JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES RIQUIER

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2}+\frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)^n u = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 297-345.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__297_0>

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation aux dérivées partielles $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0$;

PAR CHARLES RIQUIER.

Voici, très brièvement résumés, les résultats qui font l'objet du présent travail [1] :

I. Considérons, dans le plan des deux axes rectangulaires OX, OY, un contour analytique régulier ne passant pas par l'origine O, et dont les divers points s'obtiennent, chacun une seule fois, en faisant croître de zéro à 2π un certain paramètre $\theta (0 \leqq \theta < 2\pi)$; ce contour est supposé tel, d'ailleurs, que toute demi-droite partant de l'origine le rencontre en un point et en un seul. Considérons en même temps les homothétiques du contour par rapport au point O : en désignant par $\mathcal{C}_r$ celui qui correspond à la valeur r du rapport d'homothétie (il se confond, pour $r = 1$, avec le contour donné), nous nommerons *intérieur* du contour $\mathcal{C}_1$ la région du plan qu'engendre le contour $\mathcal{C}_r$ lorsqu'on fait varier le rapport d'homothétie dans les limites assignées par la double relation $0 \leqq r < 1$.

PROBLÈME $\mathfrak{P}_n$. — On se propose de *trouver une intégrale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0 \tag{1}$$

qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 octobre 1925.

1° *Cette intégrale, u, doit être analytique et régulière à l'intérieur et un peu au delà du contour $\mathcal{C}_1$.*

2° *Sur le contour même, les n quantités*

$$u, \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u, \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{n-1} u$$

doivent se réduire à n fonctions analytiques et régulières données de θ (admettant la période 2π).

Une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{P}_1$ et à $n(n-1)$ quadratures.

II. Étant donné le contour *circulaire* C, défini à l'aide des formules $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, on se propose de *trouver une intégrale de l'équation aux dérivées partielles* (1) *qui satisfasse à l'ensemble des conditions suivantes :*

1° *Cette intégrale doit être analytique et régulière à l'intérieur et un peu au delà du contour C.*

2° *En lui adjoignant ses $n-1$ premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces n quantités doivent se réduire, sur le contour même, à n fonctions analytiques et régulières données de θ (admettant la période 2π).*

Une pareille intégrale existe, et il n'en existe qu'une; sa recherche se ramène à la résolution n fois répétée du problème $\mathfrak{P}_1$ (envisagé dans le cas du contour circulaire).

III. Considérant, soit le contour $\mathcal{C}_1$ spécifié à l'alinéa I, soit le contour circulaire C spécifié à l'alinéa II, désignons par $h(x, y)$ une fonction connue, analytique et régulière à l'intérieur et un peu au delà du contour, et vérifiant, pour quelque valeur de l'entier k, la relation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^k h(x, y) = 0.$$

Cela étant, si, au lieu de l'équation (1), on considère l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = h(x, y),$$

et que l'on assujettisse son intégrale à l'ensemble des conditions formulées, soit à l'alinéa I s'il s'agit du contour $\mathcal{C}_1$, soit à l'alinéa II s'il s'agit du contour circulaire C, on se trouve, moyennant $2n$ quadratures, ramené à l'équation (1) elle-même.

Le présent travail est divisé en quatre Chapitres, ayant respectivement pour titres :

CHAPITRE I. — *Extension des principes fondamentaux de la théorie des fonctions analytiques.*

CHAPITRE II. — *De la nature monodromique d'une certaine région.*

CHAPITRE III. — *Équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0 :$$

premier problème; solution.

CHAPITRE IV. — *Équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0 :$$

deuxième problème; solution dans le cas d'un contour circulaire.

Novembre 1935.

CHAPITRE I.

EXTENSION DES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

Rappel de notions diverses.

1. Dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, dont les n dimensions x, y, ... sont supposées, indifféremment, soit *réelles*, soit *imaginaires*, la *continuité d'une région* peut se définir à l'aide des considérations suivantes :

I. Désignant par s, t, ... des variables *réelles* en nombre quelconque p, par s_0, t_0, ... certaines valeurs particulières de ces variables, et par S, T, ... d'autres valeurs particulières respectivement supérieures aux précédentes, nous nommerons *intervalle complexe* la région de l'espace $[[s, t, \ldots]]$ définie par les relations simultanées

$$s_0 \leqq s \leqq S, \qquad t_0 \leqq t \leqq T, \qquad \ldots,$$

dont chacune, considérée isolément, définit un *intervalle simple*.

Désignons maintenant par x, y, ... des variables, indifféremment *réelles* ou *imaginaires*, en nombre quelconque n; par s, t, ..., comme ci-dessus, des variables *réelles*, en nombre quelconque p; enfin par

$$\varphi(s, t, \ldots), \quad \chi(s, t, \ldots), \quad \ldots$$

n fonctions de s, t, ..., toutes *continues* (¹) dans un même intervalle complexe. Cela posé, l'ensemble des n formules

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les divers systèmes de valeurs attribuées à s, t, ... n'excèdent pas

---

(¹) Une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans toute l'étendue d'une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, est dite *continue* dans cette région, si, un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région et une constante positive α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, β, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \beta, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \beta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire la relation

$$(1) \qquad \operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha;$$

ou, ce qui revient au même, si, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et la constante α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, γ, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \gamma,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire la relation (1).

l'intervalle en question, définit ce que nous nommerons un *arc continu* (à p variables) tracé dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$. Les *points de l'arc* seront les divers systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$ qui correspondent, en vertu des formules (2), aux valeurs ci-dessus spécifiées de $s, t, \ldots$. Si, dans chacun des intervalles simples où $s, t, \ldots$ sont respectivement assujettis à varier, on considère l'une des deux valeurs extrêmes comme initiale et l'autre comme finale, il faudra entendre par *extrémité initiale* de l'arc le point qui correspond aux valeurs initiales de $s, t, \ldots$, et par *extrémité finale* le point qui correspond à leurs valeurs finales. Des arcs, tracés dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, seront dits *placés bout à bout*, si l'extrémité finale de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité initiale du suivant. Enfin, un arc sera dit *situé dans telle ou telle région* de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, si chacun de ses points s'y trouve situé.

II. Cela posé, voici comment on peut définir la *continuité d'une région*.

Une région de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ sera dite *continue*, si deux points, $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, arbitrairement choisis dans la région, peuvent toujours être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région, le premier des arcs dont il s'agit ayant son extrémité initiale en $(x_0, y_0, \ldots)$, et le dernier son extrémité finale en $(X, Y, \ldots)$.

Il est d'ailleurs toujours permis, comme nous l'avons établi ailleurs [1], de supposer que le nombre de ces arcs se réduit à 1, et que cet arc unique dépend d'une indéterminée unique.

2. Les n variables $x, y, \ldots$ étant supposées (comme ci-dessus) indifféremment *réelles* ou *imaginaires*, nous dirons qu'une région, $\mathfrak{R}$, de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ est *normale*, si elle satisfait à la double condition suivante : 1° la région $\mathfrak{R}$ est *continue*; 2° tout point de la région $\mathfrak{R}$

---

[1] *Voir* le Mémoire intitulé : *Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII; note des pages 80, 81 et 82).

est le centre de quelque domaine (¹) entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

Une fonction, $f(x, y)$, bien définie dans une région normale, $\mathfrak{R}$, y sera dite *olotrope*, si, autour de tout point, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque domaine dans toute l'étendue duquel la fonction $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement, entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Les rayons d'un pareil domaine (qu'on doit supposer, naturellement, compris tout entier dans la région $\mathfrak{R}$) se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$ (²).

Il ne faut jamais perdre de vue que *la définition*, donnée ci-dessus, *d'une fonction olotrope implique essentiellement la nature normale de la région où on la considère.*

De cette définition on tire immédiatement un certain nombre de conséquences dont nous avons fait ailleurs l'exposé méthodique (³), et, notamment, la conséquence suivante :

Si l'on désigne par $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans une région (normale), et par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point déterminé quelconque de cette région, il n'existe, pour représenter $f(x, y, \ldots)$ dans le voisinage de ce point conformément à la définition ci-dessus, qu'un seul développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ (⁴).

Cette propriété, fondement indispensable de la théorie des fonctions dont nous venons de donner la définition, subsiste, comme nous le

(¹) Nous nommons *domaine* toute région de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ définie par un système de relations de la forme

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y, \qquad \ldots,$$

où $(x_0, y_0, \ldots)$ désigne un point fixe, et $R_x, R_y, \ldots$ des constantes positives (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ en sera le *centre*.

(²) Il va sans dire que, étant donné un système d'olomètres de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$, si l'on diminue arbitrairement quelques-uns d'entre eux sans augmenter les autres, on a encore un système d'olomètres de la fonction au point considéré.

(³) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, nos 43 à 58.

(⁴) *Ibid.*, n° 44.

verrons plus loin (n° **9**, *infra*), lorsqu'on part d'une définition un peu plus générale.

3. On nomme *composition* des fonctions l'opération qui consiste à substituer aux variables u, v, ..., en nombre quelconque j, d'une fonction donnée, $f(u, v, \ldots)$, j fonctions données, $\mathrm{U}(x, y, \ldots)$, $\mathrm{V}(x, y, \ldots)$, ..., d'autres variables x, y, ..., en nombre quelconque g, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières,

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots) = f[\mathrm{U}(x, y, \ldots), \mathrm{V}(x, y, \ldots), \ldots];$$

relativement à cette opération, les fonctions

$$\mathrm{U}(x, y, \ldots), \quad \mathrm{V}(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

seront dites *simples*, $f(u, v, \ldots)$ se nommera la fonction *composante*, et $\mathrm{F}(x, y, \ldots)$ la fonction *composée*.

Cela posé, *si, d'une part, on prend comme fonctions simples les sommes de séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., convergentes à l'intérieur de quelque système de cercles décrits de $x_0, y_0, \ldots$ comme centres; si, d'autre part, désignant par u_0, v_0, ... les termes constants respectifs de ces séries, on prend comme composante la somme d'une série entière en $u - u_0$, $v - v_0$, ..., convergente à l'intérieur de quelque système de cercles décrits de u_0, v_0, ... comme centres : la fonction composée qui résulte de leur combinaison possède, à l'intérieur d'un système de cercles suffisamment petits décrits de $x_0, y_0, \ldots$ comme centres, la propriété d'être exprimable à l'aide d'un développement entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$* (¹).

Relativement à cet énoncé, il importe, en vue de la suite du présent travail, de noter le cas où les variables x, y, ... dont dépendent les fonctions simples, et auxquelles on attribue des valeurs arbitraires dans le voisinage des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, sont assujetties à être *exclusivement réelles* : même en leur imposant cette restriction, il résulte d'une proposition rappelée ci-dessus (*voir* les dernières lignes du n° **2**) qu'il n'existe, pour représenter la fonction composée dans le voisinage de x_0, y_0, ..., qu'un seul développement entier

(¹) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 59.

en $x - x_0$, $y - y_0$, ... Les coefficients, parfaitement déterminés, de ce développement s'obtiennent d'ailleurs, aux facteurs numériques connus près, par l'application répétée de la règle élémentaire fournissant les dérivées premières d'une fonction composée (¹).

(¹) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, nᵒˢ 62 et 64.

D'une importante proposition relative à la différentiation des fonctions composées, proposition que visent les nᵒˢ 66, 67 et 68 de l'Ouvrage cité, je crois devoir indiquer ici une démonstration mieux appropriée à l'extension de principes qui fait l'objet du présent Chapitre I.

