pas de remonter de la dérivée à la fonction, puisque le second membre contient f. Cela tient à ce que nous avons pu intégrer seulement à partir de a'. Supposons maintenant que $\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$ soit bornée dans tout intervalle (a', a_1), $a' < a$; et plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où $r = 0$.

---

(1) *Sur les polynomes d'approximation* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 46, 1918, p. 163).

La relation (5) s'écrit alors

$$f(x) = \mathrm{I}_{a'}^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \frac{(x-a')^\alpha}{\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{a'} (x-t)^{-1} (a'-t)^{-\alpha} f(t)\, dt.$$

En posant

$$t = a' - u(x-a'),$$

la dernière intégrale devient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\frac{a'-a}{x-a'}} (1+u)^{-1} u^{-\alpha} f[a' - u(x-a')]\, du.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle tend vers zéro quand a' tend vers a $(x > a)$. De plus la convergence est uniforme dans tout intervalle intérieur à (a, a_1).

On peut donc écrire

$$f(x) = \lim_{a'=a} \mathrm{I}_{a'}^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x),$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \mathrm{I}_a^{(\alpha)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x).$$

Revenons au cas où α est supérieur à 1 et non entier. On a

$$\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) = \mathrm{D}^{(r)} \mathrm{D}_a^{(\alpha-r)} f(x).$$

Il n'est pas possible d'intégrer $\mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x)$ à partir de a. Mais r étant entier, on peut écrire

$$\mathrm{D}_a^{(\alpha-r)} f(x) = \mathrm{I}_{a_1}^{(r)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_0^{r-1} \mathrm{A}_i \frac{(x-a)^i}{i!},$$

en intégrant r fois à partir de a_1. Les A_i désignent des constantes.

$\mathrm{D}_a^{(\alpha-r)} f(x)$ étant nécessairement borné dans (a', a_1), quel que soit a', on obtient en définitive

$$(5'') \qquad f(x) = \mathrm{I}_a^{(\alpha-r)} \mathrm{I}_{a_1}^{(r)} \mathrm{D}_a^{(\alpha)} f(x) + \sum_0^{r-1} \mathrm{A}_i \frac{(x-a)^{i+\alpha-r}}{\Gamma(i+\alpha-r+1)},$$

relation valable dans (a, a_1), sauf peut-être au point a.

II. — Transformation de l'expression de l'intégrale d'ordre α.

6. Si l'on cherchait à définir directement la dérivée d'ordre α comme une intégrale d'ordre $-\alpha$, on serait conduit à poser

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{x-a} t^{-\alpha-1} f(x-t)\, dt,$$

ce qui donne une intégrale divergente [1].

On peut transformer l'expression de $I_a^{(\alpha)} f(x)$ dé façon qu'elle puisse conserver un sens quand on y remplace α par un nombre négatif.

Je supposerai la fonction donnée $f(x)$ *définie dans l'intervalle* (a, a_1) *et prolongée par zéro à gauche de* a. De plus, a étant fixée, on utilisera les notations $f_\alpha(x)$ et $f^{(\alpha)}(x)$.

Ceci posé, on peut écrire

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x-t)\, dt,$$

ou encore, après la substitution $t \,|\, kt \; (k > 0)$,

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-kt}\, dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} f(x-kt)\, dt.$$

Soient alors

$$k_i, \quad C_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, p)$$

$2(p+1)$ constantes, les k_i étant *positives* et *croissantes*.

Par combinaison linéaire, on obtient

$$f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_0^p C_i e^{-k_i t}\, dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \sum_0^p C_i f(x-k_i t)\, dt,$$

ou encore

$$(6) \qquad f_\alpha(x) \int_0^\infty t^{\alpha-1} \psi(t)\, dt = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt,$$

---

(1) Si α est entier le coefficient de cette intégrale $\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ est d'ailleurs nul.

où l'on a posé

$$(7)\qquad \psi(t)=\sum_0^p C_i e^{-k_i t},\qquad \varphi(x,t)=\sum_0^p C_i f(x-k_i t).$$

La convention $f(x)$ nulle à gauche de a, a simplement pour but de simplifier l'écriture. Autrement, le second membre de (7) devrait s'écrire

$$\int_0^{\frac{x-a}{k_p}} t^{\alpha-1}\varphi(x,t)\,dt+\sum_0^p C_i\int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{\alpha-1} f(x-k_i t)\,dt;$$

$\varphi(x, t)$ n'est en effet vraiment défini, pour $t>0$, que si

$$a \leqq x-k_p t.$$

7. L'expression de $f_\alpha(x)$, transformée sous la forme (6), va nous permettre de considérer la dérivée $f^{(\alpha)}(x)$ comme une intégrale d'ordre $-\alpha$, et d'écrire

$$(8)\qquad f^{(\alpha)}(x)\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)\,dt=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\varphi(x,t)\,dt,$$

sous des conditions très générales, qui seront précisées plus loin.

Tout d'abord, il faut évidemment que $\psi(t)$ soit choisie de manière que l'intégrale du premier membre ait un sens et soit différente de zéro.

Posons

$$(9)\qquad \gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\psi(t)\,dt.$$

Si cette fonction est définie pour α_0, elle est continue pour $\alpha \leqq \alpha_0$. En effet, les intégrales $\int_0^\varepsilon$ et $\int_l^\infty$ tendent vers zéro avec ε et l^{-1}, uniformément, dans tout intervalle (α_1, α_0).

Considérons la première. L'intégrale $\int_0 t^{-\alpha_0-1}\psi(t)\,dt$ ayant un sens, on a une inégalité de la forme

$$\left|\int_0^\varepsilon t^{-\alpha_0-1}\psi(t)\,dt\right| \leqq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon)$ désigne un infiniment petit que l'on peut supposer non décroissant [1]. Le second théorème de la moyenne donne alors

$$\left|\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} t^{-\alpha-1}\,\psi(t)\,dt\right| = \varepsilon^{\alpha_0-\alpha}\left|\int_{\varepsilon''}^{\varepsilon} t^{-\alpha_0-1}\,\psi(t)\,dt\right| \qquad (0<\varepsilon'<\varepsilon''<\varepsilon)$$

et

$$\left|\int_{0}^{\varepsilon} t^{-\alpha-1}\,\psi(t)\,dt\right| \leqq 2\eta(\varepsilon)\,\varepsilon^{\alpha_0-\alpha} \leqq 2\eta(\varepsilon).$$

Quant à la seconde on a, pour $l>1$,

$$\left|\int_{l}^{\infty} t^{-\alpha-1}\,\psi(t)\,dt\right| < \int_{l}^{\infty} |\psi(t)|\,dt.$$

Et cette dernière intégrale est évidemment convergente.

Calculons maintenant $\gamma(\alpha)$ en fonction des constantes k_i et C_i. Désignons, comme nous le ferons toujours dans la suite, par r la partie entière de α.

Si $\gamma(\alpha)$ a un sens, l'ordre infinitésimal de $\psi(t)$, pour t infiniment petit, qui est entier, est au moins égal à $r+1$. Ce qui exige

$$(10)\qquad \sum_{0}^{p} k_i^j\,C_i = 0 \qquad (j=0, 1, \ldots, r).$$

Supposons d'abord $\alpha \neq r$. En intégrant r fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha) &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r)}\int_0^{\infty} t^{-\alpha+r}\,\psi^{(r+1)}(t)\,dt\\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r)}\int_0^{\infty} t^{-\alpha+r}\sum_{0}^{p} k_i^{r+1}\,C_i\,e^{-k_i t}\,dt.\end{aligned}$$

On peut maintenant séparer les intégrales. En faisant dans le coefficient de C_i le changement de variable $(k_i t\,|\,t)$, il vient

$$\gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r)}\Gamma(r+1-\alpha)\sum_{0}^{p} k_i^{\alpha}\,C_i,$$

---

[1] S'il en était autrement, on remplacerait $\eta(\varepsilon)$ par la limite supérieure de $\eta(u)$ pour $u \leqq \varepsilon$.

et enfin

$$(11) \qquad \gamma(\alpha) = \Gamma(-\alpha)\sum_0^p k_i^\alpha C_i \qquad (\alpha \neq r).$$

Pour calculer $\gamma(r)$, nous écrirons

$$\gamma(\alpha) = \frac{(-1)^{r+1}\Gamma(r+1-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r+1)}\sum_0^p \frac{k_i^\alpha - k_i^r}{\alpha - r} C_i.$$

En faisant tendre α vers r, on obtient

$$(12) \qquad \gamma(r) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_0^p k_i^r C_i \log k_i.$$

8. On voit qu'il est possible de choisir $\psi(t)$ de manière que l'intégrale $\gamma(\alpha)$ ait un sens et soit différente de zéro. Je supposerai qu'il en est toujours ainsi.

L'ordre maximum de $\psi(t)$, pour t infiniment petit, est p. Dans ce cas, les C_i sont déterminés, à un facteur constant près, par les k_i. On peut prendre :

$$(13) \qquad \psi(t) = \begin{vmatrix} e^{-k_0 t} & 1 & k_0 & \ldots & k_0^{p-1} \\ e^{-k_1 t} & 1 & k_1 & \ldots & k_1^{p-1} \\ \ldots & . & .. & \ldots & \ldots \\ e^{-k_p t} & 1 & k_p & \ldots & k_p^{p-1} \end{vmatrix}.$$

Cette fonction ne s'annule que pour $t = 0$. En effet, si l'on avait $\psi(t) = 0$ pour $t \neq 0$, il existerait $p+1$ constantes, non toutes nulles : $B, A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$, telles que

$$B e^{-tx} + A_0 + A_1 x + \ldots + A_{p-1} x^{p-1}$$

s'annule pour $x = k_0, k_1, \ldots, k_p$. Ce qui est impossible, comme on le voit en prenant la dérivée $p^{\text{ième}}$ de l'expression précédente.

L'intégrale correspondante $\gamma(\alpha)$ est alors différente de zéro dans tout son domaine d'existence $(-\infty, p)$ ouvert à droite.

La plus simple des fonctions ψ d'ordre p est évidemment

$$e^{-t}(1-e^{-t})^p = e^{-t} - C_p^1 e^{-2t} + C_p^2 e^{-3t} - \ldots.$$

Dans ce cas,

$$\varphi(x, t) = f(x-t) - C_p^1 f(x-2t) + C_p^2 f(x-3t) - \ldots.$$

Les fonctions $\varphi(x, t)$ sont donc une généralisation des différences. Elles en ont d'ailleurs certaines propriétés ([1]).

III. — Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une dérivée continue d'ordre α entier ou non.

9. S'il est possible de mettre la dérivée sous la forme (8), on doit évidemment avoir

$$\gamma(\alpha) f(x) = \int_0^\infty t^{-\alpha-1} \varphi_\alpha(x, t)\, dt, \tag{14}$$

où

$$\varphi_\alpha(x, t) = \sum_0^p C_i f_\alpha(x - k_i t),$$

f_α étant prise nulle à gauche de a.

Je vais établir cette relation dans l'hypothèse où f est *continue*.

f étant prolongée par zéro à gauche de a, on a

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{\alpha-1} f(u)\, du,$$

et le second membre est nul pour $x \leqq a$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1} \varphi_\alpha(x, t)\, dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_0^p C_i \int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}\, dt \int_{-\infty}^{x-k_i t} (x - k_i t - u)^{\alpha-1} f(u)\, du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_0^p C_i \int_{-\infty}^{x-k_i\varepsilon} f(u)\, du \int_\varepsilon^{\frac{x-u}{k_i}} t^{-\alpha-1}(x - k_i t - u)^{\alpha-1}\, dt. \end{aligned}$$

La première quadrature s'effectue et donne

$$\frac{(x-u)^{-1}}{-\alpha} \Big| t^{-\alpha}(x - k_i t - u)^{\alpha} \Big|_\varepsilon^{\frac{x-u}{k_i}} = \frac{(x-u)^{-1}}{\alpha} \varepsilon^{-\alpha}(x - u - k_i \varepsilon)^{\alpha}.$$

([1]) Par exemple : Si $\psi(t)$ est d'ordre n, $\varphi(x, t)$ est nul pour tout polynome de degré $n-1$ au plus. Réciproquement, si $\varphi(x, t)$ est identiquement nulle, f, supposée continue, est un polynome de degré $n-1$ au plus. La première partie est immédiate. La seconde sera démontrée en note au n° **10**.

Il vient alors

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_0^p C_i \varepsilon^{-\alpha} \int_a^{x-k_i\varepsilon} (x-u)^{-1} (x-u-k_i\varepsilon)^\alpha f(u)\, du;$$

et enfin, en posant $x - u = \varepsilon t$,

$$I_\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_0^p C_i \int_{k_i}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} t^{-1} (t-k_i)^\alpha f(x-\varepsilon t)\, dt.$$

Remarquons que cette relation vaut encore pour $\alpha = 0$. En effet,

$$\int_\varepsilon^\infty t^{-1} \varphi(x, t)\, dt = \sum_0^p C_i \int_\varepsilon^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-1} f(x-k_i t)\, dt,$$

ce qui donne, en faisant dans le coefficient de C_i le changement de variable $k_i t | \varepsilon t$,

$$\sum_0^p C_i \int_{k_i}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} t^{-1} f(x-\varepsilon t)\, dt.$$

Il s'agit d'établir la convergence de I_ε. Prenons d'abord $f(x) = 1$, et soit J_ε l'intégrale obtenue. Si l est un nombre compris entre k_p et $\frac{x-a}{\varepsilon}$, on peut écrire

$$J_\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_0^p C_i \int_{k_i}^{l} t^{-1} (t-k_i)^\alpha\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_l^{\frac{x-a}{\varepsilon}} t^{-1} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha\, dt.$$

Il résulte des relations (10) que J_ε a une limite J pour $\varepsilon = 0$. En effet, si $\alpha = r$,

$$t^{-1} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha$$

est nul; dans le cas contraire, le développement en t^{-1} donne, pour $t > k_p$,

$$t^{-1} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha = t^{\alpha-1} \sum_{j=r+1}^{j=\infty} (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} t^{-j} \sum_0^p k_i^j C_i.$$

De plus, on voit qu'il est possible de choisir l assez grand de manière que, pour $t \geqq l$, cette fonction conserve un signe constant — si elle n'est pas constamment nulle.

En résumé l'intégrale

$$\lambda(l) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_l^\infty \left| t^{-1} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha \right| dt$$

est nulle ou infiniment petite avec l^{-1}.

Ceci posé, revenons à I_ε. La différence $I_\varepsilon - f(x) J_\varepsilon$ s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum C_i \int_{k_i}^{l} t^{-1}(t-k_i)^\alpha [f(x-\varepsilon t) - f(x)]\, dt$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_l^{\frac{x-a}{\varepsilon}} t^{-} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha [f(x-\varepsilon t) - f(x)] dt.$$

Pour l assez grand le module du second terme est, dans tous les cas, au plus égal à

$$\frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \int_l^{\frac{x-a}{\varepsilon}} \left| t^{-1} \sum_0^p C_i (t-k_i)^\alpha \right| dt \leqq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda(l),$$

à condition que $\frac{x-a}{\varepsilon}$ surpasse l. [M désigne le module maximum de f dans (a, a_1).]

Soit alors η un nombre positif aussi petit qu'on veut. On fixera l de manière que $\frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda(l)$ soit inférieur à $\frac{\eta}{2}$. Si f est *continue à gauche au point x*, on pourra prendre ε assez petit pour que le module du premier terme soit inférieur à $\frac{\eta}{2}$.

Ainsi I_ε *a pour limite* $J . f(x)$. Le raisonnement suppose $x > a$. Si *$f(x)$ est continue dans (a, a_1), la convergence est évidemment uniforme dans tout intervalle (a', a_1), $a < a'$.*

Reste à calculer J. Pour cela il suffit de marquer que cette limite est indépendante de f et de a. En prenant $f = e^x$, $a = -\infty$, il vient

$$J . e^x = \int_0^\infty t^{-\alpha-1} \sum_0^p C_i e^{x-k_i t}\, dt.$$

C'est-à-dire

$$J = \gamma(\alpha).$$

La relation (14) *est donc vérifiée quels que soient*

$$\alpha \geqq 0, \qquad a < x \leqq a_1.$$

Quand $f(a) = 0$ on peut supposer $a \leqq x \leqq a_1$, le second membre se réduisant à zéro pour $x = a$.

10. En remplaçant $f(x)$ par $f_{r+1-\alpha}(x)$, on a évidemment dans tout l'intervalle

$$\gamma(\alpha) f_{r+1-\alpha}(x) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi_{r+1}(x, t)\, dt.$$

Toutes les fois qu'on pourra légitimer $r+1$ dérivations sous le signe $\int$ du second membre, on en déduira l'existence de la dérivée d'ordre α, et son expression par (8). C'est ce qui aura lieu si l'intégrale

$$g(x, \varepsilon) = \int_\varepsilon^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt$$

est *uniformément convergente*.

Comme $\varphi(x, t)$ fait intervenir les valeurs de f à gauche du point x, et que, en fait, $f(x)$ est définie seulement dans (a, a_1), je supposerai *la convergence uniforme dans un intervalle* (a', a_1) *intérieur à* (a, a_1). De plus je me placerai d'abord dans l'hypothèse où $f(a) = 0$.

Posons

$$G(x, \varepsilon) = \int_\varepsilon^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi_{r+1}(x, t)\, dt.$$

La fonction $f(x)$, prolongée par zéro à gauche de a, est continue dans $(-\infty, a_1)$. Par suite

$$\varphi_{r+1}(x, t) = \sum_0^p C_i f_{r+1}(x - k_i t)$$

admet, par rapport à x, des dérivées entières jusqu'à l'ordre $r+1$ inclus, continues par rapport à l'ensemble des deux variables, dans le domaine $\left\{ \begin{matrix} x \leqq a_1 \\ t \geqq 0 \end{matrix} \right\}$; ce sont : $\varphi_r, \ldots, \varphi$. Il en résulte l'égalité

$$g(x, \varepsilon) = \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} G(x, \varepsilon).$$

Car les intégrales peuvent être réduites à l'intervalle $\left(\varepsilon, \frac{a_1 - a}{k_0}\right)$, en dehors duquel tous les $f_j(x - k_i t)$ sont nuls. On a donc

$$G(x, \varepsilon) = I_{a'}^{(r+1)} g(x, \varepsilon) + P_r(x; a', \varepsilon),$$

où P_r désigne un polynome de degré r au plus. Mais il résulte de l'hypothèse faite sur $g(x, \varepsilon)$ que $I_{a'}^{(r+1)} g(x, \varepsilon)$ converge, dans (a', a_1), vers $I_{a'}^{(r+1)} g(x)$, en désignant par $g(x)$ la limite de $g(x, \varepsilon)$. On peut donc écrire

$$\lim_{\varepsilon = 0} G(x, \varepsilon) = G(x) = I_{a'}^{(r+1)} g(x) + \lim_{\varepsilon = 0} P_r(x; a', \varepsilon).$$

Or cette dernière limite ne peut être qu'un polynome, comme le montre la formule de Lagrange, soit : $P_r(x, a')$.

Enfin f étant continue, $g(x)$ l'est aussi, à cause de l'uniformité de la convergence. De la relation précédente, on déduit alors que :

$f(x)$ admet dans (a', a_1) une dérivée continue $f^{(\alpha)}(x) = D_a^{(\alpha)} f(x)$ donnée par (8) — et par conséquent, pour $a' < x \leqq a_1$ des dérivées continues jusqu'à l'ordre α [n° 4].

Si $\psi(t)$ a été choisie de manière que $\gamma(\alpha')$, $\alpha' < \alpha$ ne puisse s'annuler, par exemple si $\psi(t)$ est de la forme (13) les dérivées sont continues dans tout l'intervalle (a', a_1). Le second théorème de la moyenne permet, en effet, d'affirmer la convergence uniforme, dans (a', a_1), de l'intégrale $\int_0^\varepsilon t^{-\alpha'-1} \varphi(x, t)\, dt$ [n° 9].(¹).

(¹) Voici la démonstration annoncée en note au n° 8.

Supposons $\psi(t)$ d'ordre n. On a

$$\psi(0) = \ldots = \psi^{(n-1)}(0) = 0, \qquad \psi^{(n)}(0) \neq 0.$$

Posons

$$\psi_1(t) = 2^n \psi(t) - \psi(2t), \qquad \varphi_1(x, t) = 2^n \varphi(x, t) - \varphi(x, 2t),$$

$\psi_1(t)$ est au moins d'ordre $n + 1$. D'autre part si $\varphi(x, t)$ est identiquement nul, il en est de même de $\varphi_1(x, t)$. $f(x)$ admet donc des dérivées continues jusqu'à

11. Les conclusions précédentes subsistent en partie quand on ne suppose pas la convergence uniforme, à condition que $g(x, \varepsilon)$ reste borné, quels que soient ε et $a' \leqq x \leqq a_1$. Dans ce cas, d'après un théorème de M. Lebesgue, $I_{a'}^{(r+1)} g(x, \varepsilon)$ a encore pour limite $I_{a'}^{(r+1)} g(x)$. Le raisonnement se poursuit comme plus haut. Mais de la relation

$$G(x) = I_{a'}^{(r+1)} g(x) + P_r(x, a'), \tag{15}$$

on peut seulement conclure que *f admet une dérivée d'ordre α, « presque partout » dans (a', a_1). Cette dérivée est d'ailleurs bornée.*

Les dérivées d'ordre inférieur à α sont continues dans l'intervalle ouvert à gauche. Les conclusions du n° **4** subsistent en effet si $F^{(r+1)}(x)$, bornée, est la dérivée d'ordre $r+1$ de $F(x)$, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle.

Enfin, comme précédemment, si $\gamma(\alpha')$, $\alpha' < \alpha$, ne peut s'annuler, les dérivées $D_a^{(\alpha')} f(x)$ sont continues dans tout (a', a_1). Car d'une relation

$$\left| \int_0^{\varepsilon} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt \right| < A,$$

on déduit par le second théorème de la moyenne

$$\left| \int_0^{\varepsilon'} t^{-\alpha'-1} \varphi(x, t)\, dt \right| < 2 A \varepsilon^{\alpha-\alpha'}.$$

12. Si l'on veut assurer la continuité jusqu'en a, il faudra faire une hypothèse supplémentaire, car $D_a^{(\alpha)}$ est en général infinie pour $x = a$.

---

l'ordre n inclus. Mais

$$\varphi(x, t) = \sum_0^p C_i f(x - k_i t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n \sum_0^p k_i^n C_i f^{(n)}(x - k_i \theta t) \qquad (0 < \theta < 1).$$

D'où

$$\lim_{t=0} t^{-n} \varphi(x, t) = \psi^{(n)}(0) f^{(n)}(x).$$

Et, par suite, $f^{(n)}(x) = 0$. Ce qui achève la démonstration.

L'intégrale $g(x, \varepsilon)$ s'écrit

$$g(x, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt + \sum_{0}^{p} C_i \int_{\frac{x-a}{k}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-\alpha-1} f(x - k_i t)\, dt,$$

avec

$$a + k_p \varepsilon \leqq x \leqq a_1.$$

Je vais montrer que *si, quels que soient x et ε satisfaisant à ces inégalités, la première intégrale est uniformément convergente, et si, de plus, $(x-a)^{-\alpha} f(x)$ tend vers zéro avec $x - a$, toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre α inclus, sont continues dans (a, a_1), et nulles en a.*

Les conclusions du n° **10** subsistent quel que soit $a' < a$. Comme $g(a) = 0$, il suffit d'établir que $g(x)$ tend vers zéro avec $x - a$, car on pourra ensuite faire tendre a' vers a dans la relation (15), et utiliser les résultats de la fin du n° **4**.

