JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ BLOCH

Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 5 (1926), p. 19-66.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5__19_0>

Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension ;

PAR ANDRÉ **BLOCH**.

I. — Introduction et résumé.

1. A côté de la théorie de l'uniformisation des variétés algébriques par des fonctions automorphes d'une ou de plusieurs variables, s'est développée la théorie générale des fonctions uniformes liées par une relation algébrique. Cette dernière théorie, née de la première, a aujourd'hui une existence propre, et, tandis que la première, aux prises avec de multiples difficultés, voit son développement momentanément arrêté, elle arrive dans une certaine mesure et par l'emploi de méthodes appropriées, à progresser par elle-même, si bien qu'elle se trouve actuellement plus avancée que son aînée.

Le cas d'une fonction uniforme admettant trois valeurs lacunaires, a été dans ses grandes lignes complètement élucidé par une suite de travaux classiques dus principalement à MM. Picard, Borel, Landau, Schottky, Carathéodory, et utilisant, tantôt la fonction modulaire, tantôt une méthode directe. Des résultats analogues ont été obtenus par M. Picard, à l'aide des fonctions fuchsiennes, pour un système de deux fonctions uniformes liées par l'équation d'une courbe algébrique de genre supérieur à un; des résultats analogues s'établissent sans peine pour des fonctions incluses dans un *type* (au sens de Poincaré). La fonction modulaire et les fonctions fuchsiennes (ou du moins la considération de l'équation $\Delta u = e^u$) sont d'ailleurs indispensables à l'obtention des résultats les plus complets, et l'introduction inévitable dans toutes les questions analogues de certaines fonctions automorphes (ou de certaines équations aux dérivées partielles) est, selon toute apparence, un fait de la plus absolue généralité et de la plus haute importance, mais qui est le plus souvent invérifiable dans l'état actuel de la science, en raison de la stagnation de la théorie de l'uniformisation. Si l'on ne recherche pas les résultats les plus complets, nous avons montré dans un Mémoire récent (1) que toute la théorie des fonctions ou systèmes de deux fonctions uniformes incluses dans une courbe ou dans un type donné, était une conséquence à peu près immédiate d'un théorème d'une démonstration un peu longue, mais d'un énoncé fort simple.

Le cas des variétés et des types à plusieurs dimensions ne pouvait manquer d'être beaucoup plus complexe que celui des courbes et types à une seule dimension ; on ne savait d'ailleurs, jusqu'à ces dernières années, presque rien à ce sujet. Seul était connu un théorème établi autrefois par M. Borel (2), mais qui n'avait jamais été envisagé par son auteur ni par personne au point de vue actuel. Dans un Mémoire en cours de publication (3), nous avons pu mettre en évidence la véritable signification de ce théorème, et en obtenir l'extension finitiste, c'est-à-dire le généraliser de la manière dont les théorèmes de MM. Landau et Schottky généralisent le théorème ordinaire de M. Picard. La théorie obtenue est la plus simple de celles, assez nombreuses, qu'il est dès à présent permis d'envisager comme correspondant pour plusieurs dimensions à la théorie unique des fonctions à trois valeurs lacunaires pour une seule dimension.

A l'extrémité opposée de la série des théories à édifier pour plusieurs dimensions se trouve celle des systèmes de fonctions satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique ; c'est le cas où le type se réduit à la variété qui lui sert de base, sans qu'il y ait sur elle aucun système de

---

(1) *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation* (*Annales de Toulouse*, 1925). Erratum de ce Mémoire : p. 11, ligne 1, lire : $\log(\sqrt{m-1}-\sqrt{m})+\log\sqrt{2\pi}+i\frac{\pi}{4}+2ni\pi$.

(2) *Acta Mathematica*, 20, p. 387.

(3) *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires* (*Annales de l'École Normale*, 1926).

sous-variétés ou de points affectés de coefficients déterminés, correspondant à certaines conditions imposées aux fonctions. Le problème fondamental à ce sujet est la détermination de toutes les variétés algébriques uniformisables par des fonctions méromorphes; on a cru (1) pouvoir envisager comme vraisemblable l'existence d'autres surfaces que les surfaces hyperelliptiques, rentrant dans cette catégorie; or il a toujours été très probable que les seules variétés algébriques uniformisables par les fonctions méromorphes sont les variétés abéliennes; la démonstration de ce théorème paraît toutefois encore lointaine. Il est d'ailleurs à présumer que, d'une manière plus générale, des fonctions méromorphes en nombre quelconque, à une ou plusieurs variables, satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique, satisfont nécessairement aux équations d'une variété abélienne faisant partie de cette variété.

En attendant l'établissement de ce théorème général, ou de celui qui doit le remplacer si, contre toute attente, il se trouve erroné, nous avons étudié les systèmes de fonctions uniformes d'une ou plusieurs variables satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique suffisamment générale; les résultats relatifs aux fonctions d'une seule variable n'ont pas encore été publiés, ceux relatifs aux fonctions de plusieurs variables l'ont été dans une Note des *Comptes rendus* (2).

L'objet du Mémoire actuel est l'étude des fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété, au contraire, fort particularisée, à

---

(1) E. Picard, *Fonctions algébriques de deux variables*, II, p. 480.

(2) *Sur la non-uniformisabilité par les fonctions méromorphes des variétés algébriques les plus générales* (*Comptes rendus*, 181, p. 276).

La suggestion faite à la fin de cette Note, concernant le remplacement des hypothèses faites sur la variété par celle de l'existence d'au moins deux intégrales p-uples de première espèce, ne se rapporte qu'au premier des trois théorèmes de la page 278, c'est-à-dire à la non-uniformisabilité de la variété par des fonctions méromorphes. L'exemple de l'image des couples de points d'une courbe elliptique et d'une autre courbe prouve qu'une surface peut être de genre géométrique arbitrairement grand sans que les propositions relatives au jacobien et à l'intégrale double étendue à un certain continuum, soient vérifiées.