Considérons, en même temps que les variables indépendantes x, y, ..., diverses fonctions *indéterminées*, U, V, ..., de x, y, ..., *en nombre donné*, et les dérivées de U, V, ... d'ordre inférieur ou égal à *l'entier donné* $k (k \geqq 0)$: soit N le nombre total des quantités contenues dans le groupe que forment les variables x, y, ..., les fonctions U, V, ... et les dérivées dont il s'agit. Considérons, d'autre part, une composante *indéterminée* à N variables, et imaginons que ces dernières y aient été remplacées, les unes par x, y, ..., les autres par U, V, ... et les dérivées de U, V, ... d'ordre inférieur ou égal à k. Si l'on calcule une dérivée d'ordre $m (m \geqq 1)$ de la fonction composée résultante en appliquant plusieurs fois de suite la règle qui fournit les dérivées premières, il est manifeste que l'expression finalement obtenue ne contient que les dérivées d'ordres 1, 2, ..., m de la composante et les dérivées d'ordres 1, 2, ..., $m + k$ de U, V, ..., qu'elle a par rapport à toutes ces dérivées la forme entière, et qu'elle est linéaire et homogène par rapport à celles de la composante. Or, pour une dérivée déterminée d'ordre m de la fonction composée, cette suite d'opérations peut être effectuée de diverses manières : je dis qu'*en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes les dérivées d'ordres* 1, 2, ..., m *de la composante et les dérivées d'ordres* 1, 2, ..., $m + k$ *de* U, V, ..., *les diverses expressions ainsi obtenues pour une même dérivée d'ordre* m *de la fonction composée sont identiquement égales entre elles*; par exemple, deux expressions, $\Delta'_{p,q,\ldots}$, $\Delta''_{p,q,\ldots}$, obtenues pour la dérivée d'ordres partiels p, q, ... $(p + q + \ldots = m)$ présentent l'une par rapport à l'autre l'identité indiquée.

Si l'on suppose en effet que la composante, d'une part, et les fonctions U, V, ..., d'autre part, soient de simples polynomes entiers, les valeurs attribuées aux variables x, y, ... n'excéderont jamais les limites d'olotropie de U, V, ..., et, de leur côté, les valeurs correspondantes de U, V, ... n'excéderont jamais les limites d'olotropie de la composante : la règle de différentiation des fonctions composées n'implique donc en pareil cas aucune restriction.

Observons en outre qu'un polynome de degré G à coefficients indéterminés a ses dérivées d'ordre supérieur à G toutes identiquement nulles, quelques valeurs numériques que l'on attribue aux coefficients (*voir* l'Ouvrage cité nº 51, 2º), et

Propriété relative à la nullité identique d'une fonction composée.

4. Soient $x, y, \ldots$ un premier groupe de variables; $r, s, \ldots$ un deuxième groupe de variables, *en même nombre que les précédentes* $x, y, \ldots$; $u(x, y, \ldots)$ la somme d'une série entière en $x, y, \ldots$, admettant quelque domaine de convergence; $\lambda(r, s, \ldots)$, $\mu(r, s, \ldots)$, ... des sommes de séries entières en $r, s, \ldots$, *en même nombre que les variables* $x, y, \ldots$, et admettant quelque domaine commun de convergence; on suppose qu'au centre $(0, 0, \ldots)$ de ce dernier domaine,

---

que l'on peut (d'une seule manière) déterminer numériquement ces derniers de telle façon que, pour des valeurs numériques arbitrairement données des variables dont il dépend, le polynome et ses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, G$ prennent des valeurs numériques arbitrairement données : si l'on désigne en effet par $z, t, \ldots$ les variables dont dépend le polynome cherché, et par $z_0, t_0, \ldots$ les valeurs numériques choisies pour elles, il suffit, pour obtenir les différents termes de ce polynome (développé à partir de $z_0, t_0, \ldots$), de considérer l'expression

$$A_{\alpha,\beta,\ldots} \frac{(z-z_0)^\alpha}{1.2\ldots\alpha} \frac{(t-t_0)^\beta}{1.2\ldots\beta}\cdots,$$

d'y supposer $A_{\alpha,\beta,\ldots} = 0$ toutes les fois que la somme $\alpha+\beta+\ldots$ surpasse G, et de prendre pour $A_{\alpha,\beta,\ldots}$, dans le cas contraire, la valeur numérique assignée d'avance à la dérivée d'ordres partiels $\alpha, \beta, \ldots$.

Cela posé, et en désignant par $\Omega, \ldots$ les dérivées des ordres $1, 2, \ldots, k$ de $U, V, \ldots$, supposons qu'on prenne pour composante un polynome entier de degré m (à N variables) dont les coefficients soient indéterminés, et pour les fonctions $U, V, \ldots$ autant de polynomes de degré $m+k$ (aux variables $x, y, \ldots$) dont les coefficients soient également indéterminés. D'après ce qui vient d'être dit, on peut tout d'abord déterminer numériquement les polynomes $U, V, \ldots$ de telle façon que, pour des valeurs numériques arbitrairement choisies de $x, y, \ldots$, ces polynomes et leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, m+k$ prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies; cela fait, si l'on désigne par

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad U_0, \quad V_0, \quad \ldots, \quad \Omega_0, \quad \ldots$$

les valeurs numériques de

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad U, \quad V, \quad \ldots, \quad \Omega, \quad \ldots,$$

on pourra déterminer numériquement le polynome entier de degré m qui joue les fonctions $\lambda(r, s, \ldots)$, $\mu(r, s, \ldots)$, ... prennent toutes la valeur numérique zéro, tandis que *leur déterminant différentiel* (relatif à r, s, ...) *y prend une valeur numérique essentiellement différente de zéro.*

De la remarque finale du numéro précédent 5 il résulte que, même en assujettissant les variables r, s, ... à ne prendre que des valeurs réelles, il n'existe, pour représenter la fonction composée

$$u[\lambda(r, s, \ldots), \mu(r, s, \ldots), \ldots]$$

dans le voisinage des valeurs initiales $r = 0$, $s = 0$, ..., qu'un seul

---

le rôle de fonction composante, de telle façon que, pour

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \ldots, \quad U = U_0, \quad V = V_0, \quad \ldots, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \ldots,$$

ce polynome et ses dérivées des ordres 1, 2, ..., m prennent des valeurs numériques arbitrairement choisies.

Les coefficients de ces divers polynomes étant ainsi fixés numériquement, désignons par $F(x, y, \ldots)$ le polynome entier qui résulte de leur combinaison, et par $F^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)$ la dérivée d'ordres partiels p, q, ... de $F(x, y, \ldots)$. Les expressions $\Delta'_{p,q,\ldots}$, $\Delta''_{p,q,\ldots}$, entières, comme il a été dit, par rapport aux dérivées d'ordre 1, 2, ..., m de la composante indéterminée et aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., $m+k$ des fonctions indéterminées U, V, ..., prennent toutes deux une même valeur numérique,

$$F^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots),$$

lorsqu'on attribue aux dérivées dont il s'agit les valeurs numériques précédemment choisies pour elles; ce choix étant d'ailleurs entièrement arbitraire, les deux expressions considérées ne peuvent manquer d'être identiquement égales.

Ainsi se trouve établi notre énoncé.

On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

En désignant par U, V, ... des fonctions indéterminées de x, y, ... en nombre donné, par k un entier donné ($\geqq 0$), par Ω, ... les dérivées des ordres 1, 2, ..., k de U, V, ..., et par

$$f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \omega, \ldots)$$

une composante déterminée, les diverses expressions auxquelles conduit, pour une même dérivée quelconque de la fonction composée, l'application répétée de l'algorithme fournissant les dérivées premières, sont identiquement égales entre elles quand on y considère x, y, ..., U, V, ... et les dérivées de tous ordres de U, V, ... comme autant de variables indépendantes distinctes.

développement entier en $r, s, \ldots$, et que les coefficients, parfaitement déterminés, de ce développement s'obtiennent, aux facteurs numériques connus près, par l'algorithme des fonctions composées.

Cela étant, *si, pour toutes valeurs réelles de $r, s, \ldots$ suffisamment voisines de zéro, la fonction composée*

$$u[\lambda(r, s, \ldots), \mu(r, s, \ldots), \ldots]$$

est constamment nulle, la série entière composante, dont nous avons désigné la somme par $u(x, y, \ldots)$, *ne peut manquer d'avoir tous ses coefficients nuls.*

Indiquons tout d'abord l'ordonnance générale de la démonstration qui va suivre.

Nous commencerons, dans les alinéas I et II, par déduire de l'algorithme des fonctions composées certaines conséquences qui sont applicables dans toutes les circonstances où cet algorithme l'est lui-même. Nous établirons ensuite, dans l'alinéa III, une proposition d'Algèbre. Après quoi nous reviendrons, dans l'alinéa IV, à l'énoncé qui vient d'être formulé.

I. Désignons par $x, y, \ldots$ des variables en nombre quelconque g; par $r, \ldots$ d'autres variables en nombre quelconque j; par

$$\lambda(r, \ldots), \quad \mu(r, \ldots), \quad \ldots$$

g fonctions connues de $r, \ldots$ (ces fonctions sont donc en même nombre que les variables $x, y, \ldots$); par u une fonction de $x, y, \ldots$; par

$$(1) \qquad U, \quad U_x, \quad U_y, \quad \ldots, \quad U_{x^2}, \quad U_{xy}, \quad U_{y^2}, \quad \ldots, \text{ etc.}$$

les fonctions composées de $r, \ldots$, auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, \text{etc.},$$

quand on y fait à la fois

$$(2) \qquad x = \lambda(r, \ldots), \qquad y = \mu(r, \ldots), \qquad \ldots.$$

Désignant ensuite par A, B, C, D, ..., E, F, G, ... diverses fonctions connues de r, ..., considérons l'expression

$$(3) \qquad A + BU + CU_x + DU_y + \ldots + EU_{x^2} + FU_{xy} + GU_{y^2} + \ldots,$$

linéaire par rapport à quelques-unes des quantités (1).

Cela étant, *une différentiation d'ordre quelconque par rapport au groupe des variables r, ..., exécutée sur (3), donne une nouvelle expression, linéaire, comme (3), par rapport à quelques-unes des quantités* (1) : car une différentiation d'ordre 1, relative à r par exemple, donne pour résultat l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} U + \frac{\partial C}{\partial r} U_x + \frac{\partial D}{\partial r} U_y + \ldots \\
&\quad + \frac{\partial E}{\partial r} U_{x^2} + \frac{\partial F}{\partial r} U_{xy} + \frac{\partial G}{\partial r} U_{y^2} + \ldots \\
&\quad + B\left(U_x \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_y \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) + C\left(U_{x^2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_{xy} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) \\
&\quad + D\left(U_{xy} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_{y^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) + \ldots \\
&\quad + E\left(U_{x^3} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_{x^2 y} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) + F\left(U_{x^2 y} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_{xy^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) \\
&\quad + G\left(U_{xy^2} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + U_{y^3} \frac{\partial \mu}{\partial r} + \ldots\right) + \ldots,
\end{aligned}$$

de même forme que (3), et la même chose a lieu, dès lors, quel que soit l'ordre de la différentiation.

II. Considérant, comme à l'alinéa I, une expression linéaire par rapport aux quantités $U_{x^\alpha y^\beta \ldots}$, nous nommerons *partie principale* de cette expression l'ensemble des termes où la somme $\alpha + \beta + \ldots$ est la plus forte : dans l'expression considérée, et notamment dans sa partie principale, il y a avantage, et c'est ce que nous ferons plus loin, à désigner symboliquement par la notation $X^\alpha Y^\beta \ldots$ ce que nous avons jusqu'ici désigné par la notation $U_{x^\alpha y^\beta \ldots}$, c'est-à-dire la fonction composée de r, ... à laquelle se réduit $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}$ lorsqu'on y effectue la substitution (2). Si, par exemple, la fonction u dépend de trois variables, x, y, z, et que l'expression donnée ait pour partie principale

$$AU_{x^2} + A'U_{y^2} + A''U_{z^2} + 2BU_{yz} + 2B'U_{zx} + 2B''U_{xy}$$

(où A, A′, A″, B, B′, B″ désignent des fonctions connues de r, ...), nous représenterons cette dernière par la forme quadratique

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY.$$

Il convient de faire à ce sujet la remarque suivante. Considérons une expression linéaire par rapport à quelques-unes des quantités (1), et effectuons sur elle une différentiation (première) relative à une variable quelconque, r, du groupe r, ..., ce qui nous donnera une deuxième expression de même nature (1); puis, dans l'une et l'autre expression, représentons symboliquement la partie principale par une forme algébrique en X, Y, ... Cela étant, il est très facile de voir que *la deuxième forme algébrique se déduit de la première en la multipliant par la forme linéaire*

$$\lambda'_r X + \mu'_r Y + \ldots,$$

où λ'_r, μ'_r, ... désignent les dérivées premières de λ, μ, ... par rapport à r.

