JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉLIE CARTAN

Sur les sphères des espaces de Riemann à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 1-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__1_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les sphères des espaces de Riemann à trois dimensions;

PAR ÉLIE CARTAN.

On sait qu'on appelle *ombilic* d'une surface de l'espace ordinaire un point où les deux rayons de courbure principaux sont égaux, ou mieux un point où l'indicatrice est une circonférence. Cette notion s'étend aux surfaces plongées dans un espace de Riemann quelconque à trois dimensions. Dans l'espace ordinaire, les surfaces dont tous les points sont des ombilics sont les sphères; elles forment une famille continue à quatre paramètres. Le problème de la détermination, dans un espace de Riemann quelconque, des surfaces dont tous les points sont des ombilics, n'a jamais à ma connaissance été traité (1). Ce problème est au fond un problème de géométrie différentielle *conforme*, car si deux espaces de Riemann admettent une représentation con-

(1) *Voir*, pour le problème analogue dans les espaces de Riemann à un nombre quelconque de n dimensions, J. A. SCHOUTEN (*Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, 1924, p. 179-180), qui donne des conditions nécessaires de possibilité, *toujours remplies du reste quand* $n = 3$.

forme l'un sur l'autre, les surfaces des deux espaces dont tous les points sont des ombilics se correspondent par cette représentation. Or l'ensemble des espaces de Riemann qui se correspondent conformément, définit ce que j'ai appelé un *espace conforme normal*, et le problème revient à déterminer dans ces espaces les surfaces auxquelles j'ai proposé de donner le nom de *sphères*.

Il n'y a que l'espace conforme proprement dit (sans courbure) qui possède ∞^4 sphères. Les espaces conformes normaux qui contiennent des sphères sont exceptionnels. En tous cas, les sphères qui passent par un point donné doivent être, en ce point, tangentes à un certain cône du second ordre, capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, attaché à ce point. Si ce cône [cône (C)] n'est pas dégénéré, il ne peut passer en un point arbitraire qu'un nombre fini de sphères; l'espace contient au plus huit familles à un paramètre de sphères; il peut du reste n'en contenir aucune. Si le cône (C) est dégénéré et se réduit à deux droites rectangulaires, l'espace peut ou bien contenir deux familles de ∞^2 sphères, respectivement tangentes à ces deux droites, l'équation $ds^2 = 0$ étant alors réductible à la forme

$$W_1^2\,du^2 + W_2^2\,dv^2 + dw^2 = 0 \qquad (W_1,\ W_2 \text{ fonctions de } w);$$

ou bien contenir une seule famille de ∞^2 sphères et une autre famille de ∞^1 sphères orthogonales aux premières, l'équation $ds^2 = 0$ étant réductible à la forme

$$du^2 + d\sigma^2 = 0 \qquad (d\sigma \text{ élément linéaire à deux variables});$$

ou bien ne contenir au plus que des familles de ∞^1 sphères, 4 au maximum.

Dans le second cas, les sphères de la seconde famille sont définies par $u =$ const.; celles de la première par l'équation d'une géodésique arbitraire de l'élément linéaire $d\sigma^2$.

Tels sont, brièvement résumés, les résultats obtenus dans le présent article. Je conserve les conventions et les notations de mon Mémoire sur les espaces à connexion conforme (*Ann. Soc. Pol. de math.*, 2, 1923, p. 171-221), en utilisant cependant partout des indices inférieurs, ce qui ne peut prêter ici à aucune confusion.

Généralités.

1. On sait que sur une surface d'un espace de Riemann à trois dimensions, les théorèmes de Meusnier et d'Euler sont valables. On peut en particulier généraliser la notion d'*ombilic*, et se proposer de chercher les surfaces Σ dont tous les points sont des ombilics.

Si l'on attache à chaque point de Σ un trièdre trirectangle dont l'axe des z soit normal à la surface, les composantes du déplacement infinitésimal de ce trièdre, quand on se déplace sur Σ, sont six quantités :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3 = 0,$$
$$\omega_{23}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{12},$$

dont les trois premières définissent la translation élémentaire, les trois dernières la rotation élémentaire. On a des relations de la forme

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2,$$
$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2;$$

la courbure normale d'une courbe de Σ est

$$\frac{\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2};$$

le point considéré de la surface est un ombilic si l'on a

$$a = c, \qquad b = 0,$$

autrement dit si l'on a, en se déplaçant sur la surface,

$$(1) \qquad \omega_{13} = \lambda\omega_1, \qquad \omega_{23} = \lambda\omega_2.$$