Il est toutefois possible que ces propositions soient nécessairement vérifiées pour les surfaces dont les courbes canoniques ne se composent pas toutes de courbes d'un faisceau unique.

savoir d'une variété dont l'irrégularité dépasse la dimension. L'intérêt d'une telle étude est que les propriétés obtenues sont fort précises : c'est pour les fonctions liées par l'équation d'une telle variété que l'analogie est la plus complète avec les fonctions liées par l'équation d'une courbe de genre supérieur à un. L'*irrégularité* dont il est question dans tout ce Mémoire est celle qui se rattache à la connexion linéaire, c'est-à-dire le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes.

La méthode employée dans le présent Mémoire est comme dans la plupart de nos travaux précédents, la méthode des valeurs moyennes logarithmiques de MM. F. et R. Nevanlinna (1), qui constitue le plus puissant instrument d'investigation dont on dispose actuellement en analyse complexe.

Dans la section II du présent Mémoire sont rappelées certaines propositions de géométrie algébrique qui seront utilisées dans la suite ; l'application en est faite à la théorie des variétés algébriques *irrégulières*, c'est-à-dire (au sens adopté dans ce Mémoire) à connexion linéaire multiple.

La section III est également consacrée à des développements préliminaires : trois lemmes y sont établis au sujet de certaines valeurs moyennes logarithmiques. La démonstration du troisième de ces lemmes, relatif à la croissance d'un système de fonctions abéliennes dont les arguments sont fonctions d'une variable, présente encore une lacune qui n'est qu'à moitié comblée.

La section IV forme avec la suivante la partie essentielle du présent Mémoire. Il est établi que *pour une surface dont l'irrégularité dépasse la dimension, trois fonctions méromorphes d'une variable, ou trois fonctions à point essentiel isolé commun, satisfaisant à l'équation de la surface, sont nécessairement les coordonnées*

---

(1) Par exemple : F. et R. NEVANLINNA. *Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (*Acta Soc. Fennicae*, 50, n° 5, 1922). — R. NEVANLINNA. *Beweis des Picard-Landauschen Satzes* (*Gött. Nachr.*, 1924, p. 151); *Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta Math.*, 46). *Voir* aussi plusieurs notes du même auteur dans les *Comptes rendus* de 1923, 1924, 1925. — *Voir* d'autre part l'article du *Mémorial des Sciences mathématiques*, cité p. 30.

d'un point décrivant sur la surface une courbe unicursale ou elliptique. Une proposition analogue est démontrée pour des fonctions satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique quelconque, dont l'irrégularité dépasse la dimension.

La section V généralise au point de vue finitiste les résultats de la section précédente : *si des fonctions d'une variable, méromorphe dans le cercle-unité, sont liées par l'équation d'une variété dont l'irrégularité dépasse la dimension, et admettant une matrice de Riemann pure, la variation entre deux points intérieurs au cercle-unité d'une intégrale simple de première espèce déterminée, attachée à la variété, admet une borne supérieure ne dépendant que de ces deux points.* Des théorèmes en termes finis sont établis également pour des fonctions de plusieurs variables liées par l'équation d'une variété dont l'irrégularité dépasse la dimension.

Il s'agit dans la section VI de fonctions satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique, et admettant une ou plusieurs sous-variétés lacunaires de dimension inférieure d'une unité; des intégrales simples de troisième espèce s'introduisent alors dans les démonstrations, remplaçant en tout ou en partie les intégrales de première espèce. Deux cas seulement sont traités qui, dans l'espace à trois dimensions, se réduisent à celui d'une surface hyperelliptique avec une courbe lacunaire et à celui d'une surface quelconque avec quatre sections planes lacunaires.

Dans la section VII, introduction à la suivante, il n'est question que de géométrie algébrique; les séries *abéliennes* de groupes de points d'une courbe y sont définies et sommairement étudiées.

La section VIII et dernière est peut-être digne d'attention en raison du caractère particulièrement simple de la question traitée et du principal résultat obtenu : *soit une courbe de genre p à modules généraux, et soit un groupe de points de cette courbe, en nombre n inférieur à p, fonction méromorphe d'une variable t inférieure à un en module, c'est-à-dire tel que les fonctions symétriques des coordonnées de ses points soient des fonctions méromorphes de t dans le cercle-unité; alors la variation entre deux points intérieurs à ce cercle de la somme abélienne, relative à une intégrale de première espèce déterminée, correspondant aux n points du groupe, admet une borne supérieure ne dépendant que de ces deux points.*

II. — Préliminaires de Géométrie algébrique.

3. Rappelons d'abord quelques théorèmes sur les matrices de Riemann et sur les courbes algébriques [1] dus à plusieurs géomètres parmi lesquels MM. Poincaré, Humbert, Castelnuovo, Picard, Painlevé, Wirtinger, Scorza.

Considérons une *matrice de Riemann* Ω, d'ordre p; c'est un tableau de $2p^2$ éléments (p lignes et $2p$ colonnes) satisfaisant à des conditions bien connues; soit Ω' une autre matrice de Riemann, d'ordre f. Supposons que l'on ait, en notation symbolique $\Omega' = A.\Omega.B$, où A est une matrice carrée quelconque d'ordre p, et B une matrice carrée d'ordre $2p$, à coefficients rationnels, leurs déterminants n'étant pas nuls; les matrices de Riemann Ω et Ω' sont dites alors *isomorphes* (Scorza).