III. Considérons actuellement des formes linéaires en nombre égal à celui des indéterminées X, Y, ..., par exemple trois formes linéaires par rapport aux trois indéterminées X, Y, Z,

$$(4)\qquad \begin{cases} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = X', \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = Y', \\ a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = Z', \end{cases}$$

et construisons avec elles les diverses expressions $X'^{\alpha} Y'^{\beta} Z'^{\gamma}$, en nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, pour lesquelles la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est égale à m : chacune de ces expressions est une forme algébrique de degré m en X, Y, Z, où les coefficients (fonctions des a, des b et des c) sont en nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Cela étant, *si le déterminant qui a pour éléments les coefficients des formes linéaires* (4) *est différent de zéro, celui qui a pour éléments les coefficients des formes d'ordre* m *ainsi construites jouit de la même propriété.*

Posons en effet, pour abréger l'écriture, $\frac{(m+1)(m+2)}{2} = M$, et, dans les M expressions $X'^{\alpha}Y'^{\beta}Z'^{\gamma}$, considérons X', Y', Z' comme trois variables indépendantes : nous aurons ainsi M formes algébriques de degré m en X', Y', Z', se réduisant chacune à un terme unique dont le coefficient est 1, et il est clair qu'en multipliant ces M formes algébriques (respectivement identiques à M termes dissemblables ayant pour coefficient l'unité) par les constantes indéterminées $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$, et ajoutant les produits, la $(M+1)^{\text{ième}}$ forme algébrique qui en résulte ne peut être identiquement nulle en X', Y', Z' que si l'on a à la fois

$$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta_M = 0.$$

Dans les $M+1$ formes algébriques de degré m que nous venons de considérer, remplaçons maintenant X', Y', Z' par les formes linéaires (4) : nous obtiendrons ainsi $M+1$ formes algébriques de degré m en X, Y, Z, dont la dernière est la somme des M premières respectivement multipliées par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$. Pour qu'elle soit identiquement nulle en X, Y, Z, il faut et il suffit, puisque les coefficients des formes (4) sont les éléments d'un déterminant différent de zéro, qu'elle le soit en X', Y', Z' avant la substitution, et, par suite, que les multiplicateurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$ soient tous nuls : si donc, une fois la substitution opérée, on égale à zéro ses divers coefficients, le système ainsi obtenu, composé de M équations linéaires et homogènes par rapport aux M multiplicateurs, admet pour solution unique

$$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta_M = 0,$$

et présente, par suite, un déterminant différent de zéro. Or, en permutant dans celui-ci les lignes avec les colonnes, on tombe sur celui qui a pour éléments les coefficients des M premières formes.

IV. Revenons à l'énoncé formulé au début du présent n° **4**. Pour fixer les idées et simplifier l'écriture, nous supposerons que la composante dépend de trois variables (imaginaires), x, y, z, et nous la désignerons par $u(x, y, z)$; les fonctions simples que l'on substitue à ces dernières pour former la fonction composée dépendront alors elles-mêmes de trois variables (réelles), r, s, t, et nous les désignerons par

$$\lambda(r, s, t), \quad \mu(r, s, t), \quad \nu(r, s, t).$$

Finalement, comme aux alinéas I et II, nous désignerons par

$$U, \quad U_x, \quad U_y, \quad U_z, \quad U_{x^2}, \quad U_{y^2}, \quad U_{z^2}, \quad U_{xy}, \quad U_{xz}, \quad U_{yz}, \quad \ldots$$

ce que deviennent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \ldots$$

quand on y effectue les substitutions (simultanées)

$$x = \lambda(r, s, t), \qquad y = \mu(r, s, t), \qquad z = \nu(r, s, t).$$

Si l'on prend une dérivée d'ordre total m et d'ordres partiels h, k, l

$$(h + k + l = m)$$

de la fonction composée

$$u[\lambda(r, s, t), \mu(r, s, t), \nu(r, s, t)],$$

on obtient visiblement une expression linéaire et homogène par rapport aux quantités

$$U_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

avec des coefficients connus, fonctions de r, s, t; et la partie principale (II) de l'expression dont il s'agit est, comme on le voit immédiatement, susceptible d'une représentation symbolique fort simple, savoir :

$$(\lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z)^h (\lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z)^k (\lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z)^l,$$

où

$$\begin{array}{ccc} \lambda'_r, & \mu'_r, & \nu'_r, \\ \lambda'_s, & \mu'_s, & \nu'_s, \\ \lambda'_t, & \mu'_t, & \nu'_t \end{array}$$

sont les dérivées premières relatives à r, s, t des trois fonctions simples λ, μ, ν.

Cela étant, supposons, conformément à notre énoncé, que la fonction composée

$$u[\lambda(r, s, t), \mu(r, s, t), \nu(r, s, t)]$$

soit identiquement nulle : elle s'annulera alors, ainsi que toutes ses dérivées, dans l'hypothèse numérique initiale $r = s = t = 0$ ([1]), qui entraîne, comme nous l'avons spécifié, $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Considérant tout d'abord la fonction composée elle-même, on a, puisque sa valeur initiale est nulle,

$$u(0, 0, 0) = 0,$$

d'où l'on déduit que la composante $u(x, y, z)$ prend, en $x = y = z = 0$, une valeur initiale nulle.

Considérons ensuite les trois dérivées premières de la fonction composée, symboliquement représentées par les expressions

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z, \\ \lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z, \\ \lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z; \end{array}\right.$$

puisque, en vertu de nos hypothèses, les valeurs initiales de ces trois expressions sont nulles, et que celle du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda'_r & \mu'_r & \nu'_r \\ \lambda'_s & \mu'_s & \nu'_s \\ \lambda'_t & \mu'_t & \nu'_t \end{vmatrix}$$

est différente de zéro, celles des quantités symboliquement représentées par X, Y, Z sont forcément nulles : on en conclut que les dérivées premières de la composante $u(x, y, z)$ prennent, en $x = y = z = 0$, des valeurs initiales nulles.

Considérons maintenant les dérivées du second ordre de la fonction composée : chacune d'elles, comme on sait, se trouve représentée à l'aide d'une expression linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières et secondes de la composante (les coefficients de cette expression étant fonctions de r, s, t). D'ailleurs, pour obtenir les valeurs initiales des expressions dont il s'agit, on peut, en vertu de ce qui vient d'être démontré sur les dérivées premières de la composante, les supposer réduites à leurs parties principales, symboliquement

---

([1]) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 56.

représentées par

$$(6)\qquad \begin{cases} (\lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z)^2, \\ (\lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z)^2, \\ (\lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z)^2, \\ (\lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z)\,(\lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z), \\ (\lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z)\,(\lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z), \\ (\lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z)\,(\lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z). \end{cases}$$

Or, le déterminant des formes linéaires (5) ayant une valeur initiale différente de zéro, celui des formes quadratiques (6) jouit de la même propriété (III). En conséquence, puisque, en vertu de nos hypothèses, les valeurs initiales des expressions (6) sont toutes nulles, celles des quantités symboliquement représentées par X^2, Y^2, Z^2, XY, XZ, YZ le sont aussi. On en conclut que les dérivées secondes de la composante $u(x, y, z)$ prennent, en $x = y = z = 0$, des valeurs initiales nulles.

Considérons actuellement les dérivées du troisième ordre de la fonction composée : chacune d'elles se trouve représentée à l'aide d'une expression linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières, secondes et troisièmes de la composante (les coefficients de cette expression étant fonctions de r, s, t). D'ailleurs, pour obtenir les valeurs initiales des expressions dont il s'agit, on peut, en vertu de ce qui vient d'être démontré sur les dérivées premières et secondes de la composante, les supposer réduites à leurs parties principales, symboliquement représentées par les expressions

$$(7)\qquad (\lambda'_r X + \mu'_r Y + \nu'_r Z)^h\,(\lambda'_s X + \mu'_s Y + \nu'_s Z)^k\,(\lambda'_t X + \mu'_t Y + \nu'_t Z)^l$$
$$(h + k + l = 3).$$

Or, le déterminant des formes linéaires (5) ayant une valeur initiale différente de zéro, celui des formes cubiques (7) jouit de la même propriété (III). En conséquence, puisque, en vertu de nos hypothèses, les valeurs initiales des expressions (7) sont nulles, celles des quantités symboliquement représentées par

$$X^h Y^k Z^l \qquad (h + k + l = 3)$$

le sont forcément aussi. On en conclut que les dérivées troisièmes de la composante $u(x, y, z)$ prennent, en $x=y=z=0$, des valeurs initiales nulles.

Ce mode de raisonnement peut être indéfiniment poursuivi, et l'on verra sans peine que, si la propriété est vraie jusqu'à l'ordre N (inclusivement) des dérivées de la composante, elle l'est pour l'ordre suivant $N+1$.

Régions quasi normales; fonctions quasi olotropes; leurs dérivées.

5. Dans l'espace *réel* $[[s, t, \ldots]]$, nous avons nommé *intervalle complexe* (nº **1**, I) toute région définie par un système de relations de la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} s_0 \leqq s \leqq S & (s_0 < S), \\ t_0 \leqq t \leqq T & (t_0 < T), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Cela étant, la région que définit le système des relations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} s_0 < s < S, \\ t_0 < t < T, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

région normale (nº **2**) manifestement comprise dans l'intervalle complexe (1), se nommera l'*intérieur* de ce dernier, et l'ensemble des points restants de l'intervalle (1) se nommera la *périphérie* de l'intervalle. Toute région, telle que (2), déduite d'un intervalle (complexe) en y faisant abstraction de la périphérie pour n'en considérer que l'intérieur, se nommera un *quasi-intervalle* (complexe) : à tout intervalle correspond ainsi un quasi-intervalle, et réciproquement.

La distinction entre les divers points, intérieurs ou périphériques, d'un intervalle complexe en entraîne une toute semblable entre les divers points d'un arc continu (nº **1**, I) : suivant que ces derniers seront fournis par les points intérieurs ou par les points périphériques de l'intervalle complexe où sont assujetties à se mouvoir les variables réelles dont l'arc dépend, ils seront dits eux-mêmes *intérieurs* ou *périphériques*.

6. Désignons actuellement par $x, y, \ldots$ des variables *imaginaires*, en nombre quelconque n; par $s, t, \ldots$ des variables *réelles* dont le nombre p soit *au plus* égal à n; enfin, par

$$\begin{gathered}\varphi(s, t, \ldots),\\ \chi(s, t, \ldots),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

n fonctions de $s, t, \ldots$, toutes *olotropes* (nº 2) dans un même quasi-intervalle (nº 5) de l'espace $[[s, t, \ldots]]$, et telles que le tableau différentiel (à n lignes et p colonnes) formé avec leurs np dérivées premières contienne quelque déterminant d'ordre p non identiquement nul. Cela étant, l'ensemble des n formules

$$\begin{gathered}x = \varphi(s, t, \ldots),\\ y = \chi(s, t, \ldots),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

où les systèmes de valeurs attribuées à $s, t, \ldots$ n'excèdent pas le quasi-intervalle en question, définit ce que l'on peut appeler un *arc olotrope* (à p dimensions réelles) tracé dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$: comme un quasi-intervalle ne contient que des points intérieurs, sans aucun point périphérique, il en sera de même pour un arc olotrope.

Un arc olotrope sera dit *régulier*, si, en aucun point de cet arc, les divers déterminants d'ordre p extraits du tableau différentiel ci-dessus spécifié ne prennent à la fois la valeur numérique zéro.

Un arc olotrope sera dit *adéquat*, si le nombre p des dimensions réelles $s, t, \ldots$ dont l'arc dépend est *égal* au nombre n des dimensions imaginaires de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ où il est tracé : le nombre p atteint alors la valeur maximum que lui assigne la définition, posée ci-dessus, des arcs olotropes.

Si un arc olotrope est à la fois adéquat et régulier, le déterminant différentiel des n fonctions $\varphi(s, t, \ldots)$, $\chi(s, t, \ldots)$, ... par rapport aux n variables $s, t, \ldots$ reste différent de zéro dans toute l'étendue du quasi-intervalle où ces variables sont assujetties à se mouvoir.