2. Les lignes de longueur nulle de l'espace de Riemann permettent d'autre part de définir, dans le continuum constitué par cet espace, un *espace conforme normal* (¹). La connexion de cet espace est définie par dix formes de Pfaff :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3; \qquad \omega_{00}; \qquad \omega_{23}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{12}; \qquad \omega_{10}, \quad \omega_{20}, \quad \omega_{30};$$

(¹) E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme* (*Ann. Soc. pol. math.*, t. 2, 1923, p. 171-221).

satisfaisant aux relations de structure

$$(2) \qquad \omega_i' = [\omega_{00}\omega_i] + \sum_{k=1}^{k=3} [\omega_k \omega_{ki}],$$

$$(3) \qquad \omega_{00}' = \sum_{k=1}^{k=3} [\omega_k \omega_{k0}],$$

$$(4) \qquad \omega_{ij}' = [\omega_i \omega_{j0}] - [\omega_j \omega_{i0}] + \sum_{k=1}^{k=3} [\omega_{ik} \omega_{kj}].$$

La *courbure* de cet espace est définie par les trois formes $\Omega_{10}, \Omega_{20}, \Omega_{30}$ données par les relations

$$(5) \qquad \omega_{i0}' = [\omega_{i0}\omega_{00}] + \sum_{k=1}^{k=3} [\omega_{ik}\omega_{k0}] + \Omega_{i0}.$$

Dans le cas présent, on peut prendre pour $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ les mêmes formes que celles qui servent à définir l'espace de Riemann; on a alors

$$\omega_{00} = 0,$$

et les trois formes ω_{i0} sont complètement définies par les formules (3) et (4).

Les dix expressions $\omega_i, \omega_{00}, \omega_{ij}, \omega_{i0}$ peuvent être regardées comme définissant le déplacement conforme infinitésimal d'un pentasphère attaché à chaque point de l'espace, ce pentasphère comprenant une sphère de rayon nul A (dont le centre est le point considéré de l'espace), trois sphères unitaires orthogonales A_1, A_2, A_3 passant par A, et une sphère de rayon nul A′ dont le centre est le second point d'intersection de A_1, A_2, A_3, le produit scalaire A . A′ étant égal à 1. On a

$$dA = \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,$$

$$dA_i = \omega_{i0} A + \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} A_k - \omega_i A',$$

$$dA' = -\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{k0} A_k - \omega_{00} A'.$$

5. Cela posé, soit Σ une surface de l'espace de Riemann donné jouissant de la propriété que tous ses points soient des ombilics, et considérons, dans l'espace conforme normal correspondant, en chaque point de Σ, la sphère $A_3 + \lambda A$. On a, en se déplaçant le long de Σ,

$$d(A_3 + \lambda A) = (\omega_{31} + \lambda\omega_1)A_1 + (\omega_{32} + \lambda\omega_2)A_2 + (d\lambda + \omega_{30})A,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (1),

$$d(A_3 + \lambda A) = (d\lambda + \omega_{30})A.$$

Or les équations (1), dérivées extérieurement, donnent, en tenant compte de l'équation $\omega_3 = 0$ et des équations (3) et (4),

$$[\omega_1 \omega_{30}] + \lambda[\omega_2\omega_{21}] = \lambda[\omega_2\omega_{21}] + [d\lambda\omega_1],$$

ou, en simplifiant,

$$[\omega_1(d\lambda + \omega_{30})] = 0.$$

On a de même

$$[\omega_2(d\lambda + \omega_{30})] = 0,$$

et par suite

$$d\lambda + \omega_{30} = 0.$$

Il en résulte que le champ des sphères $A_3 + \lambda A$, attachées à chaque point de Σ, reste *stable* quand on se déplace d'une manière quelconque sur la surface Σ. On peut encore dire que si l'on développe, sur l'espace conforme tangent en un point fixe quelconque de Σ, une ligne quelconque tracée sur Σ, cette ligne vient se placer sur la sphère fixe $A_3 + \lambda A$ attachée à ce point fixe; ou encore que la surface Σ se développe, sur l'espace conforme tangent en un de ses points, suivant une sphère. Nous dirons que *la surface Σ est une sphère de l'espace conforme normal.*

La recherche dans un espace de Riemann des surfaces dont tous les points sont des ombilics, revient donc à la recherche des sphères dans les espaces conformes normaux correspondants. Nous dirons que ces surfaces sont des *sphères* de l'espace de Riemann.

Il résulte en particulier de ce qui précède que les sphères d'un espace de Riemann ne changent pas si l'on multiplie le ds^2 de l'espace par un facteur fini arbitraire, ou encore que dans deux espaces de Riemann admettant une représentation conforme l'un sur l'autre, les sphères se correspondent par cette représentation.

Le *vrai* problème à se proposer est donc la recherche des sphères d'un espace conforme donné.

Les sphères et le cône (C).