Supposons la matrice de Riemann Ω telle que les $2p_1(p-p_1)$ éléments appartenant à la fois aux p_1 premières lignes et aux $2(p-p_1)$ dernières colonnes soient nuls; le tableau des $2p_1^2$ éléments des p_1 premières lignes et des $2p_1$ premières colonnes est alors lui-même une matrice de Riemann Ω_1 d'ordre p_1. On démontre qu'une telle matrice Ω est isomorphe à une autre $\overline{\Omega}$ ayant les mêmes p_1 premières lignes mais dont les $2p_1(p-p_1)$ éléments des $(p-p_1)$ dernières lignes et des $2p_1$ premières colonnes sont nuls (Picard-Poincaré); les $2(p-p_1)^2$ derniers éléments forment alors aussi une matrice de Riemann Ω_2. Toute matrice de Riemann isomorphe à une autre ainsi composée elle-même de deux autres est dite *impure* (Scorza). Ainsi $\overline{\Omega}$, Ω et toutes les matrices isomorphes sont impures, Ω_1 et Ω_2 sont dites contenues dans ces matrices impures.

Une matrice de Riemann isomorphe à une autre composée pareillement de p matrices d'ordre un, disposées en diagonale (tous les autres éléments étant nuls), est dite *complètement réductible*.

---

[1] Cf. : F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III e IV; — S. LEFSCHETZ, *Progrès récents dans la théorie des fonctions abéliennes* [*Bull. des Sc. Math.*, tome XLVII, 1923, p. 122 (analyse des travaux de M. Scorza)].

Le tableau d'un système de périodes primitives des intégrales abéliennes de première espèce d'une courbe de genre p, n'est pas, si p dépasse 3, une matrice de Riemann quelconque, mais satisfait à certaines relations, qui s'expriment au moyen des séries thêta [1]. La matrice est dite alors *spéciale* (Poincaré).

Toute matrice de Riemann est infiniment voisine d'une autre, complètement réductible; toute courbe algébrique est infiniment voisine d'une autre de même genre, à intégrales complètement réductibles; et par conséquent toute matrice spéciale est infiniment voisine d'une matrice spéciale complètement réductible (Poincaré).

4. Au sujet des séries algébriques de groupes de points d'une courbe, jouissant de la propriété *involutive*, ont lieu deux théorèmes importants.

A une courbe algébrique ne peuvent appartenir qu'un nombre fini d'involutions (simplement infinies) irrationnelles de genre supérieur à un; les involutions elliptiques, au contraire, peuven être en nombre infini, mais sont au plus en nombre fini pour chaque valeur de l'ordre (Painlevé).

Les involutions simples multiplement infinies, appartenant à une courbe algébrique, sont linéaires. De manière plus précise : une involution ∞^r de groupes de $n\,(>r)$ joints sur une courbe est une série linéaire, ou bien se compose des ∞^r groupes obtenus en prenant r à r les groupes d'une involution (simplement infinie) irrationnelle d'ordre ν $(n=\nu r)$ (Castelnuovo-Humbert).

D'autre part, à toute matrice d'ordre un contenue dans une matrice spéciale, correspond sur la courbe une involution elliptique d'un certain ordre, c'est-à-dire une manière pour la courbe d'être elliptique multiple.

5. Nous appellerons dans le cours de ce Mémoire, *courbes impures* les courbes dont la matrice de Riemann est impure. Les matrices con-

(1) F. SCHOTTKY, *Journal de Crelle*, t. 102, 1888, p. 304; *Acta Mathematica*, t. 27, 1903, p. 235.

tenues dans cette dernière (sous-matrices) ne sont pas alors nécessairement spéciales, et peuvent même, pour des courbes convenables, être absolument quelconques (Wirtinger) ([1]), satisfaisant toujours naturellement aux conditions classiques. Nous appellerons système *parfait* d'intégrales abéliennes le système des intégrales de première espèce admettant les périodes d'une sous-matrice (et de toutes les intégrales dépendant linéairement de celles-là), système qui s'obtient par le calcul même qui révèle l'existence de la sous-matrice. (Il ne peut évidemment y avoir aucune ambiguïté, même s'il y a des sous-matrices identiques, puisqu'alors ce ne sont pas les mêmes cycles qui de part et d'autre donnent lieu à des périodes nulles.)

Considérons sur une courbe de genre p un système parfait de q intégrales; attribuons aux sommes abéliennes correspondant à ces q intégrales et à un groupe de q points de la courbe des valeurs données quelconques : il existe alors un nombre fini de groupes de q points déterminés par ces valeurs, sauf peut-être pour certains systèmes de ces valeurs pour lesquels il en existe une infinité (Picard) ([2]). Autrement dit, *la variété des groupes de q points d'une courbe impure possédant une sous-matrice d'ordre q admet pour transformée rationnelle la variété abélienne de rang un, à q dimensions, dont les périodes primitives sont celles de cette sous-matrice*. Les variations des sommes abéliennes d'un groupe de q points à un autre sont égales aux variations des arguments des fonctions abéliennes entre les deux points correspondants de cette variété. Donc, connaissant ces deux points et l'un des deux groupes de q points, l'autre se détermine *algébriquement*. On aurait encore une détermination algébrique si l'on remplaçait la variété abélienne et ses deux points par une autre courbe dont la matrice admît également la sous-matrice d'ordre q considérée, et deux groupes de q points de cette courbe.