Enfin, si, considérant divers espaces (à dimensions imaginaires),

$$[[x, \ldots]], \quad [[y, \ldots]], \quad \ldots,$$

on trace respectivement dans ces espaces des arcs,

$$\mathfrak{A}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{A}_{y,\ldots}, \quad \ldots,$$

dont chacun soit olotrope, adéquat et régulier, leur association

$$(\mathfrak{A}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{A}_{y,\ldots}, \quad \ldots)$$

constitue, dans l'espace

$$[[x, \ldots, y, \ldots, \ldots]],$$

un arc jouissant lui-même de cette triple propriété.

7. Nous dirons qu'une région, $\mathfrak{R}$, de l'espace imaginaire $[[x, y, \ldots]]$ est *quasi normale*, si elle remplit la double condition suivante :

1° La région $\mathfrak{R}$ est continue (n° **1**) ;

2° Par tout point de $\mathfrak{R}$ passe quelque arc olotrope, adéquat et régulier (n° **6**), entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

La remarque présentée dans l'Ouvrage cité ([1]) relativement aux régions limitées, complètes, continues, normales, s'applique également aux régions quasi normales : si des régions, respectivement extraites des espaces

$$[[x, \ldots]], \quad [[y, \ldots]], \quad \ldots,$$

sont toutes quasi normales, leur association constitue, dans l'espace

$$[[x, \ldots, y, \ldots, \ldots]],$$

une région également quasi normale.

Voici quelques exemples de régions quasi normales :

I. *Tout arc olotrope, adéquat et régulier, tracé dans l'espace imaginaire* $[[x, y, \ldots]]$, *fournit* manifestement *une région quasi normale de cet espace.*

II. *Toute région normale* (n° **2**), $\mathfrak{R}$, *de l'espace imaginaire*

([1]) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n^os^ 4, 39 et 41.

$[[x, y, \ldots]]$ *satisfait à notre définition d'une région quasi normale.*

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, en même temps qu'un point particulier quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région $\mathfrak{R}$, les n plans de notation graphique des n variables respectives $x, y, \ldots$, et d'observer que n arcs olotropes réguliers à une dimension (réelle), tracés respectivement dans ces n plans et passant respectivement par les n points $x_0, y_0, \ldots$, constituent par leur association, pourvu qu'ils soient suffisamment peu étendus, une figure entièrement située dans $\mathfrak{R}$.

III. Si, mettant en évidence les deux éléments de chaque variable imaginaire, on pose

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots,$$

toute région normale (n° **2**), $\mathfrak{R}'$, *de l'espace réel* $[[x', y', \ldots]]$, *associée au point*

$$x'', y'', \ldots = 0, 0, \ldots$$

de l'espace réel $[[x'', y'', \ldots]]$, *fournit, dans l'espace imaginaire* $[[x, y, \ldots]]$, *une région quasi normale.*

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, en même temps qu'un point particulier quelconque, $(x'_0, y'_0, \ldots)$, de la région $\mathfrak{R}'$, les n axes de notation graphique des n variables respectives $x', y', \ldots$; puis, d'observer que n quasi-intervalles simples, ayant pour centres respectifs les n points $x'_0, y'_0, \ldots$ de ces n axes et respectivement associés aux n valeurs $x'' = 0, y'' = 0, \ldots$, sont des arcs olotropes réguliers à une dimension (réelle) passant respectivement par les n points

$$x_0 = (x'_0, 0), \qquad y_0 = (y'_0, 0), \qquad \ldots,$$

et que, dans l'espace imaginaire $[[x, y, \ldots]]$, ils constituent par leur association, à la condition d'être suffisamment peu étendus, une figure entièrement située dans la région que spécifie notre énoncé.

IV. *Si, en posant*

$$(3) \qquad v = x' + ix'', \qquad w = x' - ix'',$$

on assujettit les variables v, w à être imaginaires conjuguées, toute région normale (n° **2**), $\mathfrak{R}_{x',x''}$, *de l'espace réel* $[[x', x'']]$ *fournit, dans l'espace imaginaire* $[[v, w]]$, *par l'intermédiaire des formules* (3), *une région quasi normale*, $\mathfrak{R}_{v,w}$.

Tout d'abord, la continuité de $\mathfrak{R}_{x',x''}$ entraîne manifestement celle de $\mathfrak{R}_{v,w}$.

Par tout point de $\mathfrak{R}_{v,w}$ passe d'ailleurs quelque arc olotrope, adéquat et régulier, entièrement situé dans $\mathfrak{R}_{v,w}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer, en même temps qu'un point particulier quelconque, (x'_0, x''_0), de la région $\mathfrak{R}_{x',x''}$, le plan de notation graphique du couple (x', x''), et d'observer qu'autour du point (x'_0, x''_0), pris comme centre, on peut, sans sortir de $\mathfrak{R}_{x',x''}$, assigner quelque intervalle complexe à deux dimensions : ce dernier fournira, dans $\mathfrak{R}_{v,w}$, par l'intermédiaire des formules (3) dont le déterminant différentiel relatif à x', x'' a pour valeur $2i$ (au signe près), l'arc olotrope, adéquat et régulier dont l'existence est requise.

Notons, au passage, que, les formules (3) une fois posées, la région quasi normale $\mathfrak{R}_{v,w}$, déduite comme il vient d'être dit de $\mathfrak{R}_{x',x''}$, peut, sans qu'il y ait à craindre d'ambiguïté, se désigner tout aussi bien par $\mathfrak{R}_{x',x''}$.

8. Les variables x, y, ... étant supposées imaginaires, nous dirons qu'une fonction, $f(x, y, \ldots)$, de ces variables, bien définie *dans une région quasi normale*, $\mathfrak{R}$, y est *quasi olotrope*, si, autour d'un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque système de cercles tel que, dans toute l'étendue commune au domaine qu'ils forment et à la région $\mathfrak{R}$, la fonction $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Les rayons d'un pareil domaine se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$ (¹).

Il ne faut pas perdre de vue que *la définition*, donnée ci-dessus, *d'une fonction quasi olotrope implique essentiellement la nature quasi normale de la région où on la considère.*

(¹) Il va sans dire que, ici encore, la note (²) du n° **2** est applicable.

Notons d'ailleurs, en nous reportant aux exemples II et III, donnés plus haut (n° **7**), d'une région quasi normale :

1° Que toute fonction de variables imaginaires olotrope dans une région normale (n° **2**) peut être assimilée à une fonction de variables imaginaires quasi olotrope dans une région quasi normale;

2° Et qu'il en est de même pour toute fonction de variables réelles olotrope dans une région normale (n° **2**).

9. *Si l'on désigne par $f(x, y, \ldots)$ une fonction quasi olotrope dans une région (quasi normale) $\mathfrak{R}$, et par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier quelconque de cette région, il n'existe, pour représenter $f(x, y, \ldots)$ dans le voisinage de ce point conformément à la définition ci-dessus* (n° **8**), *qu'un seul développement entier par rapport aux n différences $x - x_0$, $y - y_0$, ...*

Supposons, en effet, qu'il existe deux développements de cette nature, c'est-à-dire que la quantité $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un premier développement entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$,

$$F(x - x_0, y - y_0, \ldots),$$

dans toute l'étendue commune à la région $\mathfrak{R}$ et au domaine (système de cercles) de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$; puis, qu'elle soit de même exprimable à l'aide d'un deuxième développement entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$,

$$G(x - x_0, y - y_0, \ldots),$$

dans toute l'étendue commune à la région $\mathfrak{R}$ et au domaine de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons $\delta''_x, \delta''_y, \ldots$. Si l'on désigne alors par δ_x la plus petite des deux constantes δ'_x, δ''_x, par δ_y la plus petite des deux constantes δ'_y, δ''_y, etc., on aura, dans toute l'étendue commune à la région $\mathfrak{R}$ et au domaine de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons $\delta_x, \delta_y, \ldots$, la relation

$$(4) \qquad F(x - x_0, y - y_0, \ldots) = G(x - x_0, y - y_0, \ldots);$$

c'est ce qui aura lieu, notamment, en vertu de la définition des régions quasi normales (n° **7**), sur toute l'étendue de quelque arc olotrope, adéquat et régulier, passant par le point $(x_0, y_0, \ldots)$. Soient

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les formules qui définissent l'arc, et s_0, t_0, ... les valeurs particulières de s, t, ... qui fournissent le point $(x_0, y_0, \ldots)$: en vertu des définitions posées, le déterminant différentiel de leurs n seconds membres par rapport aux n variables réelles s, t, ... reste différent de zéro dans toute l'étendue du quasi-intervalle où ces dernières sont assujetties à se mouvoir, et cela a lieu, notamment, pour $s, t, \ldots = s_0, t_0, \ldots$. En posant

$$s - s_0 = \sigma, \qquad t - t_0 = \tau, \qquad \ldots,$$

et remplaçant les seconds membres de (5) par leurs développements tayloriens construits à partir de s_0, t_0, ..., l'arc se trouvera défini, dans le voisinage des valeurs s_0, t_0, ... de s, t, ..., par les formules

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mathrm{H}(\sigma, \tau, \ldots), \\ y &= y_0 + \mathrm{K}(\sigma, \tau, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

dans ces dernières, les variables σ, τ, ... sont réelles, arbitraires et suffisamment voisines de zéro, et les fonctions

$$\mathrm{H}(\sigma, \tau, \ldots), \quad \mathrm{K}(\sigma, \tau, \ldots), \quad \ldots$$

sont des sommes de séries entières en σ, τ, ... admettant quelque domaine commun de convergence ; au centre $(0, 0, \ldots)$ de ce domaine, elles prennent toutes la valeur numérique zéro, tandis que leur déterminant différentiel (relatif à σ, τ, ...) prend une valeur numérique essentiellement différente de zéro.

Cela étant, puisqu'on a, sur toute l'étendue de l'arc, la relation (4), on aura, pour toutes valeurs réelles de σ, τ, ... suffisamment voisines de zéro,

$$\mathrm{F}[\mathrm{H}(\sigma, \tau, \ldots), \mathrm{K}(\sigma, \tau, \ldots), \ldots] - \mathrm{G}[\mathrm{H}(\sigma, \tau, \ldots), \mathrm{K}(\sigma, \tau, \ldots), \ldots] = 0.$$

En vertu du n° **4**, la composante

$$\mathrm{F}(h, k, \ldots) - \mathrm{G}(h, k, \ldots)$$

a donc nécessairement tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire que les deux développements $F(h, k, \ldots)$, $G(h, k, \ldots)$, entiers en $h, k, \ldots$, ont leurs coefficients semblables respectivement égaux. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

Ainsi se trouve généralisée, comme nous l'avions annoncé, la propriété fondamentale formulée dans les dernières lignes du n° **2**.

10. Lorsqu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est quasi olotrope dans une région (quasi normale) $\mathfrak{R}$, à tout point $(x, y, \ldots)$ de cette région correspond, pour exprimer la valeur de la fonction dans son voisinage, un développement, et un seul, entier par rapport aux accroissements $h, k, \ldots$ qu'on attribue à $x, y, \ldots$; le seul choix du point $(x, y, \ldots)$ détermine donc entièrement les coefficients du développement qui lui correspond, et, dès lors, *chacun de ces coefficients peut, dans la région* $\mathfrak{R}$, *être considéré comme une fonction de* $x, y, \ldots$. Nous allons actuellement constater qu'*une pareille fonction est, comme la proposée* $f(x, y, \ldots)$, *quasi olotrope dans la région* $\mathfrak{R}$, *et qu'elle admet en chaque point de cette région les olomètres de la proposée.*

Considérons en effet, d'une part, le domaine (système de cercles), $\mathfrak{D}$, ayant pour centre un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, et pour rayons les quantités positives $\delta_x, \delta_y, \ldots$; d'autre part, le domaine, $\mathfrak{d}$, ayant pour centre un point quelconque, $(x_1, y_1, \ldots)$, intérieur à $\mathfrak{D}$, et pour rayons les différences (nécessairement positives)

$$\delta_x - \operatorname{mod}(x_1 - x_0), \quad \delta_y - \operatorname{mod}(y_1 - y_0), \quad \ldots :$$

ce deuxième domaine est entièrement compris dans le premier. On sait d'ailleurs que, si un développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$ converge dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$, sa somme est exprimable, dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{d}$, à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_1$, $y - y_1, \ldots$. On sait enfin que, *dans ce dernier développement, le coefficient du terme en* $(x - x_1)^p (y - y_1)^q \ldots$ *est exprimable à l'aide d'une série entière en* $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \ldots$ *admettant les rayons de convergence* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ (1).