4. Prenons, en chaque point d'un espace conforme normal, un pentasphère de référence aussi général que possible. Toute sphère passant par le point considéré pouvant être prise pour sphère A_3, la recherche des sphères de l'espace revient à l'intégration des équations qui expriment que $dA_3 = 0$, à savoir

$$(6) \qquad \omega_{30} = 0, \qquad \omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{3} = 0.$$

La dérivation extérieure de ces équations conduit à

$$(7) \qquad \Omega_{30} = 0.$$

Rappelons que les expressions Ω_{10}, Ω_{20}, Ω_{30} sont de la forme générale

$$(8) \qquad \begin{cases} \Omega_{10} = \alpha[\omega_2\omega_3] + \beta''[\omega_3\omega_1] + \beta'[\omega_1\omega_2], \\ \Omega_{20} = \beta''[\omega_2\omega_3] + \alpha'[\omega_3\omega_1] + \beta[\omega_1\omega_2], \\ \Omega_{30} = \beta'[\omega_2\omega_3] + \beta[\omega_3\omega_1] + \alpha''[\omega_1\omega_2], \end{cases}$$

avec

$$(9) \qquad \alpha + \alpha' + \alpha'' = 0.$$

Le cône dont l'équation tangentielle est

$$(10) \qquad \alpha u_1^2 + \alpha' u_2^2 + \alpha'' u_3^2 + 2\beta u_2 u_3 + 2\beta' u_3 u_1 + 2\beta'' u_1 u_2 = 0$$

est le cône (C) [1] attaché au point considéré de l'espace; il est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit.

Ici l'équation (7) donne $\alpha'' = 0$, ce qui exprime que la sphère A_3 est tangente au cône (C). On a donc le théorème suivant :

Toute sphère Σ d'un espace conforme normal est tangente en chacun de ses points au cône (C) *attaché à ce point.*

---

[1] E. CARTAN, (*loc. cit.*), p. 197.

Les sphères Σ sont donc des solutions particulières d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.

La conclusion serait illusoire si les coefficients de l'équation (10) étaient tous nuls, ce qui signifie que l'espace est l'espace conforme ordinaire (ou holonome). On en déduit en particulier le théorème suivant :

Ce n'est que dans l'espace conforme holonome qu'il passe, par un point quelconque, une sphère tangente à un élément plan quelconque issu de ce point. Les sphères, dans ce cas, dépendent de quatre constantes arbitraires.

5. Avant de procéder à la recherche plus approfondie des sphères d'un espace conforme normal, cherchons l'expression générale du ds^2 d'un espace admettant une famille à un paramètre de sphères, de telle sorte qu'il en passe une et une seule par tout point de l'espace.

On peut supposer que chacune de ces sphères se développe suivant la sphère A_3; on aura donc, en tenant compte de $\omega_3 = 0$,

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0. \tag{11}$$

En changeant au besoin les sphères de référence A_1 et A_2, on peut supposer que les relations (11), au lieu d'avoir lieu en tenant compte de $\omega_3 = 0$, ont lieu *identiquement*. Si en effet on a

$$\omega_{13} = \lambda\omega_3, \qquad \omega_{23} = \mu\omega_3,$$

on aura

$$d(A_1 - \lambda A) = (\omega_{10} - \lambda\omega_{00} - d\lambda) A - \lambda\omega_1 A_1 + (\omega_{12} - \lambda\omega_2) A_2 - \omega_1 A',$$

d'où

$$A_3 . d(A_1 - \lambda A) = 0;$$

en prenant $A_1 - \lambda A$ et $A_2 - \mu A$ comme nouvelles sphères A_1 et A_2, les composantes ω_{13} et ω_{23} deviendront identiquement nulles.

Réciproquement, si l'on peut choisir le pentasphère de référence de manière à avoir identiquement

$$\omega_{13} = \omega_{23} = 0,$$

on aura, en dérivant extérieurement,

$$[\omega_1\omega_{30}] - [\omega_3\omega_{10}] = 0,$$
$$[\omega_2\omega_{30}] - [\omega_3\omega_{20}] = 0,$$

ce qui montre que l'expression ω_{30} ne dépend que de ω_3. Par suite $dA_3 = 0$, quand on tient compte de $\omega_3 = 0$. L'équation complètement intégrable $\omega_3 = 0$ définit donc une famille de sphères.