On a

$$g(x) = \int_{0}^{\frac{x-a}{k_p}} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt + \sum_{0}^{p} C_i \int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-\alpha-1} f(x - k\, t)\, dt.$$

Par hypothèse, $\int_{0}^{\varepsilon} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt$, pour $a + k_p \varepsilon \leqq x$, tend vers zéro avec ε. Il en résulte que le premier terme de $g(x)$ a pour limite zéro, pour $x = a$. Évaluons le second. Puisque $(x-a)^{-\alpha} f(x)$ tend vers zéro, on a une inégalité de la forme

$$|f(x)| \leqq (x - a)^{\alpha} \eta(x - a),$$

η désignant un infiniment petit qu'on peut supposer non décroissant (¹).

On en déduit

$$|f(x - k_i t)| \leqq (x - k_i t - a)^{\alpha} \eta(x - k_i t - a) \leqq (x - a)^{\alpha} \eta(x - a)$$

et

$$\left| \sum_{0}^{p} C_i \int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-\alpha-1} f(x - k_i t)\, dt \right| \leqq (x - a)^{\alpha} \eta(x - a) \sum_{0}^{p} |C_i| \int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-\alpha-1}\, dt.$$

(¹) Voir n° 7, note (¹).

Ce qui achève la démonstration.

13. Revenant aux hypothèses des nos **10** et **11**, nous allons nous débarrasser de la restriction $f(a)=0$.

Posons

$$\bar{f}(x)=f(x)-f(a),$$

et soit $\bar{g}(x, \varepsilon)$ le résultat obtenu en substituant, dans $g(x, \varepsilon)$, $\bar{f}$ à f; $\bar{f}$ étant de plus supposé prolongée par zéro à gauche de a, dans $\bar{g}$.

On a

$$g(x, \varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} t^{-\alpha-1}\sum_{0}^{p} C_i[\bar{f}(x-k_i t)+f(a)]\,dt$$

$$+\sum_{0}^{p} C_i\int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} t^{-\alpha-1}[\bar{f}(x-k_i t)+f(a)]\,dt.$$

C'est-à-dire, puisque $\sum_{0}^{p} C_i=0$,

$$g(x, \varepsilon)=\bar{g}(x, \varepsilon)+f(a)\sum_{0}^{p} C_i\int_{\frac{x-a}{k_i}}^{\frac{x-a}{k_p}} t^{-\alpha-1}\,dt.$$

Le dernier terme est égal à

$$f(a)\frac{(x-a)^{-\alpha}}{-\alpha}\sum_{0}^{p}(k_i^{\alpha}-k_p^{\alpha})C_i=f(a)\frac{(x-a)^{-\alpha}}{-\alpha}\sum_{0}^{p}k_i^{\alpha}C_i.$$

Quand α est entier, cette expression est nulle (10); dans le cas contraire elle est égale à

$$\gamma(\alpha)f(a)\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

On a donc, quel que soit α,

$$g(x, \varepsilon)=\bar{g}(x, \varepsilon)+\gamma(\alpha)\,D_a^{(x)}f(a).$$

Si $g(x, \varepsilon)$ est uniformément convergente, ou bien seulement convergente et bornée, dans (a', a_1), il en est de même de $\bar{g}(x, \varepsilon)$.

Comme $\bar{f}(a) = 0$, on a

$$g(x) = \gamma(\alpha)\{ D_a^{(\alpha)}\bar{f}(x) + D_a^{(\alpha)}f(a) \} = \gamma(\alpha)\, D_a^{(\alpha)}f(x).$$

14. Les résultats précédents conduisent naturellement au théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$, continue dans (a, a_1), admette, dans cet intervalle ouvert à gauche, des dérivées continues $D_a^{(\alpha')}$, jusqu'à l'ordre α inclus, est que l'intégrale $\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}\varphi(x, t)\,dt$ soit uniformément convergente dans tout intervalle (a', a_1) intérieur à (a, a_1).

La condition est suffisante, d'après les nos **10** et **13**. Reste à montrer qu'elle est nécessaire.

Donnons-nous a' et prenons un nombre a'' compris entre a et a'. Si $D_a^{(\alpha)}f(x) = f^{(\alpha)}(x)$ est continue sauf peut-être pour $x = a$, on a (no **4**)

$$f(x) = I_{a''}^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(x) + \rho(x),$$

où $\rho(x)$ désigne une fonction ayant des dérivées entières de tous les ordres pour $a'' < x \leqq a_1$. Il résulte du no **9** que l'intégrale

$$\int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1} \sum_0^p C_i[f(x - k_i t) - \rho(x - k_i t)]\,dt$$

est uniformément convergente dans (a', a_1), si l'on suppose $f - \rho$ nulle à gauche de a''. Il en est évidemment de même lorsqu'on ne fait pas cette restriction.

D'autre part, en tenant compte des relations (10), le développement de Taylor donne

$$\sum_0^p C_i\,\rho(x - k_i t) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} t^{r+1} \sum_0^p k_i^{r+1} C_i\,\rho^{(r+1)}(x - k_i\theta t) \qquad (0 < \theta < 1),$$

valable si $a'' < x - k_i t$.

En prenant $a' \leqq x \leqq a_1$, $k_p t \leqq \dfrac{a' - a''}{2}$, les quantités $x - k_i\theta t$ resteront dans l'intervalle $\left(\frac{a'+a''}{2}, a_1\right)$, où $\rho^{(r+1)}$ reste borné. L'intégrale

$$\int_{\varepsilon} t^{-\alpha-1} \sum_{0}^{p} C_i \rho(x - k_i t)\, dt$$

est donc uniformément convergente dans (a', a_1) et, par suite, aussi $\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt$. C. Q. F. D.

15. Ainsi, *toutes les fois que la dérivée est continue, on peut la considérer effectivement comme une intégrale d'ordre négatif*, et écrire

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = I_a^{(-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt.$$

Ceci explicite la variation de la dérivée avec l'indice. On voit facilement que cette variation est *continue*.

Supposons $D_a^{(\alpha_0)} f(x)$ continue dans un intervalle (a'', a_1), $a < a''$ et choisissons $\psi(t)$ de la forme (13), de telle manière que $\gamma(\alpha_0)$ ait un sens. Dans ces conditions la relation précédente a lieu lorsque α et x appartiennent respectivement aux intervalles $(-\infty, \alpha_0)$ et (a', a_1), ce dernier intérieur à (a'', a_1).

L'intégrale $\int_{\varepsilon} t^{-\alpha_0-1} \varphi(x, t)\, dt$ est uniformément convergente dans (a', a_1). On peut donc écrire

$$\left| \int_0^{\varepsilon} t^{-\alpha_0-1} \varphi(x, t)\, dt \right| \leqq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon)$ désigne un infiniment petit non décroissant, indépendant de x. On en déduit, comme au n° **7**,

$$\left| \int_0^{\varepsilon} t^{-\alpha-1} \varphi(x, t)\, dt \right| \leqq 2\eta(\varepsilon) \qquad (\alpha \leqq \alpha_0).$$

Soient maintenant α et α' deux valeurs appartenant à $(-\infty, \alpha_0)$. La différence

$$\delta = \int_0^{\infty} t^{-\alpha'-1} \varphi\, dt - \int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} \varphi\, dt$$

s'écrit

$$\partial = \int_0^{\varepsilon} t^{-\alpha'-1}\varphi\,dt - \int_0^{\varepsilon} t^{-\alpha-1}\varphi\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} [t^{\alpha-\alpha'}-1]\,t^{-\alpha-1}\varphi\,dt.$$

Cette dernière intégrale se réduit à $\int_{\varepsilon}^{\frac{a_1-a}{k_0}}$.

Supposons $\alpha' > \alpha$ et, ce qui ne diminue évidemment pas la généralité, $\frac{a_1-a}{k_0} < 1$. Le second théorème de la moyenne donne alors

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{a_1-a}{k_0}} [t^{\alpha-\alpha'}-1]\,t^{-\alpha-1}\varphi\,dt = [\varepsilon^{\alpha-\alpha'}-1]\int_{\varepsilon}^{l} t^{-\alpha-1}\varphi\,dt \qquad (\varepsilon < l < 1).$$

On a donc, en définitive,

$$|\partial| < 4\eta(\varepsilon) + 4\eta(1)[\varepsilon^{\alpha-\alpha'}-1].$$

D'où l'on déduit que $\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}\varphi(x, t)\,dt$, et par suite $D_a^{(\alpha)} f(x)$ [puisque la fonction continue $\gamma(\alpha)$ ne s'annule pas], *est, pour x constant, une fonction continue de α dans* $(-\infty, \alpha_0)$. On voit de plus, que la famille des fonctions de α ainsi obtenue lorsque x reste dans un intervalle (a'', a_1), intérieur à celui dans lequel $D_a^{(\alpha_0)} f(x)$ est continue, possède l'*égale* continuité de Arzelà [1].

Ce résultat est encore valable pour $\alpha_0 = 0$, si f est continue [n° 9]. On en déduit que $I_a^{(\alpha)} f(x)$ a pour limite $f(x)$ quand α tend vers zéro par valeurs positives, ce qui n'est pas immédiat comme la continuité par rapport à α, pour α positif.

Remarquons enfin que si l'on suppose $D_a^{(\alpha_0)}$ seulement bornée, la continuité peut n'avoir lieu que pour $\alpha < \alpha_0$. Elle est encore *égale*. En effet $D_a^{(\alpha_1)}$, $\alpha_1 < \alpha_0$ est une fonction continue de x [n° 4].

16. L'étude précédente montre qu'il y a un lien très étroit entre la dérivation et l'opération :

$$\mathfrak{D}_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1}\varphi(x, t)\,dt;$$

mais il n'y a pas identité.

---

(1) On peut même démontrer que $D_a^{(\alpha)} f(x)$ est une fonction analytique de α.

$\mathcal{D}_a^{(\alpha)} f(x)$ fait intervenir seulement les valeurs de f à gauche de x; ce ne pourrait donc être qu'une dérivation à gauche. Or, il est facile de montrer, par un exemple, que $\mathcal{D}_a^{(1)}$ peut avoir un sens en un point, sans que la dérivée à gauche existe en ce point.

Prenons $a = -1$. Soit $f(x)$ une fonction continue représentée dans $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, par un arc de courbe (C) dont les extrémités sont alignées avec l'origine, et dans les intervalles successifs $(-2^{-1}, -2^{-2})$, $(-2^{-2}, -2^{-3})$, ..., par les arcs (C_1), (C_2), ..., obtenus, à partir de (C), par des homothéties de centre commun à l'origine, et de rapports 2^{-1}, 2^{-2}, ... Enfin on posera

$$f(0) = 0.$$

On a évidemment

$$f(-2t) = 2f(-t), \qquad f(-4t) = 4f(-t).$$

Prenons

$$\varphi(x, t) = 2f(x-t) - 3f(x-2t) + f(x-4t).$$

Les relations (10) sont vérifiées par $r = 1$. On a

$$\varphi(0, t) = 0.$$

L'intégrale $\int_\varepsilon t^{-2} \varphi(0, t)\, dt$ est donc convergente. Or, f n'a pas de dérivée à gauche à l'origine.

Néanmoins, on peut affirmer que *si la dérivée à gauche d'ordre entier r existe en un point x, $\mathcal{D}_a^{(r)} f(x)$ est définie en ce point et égale à $f_g^{(r)}(x)$*. Pour le démontrer, remarquons que, par hypothèse, f admet, dans un certain intervalle $(x-\lambda, x)$, $\lambda > 0$, des dérivées continues jusqu'à l'ordre $r-2$ inclus, et une dérivée $f^{(r-1)}$ satisfaisant à la relation

$$\lim_{t=0} \frac{f^{(r-1)}(x-t) - f^{(r-1)}}{-t} = f_g^{(r)}(x) \qquad (t > 0).$$

Posons

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty t^{-r-1} \varphi(x, t)\, dt.$$

Cette intégrale s'écrit

$$I_\varepsilon = \sum_0^p C_i \int_\varepsilon^\infty t^{-r-1} f(x - k_i t)\, dt = \varepsilon^{-r} \sum_0^p k_i^r C_i \int_{k_i}^\infty t^{-r-1} f(x - \varepsilon t)\, dt,$$

ou encore

$$I_\varepsilon = \varepsilon^{-r}\sum_0^p k_i^r C_i \int_{k_i}^{k_p} t^{-r-1} f(x-\varepsilon t)\,dt + \varepsilon^{-r}\sum_0^p k_i^r C_i \int_{k_p}^{\infty} t^{-r-1} f(x-\varepsilon t)\,dt.$$

Le dernier terme est nul, en vertu de (10). Il reste

$$I_\varepsilon = \varepsilon^{-r}\sum_0^p k_i^r C_i \int_{k_i}^{k_p} t^{-r-1} f(x-\varepsilon t)\,dt \quad (^1).$$

Transformons le coefficient de C_i. Si ε est assez petit, on peut intégrer $r-2$ fois par parties, ce qui donne

$$\int_{k_i}^{k_p} t^{-r-1} f(x-\varepsilon t)\,dt = \left\{ \sum_0^{r-2} (-1)^{j+1} \frac{\varepsilon^j t^{-r+j}}{r(r-1)\ldots(r-j)} f^{(j)}(x-\varepsilon t) \right\}_{k_i}^{k_p}$$
$$+ \frac{(-1)^{r-1}}{r!}\varepsilon^{r-1} \int_{k_i}^{k_p} t^{-2} f^{(r-1)}(x-\varepsilon t)\,dt.$$

En portant dans I_ε, il vient

$$I_\varepsilon = \sum_0^{r-2} \frac{(-1)^{j+1}}{r\ldots(r-j)} (k_p\varepsilon)^{-r+j} f^{(j)}(x-k_p\varepsilon) \sum_0^p k_i^r C_i$$
$$+ \sum_0^{r-2} \frac{(-1)^j}{r\ldots(r-j)} \sum_0^p k_i^r C_i (k_i\varepsilon)^{-r+j} f^{(j)}(x-k_i\varepsilon)$$
$$+ \frac{(-1)^{r-1}}{r!}\varepsilon^{-1} \sum_0^p k_i^r C_i \int_{k_i}^{k_p} t^{-2} f^{(r-1)}(x-\varepsilon t)\,dt.$$

Le premier terme est nul. Je vais montrer que le second tend vers zéro. Pour cela écrivons-le

$$J_\varepsilon = \sum_0^{r-2} \frac{(-1)^j}{r\ldots(r-j)} \varepsilon^{-r+j} \mu_j(\varepsilon),$$

où

$$\mu_j(\varepsilon) = \sum_0^p k_i^j C_i f^{(j)}(x-k_i\varepsilon).$$

---

(1) Observons, en passant, que I_ε dépend uniquement des valeurs voisines du point x, et à gauche, ce qui n'a pas lieu pour un indice non entier.

$\mu_j(t)$ admet, dans $(0, \varepsilon)$ des dérivées, jusqu'à l'ordre $r-j-1$, continues, sauf peut-être pour la dernière. Ce sont

$$\mu_j^{(n)}(t)=(-1)^n\sum_0^p k_i^{j+n}C_i f^{(j+n)}(x-k_i t) \qquad (n=0, \ldots, r-j-1).$$

Ces dérivées sont nulles pour $t=0$, en vertu des relations (10). On a donc, d'après la formule de Taylor,

$$\mu_j(\varepsilon)=(-1)^{r-j-1}\frac{\varepsilon^{r-j-1}}{(r-j-1)!}\sum_0^p k_i^{r-1}C_i f^{(r-1)}(x-k_i\theta_j\varepsilon) \qquad (0<\theta_j<1).$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\mu_j(\varepsilon)=(-1)^{r-j-1}\frac{\varepsilon^{r-j-1}}{(r-j-1)!}\sum_0^p k_i^{r-1}C_i[f^{(r-1)}(x-k_i\theta_j\varepsilon)-f^{(r-1)}(x)],$$

car $\sum_0^p k_i^{r-1}C_i=0$. Il vient alors

$$J_\varepsilon=\frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\sum_0^{r-2}\theta_j\sum_0^p k_i^r C_i\frac{f^{(r+1)}(z-k_i\theta_j\varepsilon)-f^{(r-1)}(z)}{k_i\theta_j\varepsilon}.$$

Le coefficient de θ_j a pour limite

$$-\sum_0^p k_i^r C_i f_g^{(r)}(x)=0.$$

J_ε tend donc bien vers zéro. Remarquons enfin que si $r=1$, ce terme n'existe pas.

En définitive, il reste à chercher la limite du troisième terme

$$H_\varepsilon=\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\sum_0^p k_i^r C_i\varepsilon^{-1}\int_{k_i}^{k_p}t^{-2}f^{(r-1)}(x-\varepsilon t)\,dt.$$

Pour l'évaluer, observons que si $f^{(r-1)}$ est constante, H_ε est nul. En effet,

$$\sum_0^p k_i^r C_i\int_{k_i}^{k_p}t^{-2}\,dt=\sum_0^p k_i^{r-1}C_i-k_p^{-1}\sum_0^p k_i^r C_i=0. \qquad [(10)]$$

On peut donc écrire

$$\mathrm{H}_\varepsilon = \frac{(-1)^r}{r!} \sum_0^p k_i^r \mathrm{C}_i \int_{k_i}^{k_p} \frac{f^{(r-1)}(x-\varepsilon t) - f^{(r-1)}(x)}{-\varepsilon t} t^{-1}\, dt.$$

Lorsque t reste dans (k_i, k_p), le quotient $\dfrac{f^{(r-1)}(x-\varepsilon t) - f^{(r-1)}(x)}{-\varepsilon t}$, tend uniformément vers $f_g^{(r)}(x)$. D'où

$$\begin{aligned}\lim \mathrm{H}_\varepsilon &= \frac{(-1)^r}{r!} \sum_0^p k_i^r \mathrm{C}_i \int_{k_i}^{k_p} f_g^{(r)}(x) . t^{-1}\, dt \\ &= f_g^{(r)}(x) \frac{(-1)^r}{r!} \sum_0^p k_i^r \mathrm{C}_i [\log k_p - \log k_i] \\ &= \gamma(r) . f_g^{(r)}(x).\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

On obtiendrait la même proposition pour la dérivée à droite, en considérant

$$\frac{(-1)^r}{\gamma(r)} \int_0^{\infty} t^{-r-1} \varphi(x, -t)\, dt.$$

A ce propos remarquons qu'il n'est pas possible de définir une opération analogue à $\mathcal{D}^{(\alpha)}$, pour α non entier, qui soit une dérivation à droite, sans faire intervenir les variables imaginaires. Cela tient à ce que $\mathrm{I}_a^{(\alpha)}$ n'est réel, pour α non entier, que si x est au moins égal à a.

CHAPITRE II.

DIFFÉRENCES ET DÉRIVÉES D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE.

IV. — Propriétés des différences.

17. Pratiquement le théorème du n° **14** servira surtout à établir l'existence des dérivées. Il sera d'une application immédiate toutes les fois qu'on aura pour $\varphi(x, t)$ une inégalité de la forme

$$|\varphi(x, t)| \leqq \varepsilon(t),$$

$\varepsilon(t)$ désignant un infiniment petit d'ordre connu. Jusqu'ici nous avons laissé aux fonctions associées $\psi(t)$ et $\varphi(x, t)$ toute leur généralité, les démonstrations ne s'en trouvant pas compliquées. Nous allons maintenant prendre pour $\varphi(x, t)$ une différence, ce qui permettra, dans l'hypothèse précédente, de supposer la fonction seulement *bornée*, et de mesurer aisément la continuité des dérivées. Nous retrouverons, en la généralisant, une proposition obtenue par M. P. Montel ([1]), comme conséquence des propriétés de l'approximation. Enfin pour terminer l'étude des relations entre les différences et les dérivées, nous donnerons, sous une forme un peu différente, un théorème dû à M. L.-E.-J. Brouwer ([2]).

18. L'ordre infinitésimal de la différence

$$\Delta_h^n f(x) = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x+\overline{n-1}\,h) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x+\overline{n-2}\,h) - \ldots,$$

considérée comme fonction de h, dépend de x. Pour avoir une quantité indépendante de cette variable, il sera utile de généraliser la notion dénommée par M. de la Vallée Poussin ([3]) *module de continuité*.

Je considérerai uniquement des fonctions définies et *bornées* dans l'intervalle $(0, 1)$. Soit $f(x)$ une telle fonction. Désignons par $\omega_n[\delta, f(x)]$, et plus brièvement par $\omega_n(\delta)$, la limite supérieure de $|\Delta_h^n f(x)|$ pour l'ensemble des valeurs de x et de h satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq x + nh \leqq 1, \qquad |h| \leqq \delta \leqq \frac{1}{n}.$$

C'est une fonction de δ, positive, non décroissante et bornée, définie dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Pour les valeurs supérieures à $\frac{1}{n}$ on posera

$$\omega_n(\delta) = \omega_n\left(\frac{1}{n}\right),$$

([1]) Mémoire cité, p. 163.

([2]) *Over differentie quotienten en differential quotienten* (*K. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam*, juin 1908, p. 38-45).

([3]) *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, p. 7 (Gauthier-Villars).

$\omega_n[\delta, f(x)]$ ne change évidemment pas, par la substitution $(x|1-x)$; par suite, pour calculer ω_n, on pourra se borner aux valeurs positives de h.

Si $f(x)$ est continue, $\omega_1[\delta, f(x)]$ est son module de continuité.