(1) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 49.

De là résulte immédiatement l'énoncé formulé au début du présent n° **10**.

11. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction quasi olotrope dans une région (quasi normale) $\mathfrak{R}$. Si l'on désigne par $(x, y, \ldots)$ un point quelconque de cette dernière, le terme indépendant de $h, k, \ldots$ dans le développement de

$$f(x+h, y+k, \ldots),$$

effectué à partir des valeurs initiales $x, y, \ldots$, a pour valeur $f(x, y, \ldots)$. Dans ce même développement, les coefficients des premières puissances de $h, k, \ldots$ se nomment les *dérivées* de $f(x, y, \ldots)$ *prises par rapport à* $x, y, \ldots$ respectivement.

Comme les dérivées d'une fonction $f(x, y, \ldots)$, quasi olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, sont elles-mêmes quasi olotropes dans cette région, elles ont des dérivées jouissant de cette propriété ; de même pour celles-ci, leurs propres dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. Les dérivées ainsi formées de proche en proche sont les *dérivées partielles de tous ordres* de la fonction $f(x, y, \ldots)$.

Ces définitions étant posées, on verra sans peine, sans que nous ayons à insister davantage, qu'entre les premières propriétés des fonctions olotropes et celles des fonctions quasi olotropes, il existe une similitude complète : moyennant la transposition voulue, les n^{os} 51 à 58 de l'Ouvrage cité sont entièrement applicables à ces dernières fonctions.

Composition des fonctions quasi olotropes.

12. Soient

$$f(u, v, \ldots) \tag{1}$$

une composante donnée;

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots \tag{2}$$

des fonctions simples données (en même nombre que les variables $u, v, \ldots$ de la composante).

Si, d'une part, les fonctions simples (2) *sont toutes quasi olo-*

tropes dans une région (quasi normale) $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$; *si, d'autre part, la composante* (1) *jouit de la même propriété dans une région (quasi normale)* $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$: *si, enfin, pour un choix arbitraire du point* $(x, y, \ldots)$ *dans la première région, l'association des valeurs prises par les fonctions simples* (2) *donne un point constamment situé dans la seconde : les fonctions composées*

$$f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots],$$
$$f^{(p,q,\ldots)}_{u,v,\ldots}[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

ne peuvent manquer d'être quasi olotropes dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$.

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter au n° **5** et d'observer que $f^{(p,q,\ldots)}_{u,v,\ldots}(u, v, \ldots)$ [dérivée d'ordres partiels p, q, ... de $f(u, v, \ldots)$] est quasi olotrope dans les mêmes limites que $f(u, v, \ldots)$ (n° **11**).

Pour les diverses conséquences découlant de cette proposition, nous renvoyons le lecteur à l'Ouvrage cité, dont les n^os **61** à **65**, ainsi que la propriété qui, dans le présent Mémoire, fait l'objet de la note du n° **5**, sont entièrement applicables aux fonctions quasi olotropes.

Sur le changement des variables indépendantes dans le monde des fonctions quasi olotropes.

15. Considérons un système de k équations reliant deux groupes de k quantités imaginaires, par exemple le système des trois équations

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ F_2(x, y, z, x', y', z') = 0, \\ F_3(x, y, z, x', y', z') = 0, \end{cases}$$

reliant entre eux le groupe des trois quantités x, y, z et celui des trois quantités x', y', z'. Supposons de plus que, dans les espaces respectifs $[[x, y, z]]$ et $[[x', y', z']]$, il existe deux régions, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, telles que les diverses conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° Ces deux régions sont *quasi normales* (n° **7**), et les premiers membres de (1) sont *quasi olotropes* (n° **8**) dans la région, nécessairement quasi normale, $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$.

2° Il existe entre $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, par le moyen des relations (1), une *correspondance point par point*, c'est-à-dire que, étant donné dans la première de ces régions un point quelconque, il existe dans la seconde un point, et un seul, vérifiant, conjointement avec lui, les relations (1), et réciproquement.

3° A partir de deux points correspondants quelconques des régions $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, le système (1) est résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites ([1]), tant par rapport à x, y, z que par rapport à x', y', z'.

Quand ces diverses conditions se trouvent satisfaites, le système (1) peut visiblement être considéré comme définissant trois fonctions,

$$(1\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = X(x', y', z'), \\ y = Y(x', y', z'), \\ z = Z(x', y', z'), \end{array}\right.$$

quasi olotropes dans la région $\mathfrak{R}'$, ou, inversement, trois fonctions,

$$(1\ ter)\qquad \left\{\begin{array}{l} x' = X'(x, y, z), \\ y' = Y'(x, y, z), \\ z' = Z'(x, y, z), \end{array}\right.$$

quasi olotropes dans la région $\mathfrak{R}$; et nous dirons qu'il définit, entre les deux régions quasi normales $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, *une correspondance quasi olotrope point par point*.

Il va sans dire que, dans toute l'étendue de la région $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, le système (1) équivaut numériquement tant au système (1 *bis*) qu'au système (1 *ter*), et que ces derniers sont numériquement équivalents entre eux.

Enfin, il résulte immédiatement du principe général de la composition des fonctions quasi olotropes (n° **12**) que *toute fonction de x, y, z quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}$ devient, par la transformation (1 bis), une fonction de x', y', z' quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}'$*; et que, réciproquement, *toute fonction de x', y', z' quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}'$ devient, par la transformation inverse (1 ter), une fonction de x, y, z quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}$*.

([1]) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **120**.

On formera par la méthode classique les relations qui relient entre elles les dérivées de tous ordres des deux fonctions, et qui permettent d'exprimer les dérivées de la première à l'aide des dérivées de la seconde, ou inversement.

14. Considérons actuellement un système résolu par rapport à l'un des deux groupes de quantités x, y, z et x', y', z', par exemple par rapport à x, y, z, et soit

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = f_1(x', y', z'), \\ y = f_2(x', y', z'), \\ z = f_3(x', y', z') \end{array}\right.$$

le système dont il s'agit. Supposons en outre :

1° Que les fonctions

$$f_1(x', y', z'),\quad f_2(x', y', z'),\quad f_3(x', y', z')$$

soient quasi olotropes dans une certaine région (quasi normale), $\mathfrak{R}'$, de l'espace $[[x', y', z']]$;

2° Que le déterminant différentiel de ces trois fonctions par rapport à x', y', z' reste différent de zéro dans toute l'étendue de la région $\mathfrak{R}'$;

3° Qu'à deux points *distincts* de la région $\mathfrak{R}'$ correspondent toujours, en vertu des formules (2), deux points *distincts* de l'espace $[[x, y, z]]$.

Cela étant, il est facile d'apercevoir qu'en désignant par $\mathfrak{R}$ la région de l'espace $[[x, y, z]]$ formée par l'ensemble des points qui, en vertu de (2), correspondent aux divers points de $\mathfrak{R}'$, les formules (2) et les régions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ remplissent les diverses conditions énoncées au numéro précédent **13** (1).

(1) Voici comment on établit la nature quasi normale de la région $\mathfrak{R}$.

En premier lieu, cette région est continue.

Soient, en effet, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) deux points arbitrairement choisis dans $\mathfrak{R}$, et (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2) les deux points correspondants de $\mathfrak{R}'$. La région $\mathfrak{R}'$, que l'on suppose quasi normale, étant par là même continue, les deux points (x'_1, y'_1, z'_1), (x'_2, y'_2, z'_2) peuvent être reliés l'un à l'autre par un arc

15. Nous nous bornerons, pour être bref, à un exemple unique.

On a vu plus haut (n° **7**, IV) que si, en posant

$$(3) \qquad v = x + iy, \qquad w = x - iy,$$

on assujettit les variables v, w à être imaginaires conjuguées, toute région normale (n° **2**) de l'espace réel $[[x, y]]$ fournit dans l'espace imaginaire $[[v, w]]$, par l'intermédiaire des formules (3), une région quasi normale, $\mathfrak{R}_{v,w}$. Cela étant, il résulte des considérations exposées aux n^{os} **13** et **14** que *toute fonction des variables réelles x, y olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ devient, par la transformation* (3), *une fonction des variables imaginaires conjuguées v, w quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{v,w}$*; et que, *réciproquement, toute fonction des variables imaginaires conjuguées v, w quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{v,w}$ devient, par*

---

continu ayant pour extrémités ces deux points, entièrement situé dans $\mathfrak{R}'$, et dépendant d'une indéterminée réelle, t, qui se trouve assujettie à varier dans un certain intervalle (*voir* le n° **1** du présent travail) : dans ces limites, les seconds membres f_1, f_2, f_3 des formules (2) deviennent des fonctions continues de t, et le point x, y, z défini par (2) décrit, dans $\mathfrak{R}$, un arc continu ayant pour extrémités les deux points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). La région $\mathfrak{R}$ est donc continue.

En second lieu, par tout point de $\mathfrak{R}$ passe quelque arc olotrope, adéquat et régulier, entièrement situé dans $\mathfrak{R}$.

Soient, en effet, (x_1, y_1, z_1) un point arbitrairement choisi dans $\mathfrak{R}$, et (x'_1, y'_1, z'_1) le point correspondant de $\mathfrak{R}'$. La région $\mathfrak{R}'$ étant supposée quasi normale, par le point (x'_1, y'_1, z'_1) passe un arc olotrope, adéquat et régulier, $\mathfrak{A}'$, entièrement situé dans $\mathfrak{R}'$, et dépendant de trois indéterminées réelles, r, s, t, qui se trouvent assujetties à varier dans un certain quasi-intervalle (complexe); dans toute l'étendue de ce quasi-intervalle, le déterminant différentiel de x', y', z' par rapport à r, s, t reste différent de zéro. Cela étant, et dans les mêmes limites, les seconds membres f_1, f_2, f_3 des formules (2) deviennent des fonctions composées olotropes de r, s, t, et le déterminant différentiel de ces fonctions composées par rapport à r, s, t reste différent de zéro : car il est le produit des deux déterminants différentiels

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x', y', z')}, \quad \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(r, s, t)},$$

qui restent l'un et l'autre différents de zéro. Lors donc que le point (x', y', z') décrit dans $\mathfrak{R}'$ l'arc $\mathfrak{A}'$, le point (x, y, z) défini par (2) décrit, dans $\mathfrak{R}$, un certain arc, $\mathfrak{A}$, jouissant de la triple propriété d'être olotrope, adéquat et régulier.

la transformation inverse, une fonction des variables réelles x, y olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$: car les formules (3) établissent manifestement entre les deux régions ce que nous avons appelé une correspondance quasi olotrope point par point.

Rappelons, en outre, en vue de ce qui va suivre, que, les formules (3) une fois posées, la région $\mathfrak{R}_{v,w}$ peut, sans qu'il y ait à craindre d'ambiguïté, se désigner tout aussi bien par la notation $\mathfrak{R}_{x,y}$.

Sur les fonctions réelles de variables imaginaires conjuguées.

16. Soit $f(v, w)$ une fonction des variables imaginaires conjuguées

$$v = x + iy, \qquad w = x - iy, \tag{1}$$

quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ (*voir* la remarque finale du numéro précédent) : une pareille fonction peut être, soit réelle, soit imaginaire, et il importe, comme on le verra plus loin, d'être en possession d'un caractère à l'aide duquel on puisse faire commodément la distinction entre les deux cas. Tel est l'objet des deux propositions, inverses l'une de l'autre, que nous allons établir.

Proposition directe. — *La fonction $f(v, w)$ des variables imaginaires conjuguées v, w, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, y étant supposée réelle :*

1° *Quel que soit l'entier $p(\geq 0)$, la dérivée $\dfrac{\partial^{2p} f}{\partial v^p\, \partial w^p}$ l'est également.*

2° *Quels que soient les entiers inégaux p, q (≥ 0), les deux dérivées*

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial v^p\, \partial w^q}, \quad \frac{\partial^{q+p} f}{\partial v^q\, \partial w^p}$$

sont imaginaires conjuguées.