Pour avoir l'expression générale du ds^2 correspondant, partons des formules

$$\omega'_1 = [\omega_{00}\omega_1] + [\omega_2\omega_{21}],$$
$$\omega'_2 = [\omega_{00}\omega_2] + [\omega_1\omega_{12}],$$
$$\omega'_3 = [\omega_{00}\omega_3].$$

Comme les composantes ω_1, ω_2, ω_3 ne sont définies qu'à un facteur près, on peut prendre

$$\omega_3 = dw,$$

ce qui donne

$$\omega_{00} = \mathrm{H}\,dw.$$

On a ensuite

$$\omega'_1 + i\omega'_2 = [(\omega_{00} - i\omega_{12})(\omega_1 + i\omega_2)],$$

ce qui prouve que l'équation $\omega_1 + i\omega_2 = 0$ est complètement intégrable. Soit

$$\omega_1 + i\omega_2 = \mathrm{K}\,e^{i\mu}(du + i\,dv);$$

on en déduit

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \mathrm{K}^2(du^2 + dv^2)$$

et

$$\boxed{ds^2 = dw^2 + \mathrm{K}^2(du^2 + dv^2)}.$$

La fonction K est du reste arbitraire, car on a

$$\frac{d\mathrm{K}}{\mathrm{K}} + i\,d\mu = \omega_{00} - i\omega_{12} + (\rho + i\sigma)(du + i\,dv),$$

d'où

$$\rho\,du - \sigma\,dv = \frac{d\mathrm{K}}{\mathrm{K}} - \mathrm{H}\,dw,$$
$$\rho\,dv + \sigma\,du = d\mu + \omega_{12}.$$

On peut prendre arbitrairement les fonctions K, μ, ρ, σ; on a alors

$$H = \frac{\partial \log K}{\partial v}, \qquad \omega_{12} = \rho\, dv + \sigma\, du - d\mu.$$

Le résultat précédent montre que les espaces conformes normaux qui admettent une famille à un paramètre de sphères, dépendent d'une fonction arbitraire de trois arguments. L'espace conforme normal le plus général dépend au contraire de *deux* fonctions arbitraires de trois arguments. *Les espaces de Riemann qui contiennent des sphères sont donc exceptionnels.*

Cas où le cône (C) n'est pas dégénéré.

6. Nous allons maintenant chercher quel est le plus grand degré de généralité possible des sphères d'un espace conforme normal, en commençant par le cas général où le cône (C) n'est pas dégénéré. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, le ds^2 défini positif.

Toute sphère unitaire attachée à un point de l'espace est de la forme

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x A,$$

avec

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{12}$$

En exprimant que sa différentielle (covariante) est nulle, nous obtenons les équations

$$\left\{\begin{aligned} &dx_1 + x_2\omega_{21} + x_3\omega_{31} + x\;\omega_1 = 0,\\ &dx_2 + x_1\omega_{12} + x_3\omega_{32} + x\;\omega_2 = 0,\\ &dx_3 + x_1\omega_{13} + x_2\omega_{23} + x\;\omega_3 = 0,\\ &dx\; + x_1\omega_{10} + x_2\omega_{20} + x_3\omega_{30} + x\omega_{00} = 0,\\ &\qquad x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les conditions d'intégrabilité donnent

$$x_1\Omega_{10} + x_2\Omega_{20} + x_3\Omega_{30} = 0,$$

équation qui doit être vérifiée en tenant compte de la dernière équation (13). On obtient ainsi

$$\alpha x_1^2 + \alpha' x_2^2 + \alpha'' x_3^2 + 2\beta x_2 x_3 + 2\beta' x_3 x_1 + 2\beta'' x_1 x_2 = 0, \tag{14}$$

ce qui exprime simplement que la sphère est tangente au cône (C).

Avant de poursuivre, rappelons les identités de Bianchi généralisées qu'on obtient en dérivant extérieurement les équations (5) :

$$\Omega'_{i0} + [\omega_{00}\Omega_{i0}] - \sum_{k=1}^{k=3} [\omega_{ik}\Omega_{k0}] = 0.$$

En remplaçant les Ω par leurs valeurs et développant, on trouve

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&d\alpha + 3\alpha\omega_{00} - 2\beta''\omega_{12} + 2\beta'\omega_{31} &&= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3,\\
&d\alpha' + 3\alpha'\omega_{00} - 2\beta\omega_{23} + 2\beta''\omega_{12} &&= \alpha'_1\omega_1 + \alpha'_2\omega_2 + \alpha'_3\omega_3,\\
&d\alpha'' + 3\alpha''\omega_{00} - 2\beta'\omega_{31} + 2\beta\omega_{23} &&= \alpha''_1\omega_1 + \alpha''_2\omega_2 + \alpha''_3\omega_3,\\
&d\beta + 3\beta\omega_{00} - \beta''\omega_{31} + \beta'\omega_{12} + (\alpha' - \alpha'')\omega_{23} &&= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3,\\
&d\beta' + 3\beta'\omega_{00} - \beta\omega_{12} + \beta''\omega_{23} + (\alpha'' - \alpha)\omega_{31} &&= \beta'_1\omega_1 + \beta'_2\omega_2 + \beta'_3\omega_3,\\
&d\beta'' + 3\beta''\omega_{00} - \beta'\omega_{23} + \beta\omega_{31} + (\alpha - \alpha')\omega_{12} &&= \beta''_1\omega_1 + \beta''_2\omega_2 + \beta''_3\omega_3.
\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de ces équations sont les *différentielles covariantes* de $\alpha, \ldots, \beta''$. On a du reste, et ces relations constituent les identités de Bianchi,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha_i + \alpha'_i + \alpha''_i = 0\\
&\alpha_1 + \beta''_2 + \beta'_3 = 0,\\
&\beta''_1 + \alpha'_2 + \beta_3 = 0,\\
&\beta'_1 + \beta_2 + \alpha''_3 = 0.
\end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3),$$