19. L'étude des propriétés des fonctions ω_n demande quelques calculs préliminaires.

A. Soit k un entier positif. On a

$$\Delta^1_{kh} f(x) = \sum_{i=0}^{i=k-1} \Delta^1_h f(x+ih),$$

$$\Delta^2_{kh} f(x) = \Delta^1_{kh} \sum_{i=0}^{i=k-1} \Delta^1_h f(x+ih) = \sum_{j=0}^{j=k-1} \sum_{i=0}^{i=k-1} \Delta^1_h \Delta^1_h f(x+ih+jh),$$

c'est-a-dire

$$\Delta^2_{kh} f(x) = \sum_{i=0}^{i=k-1} \sum_{j=0}^{j=k-1} \Delta^2_h f(x+ih+jh).$$

De proche en proche, on obtient

$$\Delta^n_{kh} f(x) = \sum_{i_1=0}^{i_1=k-1} \sum_{i_1=0}^{i_2=k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{i_n=k-1} \Delta^n_h f(x + \overline{i_1+\ldots+i_n}h),$$

ou encore

$$\Delta^n_{kh} f(x) = \sum_{i=0}^{i=(k-1)n} A^i_{n,k} \Delta^n_h f(x+ih),$$

en posant

$$\sum_0^{k-1} \sum_0^{k-1} \cdots \sum_0^{k-1} z^{i_1+i_2+\ldots+i_n} = [1+z+\ldots+z^{k-1}]^n = \sum_{i=0}^{i=(k-1)n} A^i_{n,k} z^i.$$

Les coefficients $A^i_{n,k}$ sont tous positifs, et leur somme est égale à k^n. Donc, *si pour* $i=0, 1, \ldots, (k-1)n$, $|\Delta^n_h f(x+ih)|$ *reste inférieur ou égal à* μ, *on a*

$$|\Delta^n_{kh} f(x)| \leqq k^n . \mu.$$

B. Calculons maintenant la différence $\Delta^n_{kh} - k^n \Delta^n_h$. Elle peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{i=(k-1)n} A^i_{n,k}[\Delta^n_h f(x+ih) - \Delta^n_h f(x)] = \sum_i A^i_{n,k} \sum_{j=0}^{j=i-1} \Delta^{n+1}_h f(x+jh).$$

Ce qui donne

$$\Delta^n_{kh} f(x) - k^n \Delta^n_h f(x) = \sum_{i=0}^{i=(k-1)n-1} B^i_{n,k} \Delta^{n+1}_h f(x+ih),$$

en posant

$$\sum_{i=1}^{i=(k-1)n} A^i_{n,k}(1+z+\ldots+z^{i-1}) = \sum_{i=0}^{i=(k-1)n-1} B^i_{n,k} z^i.$$

Les coefficients $B^i_{n,k}$ sont tous positifs. Leur somme est la dérivée, pour $z=0$, de $[1+z+\ldots+z^{k-1}]^n$, elle est égale à $n\frac{k(k-1)}{2}k^{n-1}$. Donc, *si pour* $i=0, 1, \ldots, (k-1)n-1$, $|\Delta^{n+1}_h f(x+ih)|$ *reste inférieur ou égal à* γ, *on a*

$$|\Delta^n_{kh} f(x) - k^n \Delta^n_h f(x)| \leqq \frac{n(k-1)}{2} k^n \gamma.$$

C. Soient enfin $\omega(t)$ une fonction positive, non décroissante et bornée dans $(0, +\infty)$, et r, a, k des constantes positives, la dernière supérieure à l'unité. Nous allons évaluer une limite supérieure de la somme

$$\sum_{p+1}^{n} k^{ri}\omega(ak^{-i}) \qquad (n \text{ et } p \text{ entiers quelconques, } n > p).$$

On peut écrire

$$k^{ri}\omega(ak^{-i}) = \int_{i-1}^{i} k^{ri}\omega(ak^{-i})\,du < k^r \int_{i-1}^{i} k^{ru}\omega(ak^{-u})\,du.$$

Il vient alors

$$\sum_{p+1}^{n} < k^r \int_p^n k^{ru}\omega(ak^{-u})\,du.$$

Le changement de variable, $ak^{-u} = t$, donne enfin

$$\sum_{p+1}^{n} k^{ri}\omega(ak^{-i}) < a^r \frac{k^r}{\log k} \int_{ak^{-n}}^{ak^{-p}} t^{-r-1}\omega(t)\,dt. \tag{16}$$

De la même manière, on aurait

$$(17)\qquad \sum_{p}^{n-1} k^{ri}\omega(ak^{-i}) > a^r \frac{k^{-r}}{\log k}\int_{ak^{-n}}^{ak^{-p}} t^{-r-1}\omega(t)\,dt.$$

On voit que la série $\sum^{\infty} k^{ri}\omega(ak^{-i})$ et l'intégrale $\int_0 t^{-r-1}\omega(t)\,dt$ sont convergentes ou divergentes en même temps.

De la convergence de l'intégrale précédente, il résulte que le quotient $\delta^{-r}\omega(\delta)$ est infiniment petit avec δ. En effet, soit q l'entier défini par les inégalités

$$k^{-q-1} \leqq \delta < k^{-q}.$$

On a

$$\delta^{-r}\omega(\delta) \leqq k^{(q+1)r}\omega(k^{-q}) < k^r \sum_{q}^{\infty} k^{ri}\omega(k^{-i})$$

$$< \frac{k^{2r}}{\log k}\int_0^{k^{-q+1}} t^{-r-1}\omega(t)\,dt < \frac{k^{2r}}{\log k}\int_0^{k^2\delta}.$$

Ce qui donne, en prenant $k^2 = 2$,

$$(18)\qquad \delta^{-r}\omega(\delta) < \frac{2^{r+1}}{\log 2}\int_0^{2\delta} t^{-r-1}\omega(t)\,dt \quad [1].$$

20. Nous pouvons maintenant étudier les propriétés des fonctions $\omega_n[\delta, f(x)]$.

---

[1] Il faut remarquer que si l'on ne suppose pas $\omega(t)$ non décroissante, l'intégrale peut converger, sans que $\delta^{-r}\omega(\delta)$ tende vers zéro ou même reste borné. Pour le voir, prenons, par exemple,

$$\omega(t) = t^{r+1}\psi(t),$$

où $\psi(t)$ est définie de la manière suivante : dans $(2^{-n-1}, 2^{-n})$, $n = 0, 1, \ldots$, $\psi(t) = 1$ sauf sur un intervalle partiel, placé au milieu, de longueur 2^{-3n-1}, où la fonction est représentée par les côtés d'un triangle isoscèle, dont le sommet est sur la courbe $1 + t^{-2}$.

$t\psi(t)$ n'est pas borné. D'autre part $\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \psi(t)\,dt = \frac{5}{9}2^{-n}$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale.

Soit k un nombre naturel. Si $k\delta \leqq \frac{1}{n}$, on a, quel que soit $|h| \leqq \delta$,

$$|\Delta^n_{kh} f(x)| \leqq k^n . \max |\Delta^n_h f(x + ih)| \leqq k^n . \omega_n(\delta) \qquad [\text{n}^\circ\ \mathbf{19},\ \text{A}].$$

D'où l'on déduit

$$\omega_n(k\delta) \leqq k^n . \omega^n(\delta).$$

Si $k\delta > \frac{1}{n}$, on a

$$\omega_n(k\delta) = \omega_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqq k^n \omega_n\left(\frac{1}{kn}\right) \leqq k^n \omega_n . (\delta).$$

La relation précédente est donc générale.

Soient k' un nombre positif non entier, $k - 1$ sa partie entière. On peut écrire

$$\omega_n(k'\delta) \leqq \omega_n(k\delta) \leqq k^n . \omega_n(\delta) < (k' + 1)^n \omega_n(\delta),$$
$$\omega_n(k'\delta) < (k' + 1)^n \omega_n(\delta).$$

Cette inégalité est vérifiée *a fortiori* si k' est entier. Faisons-y $k'\delta = 1$, il viendra

$$\omega_n(1) < (1 + \delta)^n . \delta^{-n} \omega_n(\delta).$$

D'où il résulte que $\omega_n(\delta)$ ne peut être d'ordre supérieur à n sans être identiquement nul. Nous verrons plus loin (n° **29**), que $f(x)$ se réduit alors à un polynome de degré $n - 1$ au plus.

On voit que si $\delta^{-n}\omega_n(\delta)$ est borné, $\omega_n(\delta)$ est exactement d'ordre n. Il est d'ailleurs facile de montrer que, dans ce cas, $\delta^{-n}\omega_n(\delta)$ tend inférieurement vers une limite bien déterminée.

21. On a évidemment $\omega_{r+1}(\delta) \leqq 2\omega_r(\delta)$. Je vais montrer que, inversement, on peut borner $\omega_r(\delta)$ au moyen de $\omega_{r+1}(\delta)$ et du module maximum M de $f(x)$, et plus généralement de $\omega_n(\delta)$, $n > r$.

Soit $0 < h \leqq \delta$. On a [n° **19**, B]

$$|2^{-(i+1)r} \Delta^r_{2^{i+1}h} f(x) - 2^{-ir} \Delta^r_{2^i h} f(x)| \leqq \frac{r}{2} 2^{-ir} \omega_{r+1}(2^i\delta).$$

D'où, en faisant $i = 0, 1, \ldots, p - 1$, et en ajoutant,

$$|2^{-pr} \Delta^r_{2^p h} f(x) - \Delta^r_h f(x)| \leqq \frac{r}{2} \sum_0^{p-1} 2^{-ri} \omega_{r+1}(2^i\delta) = \frac{r}{2} \sum_{-p+1}^{0} 2^{ri} \omega_{r+1}(2^{-i}\delta).$$

Ce qui donne, d'après (16),

$$|\Delta_h^r f(x)| \leqq 2^{-pr} |\Delta_{2^p h}^r f(x)| + \frac{r\,2^{r-1}}{\log 2} \delta^r \int_\delta^{2^p\delta} t^{-r-1} \omega_{r+1}(t)\, dt.$$

Cette inégalité est valable pour $p \geqq 0$, à condition que $x + r2^p\delta$ ne surpasse pas 1. Déterminons l'entier p par les inégalités

$$2^p r\delta \leqq 1 - x < 2^{p+1} r\delta.$$

On a alors

$$2^{-pr} < \left(\frac{2r\delta}{1-x}\right)^r, \quad 2^p\delta \leqq \frac{1-x}{r} \leqq \frac{1}{r} \leqq 1.$$

D'autre part $|\Delta_{2^p h}^r f(x)|$ est au plus égal à 2^rM. Il vient donc

$$|\Delta_h^r f(x)| < \left(\frac{4r}{1-x}\right)^r \mathrm{M}\,\delta^r + \frac{r\,2^{r-1}}{\log 2} \delta^r \int_\delta^1 t^{-r-1} \omega_{r+1}(t)\, dt,$$

avec $\delta \leqq \frac{1-x}{r}$, car p est au moins égal à o.

Il est facile d'obtenir une relation indépendante de x. Supposons $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, on aura pour $\delta \leqq \frac{1}{2r}$,

$$|\Delta_h^r f(x)| < (8r)^r \mathrm{M}.\delta^r + \frac{r\,2^{r-1}}{\log 2} \delta^r \int_\delta^1 .$$

En posant $f_1(x) = f(1-x)$, on aurait dans les mêmes conditions la même inégalité pour f_1, Mais

$$|\Delta_h^r f_1(x)| = |\Delta_h^r f(1 - x - rh)|.$$

Or, si $\frac{1}{2} < x \leqq 1$, $1 - x - rh$ est inférieur à $\frac{1}{2}$.

La relation précédente a donc lieu pour $0 \leqq x \leqq 1$. Il en résulte l'inégalité

$$\omega_r(\delta) < \delta^r \left[(8r)^r \mathrm{M} + \frac{r\,2^{r-1}}{\log 2} \int_\delta^1 t^{-r-1} \omega_{r+1}(t)\, dt \right],$$

valable si $\delta \leqq \frac{1}{2r}$.

On se débarrasse facilement de cette dernière restriction. Supposons $\delta \leqq 1$. On a

$$\omega_r(\delta) \leqq (2r)^r \omega_r\left(\frac{\delta}{2r}\right).$$

Ce qui donne en appliquant à $\omega_r\left(\frac{\delta}{2r}\right)$ la limitation précédente,

$$\omega_r(\delta) < \delta^r\left[(8r)^r\mathrm{M} + \frac{r\,2^{r-1}}{\log 2}\int_{\frac{\delta}{2r}}^{1} t^{-r-1}\omega_{r+1}(t)\,dt\right].$$

Faisons le changement de variable $t \Big| \frac{t}{2r}$. En remarquant que

$$\int_1^{2r} t^{-r-1}\omega_{r+1}(t)\,dt < 2^{r+1}\mathrm{M}\int_1^{\infty} t^{-r-1}\,dt = \frac{2^{r+1}}{r}\mathrm{M},$$

nous obtiendrons, en définitive,

$$(19)\qquad \begin{cases} \omega_r(\delta) < \mathrm{A}(r).\delta^r\left[\mathrm{M} + \displaystyle\int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_{r+1}(t)\,dt\right] \qquad (\delta \leqq 1) \\ \qquad\text{avec}\quad \mathrm{A}(r) < \left(1 + \dfrac{1}{\log 2}\right)(8r)^r. \end{cases}$$

Il est aisé maintenant d'avoir, de proche en proche, une limitation en fonction de $\omega_n(\delta)$. On a

$$\int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_{r+1}(t)\,dt < \mathrm{A}(r+1)\left[\mathrm{M}\int_\delta^1 dt + \int_\delta^1 dt\int_t^1 u^{-r-2}\omega_{r+2}(u)\,du\right].$$

Si, dans la dernière intégrale, on intervertit l'ordre des intégrations, il vient

$$\int_\delta^1 u^{-r-2}\omega_{r+2}(u)\,du\int_\delta^u dt < \int_\delta^1 u^{-r-1}\omega_{r+2}(u)\,du.$$

En portant dans (19) on obtient

$$\begin{aligned} \omega_r(\delta) &< \mathrm{A}(r).\delta^r\left\{\mathrm{M} + \mathrm{A}(r+1)\left[\mathrm{M} + \int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_{r+2}(t)\,dt\right]\right\} \\ &< [1+\mathrm{A}(r)][1+\mathrm{A}(r+1)].\delta^r\left[\mathrm{M} + \int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_{r+2}(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

On aperçoit la relation générale

$$\omega_r(\delta) < \prod_r^{n-1}[1+\mathrm{A}(i)].\delta^r\left[\mathrm{M} + \int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_n(t)\,dt\right],$$

dont la vérification est immédiate. En définitive, on peut écrire

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_r(\delta) < B(n).\delta^r\left[M + \int_\delta^1 t^{-r-1}\omega_n(t)\,dt\right], \\ r = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \delta \leqq 1; \end{cases}$$

où l'on a posé

$$B(n) = \prod_1^{n-1}[1 + A(i)].$$

Un calcul facile donne

$$B(n) < (2, 5)^{n-1}.(8n)^{\frac{n^2}{2}}.$$

22. Si dans (20) on fait $r = 1$, il vient

$$\omega_1(\delta) < B(n).\delta\left[M + \int_\delta^1 t^{-2}\omega_n(t)\,dt\right].$$

D'où il résulte que *si $\omega_n(\delta)$ tend vers zéro avec δ, $f(x)$ est continue dans* $(0, 1)$. On a, en effet,

$$\int_\delta^{\delta^{\frac{1}{2}}} t^{-2}\omega_n(t)\,dt \leqq \omega_n\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right)\int_\delta^{\delta^{\frac{1}{2}}} t^{-2}\,dt < \delta^{-1}.\omega_n\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\int_{\delta^{\frac{1}{2}}}^1 t^{-2}\omega_n(t)\,dt \leqq \omega_n(1)\int_{\delta^{\frac{1}{2}}}^1 t^{-2}\,dt < \delta^{-\frac{1}{2}}.\omega_n(1);$$

et, par suite,

$$\delta\int_\delta^1 < \omega_n\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) + \delta^{\frac{1}{2}}\omega_n(1).$$

De la relation (20) on peut encore tirer un résultat intéressant relativement à la manière dont varie l'ordre de $\omega_n(\delta)$ avec n.

S'il existe un nombre positif ε, tel que le quotient $\frac{\omega_n(\delta)}{\delta^\varepsilon\omega_r(\delta)}$, $(r < n)$, soit borné, $\omega_r(\delta)$ est nécessairement d'ordre r.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que d'une égalité de la forme $\omega_n(\delta) < k.\delta^\alpha$, où α est un nombre positif non entier la relation (20) permet de déduire

$$\omega_r(\delta) < k.\delta^\alpha \qquad \text{ou} \qquad \omega_r(\delta) < k.\delta^r,$$

suivant que α est inférieur ou supérieur à r. (La lettre k désigne indifféremment toute quantité indépendante de δ.)

Il résulte de l'hypothèse que $\omega_n(\delta)$ est au moins d'ordre ε, par suite aussi $\omega_r(\delta)$. Alors $\omega_n(\delta)$ est au moins d'ordre 2ε, par suite aussi $\omega_r(\delta)$, ... On finira par trouver pour $\omega_n(\delta)$ un ordre supérieur à r, sans jamais l'égaler, si l'on suppose, comme c'est évidemment possible, que ε n'est pas une partie aliquote de r. On arrivera donc à

$$\omega_r(\delta) < k.\delta^r.$$

23. Dans les applications on n'aura pas toujours $\omega_n(\delta)$ mais une inégalité de la forme

$$|\Delta_\delta^n f(x)| \leqq \varepsilon(\delta).$$

Si $\varepsilon(\delta)$ est *non décroissante*, on a nécessairement

$$\omega_n(\delta) \leqq \varepsilon(\delta).$$

En effet, soit η un nombre positif, aussi petit qu'on veut. Étant donné δ, on peut trouver des valeurs de x et de h, avec $0 < h \leqq \delta$, telles que $|\Delta_h^n f(x)|$ surpasse $\omega_n(\delta) - \eta$. Or on a

$$|\Delta_h^n f(x)| \leqq \varepsilon(h) \leqq \varepsilon(\delta),$$

d'où

$$\omega_n(\delta) < \varepsilon(\delta) + \eta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

24. Pour terminer l'étude des fonctions $\omega_n[\delta, f(x)]$, je vais donner une proposition qui nous sera indispensable pour l'extension des résultat de ce Chapitre aux fonctions de plusieurs variables.

Il s'agit d'*évaluer le module maximum de $f(x)$ uniquement en fonction de $\omega_n[\delta, f(x)]$, sachant que la fonction s'annule, dans* $(0, 1)$, *sur un ensemble de n points*. Il suffira d'ailleurs de considérer des points équidistants, comprenant 0 et 1.

Posons $\frac{1}{n-1} 2^{-p} = \delta_p$, et désignons par $\Omega_r(\delta_p)$, la plus grande des valeurs de $|\Delta_{\delta_p}^r f(j\delta_p)|$, où j est un entier positif ou nul tel que

$$j\delta_p + n\delta_p \leqq 1.$$

On a, évidemment,

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_r(\delta_p) \leqq \omega_r(\delta_p) \\ \Omega_r(\delta_0) = 0 \end{array}\right. \qquad (r \leqq n).$$

Par un calcul analogue à celui du n° **21**, je vais évaluer Ω_1 en fonction de Ω_n.

Établissons d'abord une formule de récurrence. Comme dans le calcul cité, on pourra se borner à la première moitié de l'intervalle; c'est-à-dire supposer

$$j\,\delta_p \leqq \frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$j \leqq (n-1)\,2^{p-1}.$$

On voit alors que j peut se mettre sous la forme

$$j = \alpha_1 2^{p-1} + \alpha_2 2^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-2} 2 + \alpha_p,$$

où les α sont des entiers inférieurs à n. (Si l'on distingue par ν le nombre pair égal à $n-1$ ou à n, α_p est le reste de la division de j par ν, α_{p-1} celui de la division de $\frac{j-\alpha_p}{2}$ par ν, et ainsi de suite.) Dans ces conditions, on a

$$j\,\delta_p = \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \ldots + \alpha_p\delta_p.$$

Posons enfin

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \alpha_1\delta_1, \qquad \ldots, \qquad x_p = x_{p-1} + \alpha_p\delta_p,$$

et évaluons la différence

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_i = {} & \delta_{i-1}^{-r}\Delta_{\delta_{i-1}}^r f(x_{i-1}) - \delta_i^{-r}\Delta_{\delta_i}^r f(x_i)\\ & 2^{-r}\delta_i^{-r}\left[\Delta_{2\delta_i}^r f(x_{i-1}) - 2^r\Delta_{\delta_i}^r f(x_{i-1})\right] + \delta_i^{-r}\left[\Delta_{\delta_i}^r f(x_{i-1}) - \Delta_{\delta_i}^r f(x_i)\right];\end{aligned}$$

x_{i-1} est un multiple entier de δ_i. Le module du premier terme est donc [n° **19**, B] au plus égal à $\frac{r}{2}\,\delta_i^{-r}\Omega^{r+1}(\delta_i)$. D'autre part, comme

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i\delta_i,$$

le module du second est au plus égal à

$$\alpha_i\,\delta_i^{-r}\,\Omega_{r+1}(\delta_i) \leqq (n-1)\,\delta_i^{-r}\,\Omega_{r+1}(\delta_i).$$

On a donc

$$|\mathfrak{D}_i| \leqq \left(\frac{r}{2} + n - 1\right)\delta_i^{-r}\Omega_{r+1}(\delta_i).$$

Mais

$$\delta_0^{-r}\Delta_{\delta_0}^r f(x_0) - \delta_p^{-r}\Delta_{\delta_0}^r f(x_p) = \sum_1^p \omega_i$$

et

$$\Delta_{\delta_0}^r f(x_0) = \Omega_r(\delta_0) = 0.$$

Il vient donc

$$\Omega_r(\delta_p) \leqq \frac{2n+r-2}{2}\,\delta_p^r \sum_1^p \delta_i^{-r}\,\Omega_{r+1}(\delta_i).$$

On en déduit successivement

$$\Omega_1(\delta_p) \leqq \frac{2n-1}{2}\,\delta_p \sum_1^p \delta_i^{-1}\,\Omega_2(\delta_i),$$

$$\Omega_2(\delta_p) \leqq \frac{2n}{2}\,\delta_p^2 \qquad \sum_1^p \delta_i^{-2}\,\Omega_3(\delta_i),$$

....

Ce qui donne

$$\Omega_1(\delta_p) \leqq \frac{2n-1}{2}\,\frac{2n}{2}\,\delta_p \sum_1^p \delta_1^{-i} \sum_1^i \delta_j^{-2}\,\Omega_3(\delta_j);$$

c'est-à-dire, en intervertissant l'ordre des sommations :

$$\Omega_1(\delta_p) \leqq \frac{2n-1}{2}\,\frac{2n}{2}\,\delta_p \sum_1^p \delta_j^{-2}\,\Omega_3(\delta_j) \sum_j^p \delta_i.$$

Or

$$\sum_j^p \delta_i = \frac{1}{n-1}\sum_j^p 2^{-i} < 2\,\frac{2^{-j}}{n-1} = 2\,\delta_j.$$

On obtient donc

$$\Omega_1(\delta_p) < \frac{1}{2}(2n-1)(2n)\,\delta_p \sum_1^p \delta_j^{-1}\,\Omega_3(\delta_j).$$

On aperçoit la relation générale

$$\Omega_1(\delta_p) < \frac{1}{2}(2n-1)(2n)\ldots(2n+r-3)\,\delta_p \sum_1^p \delta_i^{-1}\,\Omega_r(\delta_i),$$

dont la vérification est immédiate. En définitive, il vient

$$\Omega_1(\delta_p) < \frac{1}{2}(2n-1)(2n)\ldots(3n-3)\,\delta_p \sum_1^p \delta_i^{-1}\,\Omega_n(\delta_i).$$

Un calcul facile donne

$$(2n-1)(2n)\ldots(3n-3) < 1{,}3\,[2{,}5 \times (n-1)]^{n-1}.$$

Soit maintenant x une valeur quelconque de $(0,1)$. Écrivons la partie fractionnaire de $(n-1)x$ dans le système de base 2. On aura

$$x = \frac{h}{n-1} + \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 + \ldots,$$

où h est entier, et les β sont égaux à 0 ou 1. Si f est continue on peut écrire

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{h}{n-1}\right) - f(x) \right| \leqq \sum_1^\infty \Omega_1(\delta_p),$$

ou encore

$$|f(x)| < \frac{1{,}3}{2}[2{,}5\times(n-1)]^{n-1} \sum_1^\infty \delta_p \sum_1^p \delta_i^{-1}\,\Omega_n(\delta_i).$$

D'où, en remplaçant $\Omega_n(\delta_p)$ par $\omega_n(\delta_p)$, qui lui est supérieur, et en intervertissant l'ordre des sommations :

$$|f(x)| < 1{,}3\,[2{,}5 \times (n-1)]^{n-1} \sum_1^\infty \omega_n(\delta_i).$$

Si enfin on suppose convergente l'intégrale $\int_0 t^{-1}\omega_n(t)\,dt$, f est continue [n^{os} **19**, C, et **22**], et, d'après (16), on a

$$|f(x)| < 1{,}3\,[2{,}5 \times (n-1)]^{n-1} \frac{2}{\log 2}\,\frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{1}{n-1}} t^{-1}\,\omega_n(t)\,dt.$$

Les calculs supposent $n > 1$. Si $n = 1$ on a

$$|f(x)| \leqq \omega_1(1),$$

pourvu que f s'annule en un point. Ce qui donne, d'après (18),

$$|f(x)| < \frac{2}{\log 2} \int_0^2 t^{-1}\,\omega_1(t)\,dt = \frac{2}{\log 2} \int_0^1 t^{-1}\,\omega_1(2t)\,dt < \frac{4}{\log 2} \int_0^1 t^{-1}\,\omega(t)\,dt.$$

Dans tous les cas on peut écrire

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & |f(x)| < C(n) \int_0^1 t^{-1}\,\omega_n(t)\,dt \\ & \text{avec} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n \geqq 1), \\ & \qquad C(n) < 3(2{,}5)^n\, n^{n-2} \end{aligned}\right.$$

sous la seule condition *que $f(x)$ s'annule sur l'ensemble ξ_n des n points équidistants ayant pour extrêmes les points* 0 *et* 1. Si $n = 1$, ξ_n comprend un seul point, d'ailleurs quelconque.