I. *Si deux fonctions,*

$$f(v, w), \quad g(v, w),$$

quasi olotropes dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, y sont imaginaires conjuguées, les dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial g}{\partial w},$$

intéressant deux variables différentes en même temps que deux fonctions différentes, *jouissent de cette même propriété*.

Considérons en effet les deux fonctions

$$F(x, y) = f(x+iy, x-iy),$$
$$G(x, y) = g(x+iy, x-iy) ;$$

en vertu de notre hypothèse, elles sont de la forme

$$A(x, y) + iB(x, y),$$
$$A(x, y) - iB(x, y),$$

où $A(x, y)$, $B(x, y)$ désignent des fonctions réelles, olotropes dans $\mathfrak{R}_{x,y}$. Les formules (1) pouvant s'écrire

$$x = \frac{v+w}{2}, \qquad y = \frac{v-w}{2i},$$

on a, par la règle de différentiation des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + i\frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial A}{\partial y} + i\frac{\partial B}{\partial y}\right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right);$$

et, semblablement,

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} - i\frac{\partial B}{\partial x}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial A}{\partial y} - i\frac{\partial B}{\partial y}\right),$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \frac{\partial g}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right).$$

Les fonctions $A(x, y)$, $B(x, y)$ étant réelles, le point que nous avons en vue résulte du simple rapprochement des formules (2) et (3).

En particulier, *si la fonction $f(v, w)$, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, y est supposée réelle, ses dérivées premières, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$, y sont imaginaires conjuguées.*

II. *Si la fonction $f(v, w)$, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, y est supposée réelle, les dérivées $\frac{\partial^r f}{\partial v^r}$, $\frac{\partial^r f}{\partial w^r}$ y sont imaginaires conjuguées.*

De la remarque finale de l'alinéa I il résulte tout d'abord que $\frac{\partial f}{\partial v}$ et $\frac{\partial f}{\partial w}$ sont imaginaires conjuguées. Cela étant, l'application répétée de la propriété formulée au début de I nous montre tour à tour :

que $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)$, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$, sont elles-mêmes conjuguées;

que $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\right)$, c'est-à-dire $\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial w^3}$, jouissent aussi de cette propriété;

et ainsi de suite indéfiniment.

III. *Si la fonction $f(v, w)$, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, y est supposée réelle, sa dérivée $\frac{\partial^{2r} f}{\partial v^r \partial w^r}$ jouit de la même propriété* (c'est la première partie de notre énoncé général).

L'application de la règle des fonctions composées donne tour à tour

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)}{\partial y},$$

d'où, finalement,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2i}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2i}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right);$$

la dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}$ est donc réelle.

L'application répétée de ce premier résultat montre ensuite tour à tour que $\frac{\partial^4 f}{\partial v^2\,\partial w^2}$, $\frac{\partial^6 f}{\partial v^3\,\partial w^3}$, $\cdots$ sont des fonctions réelles.

IV. *Si la fonction $f(v, w)$, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, y est supposée réelle, et si les entiers p, q sont inégaux, les dérivées*

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial v^p\, \partial w^q}, \quad \frac{\partial^{q+p} f}{\partial v^q\, \partial w^p}$$

sont imaginaires conjuguées (c'est la deuxième partie de notre énoncé général).

Supposons, pour fixer les idées, que p soit le plus grand des deux entiers p, q; les dérivées considérées peuvent alors s'écrire

$$(4) \qquad \frac{\partial^{p-q}}{\partial v^{p-q}}\left(\frac{\partial^{2q} f}{\partial v^q\, \partial w^q}\right), \quad \frac{\partial^{p-q}}{\partial w^{p-q}}\left(\frac{\partial^{2q} f}{\partial v^q\, \partial w^q}\right);$$

or, il résulte de l'alinéa III que $\frac{\partial^{2q} f}{\partial v^q\, \partial w^q}$ est réelle, puis de l'alinéa II que les dérivées (4) sont imaginaires conjuguées.

17. Proposition inverse. — *La fonction $f(v, w)$ des variables imaginaires conjuguées v, w, quasi olotrope dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, ne peut manquer d'y être réelle, si, en quelque point de cette région, la double condition suivante se trouve satisfaite :*

1° *Quel que soit l'entier $p(\geqq 0)$, la dérivée $\frac{\partial^{2p}}{\partial v^p\, \partial w^p}$ prend en ce point une valeur numérique réelle;*

2° *Quels que soient les entiers inégaux p, q $(\geqq 0)$, les dérivées*

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial v^p\, \partial w^q}, \quad \frac{\partial^{q+p} f}{\partial v^q\, \partial w^p}$$

prennent au point considéré des valeurs numériques imaginaires conjuguées.

Tout d'abord, le développement taylorien de la fonction, construit à partir du point dont il s'agit, ne peut manquer, dans les limites de sa convergence, d'avoir une valeur constamment réelle. Effectivement, si l'on désigne par x_0, y_0, v_0, w_0 les valeurs numériques initiales de x, y, v, w, les termes de ce développement peuvent, de la manière que nous allons indiquer, se partager en deux groupes. Le premier groupe comprendra les termes où $v - v_0$ et $w - w_0$ sont respectivement affectés d'exposants égaux; dans chacun de ces termes, le coefficient est réel en vertu de notre hypothèse, et le produit de ce coefficient par

$$[x - x_0 + i(y - y_0)]^p [x - x_0 - i(y - y_0)]^p$$

ou

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^p$$

sera lui-même réel. Le second groupe comprendra les couples de termes de la forme

$$A(v - v_0)^p (w - w_0)^q + B(v - v_0)^q (w - w_0)^p$$

où les entiers p, q sont inégaux; dans un pareil couple, les coefficients A et B ont, en vertu de notre hypothèse, des valeurs imaginaires conjuguées, $C + iD$, $C - iD$; il en résulte évidemment que la somme des deux termes,

$$\begin{gathered}(C + iD)[x - x_0 + i(y - y_0)]^p [x - x_0 - i(y - y_0)]^q \\ + (C - iD)[x - x_0 + i(y - y_0)]^q [x - x_0 - i(y - y_0)]^p,\end{gathered}$$

a une valeur réelle.

La propriété à démontrer se trouve ainsi établie dans les limites de convergence du développement initial. Cela étant, on verra, par des raisonnements tout à fait analogues à ceux du n° 57 de l'Ouvrage cité, qu'elle a nécessairement lieu pour tous les développements subséquents auxquels le cheminement peut conduire.

18. Les deux propositions qui précèdent (n^{os} **16** et **17**) entraînent celle que nous allons formuler.

Considérons une fonction $f(v, w)$ des variables imaginaires conjuguées v, w, quasi olotrope dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, et supposons qu'on la développe à partir d'un point particulier de la région,

$$v_0 = x_0 + iy_0, \qquad w_0 = x_0 - iy_0;$$

dans ce développement nous grouperons les termes comme il suit : un premier groupe comprendra l'ensemble des termes qui ne contiennent pas en facteur le produit $(v - v_0)(w - w_0)$; un deuxième, l'ensemble des termes qui contiennent le facteur $(v - v_0)(w - w_0)$ sans contenir le facteur $(v - v_0)^2 (w - w_0)^2$; un troisième, l'ensemble des termes qui contiennent le facteur $(v - v_0)^2 (w - w_0)^2$ sans contenir le facteur $(v-v_0)^3(w-w_0)^3$; et ainsi de suite indéfiniment. Si, dans chacun de ces groupes, on fait abstraction de la puissance de $(v-v_0)(w-w_0)$ que ses divers termes contiennent en facteur commun, on obtient une série entière en $v-v_0$, $w-w_0$ présentant la forme très particulière

$$E+(v-v_0)\,K(v-v_0)+(w-w_0)\,L(w-w_0),$$

où E désigne une constante, $K(v-v_0)$ une série entière en $(v-v_0)$, et $L(w-w_0)$ une série entière en $w-w_0$. Nous aurons donc, après l'ordination ci-dessus spécifiée de notre développement, l'expression

$$\begin{array}{llll}
 & & E_0 & +(v-v_0)K_0\;(v-v_0)+(w-w_0)L_0\;(w-w_0) \\
+(v-v_0) & (w-w_0) & [E_1 & +(v-v_0)K_1\;(v-v_0)+(w-w_0)L_1\;(w-w_0)] \\
+(v-v_0)^2 & (w-w_0)^2 & [E_2 & +(v-v_0)K_2\;(v-v_0)+(w-w_0)L_2\;(w-w_0)] \\
+\ldots\ldots & & & \\
+(v-v_0)^{n-1} & (w-w_0)^{n-1} & [E_{n-1} & +(v-v_0)K_{n-1}(v-v_0)+(w-w_0)L_{n-1}(w-w_0)] \\
+(v-v_0)^n & (w-w_0)^n & [E_n & +(v-v_0)K_n\;(v-v_0)+(w-w_0)L_n\;(w-w_0)] \\
+\ldots\ldots & & & ,
\end{array}$$

où les E désignent des constantes, les K des séries entières en $v-v_0$, et les L des séries entières en $w-w_0$.

Cela étant, *pour que la fonction considérée des variables imaginaires conjuguées v, w soit réelle dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, il faut et il suffit :*

1° *que les constantes* E *soient réelles ;*

2° *que, dans les deux séries*

$$K_m(v-v_0), \qquad L_m(w-w_0) \qquad (m=0,1,2,\ldots),$$

respectivement entières en $v-v_0$, $w-w_0$, les coefficients des termes de même degré soient imaginaires conjugués.

On aperçoit tout d'abord, en effet, que, aux facteurs positifs connus près, E_m est la valeur initiale de $\dfrac{\partial^{2m}f}{\partial v^m\,\partial w^m}$, et que, dans les séries $K_m(v-v_0)$, $L_m(w-w_0)$, les coefficients des termes en $(v-v_0)^g$, $(w-w_0)^g$ sont les valeurs initiales des dérivées respectives

$$\frac{\partial^{2m+g+1}f}{\partial v^{m+g+1}\,\partial w^m},\quad \frac{\partial^{2m+g+1}f}{\partial v^m\,\partial w^{m+g+1}};$$

d'ailleurs, pour ces deux derniers termes, les facteurs positifs dont il s'agit sont égaux entre eux.

Ces remarques faites, la nécessité des conditions posées résulte du n° **16**, et leur suffisance du n° **17**.

CHAPITRE II.

DE LA NATURE MONODROMIQUE D'UNE CERTAINE RÉGION.

Définition et propriété capitale des régions dites monodromiques.

19. Pour les premières définitions et propriétés relatives au Calcul des fonctions par cheminement, nous renvoyons le lecteur au début du Chapitre IV de l'Ouvrage cité (¹), en y adjoignant la remarque suivante sur les fonctions quasi olotropes, définies au Chapitre I du présent Mémoire :

De même que toute pseudo-fonction monodrome dans une région normale y peut être assimilée à une véritable fonction olotrope, de même *toute pseudo-fonction monodrome dans une région quasi normale y peut être assimilée à une véritable fonction quasi olotrope.*

Rappelons maintenant la définition des régions dites *monodromiques.*

Nous qualifions de *monodromique* toute région qui, étant *continue*, satisfait en outre à la condition que nous allons formuler :

« Une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β, non supérieure à α, et telle, que tout lacet ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que α. »

(¹) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n°s 69, 70 et 71.

Le cas d'une région *convexe* est l'un des plus simples que l'on puisse citer comme exemple de région monodromique ([1]).

Rappelons enfin la propriété capitale des régions ainsi définies, propriété d'où leur vient la qualification de *monodromiques :*

Les variables indépendantes $x, y, \ldots$ étant en nombre n, considérons, d'une part, une région monodromique donnée, $\mathfrak{R}$, extraite de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, d'autre part, n constantes positives (>0) données, $R_x, R_y, \ldots$: si l'on désigne par r une quantité positive au plus égale à la plus petite de ces dernières, on peut, en vertu de la définition même des régions monodromiques, assigner au-dessous de $\frac{r}{2}$ une constante positive, ρ, telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{R}$ avec des écarts maxima moindres que ρ puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{R}$ avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$.