Nous pouvons maintenant différentier l'équation (14), en restant sur la sphère Σ. Posons

$$f = \alpha x_1^2 + \alpha' x_2^2 + \alpha'' x_3^2 + 2\beta x_2 x_3 + 2\beta' x_3 x_1 + 2\beta'' x_1 x_2,$$
$$f_i = \alpha_i x_1^2 + \alpha'_i x_2^2 + \alpha''_i x^2 + 2\beta_i x_2 x_3 + 2\beta'_i x_3 x_1 + 2\beta''_i x_1 x_2.$$

Il vient, en tenant compte de $f = 0$,

$$(17)\qquad \frac{f_1 - x\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{x_1} = \frac{f_2 - x\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{x_2} = \frac{f_3 - x\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}{x_3}.$$

Ces formules montrent que, si l'on connaît les coefficients x_1, x_2, x_3 relatifs à une sphère Σ, le coefficient x est parfaitement déterminé.

On a de plus, pour toute sphère Σ, la relation

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Supposons d'abord que la relation (18) soit une conséquence de la relation (14). Nous pouvons supposer les repères choisis de manière à avoir

$$\beta = \beta' = \beta'' = 0.$$

On aura alors une identité de la forme

$$(\alpha' - \alpha'')x_2x_3f_1 + (\alpha'' - \alpha)x_3x_1f_2 + (\alpha - \alpha')x_1x_2f_3 = f\,\mathrm{H}(x_1, x_2, x_3),$$

H étant une forme quadratique convenablement choisie. On voit immédiatement que cette forme ne contient que des termes rectangles :

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}x_2x_3 + \mathrm{A}'x_3x_1 + \mathrm{A}''x_1x_2.$$

On en déduit

$$(\alpha' - \alpha'')\alpha'_1 = \mathrm{A}\alpha',$$
$$(\alpha' - \alpha'')\alpha''_1 = \mathrm{A}\alpha'',$$
$$(\alpha' - \alpha'')\beta_1 = 0.$$

Si donc $\alpha' \neq \alpha''$, l'ensemble des termes de f_1 qui ne contiennent pas x_1 est proportionnel à $\alpha' x_2^2 + \alpha'' x_3^2$, par suite peut, en tenant compte de (14), être remplacé par un terme en x_1^2 ; autrement dit $\dfrac{f_1}{x_1}$ est égal, pour toute sphère Σ, à un polynone déterminé φ_1 du *premier degré* en x_1, x_2, x_3.

Si les trois coefficients α, α', α'' *sont distincts*, les équations (17) peuvent donc se mettre sous la forme

$$\varphi_1 - 2\alpha x = \varphi_2 - 2\alpha' x = \varphi_3 - 2\alpha'' x;$$

par suite, x est un polynome déterminé du premier degré en x_1, x_2, x_3. Par suite enfin, en choisissant convenablement les sphères de référence A_1, A_2, A_3, *on peut supposer* $x = 0$.

Les équations

$$\frac{f_1}{x_1} = \frac{f_2}{x_2} = \frac{f_3}{x_3}$$

étant maintenant des conséquences de l'équation $f=0$, on en déduit facilement les identités

$$f_i = h_i f + x_i \varphi,$$

en désignant par φ une forme linéaire convenablement choisie. Mais, d'après les relations (16), les formes f_1, f_2, f_3 sont harmoniques et l'on a de plus

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0.$$

Comme la forme f est elle-même harmonique, cela exige $\varphi = 0$ et $h_i = 0$. Donc *l'hypothèse que la relation* (18) *est une conséquence de la relation* (14) *entraîne, au besoin par un choix convenable du repère,*

$$f_1 = f_2 = f_3 = 0.$$

Les équations (15), où l'on suppose toujours $\beta = \beta' = \beta'' = 0$, donnent

$$\omega_{23} = \omega_{31} = \omega_{12} = 0,$$
$$d\alpha + 3\alpha\omega_{00} = d\alpha' + 3\alpha'\omega_{00} = d\alpha'' + 3\alpha''\omega_{00} = 0;$$

d'où, par dérivation extérieure,

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = 0.$$

Ce résultat est absurde, parce que la courbure de l'espace serait identiquement nulle.