Grâce à l'identité de Lagrange, on étend facilement la proposition à un ensemble quelconque. On obtient alors le théorème suivant, dont nous n'aurons pas à faire usage :

Si $f(x)$ s'annule sur un ensemble de n points distincts ou non, l'ordre de chacun d'eux étant au plus égal à p, on a

$$|f(x)| < E \int_0^1 t^{-p}\,\omega_n(t)\,dt,$$

où E *désigne une constante qui dépend seulement de l'ensemble* (¹).

V. — Existence et continuité des dérivées.

25. Nous allons chercher à déduire de la connaissance de

$$\omega_n[\delta, f(x)]$$

le plus de renseignements possible sur les dérivées de $f(x)$.

Supposons *convergente* l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha-1}\,\omega_n(t)\,dt$, $\alpha < n$.

$f(x)$ est continue [nᵒˢ **19**, C, et **22**]. D'autre part, en prenant :

$$\psi(t) = e^{-t}(1 - e^{-t})^n;$$

$$\varphi(x, t) = f(x - t) - \frac{n}{1} f(x - 2t) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x - 3t) - \ldots,$$

(¹) Lorsque l'ensemble contient des points multiples, la démonstration fait intervenir les résultats du nᵒ **28**.

on peut appliquer le théorème du n° **14**. [La convergence est non seulement uniforme, mais absolue.] Par suite, $f(x)$ *admet des dérivées continues, jusqu'à l'ordre* α *inclus, pour* $0 < x \leqq 1$. La substitution $x \mid 1 - x$ permet d'aller *jusqu'à l'origine*, en ce qui concerne les *dérivées entières*. Nous verrons [n° **28**] comment on peut prolonger f de manière à assurer aussi la continuité des autres en ce point.

26. La condition précédente n'est pas, nous le savons [n° **14**], une condition nécessaire. Néanmoins si elle n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si $\delta^{-\alpha}\omega_n(\delta)$ est un infiniment petit d'ordre insuffisant pour assurer la convergence de l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha-1}\omega_n(t)\,dt$, la dérivée d'ordre α peut ne pas exister. Je vais le montrer par un exemple, qui nous fera voir également, que l'ordre fourni pour $\omega_n(\delta)$, par la relation (20), peut être atteint.

Soit $\varepsilon(t)$ une fonction positive non décroissante. Considérons la fonction continue

$$f(x) = \sum_1^\infty 2^{-i}\varepsilon(2^{-i})\sin 2^i x$$

et évaluons $\omega_1[\delta, f(x)]$ et $\omega_2[\delta, f(x)]$.

On a, quel que soit $0 < h \leqq \delta$,

$$|\Delta'_h f(x)| \leqq \delta \max\left|\frac{d}{dx}\sum_1^n\right| + 2\left|\sum_{n+1}^\infty\right|,$$

d'où

$$\omega_1(\delta) \leqq \delta\sum_1^n \varepsilon(2^{-i}) + 2\,\varepsilon(2^{-n-1})\sum_{n+1}^\infty 2^{-i}.$$

Ce qui donne, en utilisant l'inégalité (16),

$$\omega_1(\delta) \leqq \frac{\delta}{\log 2}\int_{2^{-n}}^1 t^{-1}\varepsilon(t)\,dt + 4.2^{-n-1}\varepsilon(2^{-n-1}).$$

Si maintenant on détermine n par les inégalités

$$2^{-n-1} \leqq \delta < 2^{-n},$$

il vient

$$\omega_1(\delta) < \frac{\delta}{\log 2}\int_\delta^1 t^{-1}\varepsilon(t)\,dt + 4\,\delta\,\varepsilon(\delta).$$

On voit immédiatement que le premier terme du second membre est infiniment grand par rapport au second. Je vais montrer que $\omega_1(\delta)$ est effectivement de l'ordre de ce premier terme. Formons :

$$f(\delta) - f(0) = f(\delta) = \delta\sum_1^n \varepsilon(2^{-i})\,(2^i\,\delta)^{-1}\sin 2^i\,\delta + \sum_{n+1}^\infty.$$

Si n est déterminé comme précédemment, on a dans la première somme

$$(2^i\,\delta)^{-1}\sin(2^i\,\delta) \geqq \sin 1 > \frac{1}{2}.$$

Il vient donc

$$\delta\sum_1^n > \frac{\delta}{2}\sum_1^n \varepsilon(2^{-i})$$

et, d'après (17) :

$$\delta\sum_1^n > \frac{\delta}{2\log 2}\int_{2^{-n-1}}^{2^{-1}} t^{-1}\varepsilon(t)\,dt > \frac{\delta}{2\log 2}\int_\delta^{\frac{1}{2}} t^{-1}\varepsilon(t)\,dt.$$

Comme $\left|\sum_{n+1}^\infty\right|$ est comparable à $\delta\varepsilon(\delta)$, on voit que $\omega_1(\delta)$ est bien de l'ordre annoncé.

Pour $\omega_2(\delta)$, on écrira

$$|\Delta_h^2 f(x)| \leqq \delta^2 \max\left|\frac{d^2}{dx^2}\sum_1^n\right| + 4\left|\sum_{n+1}^\infty\right| \qquad (0 < h \leqq \delta),$$

d'où l'on déduira, comme précédemment :

$$\omega_2(\delta) < \frac{2}{\log 2}\,\delta^2\int_\delta^1 t^{-2}\varepsilon(t)\,dt + 8\,\delta\,\varepsilon(\delta).$$

Ceci posé, prenons pour $\varepsilon(t)$ un infiniment petit faisant diverger l'intégrale $\int_0 t^{-1}\varepsilon(t)\,dt$. Alors $\delta^{-1}[f(\delta) - f(0)]$ est infiniment grand ;

$f(x)$ admet donc une dérivée infinie, à l'origine, et par suite aussi en tout point $j2^{-i}\pi$, i et j désignant des entiers. D'autre part, on voit comme au n° **22** que $\delta^{-1}\omega_2(\delta)$ tend vers zéro.

Prenons maintenant $\varepsilon(t)=1$.

$\omega_1(\delta)$ est de l'ordre de $\delta\log\delta$, ce qui est bien l'ordre fourni par (20), en prenant $\omega_2 < A.\delta$, inégalité à laquelle se réduit la précédente si $\varepsilon=1$.

27. Revenons à l'hypothèse du n° **25**. La dérivé $f^{(\alpha)}(x)=D_0^{(\alpha)}f(x)$ est donnée par la relation

$$f^{(\alpha)}(x)\int_0^\infty t^{-\alpha-1}e^{-t}(1-e^{-t})^n\,dt$$
$$=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}[f(x-t)-C_n^1 f(x-2t)+\ldots]\,dt \quad (^1).$$

On aurait pu prendre aussi bien

$$\psi(t)=(1-e^{-t})^n-(1-e^{-2t})^n,$$

ce qui aurait conduit à

$$f^{(\alpha)}(x)\int_0^\infty t^{-\alpha-1}[(1-e^{-t})^n-(1-e^{-2t})^n]\,dt$$
$$=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}[\Delta_{-t}^n f(x)-\Delta_{-2t}^n f(x)]\,dt.$$

On peut séparer les deux intégrales. Mais

$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-2t})^n\,dt=2^\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-t})^n\,dt,$$
$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\Delta_{-2t}^n f(x)\,dt=2^\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\Delta_{-t}^n f(x)\,dt.$$

Il vient alors, en divisant les deux membres par $(1-2^\alpha)$:

$$(22)\qquad f^{(\alpha)}(x)\int_0^\infty t^{-\alpha-1}(1-e^{-t})^n\,dt=\int_0^\infty t^{-\alpha-1}\Delta_{-t}^n f(x)\,dt.$$

---

(1) f est prolongée par zéro à gauche de l'origine.

Par exemple, si $n = 2$, $\alpha = 1$, la formule devient

$$f'(x) = \frac{1}{2\log 2}\int_0^\infty t^{-2}[f(x) - 2f(x-t) + f(x-2t)]\,dt,$$

et si $n = 1$, $\alpha < 1$:

$$(23)\qquad f^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1}[f(x) - f(x-t)]\,dt.$$

28. Occupons-nous maintenant de la continuité à l'origine des dérivées non entières. Il va falloir, pour cela, évaluer le module de continuité des dérivés ordinaires.

Observons d'abord qu'on peut supposer $n-1 \leqq \alpha < n$. Soit, en effet, r la partie entière de α. Il s'agit de montrer la convergence de l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt$.

On a, d'après (20) :

$$t^{-\alpha-1}\,\omega_{r+1}(t) < B(n)\,t^{r-\alpha}\left[M + \int_t^1 u^{-r-2}\,\omega_n(u)\,du\right].$$

Il suffit d'établir que

$$\int_\delta^1 t^{r-\alpha}\,dt \int_t^1 u^{-r-2}\,\omega_n(u)\,du$$

reste borné. Or, en intervertissant l'ordre des intégrations, il vient :

$$\int_\delta^1 u^{-r-2}\,\omega_n(u)\,du \int_\delta^u t^{r-\alpha}\,dt < \frac{1}{r+1-\alpha}\int_\delta^1 t^{-\alpha-1}\,\omega_n(t)\,dt.$$

Supposons donc $n = r+1$. $f^{(r)}(x)$ étant continue, on a

$$f^{(r)}(x) = \lim_{\delta=0} \delta^{-r}\,\Delta_\delta^r f(x).$$

D'autre part le nº **19**, B, permet d'écrire

$$\left|(2\delta)^{-r}\,\Delta_{2\delta}^r f(x) - \delta^{-r}\,\Delta_\delta^r f(x)\right| \leqq \frac{r}{2}\,\delta^{-r}\,\omega_{r+1}(\delta).$$

Dans cette inégalité remplaçons successivement δ par $2^{-1}\delta$, $2^{-2}\delta$, ..., et ajoutons. Il viendra

$$\left|\delta^{-r}\Delta_\delta^r f(x) - f^{(r)}(x)\right| \leqq \frac{r}{2}\delta^{-r}\sum_1^\infty 2^{ir}\omega_{r+1}(2^{-i}\delta).$$

On obtient de même :

$$\left|\delta^{-r}\Delta_\delta^r f(x+\delta) - f^{(r)}(x+\delta)\right| \leqq \frac{r}{2}\delta^{-r}\sum_1^\infty 2^{ir}\omega_{r+1}(2^{-i}\delta).$$

On en déduit :

$$\left|f^{(r)}(x+\delta) - f^{(r)}(x)\right| \leqq \delta^{-r}\omega_{r+1}(\delta) + r\,\delta^{-r}\sum_1^\infty 2^{ir}\omega_{r+1}(2^{-i}\delta) \leqq r\,\delta^{-r}\sum_0^\infty;$$

c'est-à-dire, en utilisant (16),

$$\left|f^{(r)}(x+\delta) - f^{(r)}(x)\right| < \frac{r\,2^r}{\log 2}\int_0^{2\delta} t^{-r-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt.$$

Cette relation est valable si $x + \overline{r+1}\,\delta \leqq 1$. La substitution $x \mid 1-x$ montre qu'il en est de même si $0 \leqq x - \overline{r+1}\,\delta$. Mais lorsque δ est au plus égal à $\frac{1}{2(r+1)}$ l'une ou l'autre de ces conditions est satisfaite. On a donc

$$\omega_1[\delta, f^{(r)}(x)] < \frac{r\,2^r}{\log 2}\int_0^{2\delta} t^{-r-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt,$$

puisque le second membre croît avec δ.

On se débarrasse de la restriction $\delta \leqq \frac{1}{2(r+1)}$ en opérant comme au n° **21**. Un calcul facile donne

$$\omega_1[\delta, f^{(r)}(x)] < 6\,r^2\,2^r\int_0^{\delta} t^{-r-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt. \tag{24}$$

Considérons maintenant $f^{(\alpha)}$. La différence

$$\bar f(x) = f(x) - \sum_0^r \frac{x^i}{i!} f^{(i)}(0)$$

admet des dérivées entières continues jusqu'à l'ordre r, nulles à l'origine. Je dis que $x^{-\alpha}\bar f(x)$ est infiniment petit avec x. Il suffit de montrer que $x^{r-\alpha}\bar f^{(r)}(x)$ l'est.

On a

$$x^{r-\alpha}|\overline{f}^{(r)}(x)| = x^{r-\alpha}|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(0)|$$
$$< 6r^2 2^r x^{r-\alpha}\int_0^x t^{-r-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt,$$

d'où

$$x^{r-\alpha}|\overline{f}^{(r)}(x)| < 6r^2 2^r\int_0^x t^{-\alpha-1}\,\omega_{r+1}(t)\,dt.$$

Et cette dernière intégrale tend vers zéro.

D'autre part, $\omega_{r+1}[\delta, \overline{f}(x)]$ est évidemment égal à $\omega_{r+1}[\delta, f(x)]$. Par suite [nº **12**], *la dérivée* $D_0^{(\alpha)}\overline{f}(x)$ *est continue dans tout* $(0,1)$.

Si maintenant on prolonge $f(x)$, à gauche de l'origine par le polynome $\sum_0^t \frac{x^i}{i!}f_{(0)}^{(i)}$, on aura :

$$D_{-1}^{(\alpha)}f(x) = D_0^{(\alpha)}\overline{f}(x) + D_{-1}^{(\alpha)}\sum_0^p \frac{x^i}{i!}f_{(0)}^{(i)}$$

[car $\overline{f} = 0$, pour $x \leqq 0$]. Ce qui montre que la *dérivée d'ordre* α, prise avec $a = -1$, *est continue dans tout* $(0, 1)$, *lorsque* f *est convenablement prolongée*.

29. En résumé, on a le théorème suivant :

Soit $f(x)$ *une fonction bornée dans* $(0, 1)$. *Si l'intégrale*

$$\int_0 t^{-\alpha-1}\,\omega_n(t)\,dt$$

converge, la fonction admet, dans tout l'intervalle, des dérivées continues jusqu'à l'ordre α *inclus. Si* $t^{-\alpha}\omega_n(t)$ *est supposé seulement infiniment petit, la dérivée d'ordre* α *peut ne pas exister.*

Nous n'avons pas, dans cet énoncé, reproduit la restriction $\alpha < n$. Elle est, en effet, inutile. Si l'on avait $\alpha \geqq n$, il résulterait de l'hypothèse que $\omega_n(\delta) = 0$ [nºˢ **19**, C, et **20**]. En prenant $r = n - 1$, on déduirait alors de (24) que $f(x)$ se réduit à un polynome de degré $n - 1$ au plus.

M. P. Montel (¹) a démontré que si le quotient $\delta^{-\alpha}\omega_n(\delta)$ reste

(¹) *Mémoire cité*, p. 183.

borné, les dérivées d'ordre inférieur à α existent et sont continues à l'intérieur de l'intervalle. D'autre part, M. H. Weyl (¹) a établi la même proposition pour $n = 1$. La méthode de M. P. Montel utilise les propriétés des polynomes d'approximation : c'est pourquoi elle ne permet pas de conclure pour les bornes de l'intervalle; celle de M. H. Weyl est directe, et revient au fond à mettre la dérivée sous la forme (23); elle vaut pour tout l'intervalle.

Du théorème précédent et du n° **20**, on déduit le corollaire :

Si le quotient $\frac{\omega_n(\delta)}{\delta^\varepsilon \omega_r(\delta)}$, $[r < n, \varepsilon > 0]$ *reste borné,* $f(x)$ *admet toutes les dérivées continues d'ordre inférieur à* $r + \varepsilon$.

Enfin, une conséquence immédiate de la relation (24) est la suivante :

Si $\delta^{-n}\omega_n(\delta)$ *reste borné, la dérivée* $f^{(n-1)}(x)$ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* 1, *alors, d'après un théorème de M. Lebesgue, la dérivée* $f^{(n)}(x)$ *existe presque partout.*

30. Je vais compléter le théorème, en évaluant le module maximum et le module de continuité de la dérivée $D_0^{(\alpha)}\bar{f}(x)$. Il sera commode de passer par l'intermédiaire du cas où l'on a $\alpha < 1$.

Supposons convergente l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt$. On a

$$D_0^{(\alpha)}\bar{f}(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x t^{-\alpha-1}[\bar{f}(x) - \bar{f}(x-t)]\,dt.$$

$\delta^{-\alpha}\omega_1(\delta)$ est infiniment petit [n° **19**, C], par suite

$$x^{-\alpha}\bar{f}(x) = x^{-\alpha}[f(x) - f(0)]$$

tend vers zéro avec x. La relation précédente est donc valable dans tout (0, 1) [n^{os} **12** et **27**].

Remarquons que, dans l'intervalle $(-\infty, 1-\delta)$, $|\Delta_\delta^1\bar{f}(x)|$ est au plus égal à $\omega_1(\delta)$. C'est évident lorsque x et $x+\delta$ sont d'un même côté de l'origine. Dans le cas contraire, on a

$$|\Delta_\delta^1\bar{f}(x)| = |\bar{f}(x+\delta)| \leqq \omega_1(x+\delta) \leqq \omega_1(\delta).$$

(¹) *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrockener Ordnung* (*Vierteljahrsschrift in Zürich*, 1917, p. 297-302).

On déduit alors de l'expression de la dérivée

$$|\Delta_\delta^1 D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x)| < \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left[2\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt + 2\int_\delta^\infty t^{-\alpha-1}\omega_1(\delta)\,dt\right],$$

et, *a fortiori*,

$$(25) \qquad |\Delta_\delta^1 D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x)| < 2\left[\alpha\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt + \delta^{-\alpha}\omega_1(\delta)\right].$$

Cette relation peut se simplifier. On a $[(18)]$

$$\delta^{-\alpha}\omega_1(\delta) < \frac{2^{\alpha+1}}{\log 2}\int_0^{2\delta} t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt = \frac{2}{\log 2}\int_0^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_1(2t)\,dt$$
$$\leqq \frac{4}{\log 2}\int_0^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt.$$

D'où

$$|\Delta_\delta^1 D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x)| < 2\left(1+\frac{4}{\log 2}\right)\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt,$$

et, le second membre étant croissant avec δ,

$$(26) \qquad \omega_1[\delta, D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x)] < 14\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_1(t)\,dt \qquad (\alpha < 1).$$

Passons maintenant au cas général.

On a, puisque $x^{-\alpha}\overline{f}(x)$ tend vers zéro,

$$D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x) = D_0^{(\alpha-r)} \overline{f}^{(r)}(x) \quad [\text{n}^\circ\ \mathbf{4}].$$

Appliquons à cette dernière dérivée l'inégalité (25). Il vient

$$|\Delta_\delta^1 D_0^{(\alpha)} \overline{f}(x)| < 2\left\{(\alpha-r)\int_0^\delta t^{r-\alpha-1}\omega_1[t, \overline{f}^{(r)}(x)]\,dt + \delta^{r-\alpha}\omega_1[\delta, \overline{f}^{(r)}(x)].\right\}$$

Comme $\overline{f}^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) - f^{(r)}(0)$, on a (24)

$$\omega_1[t, \overline{f}^{(r)}(x)] < 6r^2 2^r \int_0^t u^{-r-1}\omega_{r+1}(u)\,du.$$

$$\delta^{r-\alpha}\omega_1[\delta, \overline{f}^{(r)}(x)] < 6r^2 2^r \int_0^\delta u^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(u)\,du.$$

D'où

$$(\alpha - r)\int_0^\delta \bullet \quad < 6r^2 2^r(\alpha - r)\int_0^\delta t^{r-\alpha-1}\,dt\int_0^t u^{-r-1}\omega_{r+1}(u)\,du$$
$$= \quad 6r^2 2^r(\alpha - r)\int_0^\delta u^{-r-1}\omega_{r+1}(u)\,du\int_u^\delta t^{r-\alpha-1}\,dt$$
$$< 6r^2 2^r\int_0^\delta u^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(u)\,du,$$

ce qui donne, en définitive,

$$\omega_1[\delta,\ D_0^{(\alpha)}\overline{f}(x)] < 24r^2 2^r\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(t)\,dt. \tag{27}$$

Comme $D_0^{(\alpha)}\overline{f}(x)$ s'annule à l'origine, on a aussi

$$|D_0^{(\alpha)}\overline{f}(x)| < 24r^2 2^r\int_0^1 t^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(t)\,dt. \tag{28}$$

31. En résumé, on voit que si l'on pose

$$\mu(\alpha) = 14 + 24\alpha^2 2^\alpha,$$

on a, dans tous les cas,

$$\omega_1[\delta,\ D_0^{(\alpha)}f(x)] < \mu(\alpha)\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(t)\,dt, \tag{29}$$

$$|D_0^{(\alpha)}f(x)| < \mu(\alpha)\int_0^1 t^{-\alpha-1}\omega_{r+1}(t)\,dt, \tag{30}$$

où r désigne la partie entière de α, *à condition que f et ses dérivées entières d'ordre au plus égal à α s'annulent à l'origine.*

De plus

$$f(x) = I_0^{(\alpha)}D_0^{(\alpha)}f(x).$$

Dans le cas où l'on connaîtrait seulement ω_n $(n > r+1)$, ces relations et (20) fourniraient les limites. On obtiendrait

$$\omega_1[\delta,\ D_0^{(\alpha)}f(x)] < \mu_1(n,\alpha)\left[M\,\delta^{r+1-\alpha} + \int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_n(t)\,dt\right],$$

$$|D_0^{(\alpha)}f(x)| < \mu_1(n,\alpha)\left[M + \int_0^1 t^{-\alpha-1}\omega_n(t)\,dt\right],$$

$\mu_1(n, \alpha)$ désignant une fonction de n et α seuls.