Cela étant, *toute pseudo-fonction calculable par cheminement dans la région monodromique $\mathfrak{R}$ avec les rayons $R_x, R_y, \ldots$ y est certainement monodrome avec des rayons tous égaux à ρ.*

En d'autres termes, si, parmi les chemins brisés (tous praticables pour la pseudo-fonction) qui partent du point fondamental, et qui, avec des écarts maxima moindres que $R_x, R_y, \ldots$, ont tous leurs sommets dans la région $\mathfrak{R}$, on s'astreint à ne considérer que ceux dont les n écarts maxima sont moindres que ρ, le développement auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver.

La démonstration de cette propriété se trouve exposée en détail dans l'Ouvrage cité ([2]).

20. Une région monodromique étant donnée, on en peut souvent, comme nous allons le voir, déduire, par des transformations convenablement choisies, d'autres régions monodromiques.

Dans l'espace à n dimensions (réelles ou imaginaires) $[[x, y, \ldots]]$, désignons par $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ une région qui soit à la fois *limitée* et *complète;*

([1]) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 73.

([2]) *Ibid.*, n° 72.

puis, considérant les n formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi = G(x, y, \ldots), \\ \eta = H(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

supposons : 1° que leurs seconds membres soient *continus* dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$; 2° qu'à deux points *distincts*, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, de la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ correspondent toujours, en vertu des formules (1), deux points *distincts*, $(\xi_1, \eta_1, \ldots)$, $(\xi_2, \eta_2, \ldots)$, de l'espace $[[\xi, \eta, \ldots]]$, et qu'ainsi se trouve définie, dans ce dernier espace, une région, $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$, correspondant *point par point à* $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$.

Cela étant, *à tout fragment monodromique*, $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$, *de la région* $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ *correspond un fragment monodromique*, $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$, *de la région* $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$.

I. Tout d'abord, *la région* $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$ *étant limitée et complète*, *la région* $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$ *ne peut manquer de l'être aussi* [1]. Il résulte d'ailleurs, comme on le voit aisément, du principe général de la composition des fonctions continues [2] que *la continuité du fragment* $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$ *entraîne celle du fragment* $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$.

II. En vertu de la correspondance point par point qui existe entre les deux régions $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$, les n formules (1) définissent manifestement, dans la région $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$, n fonctions *implicites*, x, y, ..., des variables ξ, η, ... : or, on peut établir, en faisant intervenir la nature limitée et complète de ces régions, que *les n fonctions implicites ainsi définies sont continues.*

La démonstration de ce point se trouve exposée en détail dans un Mémoire antérieur [3].

III. Revenons à notre énoncé général et à la nature monodromique du fragment $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$: ce fragment, comme nous l'avons fait observer,

---

(1) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 18.

(2) *Ibid.*, n° 18, III.

(3) *Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables*, n° 22 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1906).

étant continu, il reste à prouver que, une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β, non supérieure à α, et telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que α.

Effectivement, les fonctions ξ, η, ..., explicitement définies par les formules (1), étant continues dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, on peut [1] assigner une constante positive a, telle que les relations simultanées

$$(2)\qquad \operatorname{mod}(x_1 - x_2) < a, \qquad \operatorname{mod}(y_1 - y_2) < a, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points,

$$(3)\qquad (x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots),$$

de la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de la région $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$, les relations

$$(4)\qquad \operatorname{mod}(\xi_1 - \xi_2) < \alpha, \qquad \operatorname{mod}(\eta_1 - \eta_2) < \alpha, \qquad \ldots;$$

telle, par suite, que les relations simultanées (2), supposées vérifiées pour deux points, (3), du fragment $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants du fragment $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\ldots}$, les relations (4).

On peut ensuite, puisque le fragment $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$ est monodromique, assigner au-dessous de a quelque constante positive b telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que b puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{F}_{x,y,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que a.

On peut enfin, puisque les fonctions x, y, ..., implicitement définies par les formules (1), sont continues dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{\xi,\eta,\ldots}$, assigner au-dessous de α une quantité positive β telle que les relations simultanées

$$(5)\qquad \operatorname{mod}(\xi_1 - \xi_2) < \beta, \qquad \operatorname{mod}(\eta_1 - \eta_2) < \beta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points,

$$(6)\qquad (\xi_1, \eta_1, \ldots), \quad (\xi_2, \eta_2, \ldots),$$

---

[1] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 17, 4°.

de la région $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, les relations

$$(7) \qquad \operatorname{mod}(x_1 - x_2) < b, \qquad \operatorname{mod}(y_1 - y_2) < b, \qquad \dots;$$

telle, par suite, que les relations simultanées (5), supposées vérifiées pour deux points, (6), du fragment $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants du fragment $\mathfrak{F}_{x,y,\dots}$, les relations (7).

Cela étant, à un lacet, $L_{\xi,\eta,\dots}$, construit dans le fragment $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que β, correspondra un lacet, $L_{x,y,\dots}$, construit dans le fragment $\mathfrak{F}_{x,y,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que b. Ce lacet $L_{x,y,\dots}$ peut d'ailleurs être considéré comme le lacet final de quelque réseau, $R_{x,y,\dots}$, construit dans le fragment $\mathfrak{F}_{x,y,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que a. Finalement, au réseau $R_{x,y,\dots}$ correspondra, dans le fragment $\mathfrak{F}_{\xi,\eta,\dots}$, un réseau, $R_{\xi,\eta,\dots}$, construit avec des écarts maxima moindres que α et ayant pour lacet final $L_{\xi,\eta,\dots}$.

21. L'exemple le plus simple que l'on puisse donner d'une région monodromique ainsi obtenue par transformation est celui où les seconds membres des n formules (1) sont des fonctions linéaires de $x, y, \dots$, ces formules étant, comme de raison, supposées résolubles par rapport à $x, y, \dots$ conformément à l'algorithme de Cramer.

En voici un deuxième exemple, qui jouera, dans la suite du présent travail, un rôle essentiel.

Désignons par r et θ deux variables réelles ayant pour champs respectifs de variation, la première la région $r \geqq 0$, la seconde toute l'étendue de l'espace réel $[[\theta]]$, et soit $f(\theta)$ une fonction possédant, dans toute l'étendue de cet espace, la double propriété d'être réelle et positive sans jamais s'annuler, et d'être olotrope et périodique à la période 2π. Puis, considérons les formules

$$(8) \qquad \xi = r f(\theta) \cos\theta, \qquad \eta = r f(\theta) \sin\theta:$$

par rapport à deux axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, tracés dans un plan, les formules (8) définissent un contour variable avec r.

Si r est nul, le contour se réduit manifestement à un point unique, l'origine O.

Pour les valeurs de r différentes de zéro, on constate immédiatement les propriétés suivantes :

1° Le contour (8), qui ne passe pas par l'origine O, est analytique et régulier, et ses divers points s'obtiennent, chacun une seule fois, en faisant croître θ de zéro à 2π $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ (¹).

(¹) Des formules (8) on déduit en effet, par une différentiation première relative à θ,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = r[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta],$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = r[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta];$$

r étant supposé > 0, la nullité simultanée de $\frac{\partial \xi}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}$ entraînerait celle des deux quantités placées entre crochets dans les seconds membres, et, par suite, puisque $f(\theta)$ ne peut s'annuler,

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0,$$

ce qui est absurde. Le contour analytique considéré est donc régulier. Il ne passe d'ailleurs pas par l'origine : car la nullité simultanée de ξ et η entraînerait, à cause de $rf(\theta) > 0$, celle de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, ce qui est absurde.

Enfin, si l'on désigne par θ_1, θ_2 deux valeurs de la variable θ, les relations simultanées

$$rf(\theta_1)\cos\theta_1 = rf(\theta_2)\cos\theta_2, \qquad rf(\theta_1)\sin\theta_1 = rf(\theta_2)\sin\theta_2,$$

c'est-à-dire (à cause de $r > 0$)

$$f(\theta_1)\cos\theta_1 = f(\theta_2)\cos\theta_2, \qquad f(\theta_1)\sin\theta_1 = f(\theta_2)\sin\theta_2,$$

entraînent d'abord, par l'élévation au carré, l'addition membre à membre, et l'extraction des racines carrées positives, $f(\theta_1) = f(\theta_2)$, par suite, puisque $f(\theta)$ ne peut s'annuler,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \qquad \sin\theta_1 = \sin\theta_2,$$

par suite enfin

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{mult. entier de } 2\pi :$$

les divers points du contour s'obtiennent donc bien comme il a été dit.

2° Toute demi-droite partant de l'origine rencontre le contour (8) en un point et en un seul ([1]).

3° Enfin, deux quelconques des contours obtenus, manifestement homothétiques par rapport à l'origine, n'ont aucun point commun ([2]).

En désignant par $\mathcal{C}_r$ le contour qui correspond à la valeur r de la première de nos deux variables, et par R une valeur numérique positive (>0), nous nommerons *intérieur* du contour $\mathcal{C}_R$ la région du plan qu'engendre le contour $\mathcal{C}_r$ lorsqu'on fait varier r dans les limites assignées par la double relation $0 \leqq r < R$ (laquelle, sans exclure la valeur initiale zéro, exclut la valeur finale R).

Cela étant, on peut déduire de la proposition générale du numéro

---

([1]) Si l'on considère en effet la droite ayant pour paramètres directeurs les quantités (non nulles à la fois) α, β, ses points d'intersection avec le contour (8) s'obtiendront en exprimant que les quantités $\xi = rf(\theta)\cos\theta$, $\eta = rf(\theta)\sin\theta$ sont proportionnelles à α, β, c'est-à-dire, à cause de $rf(\theta) > 0$, que l'on a

$$\frac{\cos\theta}{\alpha} = \frac{\sin\theta}{\beta} = \frac{1}{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

la droite dont il s'agit coupe donc le contour en deux points situés de part et d'autre de l'origine.

([2]) Effectivement, les relations numériques simultanées

$$r_1 f(\theta_1)\cos\theta_1 = r_2 f(\theta_2)\cos\theta_2,$$
$$r_1 f(\theta_1)\sin\theta_1 = r_2 f(\theta_2)\sin\theta_2$$

entraînent d'abord, par l'élévation au carré, l'addition membre à membre, et l'extraction des racines carrées positives, $r_1 f(\theta_1) = r_2 f(\theta_2)$; les relations précédentes deviennent alors, puisque, en vertu de nos hypothèses, ni r, ni $f(\theta)$ ne peuvent s'annuler,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \qquad \sin\theta_1 = \sin\theta_2,$$

d'où

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{mult. entier de } 2\pi,$$

et par suite, à cause de la périodicité de $f(\theta)$,

$$r_1 = r_2:$$

les deux contours r_1, r_2 sont donc nécessairement confondus.

précédent que *l'intérieur du contour $\mathcal{C}_R$ constitue, dans l'espace $[[\xi, \eta]]$, une région monodromique* (¹).

(¹) Voici l'exposé détaillé des raisonnements :

I. Désignons par $\mathfrak{R}_{\xi,\eta}$ la région formée par l'intérieur du contour $\mathcal{C}_R$ auquel on adjoint ce contour lui-même, ou, en d'autres termes, la région définie par les formules (8) et par la double relation

$$(9) \qquad 0 \leq r \leq R$$

(laquelle n'exclut, ni la valeur initiale zéro, ni la valeur finale R).

Considérons, d'autre part, dans l'espace (réel) $[[x, y]]$, la région *limitée et complète*, $\mathfrak{R}_{x,y}$, que définit la double relation

$$(10) \qquad 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2;$$

cette région peut tout aussi bien se définir à l'aide des formules

$$(11) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

auxquelles on adjoint la double relation (9). Or, comme on va le voir, les régions $\mathfrak{R}_{\xi,\eta}$ et $\mathfrak{R}_{x,y}$ se correspondent point par point.

Tout d'abord, au point $x = y = 0$ correspond le point $\xi = \eta = 0$, et réciproquement. Car, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne s'annulant jamais à la fois, l'hypothèse $x = y = 0$ entraîne, en vertu de (11), $r = 0$, d'où l'on déduit, en vertu de (8), $\xi = \eta = 0$. Réciproquement, les produits $f(\theta)\cos\theta$ et $f(\theta)\sin\theta$ ne s'annulant jamais à la fois [puisque $f(\theta)$ ne peut s'annuler], l'hypothèse $\xi = \eta = 0$ entraîne, en vertu de (8), $r = 0$, d'où l'on déduit, en vertu de (11), $x = y = 0$.