L'équation (18) *ne peut donc pas être une conséquence de l'équation* (14).

Les équations (14) et (18) ayant au plus huit solutions communes, il résulte de ce qui précède que l'*espace conforme normal donné renferme au plus huit familles à un paramètre de sphères*. Ce nombre peut naturellement être réduit; il peut même être nul, comme on l'a remarqué plus haut.

8. Le raisonnement fait dans le numéro précédent suppose les trois coefficients $\alpha, \alpha', \alpha''$ distincts. Supposons $\alpha = \alpha'$, et par suite $\alpha'' = -2\alpha$. L'équation (18) se réduit à

$$(18) \qquad x_3(x_1 f_2 - x_2 f_1) = 0.$$

Les formules (15) donnent

$$\alpha_i = \alpha'_i, \qquad \beta''_i = 0,$$

d'où, en tenant compte de (16),

$$\alpha''_i = -2\alpha_i.$$

On a donc

$$f_i = \alpha_i(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + 2(\beta_i x_2 + \beta'_i x_1)x_3.$$

L'équation (18) se réduit donc, en tenant compte de (14), à

$$x_3^2[\beta'_2 x_1^2 - (\beta'_1 - \beta_2)x_1 x_2 - \beta_1 x_2^2] = 0.$$

Elle ne peut être une conséquence de l'équation (14) que si l'on a

$$\beta_1 = \beta'_2 = \beta'_1 - \beta_2 = 0.$$

Les équations (17) se réduiraient alors à

$$\beta'_1 x_3 - \alpha x = \beta_3 x_2 + \beta'_3 x_1 + 2\alpha x;$$

elles donneraient pour x une forme linéaire en x_1, x_2, x_3; en changeant au besoin les sphères de référence A_1, A_2, A_3, cette forme pourrait être réduite à zéro, et l'on aurait

$$\beta'_1 = \beta_3 = \beta'_3 = 0.$$

Les équations (15) donneraient alors

$$d\alpha + 3\alpha\omega_{00} = \omega_{23} = \omega_{31} = 0,$$

d'où, par dérivation extérieure,

$$\omega_{10} = H\omega_1, \qquad \omega_{20} = H\omega_2, \qquad \omega_{30} = -H\omega_3,$$

puis

$$\Omega_{10} = [dH\omega_1], \qquad \Omega_{20} = [dH\omega_2], \qquad \Omega_{30} = -[dH\omega_3].$$

Mais cela est impossible, car le coefficient α de $[\omega_2\omega_3]$ dans Ω_{10} serait nul et l'espace serait holonome.

L'équation (18) ne pouvant être une conséquence de l'équation (14), et ayant par suite avec cette dernière au maximum quatre solutions communes acceptables, il en résulte que l'*espace conforme normal donné renferme au plus quatre familles à un paramètre de sphères.*

Cas où le cône (C) est dégénéré.

9. Si le cône (C) est dégénéré, il se décompose en deux droites rectangulaires et l'on peut supposer que l'équation (14) se réduit à

$$x_1 x_2 = 0.$$

Les sphères possibles de l'espace se répartissent alors en deux catégories : les unes appartiennent au réseau $x_2 A_2 + x_3 A_3 + x A$, les autres au réseau $x_1 A_1 + x_3 A_3 + x A$.

Pour déterminer les sphères qui appartiennent au premier réseau, posons

$$x_2 = \cos\varphi, \qquad x_3 = \sin\varphi.$$

Les équations (13) deviennent

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\,\omega_{21} + \sin\varphi\,\omega_{31} + x\omega_1 &= 0,\\
\cos\varphi\,\omega_2 + \sin\varphi\,\omega_3 \qquad &= 0,\\
d\varphi + \omega_{23} = x\frac{\omega_2}{\sin\varphi} &= -x\frac{\omega_3}{\cos\varphi},\\
dx + \cos\varphi\,\omega_{20} + \sin\varphi\,\omega_{30} + x\omega_{00} &= 0.
\end{aligned}$$