32. Je vais compléter cette étude par une proposition réciproque : chercher l'ordre minimum de ω_{r+1} dans l'hypothèse où la fonction donnée admet une dérivée d'ordre α soit bornée, soit continue. Pour simplifier, je supposerai les dérivées $D_0^{(\alpha')}f(x)$ $(0 \leqq \alpha' \leqq \alpha)$, nulles à l'origine. Ceci revient à retrancher de $f(x)$ une expression indéfiniment dérivable pour $x > 0$ [n° 4]. On aura alors

$$\begin{aligned} f(x) &= I_0^{(\alpha)} D_0^{(\alpha)} f(x), \\ f^{(\alpha)}(x) &= D_0^{(\alpha)} f(x) = D_0^{(\alpha - r)} f^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Supposons d'abord $f^{(\alpha)}(x)$ bornée, et soit M_α son module maximum. Dans le cas où $\alpha = r$, on déduit de l'identité

$$\Delta_\delta^r f(x) = \int_x^{x+\delta} dt_r \int_{t_r}^{t_r+\delta} dt_{r-1} \ldots \int_{t_2}^{t_2+\delta} f^{(r)}(t_1)\, dt_1,$$
$$\omega_{r+1}[\delta, f(x)] \leqq 2 M_r \delta^r.$$

Lorsque α n'est pas entier, il est commode de passer par le cas intermédiaire $r = 0$. On a alors

$$(31) \quad f(x+\delta) - f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^x [(x+\delta-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}] f^{(\alpha)}(t)\, dt \right. \\ \left. + \int_x^{x+\delta} (x+\delta-t)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(t)\, dt \right\}.$$

Le module de la première intégrale est au plus égal à

$$M_\alpha \int_0^x [(x-t)^{\alpha-1} - (x+\delta-t)^{\alpha-1}]\, dt$$
$$= \frac{M_\alpha}{\alpha} [(x+\delta-t)^\alpha - (x-t)^\alpha]_0^x < \frac{M_\alpha}{\alpha} \delta^\alpha;$$

celui de la seconde à

$$M_\alpha \int_x^{x+\delta} (x+\delta-t)^{\alpha-1}\, dt = \frac{M_\alpha}{\alpha} [(x+\delta-t)^\alpha]_{x+\delta}^x = \frac{M_\alpha}{\alpha} \delta^\alpha.$$

Il vient donc

$$\omega_1[\delta, f(x)] < \frac{2 M_\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \delta^\alpha < 4 M_\alpha \delta^\alpha.$$

Supposons maintenant $r \neq 0$. On a

$$(32) \quad \Delta_\delta^{r+1} f(x) = \int_x^{x+\delta} dt_r \int_{t_r}^{t_r+\delta} dt_{r-1} \ldots \int_{t_2}^{t_2+\delta} [f^{(r)}(t_1+\delta) - f^{(r)}(t_1)\, dt_1.$$

Mais

$$f^{(\alpha)}(x) = \mathrm{D}_0^{(\alpha-r)} f^{(r)}(x).$$

On obtient alors, d'après ce qui précède,

$$|f^{(r)}(t_1+\delta) - f^{(r)}(t_1)| < 4\,\mathrm{M}_\alpha \delta^{\alpha-r},$$

d'où enfin

$$\omega_{r+1}[\delta, f(x)] < 4\,\mathrm{M}_\alpha \delta^\alpha.$$

Relation vérifiée *a fortiori* si $\alpha = r$.

33. Il nous reste à traiter le cas où $f^{(\alpha)}(x)$ est continue. Soit $\varepsilon(\delta)$ son module de continuité.

Si $\alpha = r$, on tire de (32)

$$\omega_{r+1}[\delta, f(x)] \leqq \delta^r \varepsilon(\delta).$$

Passons au cas $r = 0$, qui servira, comme plus haut, à traiter le cas général.

Le changement de variable $t \mid x - t$ donne, à partir de (31),

$$\Gamma(\alpha)\,\Delta_\delta^1 f(x) = \int_0^x [(t+\delta)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] f^{(\alpha)}(x-t)\, dt + \int_{-\delta}^0 (t+\delta)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(x-t)\, dt.$$

Remplaçons x par $x+\delta$. Il viendra

$$\Gamma(\alpha)\,\Delta_\delta^1 f(x+\delta)$$
$$= \int_0^{x+\delta} [(t+\delta)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] f^{(\alpha)}(x+\delta-t)\, dt + \int_{-\delta}^0 (t+\delta)^{\alpha-1} f^{(\alpha)}(x+\delta-t)\, dt.$$

En retranchant, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\,\Delta_\delta^2 f(x) = & \int_0^x [(t+\delta)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] [f^{(\alpha)}(x+\delta-t) - f^{(\alpha)}(x-t)]\, dt \\ & + \int_x^{x+\delta} [(t+\delta)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] f^{(\alpha)}(x+\delta-t)\, dt \\ & + \int_{-\delta}^0 (t+\delta)^{\alpha-1} [f^{(\alpha)}(x+\delta-t) - f^{(\alpha)}(x-t)]\, dt.\end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, $x+\delta-t$ reste compris entre o et δ. Comme $f^{(\alpha)}(0)$ est nul $|f^{(\alpha)}(x+\delta-t)|$ est au plus égal à $\varepsilon(\delta)$. On a donc

$$|\Gamma(\alpha)\Delta_\delta^2 f(x)| < \varepsilon(\delta)\left\{\int_0^{x+\delta}[t^{\alpha-1}-(t+\delta)^{\alpha-1}]\,dt + \int_{-\delta}^{0}(t+\delta)^{\alpha-1}\,dt\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon(\delta)}{\alpha}\left\{2\delta^\alpha - [(x+2\delta)^\alpha - (x+\delta)^\alpha]\right\} < \frac{2\varepsilon(\delta)}{\alpha}\delta^\alpha.$$

D'où l'on tire

$$\omega_2[\delta, f(x)] < \frac{2\varepsilon(\delta)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\delta^\alpha < 4\delta^\alpha\varepsilon(\delta).$$

En raisonnant comme plus haut, on arrive, dans le cas général, à

$$\omega_{r+2}[\delta, f(x)] < 4\delta^\alpha\varepsilon(\delta). \tag{34}$$

Lorsque α est différent de r, on ne peut espérer avoir une inégalité de la forme

$$\omega_{r+1}(\delta) < k\,\delta^\alpha\,\varepsilon(\delta).$$

Car $f^{(\alpha)}(x)$ peut satisfaire à une condition de Lipschitz d'ordre supérieur à $r+1-\alpha$, ce qui conduirait à un ordre plus grand que $r+1$ pour ω_{r+1}.

On peut montrer cependant que $\delta^{-\alpha}\omega_{r+1}(\delta)$ est infiniment petit avec δ. La relation (20) donne

$$\omega_{r+1}(\delta) < B(r+2)\,\delta^{r+1}\left[M + \int_\delta^1 t^{-r-2}\,4\,t^\alpha\,\varepsilon(t)\,dt\right].$$

Il s'agit d'établir que

$$\delta^{r+1-\alpha}\int_\delta^1 t^{\alpha-r-2}\,\varepsilon(t)\,dt$$

tend vers zéro avec δ. Posons

$$r+1-\alpha = \beta;$$

β est positif. Comme $\varepsilon(t)$ est non décroissante, on peut écrire

$$\int_\delta^1 t^{-\beta-1}\varepsilon(t)\,dt = \int_\delta^{\delta^{\frac12}} t^{-\beta-1}\varepsilon(t)\,dt + \int_{\delta^{\frac12}}^1 t^{-\beta-1}\varepsilon(t)\,dt < \varepsilon\left(\delta^{\frac12}\right)\frac{\delta^{-\beta}}{\beta} + \varepsilon(1)\frac{\delta^{-\frac{\beta}{2}}}{\beta}.$$

D'où

$$\delta^\beta \int_\delta^1 < \frac{1}{\beta}\left[\varepsilon\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) + \varepsilon(1)\,\delta^{\frac{\beta}{2}}\right]. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

34. En résumé, *posons*

$$\omega_{r+1}[\delta, f(x)] = \delta^\alpha \eta(\delta).$$

1° *Si $f(x)$ admet une dérivée d'ordre α, discontinue et bornée, $\eta(\delta)$ est borné* [on ne peut affirmer que ce n'est pas un infiniment petit, en tout cas l'intégrale $\int_0 t^{-1}\eta(t)dt$ diverge nécessairement];

2° *Si $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre α, mais aucune d'ordre supérieur, $\eta(\delta)$ est un infiniment petit d'ordre inférieur à celui de δ^ε aussi petit que soit ε.*

On peut remplacer $r+1$ par un entier supérieur quelconque.

Cette proposition découle immédiatement des n$^{\text{os}}$ **33** et **29**. Elle permet, connaissant $\omega_n(\delta)$ d'ordre inférieur à celui de δ^n, de déterminer la limite supérieure de l'ordre des dérivées bornées : c'est la limite supérieure α, des nombres α' qui font converger l'intégrale $\int_0 t^{-\alpha'-1}\omega_n(t)dt$. Si α fait partie des α', $D_0^{(\alpha)}f(x)$ est continue; dans le cas contraire on ne peut pas conclure, il faut étudier directement $D_0^{(\alpha)}$.

VI. — Le théorème de M. L.-E.-J. Brouwer.

35. On sait que si $f(x)$ admet, dans $(0, 1)$, des dérivées entières continues, jusqu'à l'ordre r inclus, $h^{-r}\Delta_h^r f(x)$ tend uniformément vers $f^{(r)}(x)$. La réciproque est vraie :

Si le quotient $h^{-r}\Delta_h^r f(x)$, où f désigne une fonction bornée, converge uniformément dans $(0, 1)$, *vers une limite bien déterminée $g(x)$, celle-ci est continue et n'est autre que $f^{(r)}(x)$.*

En effet :

En donnant à h une valeur fixe, on voit que $g(x)$ est bornée; par suite, $h^{-r}\Delta_h^r f(x)$ reste borné. $f(x)$ est donc continue, et aussi $g(x)$ à cause de l'uniforme de la convergence.

Posons

$$\bar{f}(x) = \mathrm{I}_0^{(r)} g(x).$$

Le quotient $h^{-r}\Delta_h^r \bar{f}(x)$ converge uniforménent vers $\bar{f}^{(r)}(x) = g(x)$. On a donc une inégalité de la forme

$$|h^{-r}\Delta_h^r[f(x) - \bar{f}(x)]| \leqq \eta(|h|),$$

où η désigne un infiniment petit, qu'on peut supposer non décroissant. On en déduit [n° **20**] :

$$\omega_r[\delta, f - \bar{f}] = 0.$$

Ce qui achève la démonstration, car la différence $f - \bar{f}$ se réduit dans $(0, 1)$ à un polynome ([1]) [n° **29**].

36. Faisons maintenant intervenir le module de continuité de $f^{(r)}(x)$, soit $\varepsilon(\delta)$. Une identité analogue à (32) montre que l'on a, dans tout l'intervalle, c'est-à-dire quels que soient :

$$0 \leqq x, \qquad x + r\delta + \delta' \leqq 1, \qquad 0 < \delta, \quad 0 < \delta',$$

$$(35) \qquad |\Delta_{\delta'}^1 \Delta_\delta^r f(x)| \leqq \delta^r \varepsilon(\delta').$$

M. L.-E.-J. Brouwer ([2]) a établi, en supposant la fonction continue, que cette inégalité, où ε désigne un infiniment petit, est une condition suffisante. Pour le démontrer, il suffira de faire voir que $h^{-r}\Delta_h^r f(x)$ tend uniformément vers une limite bien déterminée.

Il résulte de l'hypothèse que $\omega_{r+1}(\delta)$ est infiniment petit. On peut donc supposer f seulement *bornée*. Ceci posé, imitant le procédé employé, pour $r = 1$, par M. L.-E.-J. Brouwer, formons la différence

$$\varpi = h^{-r}\Delta_h^r f(x) - \left(\frac{p}{n}h\right)^{-r} \Delta_{\frac{p}{n}h}^r f(x),$$

où $\frac{p}{n}$ désigne une fraction comprise entre 0 et 1.

([1]) Remarquons que l'uniformité de la convergence est une condition indispensable. Si, par exemple, on prend pour $f(x)$ une fonction représentée par une ligne polygonale, $h^{-2}\Delta_h^2 f(x)$ tend vers zéro partout, sans que f admette même une dérivée première continue.

([2]) Mémoire cité.

Posons

$$h = n\lambda,$$

il viendra

$$\varpi = \frac{p^r \Delta^r_{n\lambda} f(x) - n^r \Delta^r_{p\lambda} f(x)}{(np\lambda)^r}.$$

Mais on a [n° **19**, A]

$$\Delta^r_{n\lambda} f(x) = \Sigma \Delta^r_\lambda f(x + i\lambda) \qquad [0 \leqq i \leqq (n-1)r],$$
$$\Delta^r_{p\lambda} f(x) = \Sigma \Delta^r_\lambda f(x + j\lambda) \qquad [0 \leqq j \leqq (p-1)r],$$

la première somme comprenant n^r termes, la seconde p^r. Le numérateur de ϖ est donc égal à la somme de $(np)^r$ différences :

$$\Delta^r_\lambda f(x + i\lambda) - \Delta^r_\lambda f(x + j\lambda),$$

avec

$$|i\lambda - j\lambda| < nr|\lambda| = r|h|.$$

Comme toujours on peut suppposer ε non décroissant. Chacune de ces différences a, par suite, en vertu de (35), un module inférieur à $|\lambda|^r.\varepsilon(r|h|)$. Et l'on a

$$|\varpi| < \varepsilon(r|h|).$$

Soit maintenant α un nombre irrationnel compris entre 0 et 1. Il résulte de la continuité de f que, h étant donné, on peut trouver une fraction $\frac{p}{n}$ assez voisine de α, pour que la différence

$$\left|\left(\frac{p}{n}h\right)^{-r} \Delta^r_{\frac{p}{n}h} f(x) - (\alpha h)^{-r} \Delta^r_{\alpha h} f(x)\right|$$

soit aussi petite qu'on veut. D'autre part, on a

$$(-\alpha h)^{-r} \Delta^r_{-\alpha h} f(x) = (\alpha h)^{-r} \Delta^r_{\alpha h} f(x - r\alpha h),$$

et, par conséquent,

$$|(-\alpha h)^{-r} \Delta^r_{-\alpha h} f(x) - (\alpha h)^{-r} \Delta^r_{\alpha h} f(x)| \leqq \varepsilon(r\alpha|h|) < \varepsilon(r|h|).$$

On obtient donc, en définitive,

$$|h^{-r} \Delta^r_h f(x) - (\alpha h^{-r}) \Delta^r_{\alpha h} f(x)| < 2\varepsilon(r|h|), \tag{36}$$

quel que soit

$$|\alpha| < 1.$$

Il en résulte que $h^{-r}\Delta_h^r f(x)$ converge uniformément vers une limite quand h tend vers zéro d'une manière quelconque.

37. Si dans (32) on fait tendre δ vers zéro, il vient

$$|f^{(r)}(x+\delta')-f^{(r)}(x)|\leqq \varepsilon(\delta').$$

Cette dernière inégalité ne suppose pas ε non décroissant. On obtient alors l'énoncé suivant, qui complète celui de M. L.-E.-J. Brouwer :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$, bornée dans (0, 1), y admette des dérivées entières continues jusqu'à l'ordre r, la dernière satisfaisant à la condition

$$|\Delta_\delta^1 f^{(r)}(x)|\leqq \varepsilon(\delta),$$

où $\varepsilon(\delta)$ désigne un infiniment petit, est que l'on ait dans l'intervalle

$$|\Delta_{\delta'}^1 \Delta_\delta^r f(x)|\leqq \delta^r \varepsilon(\delta').$$

38. Voici une application des résultats précédents :

M. Lebesgue [1] a démontré que si une fonction continue $f(x)$ admet, en tout point, une dérivée seconde généralisée :

$$\varphi(x)=\lim_{\delta=0}\frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)}{\delta^2},$$

la quantité $\delta^{-2}\Delta_\delta^2 f(x_0-\delta)$ reste comprise entre les limites inférieure et supérieure de φ dans $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

On en déduit, si φ est bornée, une égalité de la forme $\omega_2(\delta)<K.\delta^2$. Il résulte alors du n° **28**, que $f''(x)=\dfrac{d}{dx}f'(x)$ existe presque partout.

Supposons maintenant φ continue, et soit $\varepsilon(\delta)$ son module de continuité. La fonction $f(x+\delta')-f(x)$ a pour dérivée seconde généralisée

$$\varphi(x+\delta')-\varphi(x).$$

---

(1) *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 6.

On a, cette fois,

$$|\Delta_\delta^2[f(x+\delta')-f(x)]| \leqq \delta^2\varepsilon(\delta').$$

Par suite, $f''(x)$ est continue.

On obtient ainsi la proposition suivante, dont le théorème de Schwartz est un cas particulier :

Si une fonction continue admet, en tout point d'un intervalle, une dérivée seconde généralisée bornée [*continue*], *la dérivée seconde ordinaire existe « presque partout »* [*partout*], *et coïncide avec la dérivée généralisée aux points où elle existe.*

39. Nous avons obtenu au n° **14** des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de dérivées continues jusqu'à un ordre donné quelconque α. Le théorème de M. L.-E.-J. Brouwer en fournit de nouvelles, dans le cas où α est entier. Celles-ci sont, dans le cas particulier $\alpha = r$, plus générales, puisqu'elles supposent la fonction seulement bornée. A un autre point de vue elles sont plus restrictives, car elles demandent que l'on connaisse une propriété de la différence d'ordre r et non pas d'un ordre supérieur quelconque. On peut se demander s'il ne serait pas possible d'en faire l'extension au cas où α est quelconque. Il faudrait nécessairement considérer les différences d'ordres non entiers. Ces dernières sont d'un emploi beaucoup moins simple que les différences ordinaires, et leur étude nous entraînerait en dehors du cadre que nous nous sommes tracé. Voici cependant quelques résultats qui me paraissent intéressants à signaler.

Posons, avec Liouville (¹),

$$\Delta_\delta^\alpha f(x) = f(x+\alpha\delta) - \frac{\alpha}{1} f(x+\overline{\alpha-1}\,\delta) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} f(x+\overline{\alpha-2}\,\delta) - \ldots \quad (\delta > 0).$$

Cette définition implique la convergence de la série du second membre. Mais si l'on convient, comme plus haut (n° **6**), de prolonger la fonction par zéro à gauche d'un certain point, l'origine par exemple, $\Delta_\delta^\alpha f(x)$ ne contiendra jamais qu'un nombre fini de termes.

Ceci posé, en remarquant que $\dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p)}{p!(\alpha+p)^\alpha}$ a pour limite $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$,

(¹) Mémoire cité.

quand p augmente indéfiniment, on démontre facilement que le produit $\delta^\alpha \Delta_\delta^{-\alpha} f(x)$, $(\alpha > 0)$, tend uniformément vers $I_0^{(\alpha)} f(x)$ pourvu que $f(x)$ soit bornée et intégrable au sens de Riemann.

Inversement, si $\delta^{-\alpha} \Delta_\delta^\alpha f(x)$, $(\alpha > 0)$ converge uniformément vers une limite bornée $g(x)$, et si de plus $x^{-\alpha} f(x)$ est bornée, on a

$$f(x) = I_0^{(\alpha)} g(x).$$

Ainsi on peut, sous certaines conditions très générales, définir les dérivées et les intégrales par la même opération :

$$\lim_{\delta = 0} \delta^{-\alpha} \Delta_\delta^\alpha f(x).$$

C'est le point de vue opposé à celui adopté dans ce travail, lequel a l'avantage de ne faire intervenir que les différences entières.

CHAPITRE III.

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES.

VII. — Pseudo-polynomes et réseaux.

40. Nous nous occuperons, dans ce Chapitre, des dérivées des fonctions de deux variables réelles, *uniformes* et *bornées* dans le carré

$$(\Delta) = \begin{Bmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{Bmatrix}.$$

Précisons d'abord quelques notations. Je désignerai par $I_{x^\alpha, a}^{(\alpha)} f(x, y)$ et $D_{x^\alpha, a}^{(\alpha)} f(x, y)$ l'intégrale et la dérivée d'ordre α par rapport à x, et de même par $I_{y^\beta, b}^{(\beta)} f(x, y)$ et $D_{y^\beta, b}^{(\beta)} f(x, y)$ l'intégrale et la dérivée d'ordre β par rapport à y. Enfin on posera

$$I_{y^\beta, b}^{(\beta)}\left[I_{x^\alpha, a}^{(\alpha)}\right] = I_{x^\alpha y^\beta;\, a,\, b}^{(\alpha+\beta)}, \qquad I_{x^\alpha, a}^{(\alpha)}\left[I_{y^\beta, b}^{(\beta)}\right] = I_{y^\beta x^\alpha;\, b,\, a}^{(\beta+\alpha)}.$$
$$D_{y^\beta, b}^{(\beta)}\left[D_{x^\alpha, a}^{(\alpha)}\right] = D_{x^\alpha y^\beta;\, a,\, b}^{(\alpha+\beta)}, \qquad D_{x^\alpha, a}^{(\alpha)}\left[D_{y^\beta, b}^{(\beta)}\right] = D_{y^\beta x^\alpha;\, b,\, a}^{(\beta+\alpha)}.$$

Comme dans le cas d'une seule variable, les indices a et b rappellent les constantes à partir desquelles sont prises les intégrales. Nous les supprimerons lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Dans ce cas, on utilisera, pour les dérivées, la notation plus simple :

$$f_{x^\alpha}^{(\alpha)}(x, y), \quad f_{y^\beta}^{(\beta)}(x, y); \qquad f_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)}(x, y), \quad f_{y^\beta x^\alpha}^{(\beta+\alpha)}(x, y).$$

Si f est continue, on peut intervertir l'ordre des intégrations successives $\mathrm{I}_{x^\alpha}^{(\alpha)}$ et $\mathrm{I}_{y^\beta}^{(\beta)}$.

Au contraire, les dérivées $\mathrm{D}_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)}$ et $\mathrm{D}_{y^\beta x^\alpha}^{(\beta+\alpha)}$ ne sont pas nécessairement égales; de plus, l'une peut exister, l'autre pas. On le voit en prenant, par exemple,

$$f = (x-a)^{\alpha-1} g(y) \qquad (\alpha > 1),$$

où g désigne une fonction sans dérivée d'aucun ordre. On a

$$\mathrm{D}_{x^\alpha y^\beta;\, a,\, b}^{(\alpha+\beta)} = 0,$$

tandis que $\mathrm{D}_{y^\beta, b}^{(\beta)}$ n'existe pas.

Cet exemple montre aussi que, à la différence de ce qui se passe dans le cas d'une seule variable [nº **5**], on ne peut modifier les constantes a et b sans mettre en cause l'existence de la dérivée : La fonction considérée n'admet pas de dérivée $\mathrm{D}_{x^\alpha y^\beta; a', b}^{(\alpha+\beta)} (a' \neq a)$.

Nous indiquerons au nº **47** à quelles conditions on pourra intervertir l'ordre des dérivations, ou changer la valeur des constantes.

Remarquons enfin que ces questions ne se posent pas pour les fonctions $\Sigma \mathrm{XY}$, où X et Y désignent respectivement des fonctions de x seul et de y seul, lorsque les dérivées $\mathrm{D}_{x^\alpha, a}^{(\alpha)}\mathrm{X}$ et $\mathrm{D}_{y^\beta, b}^{(\beta)}\mathrm{Y}$ existent.