Supposons maintenant que, au lieu de groupes de q points, l'on considère sur la courbe donnée des groupes de r points ($r \lesseqgtr q$). Alors à un système de sommes abéliennes, il répondra en général une infinité de

([1]) *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Leipzig, 1896.
([2]) *Bulletin de la Société mathématique*, 11.

groupes de points, ou il n'en répondra aucun suivant que l'on aura supposé r supérieur ou inférieur à q. Mais on pourra toujours, les sommes abéliennes étant supposées représentées comme il a été dit sur une variété abélienne ou une courbe auxiliaire, décider *algébriquement* s'il existe de tels groupes de points, et, dans l'affirmative, déterminer algébriquement la variété d'ailleurs algébrique (de dimension nulle ou non nulle) qu'ils forment. En effet l'algébricité de la variété résulte de la théorie des fonctions abéliennes réductibles immédiatement si r est égal ou supérieur au genre p de la courbe, en ajoutant au préalable $p-r$ points fixes si $r<p$; et l'algébricité de l'existence ou de la non-existence de la variété, et de sa détermination si elle existe, les sommes abéliennes étant représentées comme il a été convenu, est une conséquence du même raisonnement.

6. Les considérations du numéro précédent trouvent leur application dans la théorie des variétés algébriques irrégulières.

Rappelons la définition, au point de vue purement rationnel, de l'*irrégularité* d'une variété algébrique. Sur une variété de dimension égale à n, tout système algébrique complet de sous-variétés de dimension $n-1$, se compose de ∞^r systèmes linéaires complets; le maximum de r est l'irrégularité q de la variété. Tout système algébrique complet donnant lieu à ce maximum est à ce point de vue birationnellement identique à une variété abélienne de dimension q et de rang un; c'est la *variété* dite *de Picard*, attachée à la variété donnée; elle est en effet indépendante du système considéré.

MM. Enriques, Castelnuovo et Severi ont établi que ce nombre q est identique au nombre des intégrales simples de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la variété donnée; et c'est cette seconde définition de l'irrégularité que nous utiliserons seule. La matrice des périodes de la variété de Picard est isomorphe à celle des périodes primitives des q intégrales simples, mais ne lui est pas nécessairement équivalente [1] (avec les notations du n° 3, $\Omega' = \mathrm{A}\Omega\mathrm{B}$

---

[1] F. SEVERI, *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di prima specie* (*Atti Istituto Veneto* 72, 1913, p. 765).

est dite équivalente à Ω si B est à coefficients entiers et de déterminant un).

Théorème A. — *Sur une variété algébrique irrégulière de dimension et d'irrégularité quelconques, l'ensemble de tous les groupes de m points pour lesquels toutes les sommes abéliennes, relatives aux intégrales simples de première espèce, aient des valeurs données, constitue une série algébrique.*

Pour établir ce théorème d'inversion, observons que nous pouvons représenter les valeurs données sur une courbe ou variété auxiliaire, comme il a été dit au numéro précédent. Considérons une courbe algébrique quelconque de la variété donnée, passant par le point — ou les points — à partir desquels sont supposées prises les sommes abéliennes : les intégrales simples donnent sur cette courbe un système parfait d'intégrales abéliennes; nous pouvons décider algébriquement si la courbe contient ou non des groupes de m points ayant les sommes abéliennes données, et dans l'affirmative, construire algébriquement la série algébrique qu'ils forment, ce qui établit le théorème A.

Le théorème subsiste évidemment si, au lieu de fixer toutes les sommes abéliennes, on fixe seulement celles relatives à un système *parfait* d'intégrales, supposé exister sur la variété (un système parfait se définit sur une variété quelconque comme sur une courbe). Mais, pour abréger, nous laisserons de côté dans ce qui suit les conséquences de cette remarque.

Nous allons appliquer le théorème A au cas particulier où $m = 1$.

Si l'irrégularité est égale à *un*, il n'y a alors aucune difficulté, et l'on obtient les propositions suivantes :

Une surface admettant exactement une intégrale simple de première espèce est un faisceau elliptique; on voit même aisément que c'est un faisceau elliptique de courbes *irréductibles. Une variété à une seule intégrale simple de première espèce est un faisceau elliptique de sous-variétés, que l'on peut supposer irréductibles.*

Passons au cas où l'irrégularité q est quelconque, mais où toutes les intégrales sont fonctions d'une seule d'entre elles; alors :

Une variété admettant exactement q intégrales simples de première espèce, fonctions d'une d'entre elles, est un faisceau de genre q de sous-variétés irréductibles.

Si $q > 1$, la sous-variété générique du faisceau se présente nécessairement d'elle-même comme irréductible; sans quoi, d'après un théorème bien connu de Weber, la variété serait aussi un faisceau de genre plus grand que q, et aurait plus de q intégrales. Le cas où $q > 1$ peut d'ailleurs être traité indépendamment du théorème A; M. de Franchis (1) a prouvé en effet de façon simple qu'une surface ayant au moins deux intégrales simples de première espèce, fonctions l'une de l'autre, possède un faisceau irrationnel, et sa démonstration subsiste pour une variété quelconque.

Considérons maintenant une surface à deux intégrales indépendantes, il vient :

Une surface ayant exactement deux intégrales simples de première espèce, non fonctions l'une de l'autre, admet pour transformée rationnelle une surface hyperelliptique de rang un.

Dans les cas précédents, ou bien l'on tombait immédiatement sur un faisceau de courbes irréductibles, ou bien l'on pouvait aisément en obtenir un; mais ici il n'y a rien d'analogue, et l'on ne peut pas affirmer que de la série ∞^2 de groupes de points obtenue l'on puisse passer à une série ∞^2 de points jouissant de la même propriété, autrement dit que la surface donnée soit elle-même hyperelliptique. M. Enriques a démontré cependant qu'il en est effectivement ainsi *lorsque, la surface étant de genre géométrique un, sa matrice de Riemann est pure* (2); mais il existe des surfaces de genre un non hyperelliptiques, ayant exactement deux intégrales simples indépendantes de première espèce; elles rentrent dans la catégorie des surfaces elliptiques, et ont une matrice de Riemann impure.