La valeur zéro de r étant écartée, il résulte de l'ensemble des hypothèses formulées plus haut que, dans les limites assignées par la double relation

$$0 < r \leq R,$$

les seconds membres de (8) et ceux de (11) satisfont aux conditions suivantes :

Ceux de (8) admettent la période 2π, et les relations

$$r_1 f(\theta_1)\cos\theta_1 = r_2 f(\theta_2)\cos\theta_2, \qquad r_1 f(\theta_1)\sin\theta_1 = r_2 f(\theta_2)\sin\theta_2$$

ne peuvent être simultanément vérifiées que si l'on a à la fois

$$(12) \qquad r_1 = r_2, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{mult. entier de } 2\pi.$$

Semblablement, les seconds membres de (11) admettent la période 2π, et les relations

$$r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2, \qquad r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2$$

ne peuvent être simultanément vérifiées que sous les mêmes conditions (12).

Il existe donc manifestement, entre les deux régions $\mathfrak{R}_{\xi,\eta}$ et $\mathfrak{R}_{x,y}$, une corres-

22. Si, dans les formules (8), on remplace les notations ξ, η par les notations x, y, elles deviennent

$$x = rf(\theta)\cos\theta, \qquad y = rf(\theta)\sin\theta, \tag{16}$$

et l'on a l'énoncé suivant :

---

pondance *point par point*, et les points correspondants s'obtiennent en donnant à r et θ, d'abord dans les formules (8), puis dans les formules (11), des valeurs numériques qui, s'il s'agit de r, sont nécessairement égales, et, s'il s'agit de θ, peuvent toujours être supposées égales. En vertu de cette correspondance point par point, on peut poser

$$\xi = G(x, y), \qquad \eta = H(x, y), \tag{13}$$

les seconds membres $G(x, y)$, $H(x, y)$ étant des fonctions *bien définies* de x, y dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x,y}$: nous allons établir maintenant que *ces deux fonctions y sont continues*.

Effectivement, soient (x_0, y_0) un point quelconque de $\mathfrak{R}_{x,y}$, et (r_0, θ_0) un système de valeurs de r, θ tel que l'on ait

$$x_0 = r_0\cos\theta_0, \qquad y_0 = r_0\sin\theta_0.$$

Si x_0 et y_0 ne sont pas nuls à la fois, r_0 n'est pas nul, et les formules (11) peuvent être résolues par rapport à r et θ conformément au principe général des fonctions implicites (*Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **120**) : les valeurs de r et θ ainsi obtenues sont donc, dans un voisinage suffisamment rapproché de (x_0, y_0), des fonctions continues de x, y. D'autre part, les seconds membres de (8) sont des fonctions continues de r, θ dans le voisinage de (r_0, θ_0). De là résulte, en vertu du principe général de la composition des fonctions continues, que les fonctions ξ, η des variables x, y satisfont, relativement au point (x_0, y_0) de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, à la condition requise par la définition de la continuité.

Supposons maintenant que x_0 et y_0 soient nuls à la fois. La fonction périodique $f(\theta)$ étant olotrope, par suite continue, dans toute l'étendue de l'espace réel $|[\theta]|$, on peut assigner quelque constante positive, M, telle que l'on ait

$$f(\theta) < M \tag{14}$$

dans la région limitée et complète $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, et par suite dans toute l'étendue de l'espace réel $|[\theta]|$. Cela étant, et une constante positive α étant donnée, on aura, pour x, y numériquement assez petits, $x^2 + y^2 < \frac{\alpha^2}{M^2}$, d'où, en vertu des

L'intérieur, $\mathfrak{J}_R$, du contour $\mathfrak{C}_R$ constitue, dans l'espace $[[x, y]]$, une région monodromique.

Il convient d'observer en outre que *tout point de la région $\mathfrak{J}_R$ est le centre de quelque cercle entièrement situé dans $\mathfrak{J}_R$* (1).

---

formules (11),

$$(15) \qquad r^2 < \frac{\alpha^2}{M^2};$$

les formules (8) donnent d'ailleurs $\xi^2+\eta^2 = r^2 f^2(\theta)$, d'où, par combinaison avec (14) et (15), $\xi^2+\eta^2 < \alpha^2$, et, à plus forte raison, $\operatorname{mod}\xi < \alpha$, $\operatorname{mod}\eta < \alpha$. Il résulte de là que les fonctions ξ, η des variables x, y satisfont encore, relativement au point (o, o) de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, à la condition requise par la définition de la continuité.

Ainsi, $G(x, y)$, $H(x, y)$ sont, dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, des fonctions continues de x, y.

II. Si l'on observe, d'une part, que la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ ou (10) est limitée et complète, que les fonctions $G(x, y)$ et $H(x, y)$, seconds membres des formules (13), y sont continues, et que ces formules établissent, entre $\mathfrak{R}_{x,y}$ et $\mathfrak{R}_{\xi,\eta}$, une correspondance point par point, si l'on se reporte, d'autre part, à notre proposition générale du nº **20**, on voit qu'à tout fragment monodromique de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ correspond un fragment monodromique de la région $\mathfrak{R}_{\xi,\eta}$. Or, l'intérieur du cercle $x^2+y^2=R^2$, étant une région convexe, est nécessairement une région monodromique : l'intérieur du contour $\mathfrak{C}_R$ est donc, lui aussi, une région monodromique.

(1) Désignons en effet par $\mathfrak{B}_R$ la région définie, dans l'espace réel $[[r, \theta]]$, par la double relation

$$o \leq r < R \qquad (\theta \text{ arbitraire}),$$

et soit (x_1, y_1) un point de la région $\mathfrak{J}_R$, nécessairement fourni par quelque point, (r_1, θ_1), de la région $\mathfrak{B}_R$: le système (16) admet alors la solution numérique $(x_1, y_1, r_1, \theta_1)$.

Si r_1 est différent de zéro, il résulte de nos hypothèses que le déterminant différentiel des seconds membres de (16) [relatif à r et θ] est différent de zéro pour $r, \theta = r_1, \theta_1$. A partir de la solution numérique envisagée, le système (16) est donc résoluble par rapport à r et θ conformément au principe général des fonctions implicites, et, dans le voisinage des valeurs x_1, y_1, r_1, θ_1, il équivaut entièrement au système des formules de résolution : or, x et y étant arbitraires dans ce dernier système, et le point (r_1, θ_1) étant, à cause de $o < r_1 < R$, le centre de quelque domaine intérieur à $\mathfrak{B}_R$, on voit que la région $\mathfrak{J}_R$ comprendra tous les points (x, y) suffisamment rapprochés de (x_1, y_1).

Supposons maintenant $r_1 = o$, auquel cas x_1 et y_1 sont également nuls : il s'agit d'établir que, dans le plan des deux axes rectangulaires OX, OY, tous les

Observations relatives à l'intégration de certaines fonctions d'une variable imaginaire.

23. Considérant les formules (16) du numéro précédent **22**, attribuons aux notations

$$x, \quad y, \quad r, \quad \vartheta, \quad f(\vartheta), \quad R, \quad \mathfrak{S}_R, \quad \mathfrak{Z}_R$$

les significations respectives que nous avons indiquées; puis, posant $x + iy = v$, désignons par $F(v)$ une fonction de la variable imaginaire v olotrope dans la région normale et monodromique $\mathfrak{Z}_R$,

---

points suffisamment voisins de l'origine sont donnés par les formules (16) pour des systèmes de valeurs de r, ϑ n'excédant pas $\mathfrak{D}_R$. Or, en désignant par ρ la distance du point (x, y) à l'origine, on peut poser

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

et l'on se trouve alors ramené à faire voir que, ρ et ω étant donnés d'une façon arbitraire sous la seule condition que ρ soit suffisamment petit, il existe quelque système de valeurs de r et ϑ vérifiant les relations

$$(17) \qquad r f(\vartheta) \cos\vartheta = \rho \cos\omega, \qquad r f(\vartheta) \sin\vartheta = \rho \sin\omega$$

et en même temps l'inégalité $r < R$. A cet effet, nous désignerons par m le minimum de la fonction positive et périodique $f(\vartheta)$, et nous assujettirons la distance donnée ρ à être inférieure à Rm. Si ρ est nul, les relations (17) seront évidemment vérifiées par l'association de la valeur $r = 0$ avec une valeur arbitraire de ϑ. Si ρ n'est pas nul $(0 < \rho < Rm)$, la relation $r^2 f^2(\vartheta) = \rho^2$, déduite de (17), donne, par l'extraction des racines carrées positives de ses deux membres, $r f(\vartheta) = \rho$, et les relations (17) deviennent alors

$$\rho \cos\vartheta = \rho \cos\omega, \qquad \rho \sin\vartheta = \rho \sin\omega,$$

c'est-à-dire, après suppression du facteur ρ, différent de zéro,

$$\cos\vartheta = \cos\omega, \qquad \sin\vartheta = \sin\omega,$$

d'où

$$\vartheta = \omega + \text{mult. entier de } 2\pi;$$

la valeur cherchée de r est donc fournie par la formule $r = \dfrac{\rho}{f(\omega)}$, dont le second membre, quelle que soit la valeur donnée ω, est nécessairement moindre que R.

et par $v_0 = x_0 + iy_0$ un point fixe choisi à volonté dans cette région : je dis qu'en choisissant v_0 comme point fondamental, *toute détermination de l'intégrale indéfinie $\int F(v)\,dv$ est olotrope dans $\mathfrak{J}_R$.*

Effectivement, si l'on désigne par ε une constante positive de petitesse arbitraire, et que l'on considère, dans le plan de notation graphique de la variable v, la région limitée et complète obtenue en adjoignant à la région $\mathfrak{J}_{R-\varepsilon}$ le contour $\mathfrak{C}_{R-\varepsilon}$ qui en constitue la frontière, la fonction $F(v)$ admettra, en un point arbitrairement variable de la région limitée et complète dont il s'agit, un olomètre au moins égal à une constante positive δ convenablement choisie, et, à partir du point fondamental v_0, toute détermination de l'intégrale indéfinie $\int F(v)\,dv$ y sera calculable par cheminement avec le rayon δ. Il en sera ainsi, notamment, dans la région partielle $\mathfrak{J}_{R-\varepsilon}$, et, comme celle-ci est à la fois normale et monodromique, la détermination considérée de l'intégrale y sera assimilable à une fonction olotrope proprement dite. Cette conclusion étant d'ailleurs applicable quelque petit que soit ε, on voit que toute détermination de l'intégrale indéfinie $\int F(v)\,dv$ est bien, comme nous l'avions annoncé, olotrope dans $\mathfrak{J}_R$.

24. En désignant par p un entier positif donné, et faisant sur $F(v)$ les mêmes hypothèses qu'au numéro précédent **23**, *la fonction*

$$\frac{1}{v^{p+1}}\int_0^v v^p F(v)\,dv \tag{1}$$

est olotrope dans $\mathfrak{J}_R$.

Effectivement, il résulte tout d'abord du n° **23** que l'intégrale

$$\int_0^v v^p F(v)\,dv \tag{2}$$

jouit de cette propriété; la fonction (1) est d'ailleurs le quotient par v^{p+1} de l'intégrale (2).

Or, en développant $F(v)$ en série de Maclaurin, on a, dans le voisinage de la valeur zéro de v,

$$F(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots,$$

d'où

$$v^p F(v) = a_0 v^p + a_1 v^{p+1} + a_2 v^{p+2} + \ldots,$$

puis

$$\int_0^v v^p F(v)\,dv = \frac{a_0}{p+1} v^{p+1} + \frac{a_1}{p+2} v^{p+2} + \frac{a_2}{p+3} v^{p+3} + \ldots,$$

et enfin

$$\frac{1}{v^{p+1}} \int_0^v v^p F(v)\,dv = \frac{a_0}{p+1} + \frac{a_1}{p+2} v + \frac{a_2}{p+3} v^2 + \ldots;$$

la fonction (1) est donc développable en série de Maclaurin.

D'autre part, à partir de toute valeur de v non nulle prise dans la région $\mathfrak{J}_u$, elle sera développable en série taylorienne, puisque le numérateur $\int_0^v v^p F(v)\,dv$ et le dénominateur v^{p+1} le sont l'un et l'autre, et que le dénominateur a une valeur initiale différente de zéro.

(*A suivre.*)