En supposant remplacées les expressions ω_{21} et ω_{31} en fonction linéaire de ω_1, ω_2, ω_3, on voit, par la première équation, que x est une forme linéaire en $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. *On peut donc supposer le repère choisi de manière que toute sphère de la première catégorie appartienne au faisceau* $\cos\varphi A_2 + \sin\varphi A_3$. Les formes ω_{21} et ω_{31} sont maintenant indépendantes de ω_1 et les équations (13) deviennent

$$\begin{aligned}
\cos\varphi\,\omega_2 + \sin\varphi\,\omega_3 &= 0,\\
\cos\varphi\,\omega_{21} + \sin\varphi\,\omega_{31} &= 0,\\
\cos\varphi\,\omega_{20} + \sin\varphi\,\omega_{30} &= 0,\\
d\varphi + \qquad \omega_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Nous allons chercher dans quel cas l'espace admet une famille à *deux* paramètres de sphères de la première catégorie. Il est nécessaire que l'on ait des relations de la forme

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned}
\omega_{12} &= \alpha\,\omega_2, & \omega_{13} &= \alpha\,\omega_3,\\
\omega_{20} &= H\omega_2, & \omega_{30} &= H\omega_3.
\end{aligned}\right.$$

S'il en est ainsi du reste, le système de Pfaff

$$(20)\qquad \begin{cases} \cos\varphi\,\omega_2 + \sin\varphi\,\omega_3 = 0, \\ d\varphi + \omega_{23} = 0 \end{cases}$$

sera complètement intégrable, comme le montre la dérivation extérieure. L'existence de cette famille à deux paramètres de sphères entraînera la dégénérescence du cône (C), puisque dans le cas contraire il ne pourrait y avoir au plus que des familles à un paramètre de sphères.

On peut encore simplifier les équations (19) en changeant la sphère de référence A_1, de manière à annuler α. On en déduit en passant, d'après les résultats du n° 5, que l'équation $\omega_1 = 0$ définit une famille à un paramètre de sphères. D'où le théorème suivant :

S'il existe dans un espace conforme normal non holonome une famille à deux paramètres de sphères, il existe une famille à un paramètre de sphères toutes orthogonales aux premières.

D'après les résultats du n° 5, le ds^2 de l'espace est réductible à la forme

$$ds^2 = du^2 + K^2(dv^2 + dw^2);$$

on a ici

$$\omega_{00} = \frac{\partial \log K}{\partial u}\,du, \qquad \omega_1 = du,$$

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{13} = 0,$$

$$\omega_{23} = \rho\,dw + \sigma\,dv - d\mu,$$

avec

$$\rho = \frac{\partial \log K}{\partial v}, \qquad \sigma = -\frac{\partial \log K}{\partial w}.$$

Le calcul des formes ω_{10}, ω_{20}, ω_{30} s'en déduit immédiatement, et pour que les deux dernières équations (19) soient vérifiées, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial^2 \log K}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log K}{\partial u\,\partial w} = 0;$$

par suite K est le produit d'une fonction de u par une fonction de v et w. Finalement on voit qu'on peut supposer le ds^2 réductible à la forme

$$\boxed{ds^2 = du^2 + d\sigma^2},$$

$d\sigma^2$ étant un élément linéaire à deux variables v, w.

La forme (20) des équations des sphères est du reste identique à celle des équations qui donnent les géodésiques de l'élément linéaire $d\sigma^2$. *Toute équation en v, w définissant une géodésique de l'espace de Riemann à deux dimensions d'élément linéaire $d\sigma^2$ définit une sphère de l'espace conforme normal donné.*

Toutes les sphères de la première catégorie sont donc engendrées par ∞^2 courbes $v = a$, $w = b$.

Remarquons que s'il n'existe pas une famille à deux paramètres de la première catégorie, il en existe au maximum deux familles à un paramètre.

10. Avant de poursuivre, notons que l'existence de ∞^2 sphères de la première catégorie permet de supposer

$$(21) \qquad \begin{cases} \omega_{00} = 0, & \omega_{12} = 0, & \omega_{13} = 0, \\ \omega_{10} = -H\omega_1, & \omega_{20} = H\omega_2, & \omega_{30} = H\omega_3; \end{cases}$$

la forme ω_{23} ne dépend, de plus, que de ω_2, ω_3 ; quant au coefficient H, c'est la demi-courbure totale changée de signe de l'élément linéaire $d\sigma^2$, et cela en vertu de la formule

$$\omega'_{23} = [\omega_2\omega_{30}] - [\omega_3\omega_{20}] = 2H[\omega_2\omega_3].$$

Partant des hypothèses précédentes, nous allons procéder à la recherche des sphères de la seconde catégorie. Il en existe déjà une famille à un paramètre, définie par l'équation $\omega_1 = 0$, ou $u = \text{const.}$ Remarquons auparavant qu'on a

$$\Omega_{10} = -[dH\,\omega_1], \qquad \Omega_{20} = [dH\,\omega_2], \qquad \Omega_{30} = [dH\,\omega_3],$$

ou, en posant

$$dH = H_2\omega_2 + H_3\omega_3,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{10} &= -H_3[\omega_3\omega_1] + H_2[\omega_1\omega_2], \\ \Omega_{20} &= -H_3[\omega_2\omega_3], \\ \Omega_{30} &= H_2[\omega_2\omega_3]. \end{aligned}$$