Sans nous attarder davantage à examiner des cas particuliers,

(1) *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve* (*Rendic. Circ. Mat. Palermo*, t. 20, 1905, p. 49.

(2) *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse* (*ibid.*, p. 61).

énonçons la proposition générale suivante au sujet des variétés algébriques irrégulières, conséquence immédiate du théorème A :

THÉORÈME B. — *Une variété algébrique d'irrégularité q est engendrée par un système de sous-variétés, réductibles ou irréductibles birationnellement identique à une variété abélienne de rang un à q dimensions, ou bien à une sous-variété d'une telle variété abélienne, pour laquelle aucune combinaison linéaire des arguments des fonctions abéliennes ne demeure constante; par un point générique de la variété donnée passe une et une seule sous-variété du système.*

III.
Lemmes concernant certaines valeurs moyennes logarithmiques.

7. La fonction $f(x)$ étant holomorphe ou méromorphe dans le cercle $|x| \leqq r$, circonférence comprise, posons avec MM. F. et R. Nevanlinna (¹) :

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

r_i étant le module d'un zéro intérieur au cercle de rayon r, posons de même

$$N(r, f) = \Sigma \log \frac{r}{r_i},$$

la somme étant étendue à tous ces zéros; posons enfin

$$gm(r, f) = m(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

L'expression $gm(r, f)$ est une fonction croissante de r.

La formule de M. Jensen s'écrit

$$gm(r, f) - gm\left(r, \frac{1}{f}\right) = \log |f(0)|.$$

Lemme I. — Une fonction holomorphe $\varphi(x)$ est déterminée par sa

(¹) *Cf.* par exemple pour la bibliographie le fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques :* A. BLOCH, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité* (Gauthier-Villars, 1926).

partie réelle $\mathcal{R}[\varphi(x)]$ au moyen de la formule suivante :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{R}[\varphi(x)]\frac{r\,e^{i\theta}+x}{r\,e^{i\theta}-x}\,d\theta + i\mathfrak{I}[\varphi(0)], \qquad (|x| < r),$$

d'où

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{R}[\varphi(x)]\frac{2\,n!\,r\,e^{i\theta}}{(r\,e^{i\theta}-x)^{n+1}}\,d\theta.$$

Posons

$$a(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\mathcal{R}}[\varphi(r\,e^{i\theta})]\,d\theta.$$

L'égalité précédente donne aisément l'inégalité suivante, due à M. R. Nevanlinna

$$(1) \qquad m[r, \varphi^{(n)}(x)] < C[\varphi(0)] + k_1 \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + k_2 \log\frac{R}{R-r} + \overset{+}{\log}\, a(R, \varphi)$$
$$(r < R),$$

où la constante C ne dépend que de $\varphi(0)$, k_1 et k_2 étant des constantes numériques.

Il résulte de cette inégalité que si $\varphi(x)$ est une fonction entière, on a, à partir d'une certaine valeur de r,

$$(1\ bis) \qquad m[r, \varphi^{(n)}(x)] < (1+\varepsilon)\overset{+}{\log}\, a(r, \varphi),$$

quel que soit ε positif, sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de r est finie.

Lemme II. — Soient $f(x)$ une fonction méromorphe et F le symbole d'une fraction rationnelle; on reconnaît aisément à l'aide de la formule de Jensen que $gm(r, f)$ et $gm[r, F(f)]$ sont asymptotiquement équivalents, à un facteur constant près (sans intervalles exceptionnels); et cela se traduit en termes finis par une double inégalité, facile à obtenir entre ces deux expressions. De même, si nous désignons par $gm(r; \overline{f_1, f_2})$ la plus grande des expressions $gm(r, f_1)$ et $gm(r, f_2)$ et si F_1, F_2 sont deux fractions rationnelles de deux variables, non fonctions l'une de l'autre, il y a une double inégalité entre $gm(r; \overline{f_1, f_2})$ et $gm[r; \overline{F_1(f_1, f_2)\ F_2(f_1, f_2)}]$, d'où résulte l'équivalence asymptotique, à un facteur constant près, de ces deux expressions. Nous pourrons donc parler de la fonction croissante $\widehat{gm}(r, P)$ attachée à un point P de l'espace à un nombre quelconque de dimensions, dont les coordonnées sont fonctions méromorphes d'une seule variable; cette fonction, définie seulement à un facteur constant positif près et à un terme additif près (ce qu'exprime le signe $\frown$) sera invariante, non seulement par les transformations homographiques, mais aussi, au point de vue où nous sommes placés ici, par les transformations birationnelles (de l'espace entier ou seulement d'une variété algébrique sur laquelle P demeure placé), et même par les transformations simplement rationnelles, si elles n'altèrent pas l'uniformité des fonctions considérées.

Tout ceci s'exprime, répétons-le, par des inégalités qui s'obtiennent à l'aide de la formule de Jensen et de simples transformations algébriques, où par conséquent, les fonctions méromorphes $f_1, f_2, \ldots$ ne figurent (comme dans la formule de Jensen) sous le signe gm que par elles-mêmes et, ailleurs, que par leurs valeurs initiales.

Supposons maintenant que des fonctions méromorphes $f_1, f_2, \ldots$ soient liées à d'autres fonctions méromorphes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ par un système de relations algébriques, toutes ces fonctions étant telles lorsque la variable est à l'origine que le système soit alors résoluble par rapport aux f_i; on établit de manière analogue, l'inégalité, valable quel que soit r

$$gm(r; \overline{f_1, f_2, \ldots}) < k\, gm(r; \overline{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots}) + C_0, \tag{2}$$

où k est un nombre fixe ne dépendant que du système, où C_0 ne dépend que du système et des valeurs initiales des fonctions.