41. Avant d'aller plus loin, il est essentiel d'étudier certaines fonctions particulières, qui joueront ici un rôle analogue à celui des polynomes, dans le cas d'une seule variable. Ce sont les solutions de l'identité

$$(37) \qquad \underset{(y)}{\Delta_\lambda^p} \underset{(x)}{\Delta_\delta^n} \mathrm{F}(x, y) = 0, \qquad \left\{ \begin{array}{lll} 0 \leqq \delta, & 0 \leqq x, & x + n\delta \leqq 1 \\ 0 \leqq \lambda, & 0 \leqq y, & y + p\lambda \leqq 1 \end{array} \right\} (^1);$$

(1) La notation $\underset{(y)}{\Delta_\lambda^p} \underset{(x)}{\Delta_\delta^n} f(x, y)$ s'explique d'elle-même. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous supprimerons les indices (x) et (y). Alors δ et λ désigneront toujours des accroissements donnés respectivement à x et à y.

que j'appellerai *pseudo-polynomes* [*d'ordre*](n, p). Les propriétés de ces fonctions sont liées à la notion fondamentale de *réseau*.

Considérons un système de n parallèles à $x=0$ et de p parallèles à $y=0$, dont respectivement les abscisses et les ordonnées appartiennent à l'intervalle $(0, 1)$, et supprimons les parties de ces droites extérieures au carré (Δ). La figure obtenue est un *réseau* [*d'ordre*](n, p).

Un réseau peut avoir des droites multiples. D'une manière générale, un réseau (n, p) sera déterminé par une équation de la forme

$$R_n(x)\,S_p(y)=0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{Bmatrix},$$

où R_n et S_p désignent des polynomes respectivement de degrés n et p, de racines toutes réelles et appartenant à $(0, 1)$.

L'ordre d'une droite est celui de la racine correspondante. Un réseau dont toutes les droites sont simples est un *réseau simple*.

42. *Si un pseudo-polynome s'annule sur un réseau simple de même ordre, il est identiquement nul.*

Ceci est presque évident. Soient $F(x,y)$ une telle fonction, (n, p) son ordre. $\Delta_\delta^n F(x, y)$, considérée comme fonction de y, se réduit à un polynome de degré $p-1$ au plus [n° **29**]. Mais celui-ci étant nul pour p valeurs distinctes de y est identiquement nul; et ceci quels que soient

$$0 \leqq y \leqq 1; \qquad 0 \leqq \delta, \qquad 0 \leqq x, \qquad x+n\delta \leqq 1.$$

Il en résulte que $F(x, y)$, considérée comme fonction de x, est, pour $0 \leqq x \leqq 1$, un polynome de degré $n-1$ au plus, lequel est identiquement nul puisque se réduisant à zéro pour n valeurs distinctes de x. Cette propriété peut encore s'énoncer :

Un pseudo-polynome est entièrement déterminé par les valeurs qu'il prend sur un réseau simple de même ordre.

On va en déduire la forme générale de ces fonctions. Soit $F(x, y)$ l'une d'elles, d'ordre (n, p). Donnons-nous un réseau simple

$$R(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n), \qquad S(y)=(y-y_1)\ldots(y-y_p).$$

Je dis que l'on a, dans (Δ),

$$(38)\quad F(x,y)=R(x)\sum_{1}^{n}\frac{F(x_i,y)}{(x-x_i)R'(x_i)}+S(y)\sum_{1}^{p}\frac{F(x,y_j)}{(y-y_j)S'(y_j)}$$
$$-R(x)S(y)\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{p}\frac{F(x_i,y_j)}{(x-x_i)(y-y_j)R'(x_i)S'(y_j)}.$$

En effet, le second membre, donné par la formule de Lagrange, coïncide avec $F(x, y)$ sur le réseau; d'autre part, on vérifie immédiatement qu'il satisfait à (37).

Les *pseudo-polynomes* (n, p) *sont donc de la forme*

$$\sum_{0}^{n-1}A_i(y).x^i+\sum_{0}^{p-1}B_j(x).y^j,$$

où les A *et les* B *sont des fonctions bornées, et réciproquement* [1].

Remarquons enfin que si, dans le second membre de (38), on remplace F par une fonction donnée f, on obtient le pseudo-polynome (n, p) qui coïncide avec elle sur le réseau considéré.

43. L'identité (38) peut s'écrire

$$(38')\quad F(x,y)=\sum_{1}^{n}P_i(x)F(x_i,y)+\sum_{1}^{p}Q_j(y)F(x,y_j)+\Pi(x,y),$$

où P_i et Q_j désignent des polynomes respectivement en x et y, et Π un polynome à deux variables.

On en déduit immédiatement que : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un pseudo-polynome* (n, p) *admette, dans*

$$\left\{\begin{matrix} a\leqq x\leqq 1 \\ b\leqq y\leqq 1\end{matrix}\right\}\qquad (0<a,\quad 0<b),$$

toutes les dérivées continues

$$D^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'};\,0,0}=D^{(\beta'+\alpha')}_{y^{\beta'}x^{\alpha'};\,0,0}\qquad \left\{\begin{matrix} 0\leqq \alpha'\leqq \alpha \\ 0\leqq \beta'\leqq \beta\end{matrix}\right\},$$

(1) Il faut observer que $F(x, y)$ étant donnée, les A et les B ne sont pas complètement déterminés. On peut ajouter à chacun des A un polynome de degré $p-1$, à condition de modifier convenablement les B.

est qu'on puisse trouver un réseau simple (n, p), tel que les p fonctions de x

$$F(x, y_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

et les n fonctions de y

$$F(x_i, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

aient respectivement dans $(a, 1)$ des dérivées continues $D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'},0}$ $(0 \leqq \alpha' \leqq \alpha)$, *dans $(b, 1)$ des dérivées continues* $D^{(\beta')}_{y^{\beta'},0}$ $(0 \leqq \beta' \leqq \beta)$.

Pour les dérivées entières, on peut supposer $a = b = 0$, de plus l'ordre des dérivations peut être interverti d'une manière quelconque.

44. Les résultats des deux numéros précédents peuvent être étendus aux réseaux quelconques. Il faut alors supposer l'existence de dérivées sur les droites multiples.

En considérant un réseau multiple comme la limite d'un réseau simple dont certaines droites viennent se confondre, on est conduit à la définition suivante : Soient

$$RS = 0,$$

$$(39) \qquad \begin{cases} R(x) = \prod_{1}^{n'} (x - x_i)^{\xi_i + 1}, & \sum_{1}^{n'} (\xi_i + 1) = n, \\ S(y) = \prod_{1}^{p'} (y - y_j)^{\eta_j + 1}, & \sum_{1}^{p'} (\eta_j + 1) = p \end{cases}$$

un réseau donné, et f et g deux fonctions admettant :

1° Sur chaque droite $x = x_i$, les dérivées entières

$$D^{(\xi'_i)}_{x^{\xi'_i}} \qquad (0 \leqq \xi'_i \leqq \xi_i),$$

sur chaque droite $y = y_j$, les dérivées entières

$$D^{(\eta'_j)}_{y^{\eta'_j}} \qquad (0 \leqq \eta'_j \leqq \eta_j).$$

2° Aux points de croisement (x_i, y_j), les dérivées entières

$$D^{(\xi'_i + \eta'_j)}_{x^{\xi'_i} y^{\eta'_j}} = D^{(\eta'_j + \xi'_i)}_{y^{\eta'_j} x^{\xi'_i}} \qquad \begin{cases} 0 \leqq \xi'_i \leqq \xi_i \\ 0 \leqq \eta'_j \leqq \eta_j \end{cases}.$$

On dira que f et g coïncident sur le réseau, si ces dérivées sont pour les deux fonctions respectivement égales. Il suffit évidemment que les premières le soient.

Pour un pseudo-polynome, il est inutile de supposer l'existence des dérivées $D^{(\xi'+\eta')}$ aux points de croisement. Ceci résulte de $(38)'$.

Les énoncés du n° **42** s'étendent sans difficulté. Il suffit de répéter le raisonnement, en le modifiant d'une manière évidente.

Généralisons l'identité (38). Soit

$$F(x, y) = \sum_{0}^{n-1} A_i(y).x^i + \sum_{0}^{p-1} B_j(x) y^j$$

un pseudo-polynome (n, p) ayant les dérivées indiquées au 1°. Posons

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{0}^{n-1} A_i(y)\, x^i, \qquad \mathcal{B}(x, y) = \sum_{0}^{p} B_j(x)\, y^j.$$

$\mathcal{A}$, considérée comme fonction de x, est un polynome de degré $n-1$. En lui appliquant la formule de Lagrange, on obtient

$$(40) \qquad \mathcal{A}(x, y) = R(x) \sum \frac{1}{\xi_i!} \left[\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}} \frac{\mathcal{A}(t, y)}{(x-t) R_i(t)} \right]_{(t=x_i)},$$

où l'on a posé

$$R(x) = (x - x_i)^{\xi_i+1} R_i(x).$$

De même on peut écrire

$$(41) \qquad \mathcal{B}(x, y) = S(y) \sum \frac{1}{\eta_i!} \left[\frac{\partial^{\eta_i}}{\partial u^{\eta_i}} \frac{\mathcal{B}(x, u)}{(y-u) S_j(u)} \right]_{(u=y_j)},$$

avec

$$S(y) = (y - y_j)^{\eta_i+1} S_j(y).$$

On en déduit

$$(42) \qquad \begin{aligned} F(x, y) = {} & R(x) \sum \frac{1}{\xi_i!} \left[\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}} \frac{F(t, y)}{(x-t) R_i(t)} \right]_{(t=x_i)} \\ & + S(y) \sum \frac{1}{\eta_j!} \left[\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}} \frac{F(x, u)}{(y-u) S_j(u)} \right]_{(u=y_j)} - \mathcal{C} - \mathcal{D}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{C} = R(x) \sum \frac{1}{\xi_i!} \left[\frac{\partial^{\xi}}{\partial t^{\xi_i}} \frac{\mathcal{B}(t, u)}{(x-t) R_i(t)} \right]_{(t=x_i)}$$

$$\mathcal{D} = S(y) \sum \frac{1}{\eta_j!} \left[\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}} \frac{\mathcal{A}(x, u)}{(y-u) S_j(u)} \right]_{(u=y_j)}.$$

Nous allons calculer ces deux sommes. Remplaçons, dans la première, $\mathcal{B}$ par sa valeur tirée de (41). Il s'agit de caluler des termes de la forme

$$\left\{\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}}\frac{S(y)\sum\frac{1}{\eta_j!}\left[\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}}\frac{\mathcal{B}(t,u)}{(y-u)S_j(u)}\right]_{(u=y_j)}}{(x-t)R_i(t)}\right\}_{(t=x_i)}$$
$$=S(y)\sum\frac{1}{\eta_j!}\left\{\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}}\frac{\left[\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}}\frac{\mathcal{B}(t,u)}{(y-u)S_j(u)}\right]_{(u=y_j)}}{(x-t)R_i(t)}\right\}_{t=x_i}.$$

Mais d'après les hypothèses faites sur F, $\mathcal{B}$ admet, sur $x=x_i$, des dérivées par rapport à x, jusqu'à l'ordre ξ_i, car $\mathcal{A}$ admet évidemment ces dérivées. D'autre part $\mathcal{B}$ a des dérivées, par rapport à y, de tous les ordres. On peut donc écrire, d'après une remarque faite il y a un instant,

$$\left\{\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}}\frac{\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}}\left[\frac{\mathcal{B}(t,u)}{(y-u)S_j(u)}\right]_{(u=y_j)}}{(x-t)R_i(t)}\right\}_{(t=x_i)}$$
$$=\left\{\frac{\partial^{\xi_i+\eta_j}}{\partial t^{\xi_i}\partial u^{\eta_j}}\frac{\mathcal{B}(t,u)}{(x-t)(y-u)R_i(t)S_j(u)}\right\}_{\binom{t=x_i}{u=y_j}}.$$

D'où enfin

$$\mathcal{C}=R(x)S(y)\sum_i\sum_j\frac{1}{\xi_i!\,\eta_j!}\left[\frac{\partial^{\xi_i+\eta_j}}{\partial t^{\xi_i}\partial u^{\eta_j}}\frac{\mathcal{B}(t,u)}{(x-t)(y-u)R_i(t)S_j(u)}\right]_{\binom{t=x_i}{u=y_j}}.$$

De la même manière, on aurait pour $\mathcal{D}$ une identité analogue, où $\mathcal{B}$ serait remplacé par $\mathcal{A}$.

Si l'on porte dans (42), en groupant dans la somme $\mathcal{C}+\mathcal{D}$, les termes deux par deux de manière à remplacer $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ par F, on obtient l'identité définitive

$$(43)\quad \begin{aligned}F(x,y)= {} & R(x)\sum_i\frac{1}{\xi_i!}\left[\frac{\partial^{\xi_i}}{\partial t^{\xi_i}}\frac{F(t,y)}{(x-t)R_i(t)}\right]_{(t=x_i)}\\ &+S(y)\sum_j\frac{1}{\eta_j!}\left[\frac{\partial^{\eta_j}}{\partial u^{\eta_j}}\frac{F(x,u)}{(y-u)S_j(u)}\right]_{(u=y_j)}\\ &-R(x)S(y)\sum_i\sum_j\frac{1}{\xi_i!\,\eta!}\left[\frac{\partial^{\xi_i+\eta_j}}{\partial t^{\xi_i}\partial u^{\eta_j}}\frac{F(t,u)}{(x-t)(y-u)R_i(t)S_j(u)}\right]_{\binom{t=x}{u=y_i}}\end{aligned}$$

qui généralise (38), et à laquelle elle se réduit lorsque tous les ξ_i et η_j sont nuls.

45. De cette dernière relation, on déduit l'extension de la proposition donnée au n° **43**. Pour obtenir un énoncé simple, faisons la convention suivante :

Lorsque les p fonctions de x

$$f(x, y_j),\quad f'_y(x, y_j),\quad \ldots,\quad f^{(\eta_j)}_{y^{\eta_j}}(x, y_j),\qquad (j = 1, 2, \ldots, p')$$

auront des dérivées [continues par rapport à x] $D^{(\alpha)}_{x^\alpha,0}$, et les n fonctions de y

$$f(x_i, y),\quad f'_x(x_i, y),\quad \ldots,\quad f^{(\xi_i)}_{x^{\xi_i}}(x_i, y),\qquad (i = 1, 2, \ldots, n'),$$

des dérivées [continues par rapport à y] $D^{(\beta)}_{y^\beta,0}$, on dira que $f(x, y)$ admet des dérivées [continues] $D^{(\alpha)}_{x^\alpha,0}$ et $D^{(\beta)}_{y^\beta,0}$, sur le réseau.

On obtient alors le théorème général :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un pseudo-polynome admette dans

$$\begin{Bmatrix} a \leqq x \leqq 1 \\ b \leqq y \leqq 1 \end{Bmatrix}\qquad (0 < a,\ 0 < b),$$

toutes les dérivées continues

$$D^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'};0,0} = D^{(\beta'+\alpha')}_{y^{\beta'}x^{\alpha'};0,0}\qquad \begin{Bmatrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{Bmatrix},$$

est qu'on puisse trouver un réseau de même ordre, n'ayant pas de parallèle à $x = 0$ d'ordre supérieur à $\alpha + 1$, ni de parallèle à $y = 0$ d'ordre supérieur à $\beta + 1$, tel que le pseudo-polynome ait sur ce réseau des dérivées $D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'},0}$ $(0 \leqq \alpha' \leqq \alpha)$ continues dans $(a, 1)$ et des dérivées $D^{(\beta')}_{y^{\beta'},0}$ $(0 \leqq \beta' \leqq \beta)$ continues dans $(b, 1)$.

Lorsqu'on suppose les $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entiers on peut prendre $a = b = 0$; de plus l'ordre des dérivations peut être interverti d'une manière quelconque.

Si l'on ne fait pas la restriction $\xi_i \leqq \alpha$, $\eta_j \leqq \beta$, les conditions sont seulement suffisantes.

46. Pour terminer, je vais étendre les propriétés des pseudo-polynomes aux expressions de la forme

$$(44)\qquad \mathcal{F}(x, y) = x^{\nu} \sum_{0}^{n-1} A_i(y).x^i + y^{\varpi} \sum_{0}^{p-1} B_j(x).y^j \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 \leqq \nu \\ 0 \leqq \varpi \end{matrix} \right\}$$

qui interviendront dans les dérivées mêlées d'ordres non entiers.

Supposons $\mathcal{F}$ bornée dans (Δ). $x^{-\nu}y^{-\varpi}\mathcal{F}(x, y)$ est un pseudo-polynome (n, p) borné dans tout carré $\left\{ \begin{matrix} a \leqq x \leqq 1 \\ a \leqq y \leqq 1 \end{matrix} \right\}$, $(0 < a)$. On peut, dans un tel carré, lui appliquer l'identité (38), en supposant que le réseau n'ait pas de côté commun avec $xy = 0$. Après avoir multiplié par $x^{\nu}y^{\varpi}$, on obtient

$$(45)\quad \mathcal{F}(x, y) = x^{\nu} R(x) \sum_{1}^{n} \frac{x_i^{-\nu}\,\mathcal{F}(x_i, y)}{(x - x_i)\,R'(x_i)} + y^{\varpi} S(y) \sum_{1}^{p} \frac{y_j^{-\varpi}\,\mathcal{F}(x, y_j)}{(y - y_j)\,S'(y_j)}$$
$$- x^{\nu} y^{\varpi} R(x) S(y) \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{p} \frac{x_i^{-\nu}\, y_j^{-\varpi}\,\mathcal{F}(x_i, y_j)}{(x - x_i)(y - y_j)\,R'(x_i)\,S'(y_j)}.$$

Relation valable dans (Δ), sauf peut-être sur $xy = 0$. En faisant successivement $y = 0$, $x \neq 0$; $x = 0$, $y \neq 0$; et enfin $x = y = 0$, on voit que cette restriction peut être levée.

D'une manière analogue, on ferait l'extension de l'identité (43). On en conclut immédiatement que les expressions de la forme (44) possèdent les propriétés énoncées aux nos **43** et **45**, avec la restriction indiquée plus haut, à savoir que le réseau ne doit pas avoir de droite sur $xy = 0$.

VIII. — Dérivées mêlées d'une fonction de deux variables réelles.

47. Occupons-nous, pour commencer, de l'interversion de l'ordre des dérivations.

Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans (Δ), ayant, dans ce domaine, une dérivée bornée $D^{(\alpha)}_{x^{\alpha},0}$, et cette dernière une dérivée $D^{(\beta)}_{y^{\beta},0}$ continue des deux variables. Pour simplifier, on supprimera les indices zéro.

Désignons par r et s, respectivement, les parties entières de α et β.

La relation (5)′ permet d'écrire successivement

$$D_{x^\alpha}^{(\alpha)} f(x, y) = I_{y^\beta}^{(\beta)} D_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} f(x, y) + y^{\beta-s} \sum_0^{s-1} \overline{B}_j(x) . y^j,$$

$$f(x, y) = I_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} D_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} f(x, y) + x^{\alpha-r} \sum_0^{r-1} A_i(y) . x^i + y^{\beta-s} \sum_0^{s-1} B_j(x)\, y^j,$$

en posant

$$B_j(x) = I_{x^\alpha}^{(\alpha)} \overline{B}_j(x).$$

On a évidemment

$$D_{x^{\alpha'} y^{\beta'}}^{(\alpha'+\beta')} I_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} D_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} f = D_{y^{\beta'} x^{\alpha'}}^{(\beta'+\alpha')} I_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} D_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} f = I_{x^{\alpha-\alpha'} y^{\beta-\beta'}}^{(\alpha-\alpha'+\beta-\beta')} D_{x^\alpha y^\beta}^{(\alpha+\beta)} f,$$

où

$$\begin{Bmatrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{Bmatrix}.$$

Ces dérivées sont continues.

Si l'on rapproche ce résultat de l'énoncé du n° **45**, appliqué à la différence $f - I^{(\alpha+\beta)} D^{(\alpha+\beta)} f$ [n° **46**], on obtient le théorème suivant :

Si une fonction continue $f(x, y)$ admet dans (Δ) *une dérivée bornée* $D_{x^\alpha, 0}^{(\alpha)}$, *ayant elle-même une dérivée* $D_{y^\beta, 0}^{(\beta)}$ *continue des deux variables, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle possède toutes les dérivées*

$$D_{x^{\alpha'} y^{\beta'};\, 0, 0}^{(\alpha'+\beta')} = D_{y^{\beta'} x^{\alpha'};\, 0, 0}^{(\beta'+\alpha')} \qquad \begin{Bmatrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{Bmatrix},$$

continues sauf peut-être pour $xy = 0$, *est qu'on puisse trouver un réseau* (r, s) [n'ayant pas de parallèle à $x = 0$ d'ordre supérieur à $\alpha + 1$, de parallèles à $y = 0$ d'ordre supérieur à $\beta + 1$, ni de droite commune avec $xy = 0$], *sur lequel la fonction admette des dérivées* $D_{x^\alpha, 0}^{(\alpha)}$ *continue sauf peut-être pour* $x = 0$, *et* $D_{y^\beta, 0}^{(\beta)}$ *continue sauf peut-être pour* $y = 0$.

Si l'on suppose α, β, α', β' entiers, la continuité a lieu dans tout (Δ), pourvu que $D_{x^\alpha, 0}^{(\alpha)}$ soit, sur le réseau continue pour $x = 0$, et $D_{y^\beta, 0}^{(\alpha)}$ continue, sur le réseau, pour $y = 0$. De plus, l'ordre des dérivations peut être interverti d'une manière quelconque. Enfin, le réseau peut avoir des droites sur $xy = 0$.

Remarquons que si l'on voulait assurer seulement l'existence de

$D^{(\beta+\alpha)}_{y^\beta x^\alpha} f(x, y)$, il suffirait de supposer que la fonction admet sur le réseau une dérivée bornée $D^{(\beta)}_{y^\beta}$.

Plus particulièrement : *Si les deux dérivées* $D^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta;0,0}$ *et* $D^{(\beta+\alpha)}_{y^\beta x^\alpha;0,0}$ *existent dans* (Δ) *elles sont égales pourvu que l'une d'elles soit continue.* [$D^{(\beta+\alpha)}$ est définie comme la dérivée $D^{(\alpha)}_{x^\alpha,0}$ de $D^{(\beta)}_{y^\beta,0}$ supposée bornée.]

Passons enfin à l'existence de la dérivée $D^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta;a',0}$. On a

$$D^{(\alpha)}_{x^\alpha,0} f(x,y) = D^{(\alpha)}_{x^\alpha,a'} f(x,y) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{a'} (x-t)^{-\alpha-1} f(t,y)\,dt.$$

La dérivée précédente existera donc si f admet une dérivée continue $D^{(\beta)}_{y^\beta,0}$ $\left[\text{on pourra alors dériver sous le signe} \int_0^{a'}\right]$; et pour cela il suffit qu'elle la possède sur le réseau. Dans ces conditions la dérivée $D^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta;a'b'}$ existera quels que soient a' et b', $0 \leqq a' < x$, $0 \leqq b' < y$.

Pour simplifier, nous avons supposé, au début de ce numéro, que les hypothèses initiales étaient satisfaites dans tout (Δ). Quand α et β ne sont pas entiers, $D^{(\alpha)}_{x^\alpha,0}$ et $D^{(\beta)}_{y^\beta,b}$ sont en général infinies respectivement pour $x = 0$ et $y = 0$. Il y aurait donc lieu de se placer dans le cas où les hypothèses en question sont vérifiées sauf peut-être $xy = 0$. Les résultats subsistent; mais les démonstrations sont plus compliquées. Il faut utiliser la relation $(5)''$.