Si nous voulons que le cône (C) ait pour équation tangentielle $x_1x_2 = 0$, il faut supposer $H_2 = 0$, ce qui conduit à la conclusion que *la seconde droite dans laquelle se décompose le cône* (C) *correspond à la tangente aux courbes d'égale courbure totale de l'espace de Riemann à deux dimensions d'élément linéaire $d\sigma^2$.*

Toute sphère de la seconde catégorie est définie par les équations (13), où l'on pose

$$x_1 = \cos\psi, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \sin\psi.$$

On a par suite

$$(13') \quad \begin{cases} \omega_1 \cos\psi + \omega_3 \sin\psi = 0, \\ -\sin\psi\, \omega_{23} + x\omega_2 = 0, \\ -\sin\psi\, d\psi + x\omega_1 = 0, \\ dx - \mathrm{H}\cos\psi\omega_1 + \mathrm{H}\sin\psi\omega_3 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons supposer $\sin\psi \neq 0$, sinon nous retomberions sur la sphère A_1, et aussi $\cos\psi \neq 0$, sinon nous retomberions sur une sphère de la première catégorie.

Soit

$$(22) \qquad \omega_{23} = \lambda\omega_2 + \mu\omega_3;$$

les équations (13′) entraînent

$$x = \lambda\sin\psi, \qquad \mu\sin\psi = 0;$$

donc *on doit avoir $\mu = 0$ pour qu'il y ait des sphères de la seconde catégorie autres que celles déjà signalées, qui coupent orthogonalement les sphères de la première catégorie.*

Supposons qu'il en soit ainsi. La dérivation extérieure de (22) donne

$$[\omega_2(d\lambda + (2\mathrm{H} - \lambda^2)\omega_3)] = 0,$$

d'où

$$d\lambda = \rho\omega_2 + (\lambda^2 - 2\mathrm{H})\omega_3.$$

Les équations (13′) s'écrivent alors

$$\omega_1\cos\psi + \omega_3\sin\psi = 0,$$
$$d\psi - \lambda\omega_1 = 0,$$
$$\rho\omega_2 = 0.$$

On doit donc avoir encore $\rho = 0$. S'il en est ainsi les équations (13′) sont, comme il est facile de le voir, complètement intégrables, et il existe ∞^2 sphères de la seconde catégorie.

En résumé *si un espace conforme normal non holonome admet une famille à deux paramètres de sphères, ou bien il admet une seule famille à un paramètre de sphères orthogonales aux premières,* *ou bien il admet une seconde famille à deux paramètres de sphères.*

Dans le cas d'existence de deux familles de ∞^2 sphères, on peut supposer qu'on a

$$\omega'_1 = 0, \qquad \omega'_2 = \lambda[\omega_2\omega_3], \qquad \omega'_3 = 0,$$

avec

$$d\lambda = (\lambda^2 - 2\mathrm{H})\,\omega_3.$$

On peut alors prendre

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_3 = dw, \qquad \omega_2 = \mathrm{L}\,dv,$$

avec

$$\lambda = -\frac{\partial \log \mathrm{L}}{\partial w}.$$

Comme λ ne doit dépendre que de w, on peut supposer que L est une fonction quelconque de w, et l'on a

$$\boxed{ds^2 = du^2 + \mathrm{W}^2\,dv^2 + dw^2}.$$

Les sphères de la première catégorie s'obtiennent en cherchant les géodésiques de l'élément linéaire

$$d\sigma_1^2 = dw^2 + \mathrm{W}^2\,dv^2,$$

celles de la seconde catégorie en cherchant les géodésiques de l'élément linéaire

$$d\sigma_2^2 = \frac{dw^2}{\mathrm{W}^2} + \frac{du^2}{\mathrm{W}^2}.$$

On peut encore mettre ce ds^2 sous une forme plus symétrique, mais qui dépend en apparence de deux fonctions arbitraires d'un argument, à savoir

$$ds^2 = dw^2 + \mathrm{W}_1^2\,du^2 + \mathrm{W}_2^2\,dv^2.$$

Enfin on peut remarquer que les deux familles de sphères de l'espace ne peuvent avoir aucune sphère commune, car une telle sphère correspondrait, pour la seconde famille, à $\cos\psi = 0$, et l'on devrait avoir

$$d\psi = \lambda\omega_1 = 0,$$

c'est-à-dire $\lambda = 0$, ou $\mathrm{W}' = 0$. Le ds^2 serait alors euclidien.