8. *Lemme III.* — Soit une courbe elliptique, que nous supposons uniformisée par des fonctions méromorphes d'une variable t, de module r; P est le point courant de la courbe, U l'intégrale de première espèce; nous allons montrer que la fonction croissante $\widehat{a}(r, U)$, attachée à la seconde, ne dépasse pas la fonction croissante $\widehat{gm}(r, P)$ attachée au premier.

Supposons à cet effet l'intégrale U multipliée par un facteur constant tel qu'une de ses périodes primitives soit $2\pi i$; la fonction e^{U} réalise alors la représentation conforme de la surface de Riemann sur une infinité de couronnes circulaires concentriques et homothétiques; on a $a(r, U) = m(r, e^{U})$. Soit j un point fixe d'une des couronnes, J son homologue sur la courbe; considérons une fraction rationnelle Φ d'un point variable de la courbe ne devenant infinie qu'en J, pôle double par exemple. On a

$$\widehat{gm}(r, e^{U}) = \widehat{gm}\left(r, \frac{1}{e^{U}-j}\right);$$

or $\widehat{gm}\left(r, \frac{1}{e^{U}-j}\right)$ ne dépasse pas $\widehat{gm}(r, \Phi)$; car si Φ est très grand, c'est que p, correspondant à P, est très voisin, soit du point j, soit d'un de ses homologues en nombre infini du système de couronnes; $gm(r, \Phi)$ se compose ainsi d'une infinité de termes, tous positifs, dont l'un est équivalent à $gm\left(r, \frac{1}{e^{U}-j}\right)$. Notre affirmation est donc établie, dans le cas où U a une période primitive égale à $2\pi i$; il n'y aurait pas de difficulté à la justifier de manière analogue dans le cas le plus général; mais on peut aussi observer que si la proposition est établie pour U_1 et U_2 de rapport non réel, elle l'est d'une manière générale, car connaissant une borne des parties réelles de U, $-U$, $e^{i\alpha}U$, $-e^{i\alpha}U$, on en déduit sur le champ une borne pour $\mathcal{R}(e^{i\beta}U)$.

Ce qui précède peut s'exprimer par une relation précise, par exemple, la suivante :

$$(\alpha) \qquad a(r, U) < k \times gm\left(r, \frac{1}{pU}\right) + K(\omega, \varpi),$$

où U est supposée nulle pour $t = 0$, où k est une constante numérique et K une certaine fonction des périodes ω et ϖ de la fonction elliptique pU.

Voyons maintenant comment on pourra établir une proposition analogue pour les surfaces hyperelliptiques de rang un : trois fonctions méromorphes f_1, f_2, f_3 d'une variable t, de module r, satisfont à l'équation de la surface, U est une intégrale de première espèce quelconque de la surface; il s'agit de voir que $\hat{a}(r, U)$ ne dépasse pas $\widehat{gm}(r; \overline{f_1, f_2, f_3})$.

Moyennant une certaine transformation rationnelle, de sens d'ailleurs arbitraire, nous pouvons, d'après le lemme II, supposer la surface, non seulement de rang un, mais aussi de diviseur un. La surface est alors l'image des couples de points d'une quintique

$$y^2 = x(1-x)(1-\lambda x)(1-\mu x)(1-\nu x),$$

et de ∞^2 manières; on peut donc supposer que pour $t=0$, le couple de points correspondant, soit $(A' : y = x = 0;\ A'' : y = 0,\ x = 1)$. Moyennant une transformation birationnelle, on peut supposer que les trois fonctions f_1, f_2, f_3, soient pour le couple de points (M', M'') : $x' + x''$; $x'x''$; $y' + y''$. Quant à l'intégrale de première espèce considérée, ce sera, par exemple,

$$U = \int_{A'}^{x', y'} \frac{1+x}{y} dx + \int_{A''}^{x'', y''} \frac{1+x}{y} dx.$$

Supposons d'abord la quintique elliptique multiple; il y aura alors deux intégrales V et W réductibles aux elliptiques, déterminées chacune à un facteur constant près. Connaissant leurs périodes, on pourra écrire l'inégalité (α) à laquelle satisfait chacune d'elles; on en déduira pour l'intégrale W une inégalité de la forme

$$a(r, W) < c \times gm(r : f_1, f_2, f_3) + C;$$

C dépendra des périodes des intégrales réductibles, mais on pourra les remplacer par leurs valeurs en fonction des périodes correspondant à la quintique elle-même, c'est-à-dire des périodes sur la quintique de $\int \frac{dx}{y}$ et $\int \frac{x\,dx}{y}$; ces substitutions faites, c et C pourront encore *a priori* dépendre de certains entiers, en particulier du coefficient de multiplicité de la quintique en tant que courbe elliptique multiple. Or, en conduisant le calcul de manière suffisamment habile, il est probable que l'on obtiendra pour c et C des expressions n'en dépendant pas : c sera un nombre et C ne dépendra que de la matrice de la quintique.

Si maintenant la quintique n'est pas elliptique multiple, on pourra la rendre telle en faisant varier infiniment peu λ, μ, ν. Il est clair, par conséquent, que l'inégalité obtenue sera vraie, que la surface hyperelliptique soit à matrice pure ou impure. Le calcul pourra, d'ailleurs, s'étendre aux variétés abéliennes quelconques de rang un, l'intervention précédente de la quintique plane n'ayant servi qu'à simplifier un peu l'exposition.