48. Si nous cherchons à généraliser le théorème du n° **14**, nous sommes conduits à considérer l'intégrale

$$I_{\varepsilon,\varepsilon'} = \frac{1}{\gamma(\alpha)\gamma_1(\beta)} \int_\varepsilon^\infty \int_{\varepsilon'}^\infty t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \varphi(x, y; t, u)\,dt\,du,$$

où l'on a posé

$$\varphi(x,y;t,u) = \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{j=0}^{j=p'} C_i C'_j f(x - k_i t, y - k'_j u),$$

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{-\alpha-1} \sum_0^p C_i e^{-k_i t}\,dt,$$

$$\gamma_1(\beta) = \int_0^\infty u^{-\beta-1} \sum_0^{p'} C'_j e^{-k'_j u}\,du,$$

f étant de plus supposé continue dans un certain rectangle $\left\{\begin{matrix} a \leqq x \leqq a_1 \\ b \leqq y \leqq b_1 \end{matrix}\right\}$, et prolongée par zéro en dehors de ce domaine.

Comme dans le cas d'une seule variable, cette dernière convention a pour but de simplifier l'écriture. On mettra en évidence les domaines d'intégration dans lesquels l'élément différentiel est différent de zéro, en écrivant

$$\begin{aligned}
\gamma(\alpha).\gamma_1(\beta)\mathrm{I}_{\varepsilon,\varepsilon'} = & \int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} \int_{\varepsilon'}^{\frac{y-b}{k'_{p'}}} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \varphi(x, y;\, t, u)\, dt\, du \\
& + \sum_{j=0}^{j=p'} \mathrm{C}'_j \int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} \int_{\frac{y-b}{k'_{p'}}}^{\frac{y-b}{k'_j}} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \sum_{i=0}^{i=p} \mathrm{C}_i f(x - k_i t,\, y - k'_j u)\, dt\, du \\
& + \sum_{i=0}^{i=p} \mathrm{C}_i \int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} \int_{\varepsilon'}^{\frac{y-b}{k'_{p'}}} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \sum_{j=0}^{j=p'} \mathrm{C}'_j f(x - k_i t,\, y - k'_j u)\, dt\, du \\
& + \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{j=0}^{j=p'} \mathrm{C}_i \mathrm{C}'_j \int_{\frac{x-a}{k_p}}^{\frac{x-a}{k_i}} \int_{\frac{y-b}{k'_{p'}}}^{\frac{y-b}{k'_j}} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} f(x - k_i t,\, y - k'_j u)\, dt\, du.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la convergence de $\mathrm{I}_{\varepsilon,\varepsilon'}$ ne dépend pas seulement de la manière dont $\varphi(x, y;\, t, u)$ tend vers zéro avec t et u. Supposons les intégrales

$$\mathrm{J}_{\varepsilon,\varepsilon'} = \int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} \int_{\varepsilon'}^{\frac{y-b}{k'_{p'}}} t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \varphi(x, y;\, t, u)\, dt\, du,$$

$$\overline{\mathrm{J}}_{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^{\frac{x-a}{k_p}} t^{-\alpha-1} \sum_{0}^{p} \mathrm{C}_i f(x - k_i t,\, y)\, dt,$$

$$\overline{\mathrm{J}}'_{\varepsilon'} = \int_{\varepsilon'}^{\frac{y-b}{k'_{p'}}} u^{-\beta-1} \sum_{0}^{p'} \mathrm{C}'_j f(x,\, y - k'_j u)\, du,$$

uniformément convergentes dans le rectangle

$$\left\{\begin{matrix} a' \leqq x \leqq a_1 \\ b' \leqq y \leqq b_1 \end{matrix}\right\} \qquad (a < a';\; b < b').$$

Dans ces conditions $\mathrm{I}_{\varepsilon,\varepsilon'}$ a une limite I *continue* dans ce domaine.

Faisons d'abord tendre ε vers zéro, en écrivant

$$I_{\varepsilon,\varepsilon'} = \frac{1}{\gamma(\alpha).\gamma_1(\beta)} \int_{\varepsilon'}^{\infty} u^{-\beta-1}\, du \sum_{j=0}^{j=p'} C'_j \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\alpha-1} \sum_{0}^{p} C_i f(x - k_i t, y - k'_j u)\, dt\, du.$$

On obtient

$$I_{0,\varepsilon'} = \frac{1}{\gamma_1(\beta)} \int_{\varepsilon'}^{\infty} u^{-\beta-1}\, du \sum_{j=0}^{j=p'} C'_j f_{x^\alpha}^{(\alpha)}(x, y - k'_j u)\, du \qquad [\text{n}^{\text{os}}\ \mathbf{10}\ \text{et}\ \mathbf{13}],$$

où $f_{x^\alpha}^{(\alpha)}$ désigne la dérivée $D_{x^\alpha,a}^{(\alpha)} f$. Mais $I_{0,\varepsilon'}$ est uniformément convergente. Donc

$$I = D_{y^\beta,b}^{(\beta)} D_{x^\alpha,a}^{(\alpha)} f(x, y) = D_{x^\alpha y^\beta; a,b}^{(\alpha+\beta)} f(x, y).$$

En faisant d'abord tendre ε', on aurait

$$I = D_{y^\beta x^\alpha; b,a}^{(\beta+\alpha)} f(x, y).$$

Par suite $f(x, y)$ *admet, dans* $\left\{ \begin{array}{l} a' \leqq x \leqq a_1 \\ b' \leqq y \leqq b_1 \end{array} \right\}$, *les dérivées continues*

$$(46) \qquad D_{x^\alpha,a}^{(\alpha)}, \qquad D_{y^\beta,b}^{(\beta)} \qquad \text{et} \qquad D_{x^\alpha y^\beta; a,b}^{(\alpha+\beta)} = D_{y^\beta x^\alpha; b,a}^{(\beta+\alpha)}.$$

On en déduirait ([1]) l'existence et la continuité des dérivées

$$D_{x^{\alpha'} y^{\beta'}; a,b}^{(\alpha'+\beta')} = D_{y^{\beta'} x^{\alpha'}; b,a}^{(\beta'+\alpha')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{array} \right\},$$

sauf peut-être sur les droites $(x - a')(y - b') = 0$. On peut remplacer a et b par des constantes respectivement intérieures aux intervalles (a, a') et (b, b').

Réciproquement, si les dérivées (46) sont continues dans le rectangle précédent, les intégrales J_ε, $J'_{\varepsilon'}$ et $J_{\varepsilon,\varepsilon'}$ sont uniformément convergentes dans tout rectangle intérieur, ayant deux côtés communs avec $x - a_1 = 0$, $y - b_1 = 0$. La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée dans le cas d'une seule variable (n$^{\text{os}}$ **9** et **14**). Il n'y a d'ailleurs à consider que $J_{\varepsilon,\varepsilon'}$.

([1]) En appliquant deux fois la relation (5).

La nécessité de supposer la convergence des intégrales $\bar{J}_\varepsilon$ et $\bar{J}'_\varepsilon$ enlève beaucoup d'intérêt à la proposition directe précédente. Au contraire, l'extension des résultats du Chapitre I va se faire sans autre hypothèse supplémentaire que celle, d'ailleurs indispensable, de l'existence de dérivées sur un certain réseau; et ceci, grâce à la proposition du n° **24**.

IX. — Différences mêlées et dérivées.

49. Il faut d'abord étendre la définition des fonctions $\omega_n(\delta)$.

Soit f une fonction uniforme et bornée dans le carré

$$(\Delta) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{array} \right\}.$$

La différence mêlée $\left| \underset{(y)}{\Delta_k^p} \underset{(x)}{\Delta_h^n} f(x, y) \right|$ est définie pour toutes les valeurs de x, y; k, h telles que les points (x, y) et $(x + nh, y + pk)$ appartiennent à (Δ). Si de plus on suppose

$$|h| \leqq \delta \leqq \frac{1}{n}, \qquad |k| \leqq \lambda \leqq \frac{1}{p},$$

elle admet une limite supérieure, que je désignerai par

$$\omega_{n,p}[\delta, \lambda; f(x, y)],$$

et plus brièvement par $\omega_{n,p}(\delta, \lambda)$.

C'est une fontion positive, bornée, non décroissante par rapport à chacune des variables, définie dans le rectangle $\left\{ \begin{array}{c} 0 \leqq \delta \leqq \frac{1}{n} \\ 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{p} \end{array} \right\}$. On la prolongera dans l'angle ($\delta \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$), en posant

$$\omega_{n,p}(\delta, \lambda) = \omega_{n,p}\left(\frac{1}{n}, \lambda\right) \qquad \text{pour} \quad \delta > \frac{1}{n}, \quad \lambda \leqq \frac{1}{p},$$

puis

$$\omega_{n,p}(\delta, \lambda) = \omega_{n,p}\left(\delta, \frac{1}{p}\right) \qquad \text{pour} \quad \lambda > \frac{1}{p}.$$

En procédant dans l'ordre inverse, c'est-à-dire en prolongeant d'abord dans la bande $\lambda > \frac{1}{p}$, $\delta \leqq \frac{1}{n}$, on obtiendrait évidemment la même fonction.

$\omega_{n,p}[\delta, \lambda; f(x, y)]$ ne change pas par l'une ou l'autre des substitutions $x|1-x$, $y|1-y$. Par suite, pour calculer $\omega_{n,p}$, on peut se borner aux accroissements positifs.

La définition s'étend au cas où l'un des nombres n ou p est nul grâce à la convention $\Delta^0 f = f$; $\omega_{n,0}$ ne dépend que de δ, $\omega_{0,p}$ que de λ.

On a

$$|\Delta_\lambda^p \Delta_\delta^n f(x, y)| \leqq \omega_{n,p}(\delta, \lambda).$$

Le second membre de cette inégalité étant non décroissant par rapport à chacune des variables, on en déduit (n° **23**)

$$(47)\qquad \begin{cases} \omega_{n,0}[\delta, \Delta_\lambda^p f(x, y)] \leqq \omega_{n,p}(\delta, \lambda), \\ \omega_{0,p}[\lambda, \Delta_\delta^p f(x, y)] \leqq \omega_{n,p}(\delta, \lambda). \end{cases}$$

50. Soient k et h deux nombres naturels. Si

$$\begin{cases} 0 < \delta' \leqq \delta \\ 0 < \lambda' \leqq \lambda \end{cases}, \qquad k\delta \leqq \frac{1}{n}, \qquad \lambda \leqq \frac{1}{p},$$

on a

$$|\Delta_{k\delta'}^n \Delta_{\lambda'}^p f(x, y)| \leqq k^n . \max |\Delta_{\delta'}^n \Delta_{\lambda'}^p f(x + i\delta', y)| \leqq k^n \omega_{n,p}(\delta, \lambda).$$

D'où l'on tire

$$\omega_{n,p}(k\delta, \lambda) \leqq k^n . \omega_{n,p}(\delta, \lambda).$$

Comme dans le cas d'une seule variable, on vérifie que cette inégalité a lieu quels que soient δ et λ.

De la même manière on obtient

$$\omega_{n,p}(\delta, h\lambda) \leqq h^p . \omega_{n,p}(\delta, \lambda);$$

et, par suite,

$$(48)\qquad \omega_{n,p}(k\delta, h\lambda) \leqq k^n h^p \omega_{n,p}(\delta, \lambda).$$

Soient maintenant k' et h' deux nombres positifs quelconques, $k - 1$ et $h - 1$ leurs parties entières. On a

$$\omega_{n,p}(k'\delta, h'\lambda) \leqq \omega_{n,p}(k\delta, h\lambda) \leqq k^n h^p \omega^{n,p}(\delta, \lambda),$$

et enfin

$$\omega_{n,p}(k'\delta,\, h'\lambda) < (k'+1)^n (h'+1)^p . \omega_{n,p}(\delta,\, \lambda).$$

Dans cette inégalité faisons $k'\delta = h'\lambda = 1$. Il viendra

$$\omega_{n,p}(1,\, 1) < (1+\delta)^n (1+\lambda)^p . \delta^{-n}\lambda^{-p}\omega_{n,p}(\delta,\, \lambda).$$

De là on déduit que : *si pour des valeurs de δ et λ appartenant à* $(0, 1)$, *le quotient $\delta^{-n}\lambda^{-p}\omega_{n,p}(\delta, \lambda)$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, $\omega_{n,p}(1, 1)$ est nécessairement nul, et par suite aussi $\omega_{n,p}(\delta, \lambda)$ quels que soient* δ et λ.

Dans la pratique on n'aura pas toujours $\omega_{n,p}$, mais une inégalité de la forme

$$|\Delta_\lambda^p \Delta_\delta^n f(x,\, y)| \leqq \varepsilon(\delta,\, \lambda).$$

Si $\varepsilon(\delta, \lambda)$ est non décroissante par rapport à chacune des variables, on démontre, comme au n° **23**, la relation

$$\omega_{n,p}(\delta,\, \lambda) \leqq \varepsilon(\delta,\, \lambda).$$

EXISTENCE ET CONTINUITÉ DES DÉRIVÉES.

51. Passons à l'extension du théorème du n° **29**. Comme nous l'avons déjà remarqué, on ne pourra se contenter de considérer $\omega_{n,p}$. D'ailleurs cette fonction ne change pas si l'on ajoute à $f(x, y)$ un pseudo-polynome (n, p), qui peut n'admettre aucune dérivée.

Supposons l'intégrale

$$(49) \qquad \int_\delta^1 \int_\lambda^1 t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \omega_{n,p}(t,\, u)\, dt\, du,$$

convergente, et plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où *la fonction donnée s'annule sur le réseau (n, p) $\mathcal{R}_0$, dont les droites de même direction sont équidistantes et comprenant les côtés de* (Δ). (Si $n = 1$ la parallèle à Ox sera supposée quelconque; de même si $p = 1$.)

Pour commencer, il nous faut donner quelques conséquences de la convergence de l'intégrale précédente. Posons

$$\eta(\delta,\, \lambda) = \int_0^\delta \int_0^\lambda t^{-\alpha-1} u^{-\beta-1} \omega_{n,p}(t,\, u)\, dt\, du.$$

Cette fonction est croissante par rapport à chacune des variables. $\eta(\delta, 1)$ et $\eta(1, \lambda)$ sont des infiniment petits.

De plus, les intégrales

$$(50)\quad \eta_1(\delta, \lambda) = \int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}(t, \lambda)\,dt, \qquad \eta_2(\delta, \lambda) = \int_0^\lambda u^{-\beta-1}\omega_{n,p}(\delta, u)\,du$$

sont uniformément convergentes. Il en résultera les relations

$$(51)\qquad \eta(\delta, \lambda) = \int_0^\delta t^{-\alpha-1}\eta_2(t, \lambda)\,dt = \int_0^\lambda u^{-\beta-1}\,\eta_1(\delta, u)\,du$$

Démontrons, par exemple, la convergence de η_1. On a

$$\int_{\delta'}^{\delta}\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-\alpha-1}u^{-\beta-1}\omega_{n,p}(t, u)\,dt\,du < \int_{\delta'}^{\delta}\int_0^1 t^{-\beta-1}u^{-\alpha-t}\omega_{n,p}(t, u)\,dt\,du.$$

Comme $\omega_{n,p}(t, u)$ est une fonction non décroissante de u, la première intégrale est supérieure à

$$\int_{\delta'}^{\delta}\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}\left(t, \frac{1}{2}\right)dt\,du = \frac{1}{2}\int_{\delta'}^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}\left(t, \frac{1}{2}\right)dt.$$

On a alors

$$\int_{\delta'}^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}\left(t, \frac{1}{2}\right)dt < 2[\eta(\delta, 1) - \eta(\delta', 1)]$$

et, d'après (48),

$$\int_{\delta'}^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}(t, 1)\,dt < 2^{p+1}[\eta(\delta, 1) - \eta(\delta', 1)].$$

Ce qui donne enfin

$$\int_0^{\delta} t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}(t, \lambda)\,dt < 2^{p+1}.\eta(\delta, 1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

52. Il est facile maintenant d'établir l'existence et la continuité des dérivées

$$(52) \qquad D^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'};0,0} = D^{(\beta'+\alpha')}_{x^{\beta'}y^{\alpha'};0,0} \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{matrix} \right\}.$$

La fonction de x $\Delta^p_\lambda f(x, \overline{y})$ s'annule sur un ensemble de n points équidistants comprenant 0 et 1 (en un point si $n=1$). On a, par suite, d'après (21) et (50),

$$|\Delta^p_\lambda f(x, \overline{y})| < C(n) \int_0^1 t^{-1} \omega_{n,0}[t, \Delta^p_\lambda f(x, \overline{y})]\, dt$$

$$< C(n) \int_0^1 t^{-\alpha-1} \omega_{n,p}(t, \lambda)\, dt = C(n).\eta_1(1, \lambda).$$

Nous venons de voir que cette dernière intégrale à un sens. C'est d'autre part une fonction croissante de λ. On peut donc écrire

$$\omega_{0,p}[\lambda, f(x, y)] < C(n).\eta_1(1, \lambda)$$

et

$$\int_0^\lambda u^{-\beta-1} \omega_{0,p}[u, f(x, y)]\, du < C(n) \int_0^\lambda u^{-\beta-1} \eta_1(1, u)\, du = C(n).\eta(1, \lambda),$$

$$\int_0^\lambda u^{-\beta-1} \omega_{0,p}[u, f(x, y)]\, du < C(n).\eta(1, \lambda).$$

On aurait de même

$$\int_0^\delta t^{-\alpha-1} \omega_{n,0}[t, f(x, y)]\, dt < C(p).\eta(\delta, 1).$$

Ces deux dernières relations prouvent la continuité de $f(x, y)$ dans (Δ). En effet, $\omega_{1,0}(\delta)$ et $\omega_{0,1}(\lambda)$ sont des infiniment petits qui dépendent uniquement de δ et λ (n° **22**).

Si alors on prend [n° **48**]

$$\varphi(x, y; t, u) = \underset{(y)}{\Delta^p_{-u}} \underset{(x)}{\Delta^n_{-t}} f(x-t, y-u) \qquad \left\{ \begin{matrix} a=0, & a_1 = 1 \\ b=0, & b_1 = 1 \end{matrix} \right\},$$

on voit immédiatement que les intégrales $\overline{J}_\varepsilon$, $\overline{J}'_{\varepsilon'}$ et $J_{\varepsilon,\varepsilon'}$ sont uniformément convergentes dans tout carré $\left\{ \begin{matrix} a' \leqq x \leqq 1 \\ a' \leqq y \leqq 1 \end{matrix} \right\}$, $a' > 0$. Par suite : *les dérivées* (52) *existent et sont continues dans* (Δ), *sauf peut-être* *sur $xy = 0$. Les substitutions $x \mid 1 - x$ et $y \mid 1 - y$ permettent d'affirmer la continuité des dérivées entières dans tout le carré.*

L'intégrale (49) reste convergente quand on y remplace α et β par α' et β'. Cette remarque permet d'éviter l'utilisation d'un résultat que nous n'avons fait qu'énoncer au n° **48**.

Le raisonnement suppose $\alpha < n$ et $\beta < p$, car $\gamma(\alpha)$ et $\gamma_1(\beta)$ doivent avoir un sens. Mais on constate facilement que si l'une de ces conditions n'est pas remplie, $f(x, y)$ se réduit à zéro dans (Δ). Supposons par exemple, $\alpha \geqq n$.

De la convergence de $\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_{n,p}(t, 1)\,dt$ [n° **51**], il résulte que $\delta^{-\alpha}\omega_{n,p}(\delta, 1)$ est infiniment petit [n° **18**, C]. Or si $\delta \leqq 1$, on a

$$\delta^{-n}\omega_{n,p}(\delta, 1) \leqq \delta^{-\alpha}\omega_{n,p}(\delta, 1).$$

On en déduit [n° **50**] que $f(x, y)$ est un pseudo-polynome (n, p). Celui-ci s'annulant sur un réseau simple de même ordre est nul dans tout (Δ).

53. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où f n'est plus supposée nulle sur $\mathcal{R}_0$. Désignons par F_0 le pseudo-polynome d'ordre (n, p) qui coïncide avec f sur ce réseau. La différence $f - F_0$ satisfait aux conditions précédentes, car on a

$$\omega_{n,p}[\delta, \lambda; f - F_0] = \omega_{n,p}[\delta, \lambda; f].$$

En se rapportant au n° **45** on obtient alors la proposition suivante :

Si l'intégrale $\int_\delta^1\int_\lambda^1 t^{-\alpha-1}u^{-\beta-1}\omega_{n,p}(t, u)\,dt\,du$ converge, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction donnée admette toutes les dérivées

$$D^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'};0,0} = D^{(\beta'+\alpha')}_{y^{\beta'}x^{\alpha'};0,0} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{array} \right\},$$

continues dans (Δ), sauf peut-être sur $xy = 0$, est qu'on puisse trouver un réseau (n, p) (n'ayant pas de parallèle à $x = 0$ d'ordre supérieur à $\alpha + 1$, ni de parallèle à $y = 0$ d'ordre supérieur à $\beta + 1$), *tel que la fonction ait sur ce réseau des dérivées $D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'},0}$ $(0 \leqq \alpha' \leqq \alpha)$ continues sauf* *peut-être à l'origine, et des dérivées $D^{(\beta')}_{y^{\beta'},0}$ continues sauf peut-être à l'origine.*

Pour les dérivées entières on peut supprimer la restriction « sauf peut-être sur $xy = 0$ », en supposant les dérivées $D^{(r)}_{x^r}$ et $D^{(s)}_{y^s}$ *continues sur tout le réseau* (r et s désignent respectivement les parties entières de α et β). *De plus l'ordre des dérivations peut être interverti d'une manière quelconque.*

En effet, F_0 admet sur le réseau les mêmes dérivées que f.

54. Comme dans le cas d'une seule variable, il est possible de prolonger f de manière à faire disparaître la discontinuité des dérivées non entières sur $xy = 0$.

Je vais le démontrer pour $f - F_0$, ou, ce qui revient au même, dans l'hypothèse où f s'annule sur $\mathcal{R}_0$.

Remarquons d'abord qu'on peut supposer $n = r+1$, $p = s+1$. Il suffira d'établir qu'on peut ramener, par exemple, n à la valeur $r+1$.