Mais, quel que puisse être l'intérêt de cette sorte de démonstration, qu'il y aurait lieu de développer de manière complète, l'établissement direct de l'inégalité en question, sans recourir au cas de réduction, serait plus désirable encore ([1]). On peut démontrer assez simplement cette inégalité, non pour une variété abélienne, mais pour une courbe de genre quelconque; et cela suffit, comme on le reconnaîtra par la suite, pour établir les théorèmes de M. Picard sur les courbes de genre supérieur à un, rappelés au début du présent Mémoire; mais cela ne peut servir de rien dans la question plus générale qui en est l'objet essentiel.

Du cas d'une variété abélienne, on passe immédiatement, en vertu du théorème B et du lemme II, à celui d'une variété algébrique irrégulière quelconque: si bien que voici, en définitive, la proposition qui sera pour nous le lemme III :

Soient données une variété algébrique irrégulière et une intégrale simple de première espèce U *de cette variété; on suppose que les coordonnées d'un point de la variété soient, dans un certain cercle, des fonctions méromorphes* $f_1, f_2, \ldots$ *d'une variable* t, *de module* r. *On a dès lors, dans ce cercle, l'inégalité*

$$a(r, U) < c \times gm(r; \overline{f_1, f_2}, \overline{\ldots}) + C, \tag{3}$$

où c *est une constante numérique et où* C *ne dépend que de la variété de l'intégrale envisagée, et du point de la variété correspondant à* $t = 0$.

Cette proposition n'est, à vrai dire, établie clairement, d'après ce qui précède, que pour les variétés irrégulières à matrice complètement

---

([1]) On sait que Poincaré avait obtenu le nombre des zéros communs aux fonctions thêta en ayant recours précisément à l'intermédiaire du cas de réduction complète [cf. *Encycl. des Sc. math.*, article III-4 (*Zeuthen-Pieri*), p. 326]. M. Wirtinger a traité la même question par des méthodes directes, et il y aurait intérêt à examiner si elles peuvent être de quelque utilité dans la démonstration de notre proposition.

réductible. Toutefois, pour ne pas introduire dans ce qui suit une restriction ne tenant pas à la nature des choses, mais seulement au procédé de démonstration, nous l'admettrons comme vraie dans tous les cas.

Si, dans ce qui précède, on suppose que l'on ait affaire, non à des fonctions méromorphes, mais à des fonctions ayant un point essentiel isolé commun, il est aisé (au moins dans le cas d'une matrice complètement réductible) d'établir des relations d'inégalité, analogues aux précédentes, pour celles des intégrales dont la partie réelle demeure uniforme par circulation autour du point. Les théorèmes des sections suivantes, énoncés pour des fonctions d'une variable méromorphes dans tout le plan complexe, seront donc vrais aussi pour des fonctions à point essentiel isolé.

IV. — Les fonctions méromorphes liées par l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension.

9. Soit une surface algébrique S d'irrégularité supérieure à 2, que nous supposons placée dans l'espace à trois dimensions, où elle a pour équation $f(x, y, z) = 0$. Les coordonnées d'un point P de la surface sont supposées fonctions méromorphes, dans tout le plan complexe, d'une variable t.

Soient U, V, W trois intégrales simples de première espèce linéairement indépendantes de la surface.

Supposons d'abord qu'il existe deux combinaisons linéaires

$$\alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W$$

de ces intégrales, qui soient fonctions l'une de l'autre. En posant

$$\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C = 0,$$

nous avons, identiquement, sur la surface S, les intégrales étant considérées comme fonctions de x et y :

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & A \\ V'_x & V'_y & B \\ W'_x & W'_y & C \end{vmatrix} = 0,$$

et la réciproque a lieu aussi. Or le cas où la surface S jouit de la propriété précédente se traite immédiatement. Car (n° **6**) la surface possède alors un faisceau irrationnel de genre au moins égal à 2; le point P, dont les coordonnées sont fonctions méromorphes, ne peut décrire qu'une courbe de ce faisceau qui est, par suite, unicursale ou elliptique. Par exemple, pour un cylindre de genre 3, toutes les courbes du faisceau sont unicursales; pour la surface image des couples de points d'une courbe de genre 2 et d'une courbe de genre 1, toutes les courbes du faisceau sont elliptiques. Il est, de même, aisé de trouver des surfaces d'irrégularité au moins égale à 3, possédant un faisceau irrationnel de genre au moins égal à 2, qui contienne un nombre fini de courbes unicursales ou elliptiques, ou bien qui n'en contienne aucune.

Passons au cas général où dans le système linéaire d'intégrales déterminé par U, V, W, il n'y en a pas deux qui soient fonctions l'une de l'autre; on n'a pas alors d'identité de la forme (4). Nous considérons toujours U, V, W comme fonctions de x et y; x et y elles-mêmes sont fonctions de t. Nous avons :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &dU = U'_x\,dx + U'_y\,dy;\quad dV = V'_x\,dx + V'_y\,dy;\quad dW = W'_x\,dx + W'_y\,dy;\\ &d^2U = U'_x\,d^2x + U'_y\,d^2y + U''_{x^2}\,dx^2 + 2U''_{xy}\,dx\,dy + U''_{y^2}\,dy^2,\\ &d^2V = V'_x\,d^2x + V'_y\,d^2y + V''_{x^2}\,dx^2 + 2V''_{xy}\,dx\,dy + V''_{y^2}\,dy^2,\\ &d^2W = W'_x\,d^2x + W'_y\,d^2y + W''_{x^2}\,dx^2 + 2W''_{xy}\,dx\,dy + W''_{y^2}\,dy^2. \end{aligned}\right.$$