La fonction de x,

$$\Delta^p_{\lambda'} f(x, \bar{y}) \qquad (0 < \lambda' \leqq \lambda),$$

s'annule sur un ensemble de n points équidistants ayant pour extrêmes 0 et 1. On a donc, en combinant les relations (20) et (21),

$$\omega_{r+1}[\delta, \Delta^p_{\lambda'} f(x, \bar{y})] < B_1(n).\delta^{r+1}\left\{\int_0^1 v^{-1}\omega_n[v, \Delta^p_{\lambda'} f(x, \bar{y})]\,dv + \int_\delta v^{-r-2}\omega_n[v, \Delta^p_{\lambda'} f(x, \bar{y})]\,dv\right\},$$

où $B_1(n)$ désigne une fonction de n seul, et encore (47),

$$\begin{aligned}\omega_{r+1}[\delta, \Delta^p_{\lambda'} f(x, \bar{y})] &< B_1(n).\delta^{r+1}\left[\int_0^1 v^{-1}\omega_{n,p}(v, \lambda')\,dv + \int_\delta^1 v^{-r-2}\omega_{n,p}(v, \lambda')\,dv\right]\\ &< B_1(n).\delta_{r+1}\left[\int_0^1 v^{-1}\omega_{n,p}(v, \lambda)\,dv + \int_\delta^1 v^{-r-2}\omega_{n,p}(v, \lambda)\,dv\right].\end{aligned}$$

On en déduit que, quels que soient $0 < \delta' \leqq \delta$, $0 < \lambda' \leqq \lambda$, $|\Delta^{r+1}_{\delta'}\Delta^p_{\lambda'} f(x, y)|$ est inférieur au second membre de cette dernière inégalité. D'où

$$\omega_{r+1,p}(\delta, \lambda) < B_1(n)\cdot\delta^{r+1}\left[\int_0^1 v^{-1}\omega_{n,p}(v, \lambda)\,dv + \int_\delta^1 v^{-r-2}\omega_{n,p}(v, \lambda)\,dv\right].$$

s'agit d'établir la convergence des intégrales

$$\int_\delta^1 \int_\lambda^1 t^{r-\alpha} u^{-\beta-1}\, dt\, du \int_0^1 v^{-1} \omega_{n,p}(v,\, u)\, dv,$$

$$\int_\delta^1 \int_\lambda^1 t^{r-\alpha} u^{-\beta-1}\, dt\, du \int_t^1 v^{-r-2} \omega_{n,p}(v,\, u)\, dv.$$

Elle devient évidente, en les écrivant

$$\int_0^1 \int_\lambda^1 v^{-1} u^{-\beta-1} \omega_{n,p}(v,\, u)\, dv\, du \int_\delta^1 t^{r-\alpha} dt,$$

$$\int_\lambda^1 u^{-\beta-1} du \int_\delta^1 v^{-r-2} \omega_{n,p}(v,\, u)\, dv \int_\delta^v t^{r-\alpha} dt.$$

Nous supposerons donc $n = r+1$, $p = s+1$. De plus nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$\mathrm{I}^{(\alpha)}_{x^\alpha,0} = \mathrm{I}^{(\alpha)}_{x^\alpha}, \qquad \mathrm{I}^{(\beta)}_{y^\beta,0} = \mathrm{I}^{(\beta)}_{y^\beta},$$

$$\mathrm{D}^{(\alpha)}_{x^\alpha,0} = \mathrm{D}^{(\alpha)}_{x^\alpha} = f^{(\alpha)}_{x^\alpha}, \qquad \mathrm{D}^{(\beta)}_{y^\beta,0} = \mathrm{D}^{(\beta)}_{y^\beta} = f^{(\beta)}_{y^\beta}.$$

Formons la différence

$$\bar f(x,\, y) = f(x,\, y) - \left\{ \sum_0^r \frac{x^i}{i!} f^{(i)}_{x^i}(0,\, y) + \sum_0^s \frac{y^j}{j!} f^{(j)}_{y^j}(x,\, 0) \right.$$
$$\left. - \sum_0^r \sum_0^s \frac{x^i y^j}{i!\, j!} f^{(i+j)}_{x^i y^j}(0,\, 0) \right\}.$$

Je vais montrer que, pour cette fonction, les dérivées (52) sont continues dans tout (Δ). On a évidemment

$$\omega_{r+1,s+1}[\delta,\, \lambda;\, \bar f] = \omega_{r+1,s+1}[\delta,\, \lambda;\, f].$$

Les dérivées entières de $\bar f(x,\, y)$, par rapport à y, jusqu'à l'ordre s inclus, s'annulent pour $y = 0$. En appliquant les relations (29) et (30) à la fonction de y, $\Delta_\delta^{r+1} \bar f(x,\, y)$, on obtient

$$\omega_{0,1}\left[\lambda,\, \Delta_\delta^{r+1} \bar f^{(s)}_{y^s}\right] < \mu(\beta) \int_0^\lambda u^{-s-1} \omega_{0,s+1}\left[u,\, \Delta_\delta^{r+1} \bar f\right] du,$$

$$\left| \Delta_\delta^{r+1} \bar f^{(s)}_{y^s} \right| < \mu(\beta) \int_0^1 u^{-s-1} \omega_{0,s+1}\left[u,\, \Delta_\delta^{r+1} \bar f\right] du.$$

La première de ces inégalités donne [(47)]

$$\left|\Delta_\delta^{r+1}\Delta_\lambda^1 \bar{f}_{y^s}^{(s)}\right| < \mu(\beta)\int_0^\lambda u^{-s-1}\omega_{r+1,s+1}(\delta, u)\,du \leqq \mu(\beta)\eta_2(\delta, \lambda),$$

et, le dernier membre étant une fonction non décroissante de δ,

$$\omega_{r+1,0}\left[\delta, \Delta_\lambda^1 \bar{f}_{y^s}^{(s)}\right] < \mu(\beta)\eta_2(\delta, \lambda) \quad [\text{n}^\circ\ \mathbf{50} \text{ et } (47)].$$

La seconde donne

$$\omega_{r+1,0}\left[\delta, \bar{f}_{y^s}^{(s)}\right] < \mu(\beta)\eta_2(\delta, 1).$$

Mais $\bar{f}_{y^s}^{(s)}$ s'annule ainsi que ses dérivées entières, par rapport à x, jusqu'à l'ordre r inclus, pour $x = 0$. On peut alors appliquer aux fonctions de x, $\bar{f}_{y^s}^{(s)}$ et $\Delta_\lambda^1 \bar{f}_{y^s}^{(s)}$, respectivement les inégalités (29) et (30). En utilisant les relations précédentes, on obtient alors

$$\omega_{1,\delta}\left[\lambda, \bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}\right] < \mu(\alpha)\mu(\beta)\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\eta_2(t, 1)\,dt = \mu(\alpha)\mu(\beta)\eta(\delta, 1),$$

$$\omega_{0,1}\left[\lambda, \bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}\right] < \mu(\alpha)\mu(\beta)\int_0^\lambda u^{-\beta-1}\eta_1(1, u)\,du = \mu(\alpha)\mu(\beta)\eta(1, \lambda);$$

car les seconds membres sont des fonctions croissantes de δ et λ. La dérivée $\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}$ est donc continue dans (Δ).

D'autre part,

$$\bar{f}_{y^s}^{(s)}(x, 0) = 0.$$

Il en résulte

$$\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}(x, 0) = 0.$$

Si maintenant on remarque que l'on a [n° **51**]

$$\bar{f}_{y^s}^{(s)} = \mathrm{I}_{x^\alpha}^{(\alpha)}\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}, \qquad \bar{f} = \mathrm{I}_{y^\beta}^{(s)}\bar{f}_{y^s}^{(s)},$$

on écrit

$$\bar{f} = \mathrm{I}_{x^\alpha y^s}^{(\alpha+s)}\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)},$$

car $\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}$ étant continu, on peut intervertir l'ordre des intégrations. On en déduit

$$\bar{f}_{x^\alpha}^{(\alpha)} = \mathrm{I}_{y^s}^{(s)}\bar{f}_{y^s x^\alpha}^{(s+\alpha)}.$$

D'où il résulte que $\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}$ s'annule pour $y = 0$, ainsi que ses dérivées entières jusqu'à l'ordre s inclus.

Il est facile maintenant d'établir et de mesurer la continuité de $\overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}$, car $\overline{f}$ et $\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}$ sont respectivement, comme fonction de x et et comme fonction de y, dans les conditions du n° **31**. Les relations (29) et (30), appliquées à la fonction de x, $\Delta^{s+1}_{\lambda}\overline{f}$, donnent

$$\omega_{1,0}\left[\delta, \Delta^{s+1}_{\lambda}\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}\right] < \mu(\alpha)\eta_1(\delta, \lambda),$$
$$\left|\Delta^{s+1}_{\lambda}\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}\right| < \mu(\alpha)\eta_1(1, \lambda).$$

D'où l'on déduit comme plus haut :

$$\omega_{0,s+1}\left[\lambda, \Delta^{1}_{\lambda}\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}\right] < \mu(\alpha)\eta_1(\delta, \lambda),$$
$$\omega_{0,s+1}\left[\lambda, \overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}\right] \quad < \mu(\alpha)\eta_1(1, \lambda).$$

Appliquons aux fonctions de y, $\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}$ et $\Delta^{1}_{\delta}\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}$, respectivement les relations (29) et (30). Il viendra

$$\omega_{0,1}\left[\lambda, \overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}\right] < \mu(\alpha)\mu(\beta)\eta(1, \lambda),$$
$$\omega_{1,0}\left[\delta, \overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}\right] < \mu(\alpha)\mu(\beta)\eta(\delta, 1).$$

Inégalités qui prouvent et mesurent la continuité de $\overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}$.

On voit immédiatement que cette dérivée s'annule sur $xy = 0$. Enfin, en se rappelant que

$$\overline{f} = \mathrm{I}^{(\alpha)}_{x^\alpha}\overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha}, \qquad \overline{f}^{(\alpha)}_{x^\alpha} = \mathrm{I}^{(\beta)}_{y^\beta}\overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta} \quad [\text{n° } \mathbf{31}],$$

on obtient

$$\overline{f}(x, y) = \mathrm{I}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}\overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta}.$$

D'où l'on déduit

$$\overline{f}^{(\alpha'+\beta')}_{x^{\alpha'} y^{\beta'}} = \overline{f}^{(\beta'+\alpha')}_{y^{\beta'} x^{\alpha'}} = \mathrm{I}^{(\alpha-\alpha'+\beta-\beta')}_{x^{\alpha-\alpha'} y^{\beta-\beta'}}\overline{f}^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta} \qquad \left\{\begin{matrix} 0 \leqq \alpha' \leqq \alpha \\ 0 \leqq \beta' \leqq \beta \end{matrix}\right\}.$$

Toutes ces dérivées sont continues dans (Δ) *et, de plus, s'annulent sur* $xy = 0$.

Revenons à la fonction $f(x, y)$ et prolongeons-la dans la partie du carré $\left\{\begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1 \end{array}\right\}$ extérieure à (Δ), par le pseudo-polynome

$$F(x, y) = \sum_0^r \frac{x^i}{i!} f_{x^i}^{(i)}(0, y) + \sum_0^s \frac{y^j}{j!} f_{y^j}^{(j)}(x, 0) - \sum_0^r \sum_0^s \frac{x^i y^j}{i!\, j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(0, 0)$$

où les dérivées $f_{x^i}^{(i)}(0, y)$ et $f_{y^j}^{(j)}(x, 0)$ ont été elles-mêmes prolongées dans l'intervalle $(-1, 0)$, respectivement par les polynomes

$$\sum_{j=0}^{j=s} \frac{y^j}{j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(0, 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{i=r} \frac{x^i}{i!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(0, 0).$$

On a, dans ces conditions,

$$D_{x^{\alpha'} y^{\beta'}; -1, -1}^{(\alpha'+\beta')} f(x, y) = D_{x^{\alpha'} y^{\beta'}; 0, 0}^{(\alpha'+\beta')} \bar{f}(x, y) + D_{x^{\alpha'} y^{\beta'}; -1, -1}^{(\alpha'+\beta')} F(x, y).$$

Pour démontrer la continuité de cette dérivée dans (Δ), il suffit d'établir que les fonctions $f_{x^i}^{(i)}(0, y)$ et $f_{y^j}^{(j)}(x, 0)$, prolongées comme il vient d'être dit, admettent respectivement des dérivées $D_{y^\beta, -1}^{(\beta)}$ et $D_{x^\alpha, -1}^{(\alpha)}$ continues dans $(0, 1)$. Considérons la seconde. La démonstration serait pareille pour l'autre.

La fonction de y, $\Delta_\delta^{r+1} f(x, y)$ admet dans $(0, 1)$ une dérivée d'ordre s dont le module de continuité satisfait à l'inégalité

$$[(24)] \qquad \omega_{0,1}\left[\lambda, \Delta_\delta^{r+1} f_{y^s}^{(s)}\right] < 6 s^2 2^s \int_0^\lambda u^{-s-1} \omega_{0, s+1}\left[u, \Delta_\delta^{r+1} f\right] du$$
$$< 6 s^2 2^s \int_0^\lambda u^{-\beta-1} \omega_{r+1, s+1}(\delta, u)\, du.$$

Mais $\Delta_\delta^{r+1} f(\bar{x}, y)$ s'annule pour $s+1$ valeurs distinctes de y. Par suite, toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre s inclus s'annulent à l'intérieur de $(0, 1)$. On a donc

$$\left| \Delta_\delta^{r+1} f_{y^s}^{(s)} \right| < 6 s^2 2^s \eta_2(\delta, 1)$$

et

$$\omega_{0,1}\left[\lambda, \Delta_\delta^{r+1} f_{y^{s-1}}^{(s-1)}\right] < 6 s^2 2^s \eta_2(\delta, 1) \lambda,$$

d'où

$$\left| \Delta_\delta^{r+1} f_{y^{s-1}}^{(s-1)} \right| < 6 s^2 2^s \eta_2(\delta, 1).$$

De proche en proche on voit que cette dernière quantité borne toutes les dérivées

$$\left|\Delta_\delta^{r+1} f_{y^j}^{(j)}\right| \qquad (j = 0, 1, \ldots, s).$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_0^\delta t^{-\alpha-1}\omega_{r+1,0}\left[t, f_{y^j}^{(j)}\right]dt$ converge. Ce qui achève la démonstration, car $f_{y^j}^{(j)}(x, 0)$ est prolongée comme il a été indiqué au n° **28**.

APPLICATION AU CAS OU L'ON FAIT DES HYPOTHÈSES SUR $\omega_{n,0}$ ET $\omega_{0,p}$.

55. Connaissant $\omega_{n,0}(\delta)$ et $\omega_{0,p}(\lambda)$, on peut obtenir une limitation pour $\omega_{n,p}(\delta, \lambda)$. On a, en effet,

$$\left|\Delta_\lambda^p \Delta_\delta^n f(x, y)\right| \leqq 2^p \omega_{n,0}(\delta),$$
$$\left|\Delta_\delta^n \Delta_\lambda^p f(x, y)\right| \leqq 2^n \omega_{0,p}(\lambda).$$

D'où l'on déduit

$$\left|\Delta_\lambda^p \Delta_\delta^n f(x, y)\right| \leqq 2^{ap}\, 2^{bn}[\omega_{n,0}(\delta)]^a[\omega_{0,p}(\lambda)]^b,$$

et

$$\omega_{n,p}(\delta, \lambda) < 2^{n+p}[\omega_{n,0}(\delta)]^a[\omega_{0,p}(\lambda)]^b,$$

en désignant par a et b deux nombres positifs quelconques de somme égale à l'unité.

L'intégrale $\int_\delta^1\int_\lambda^1 t^{-\alpha'-1}u^{-\beta'-1}\omega_{n,p}(t, u)\,dt\,du$ sera convergente si

$$H = \int_\delta^1 t^{-\alpha'-1}[\omega_{n,0}(t)]^a\,dt \qquad \text{et} \qquad H_1 = \int_\lambda^1 u^{-\beta'-1}[\omega_{0,p}(u)]^b\,du$$

le sont.

Supposons, par exemple,

$$\omega_{n,0}(\delta) \leqq A\,\delta^\alpha, \qquad \omega_{0,p}(\lambda) \leqq B\,\lambda^\beta.$$

Il vient, dans ce cas,

$$H \leqq A^a\int_\delta^1 t^{a\alpha-\alpha'-1}\,dt, \qquad H_1 \leqq B^b\int_\lambda^1 u^{b\beta-\beta'-1}\,du.$$

Ces intégrales seront convergentes si l'on a

$$\alpha' < a\alpha, \qquad \beta' < b\beta;$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1.$$

Réciproquement, si cette inégalité est vérifiée, on peut choisir a et b satisfaisant aux inégalités précédentes. D'autre part, il résulte du n° **29** que les dérivées $D^{(\alpha')}_{x^{\alpha'}}$ et $D^{(\beta')}_{y^{\beta'}}$ existent et sont continues par rapport à la variable de dérivation. On a donc la proposition suivante, obtenue par M. P. Montel [1], lorsque le point (x, y) est intérieur à (Δ) :

Si les rapports $|\delta^{-\alpha}\Delta^n_\delta f|$ et $|\lambda^{-\beta}\Delta^p_\lambda f|$ *restent bornés, la fonction admet, dans* (Δ), *toutes les dérivées continues*

$$D^{(\alpha'+\alpha')}_{x^{\alpha'}y^{\beta'}} = D^{(\beta'+\alpha')}_{y^{\beta'}x^{\alpha'}}$$

pour lesquelles

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} < 1.$$

Pour les dérivations non entières, f doit être prolongée d'une manière convenable.

Plus généralement :

Si les intégrales $\int_\delta^1 t^{-\alpha\theta-1}[\omega_{n,0}(t)]^\theta\,dt$ et $\int_\lambda^1 u^{-\beta\theta-1}[\omega_{0,p}(u)]^\theta\,du$ *sont convergentes quel que soit* $0 < \theta \leqq 1$, *on peut supposer*

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} \leqq 1.$$

Pour le voir, il suffit de prendre $\alpha' \leqq a\alpha$, $\beta' \leqq b\beta$.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE M. L.-E.-J. BROUWER.

56. On pourrait, comme dans le cas d'une seule variable [n° **34**],

---

(1) Mémoire cité, p. 191.

donner des propositions réciproques faciles à énoncer, mais sans intérêt nouveau.

Je terminerai par l'extension du théorème du n° **37**.

Si une fonction continue $f(x,y)$ possède dans (Δ) toutes les dérivées continues $f^{(r'+s')}_{x^{r'}y^{s'}}\left\{\begin{matrix}0 \leqq r' \leqq r\\ 0 \leqq s' \leqq s\end{matrix}\right\}$, la dérivée $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$ satisfaisant à la condition

$$\left|f^{(s+r)}_{x^r y^s}(x+\delta, y+\lambda) - f^{(r+s)}_{x^r y^s}(x,y)\right| \leqq \varepsilon(\delta, \lambda),$$

on a évidemment

$$\left|\Delta^r_{\delta'} \Delta^s_{\lambda'}[f(x+\delta', y+\lambda') - f(x,y)]\right| \leqq \delta^r \lambda^s \varepsilon(\delta', \lambda').$$

Réciproquement, *supposons cette dernière condition remplie dans* (Δ) (¹), $f(x, y)$ désignant *une fonction bornée*, et $\varepsilon(\delta, \lambda)$ un infiniment petit des deux variables δ et λ.

Considérons la fonction de x,

$$k^{-s} \Delta^s_k f(x, \bar{y}).$$

C'est, pour chaque valeur de k, une fonction bornée dans $(0, 1)$, satisfaisant à la condition

$$\left|\Delta^r_\delta \Delta^1_{\delta'}\right| \leqq \delta^r \varepsilon(\delta', 0).$$

On peut donc lui appliquer l'inégalité (36), en supposant, ce qui est toujours possible, $\varepsilon(\delta', 0)$ non décroissant. Il vient alors

$$\left|h^{-r} k^{-s} \Delta^r_h \Delta^s_k f(x, y) - (\alpha h)^{-r} (\beta k)^{-s} \Delta^r_h \Delta^s_{\beta k} f(x, y)\right| < 2\varepsilon[r|h|, 0],$$

quel que soit $|\alpha| < 1$.

De la même manière, on obtiendrait

$$\left|h^{-r} k^{-s} \Delta^r_h \Delta^s_k f(x, y) - h^{-r-s} \Delta^r_h \Delta^s_{\beta k} f(x, y)\right| < 2\varepsilon[0, s|k|],$$

quel que soit $|\beta| < 1$.

Remplaçons, dans cette inégalité, h par αh et ajoutons à la précé-

---

(¹) C'est-à-dire quels que soient $x, y, \delta, \delta', \lambda, \lambda'$ positifs et tels que les points (x, y) et $(x + r\delta + \delta', y + s\lambda + \lambda')$ appartiennent à (Δ).

dente. Il viendra

$$|h^{-r}k^{-s}\Delta_h^r\Delta_k^s f(x,y)-(\alpha h)^{-r}(\beta k)^{-s}\Delta_{\alpha h}^r\Delta_{\beta k}^s f(x,y)| \\ < 2\varepsilon(r|h|, 0)+2\varepsilon(0, s|h|),$$

quels que soient $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$. D'où il résulte que $h^{-r}k^{-s}\Delta_h^r\Delta_k^s f(x,y)$ tend vers une limite bien déterminée $g_{r,s}(x,y)$, quand h et k tendent vers zéro d'une manière quelconque. Si l'on divise les deux membres de (53) par $\delta^r\lambda^s$, on obtient, en faisant tendre δ et λ vers zéro,

$$|g_{r,s}(x+\delta', y+\lambda')-g_{r,s}(x,y)|\leqq\varepsilon(\delta',\lambda').$$

Ce qui prouve la continuité de $g_{r,s}$. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire ici de faire des hypothèses supplémentaires sur $\varepsilon(\delta, \lambda)$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$g(x,y)=\mathrm{I}^{(r+s)}_{x^ry^s;0,0}\, g_{r,s}(x,y).$$

Cette fonction admet dans (Δ) toutes les dérivées continues

$$g^{(r'+s')}_{x^{r'}y^{s'}}\qquad \begin{Bmatrix} 0\leqq r'\leqq r \\ 0\leqq s'\leqq s \end{Bmatrix}$$

avec

$$g^{(r+s)}_{x^ry^s}=g_{r,s}.$$

Par suite, la différence

$$\delta^{-r}\lambda^{-s}\Delta_\delta^r\Delta_\lambda^s\, g(x,y)-g_{r,s}(x,y)$$

converge uniformément vers zéro quand δ et λ tendent vers zéro d'une manière quelconque. Il en est donc de même de

$$\delta^{-r}\lambda^{-s}\Delta_\delta^r\Delta_\lambda^s[f(x,y)-g(x,y)].$$

Il résulte alors du n° **50** que la différence $f-g$ se réduit dans (Δ) à un pseudo-polynome (r, s).

En définitive, on aboutit au théorème :

Pour qu'une fonction $f(x,y)$, uniforme et bornée dans (Δ), y admette toutes les dérivées entières continues $f^{(r'+s')}_{x^{r'}y^{s'}}$ pour lesquelles $\begin{Bmatrix} 0\leqq r'\leqq r \\ 0\leqq s'\leqq s \end{Bmatrix}$, la *dérivée $f^{(r+s)}_{x^r y^s}$ satisfaisant à la condition*

$$\left| f^{(r+s)}_{x^r y^s}(x+\delta, y+\lambda) - f^{(r+s)}_{x^r y^s}(x, y) \right| \leqq \varepsilon(\delta, \lambda),$$

où $\varepsilon(\delta, \lambda)$ désigne un infiniment petit avec δ et λ; il faut et il suffit :

1° *Que l'on ait dans* (Δ)

$$\left| \Delta^r_{\delta} \Delta^s_{\delta} [f(x+\delta', y+\lambda') - f(x, y)] \right| \leqq \delta'^r \lambda'^s \varepsilon(\delta', \lambda');$$

2° *Qu'on puisse trouver un réseau (r, s) sur lequel la fonction donnée possède des dérivées continues* $D^{(r)}_{x^r}$ et $D^{(s)}_{y^s}$.

57. On voit facilement comment les notions de pseudo-polynome et de réseau, et par suite, les résultats de ce dernier Chapitre, se généralisent pour un espace à plus de deux dimensions.