En éliminant dx, dy, d^2x, d^2y et résolvant par rapport à x et y, on obtiendra pour x et y des fonctions algébriques de dU, dV, dW, d^2U, d^2V, d^2W. Si, donc, cette résolution est possible, comme cela aura lieu *en général*, on sera conduit à une impossibilité en supposant x, y, z fonctions méromorphes de t; car, U, V, W étant alors des fonctions entières de t, elles ont, d'après le lemme III, un $\widehat{a}$ au plus égal à $\widehat{gm}(r, P)$: leurs dérivées par rapport à t ont alors, d'après le lemme I, un $\widehat{m}$ presque partout au plus égal à $\log \widehat{gm}(r, P)$; et, par suite, d'après le lemme II, toute fonction algébrique de ces dérivées, supposée méromorphe en t, a un $\widehat{gm}$ presque partout au plus égal à la même expression; ainsi x, y et, par suite aussi z, auraient presque partout un $\widehat{gm}$ au plus égal à $\log \widehat{gm}(r, P)$, ce qui est absurde.

Il s'agit maintenant de voir à quelles conditions le raisonnement précédent est valable. Or, il le sera certainement, si le jacobien, par rapport à x, y et leurs dérivées, des seconds membres des équations (5) (supposées divisées par dt et dt^2), n'est pas nul quel que soit t.

En effet, supposons que, pour une certaine valeur t_0, il soit différent de zéro; pour des valeurs des dérivées U', V', W', U'', V'', W'' suffisamment voisines de celles U'_0, V'_0, ... qu'elles ont à ce moment, x, y et leurs dérivées seront développables en séries entières par rapport aux différences $U' - U'_0$, $V' - V'_0$, ...; ainsi se trouvera parfaitement défini le système (uniforme ou multiforme) des fonctions algébriques que sont x, y et leurs dérivées par rapport aux dérivées des intégrales; il n'est d'ailleurs pas à craindre que l'on ait une indétermination quelconque lorsqu'on remplacera ces dernières par leurs expressions en t, puisque dans le voisinage de t_0 l'on a des fonctions holomorphes.

Nous sommes donc amené à examiner la signification de l'annulation, quel que soit t, du jacobien dont il vient d'être question, c'est-à-dire de l'équation :

$$(6)\quad \begin{vmatrix} U''_{x^2}\,dx + U''_{xy}\,dy & U'_x & 0 & \dots \\ V''_{x^2}\,dx + V''_{xy}\,dy & V'_x & 0 & \dots \\ W''_{x^2}\,dx + W''_{xy}\,dy & W'_x & 0 & \dots \\ U''_{x^2}\,d^2x + U''_{xy}\,d^2y + U'''_{x^3}\,dx^2 + 2U'''_{x^2y}\,dx\,dy + U''_{xy^2}\,dx\,dy^2 & 2(U''_{x^2}\,dx + U''_{xy}\,dy) & U'_x & \dots \\ V''_{x^2}\,d^2x + V''_{xy}\,d^2y + V'''_{x^3}\,dx^2 + 2V'''_{x^2y}\,dx\,dy + V'''_{xy^2}\,dx\,dy^2 & 2(V''_{x^2}\,dx + V''_{xy}\,dy) & V'_x & \dots \\ W''_{x^2}\,d^2x + W''_{xy}\,d^2y + W'''_{x^3}\,dx^2 + 2W'''_{x^2y}\,dx\,dy + W'''_{xy^2}\,dx\,dy^2 & 2(W''_{x^2}\,dx + W''_{xy}\,dy) & W'_x & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

où les trois dernières colonnes du déterminant se déduisent des trois premières par la permutation de x et de y.

C'est là une équation différentielle du second ordre entre x et y, dont l'intégrale générale est une famille de courbes de la surface S, dépendant de deux constantes arbitraires; nous allons voir que cette famille n'est autre que celle des courbes représentées par l'équation (4).

Formons, en effet, l'équation différentielle de cette dernière famille; on peut remplacer l'équation (4) par le système

$$U'_x\lambda + U'_y\mu + A = V'_x\lambda + V'_y\mu + B = W'_x\lambda + W'_y\mu + C = 0.$$

En le différentiant deux fois, il vient :

$$(U''_{x^2}dx + U''_{xy}dy)\lambda + U'_x d\lambda + U''_{xy}dx + U''_{y^2}dy)\mu + U'_y d\mu = 0,$$

$$\begin{aligned}
&(U''_{x^2}d^2x + U''_{xy}d^2y + U'''_{x^3}dx^2 + 2U'''_{x^2y}dx\,dy + U'''_{xy^2}dy^2)\lambda \\
&\qquad + 2(U''_{x^2}dx + U''_{xy}dy)\,d\lambda + U'_x d^2\lambda \\
&+ (U''_{xy}d^2x + U''_{y^2}d^2y + U'''_{x^2y}dx^2 + 2U'''_{xy^2}dx\,dy + U'''_{y^3}dy^2)\mu \\
&\qquad + 2(U''_{xy}dx + U''_{y^2}dy)\,d\mu + U'_y d^2\mu = 0
\end{aligned}$$

et quatre équations analogues en V et W; éliminant λ, μ, $d\lambda$, $d\mu$, $d^2\lambda$, $d^2\mu$ entre ces six équations, l'on obtient bien l'équation (6).

C'est donc à une telle équation que doivent satisfaire les coordonnées du point P. Comme nous sommes placé dans le cas où elle n'est jamais vérifiée identiquement sur la surface, quelles que soient les constantes A, B, C, la courbe Γ décrite par le point P est nécessairement une courbe *algébrique;* et il résulte d'une identité classique de Nœther qu'elle appartiendra à l'intersection de la surface S de degré m, avec une surface adjointe d'ordre $m - 4$, intersection d'équation

$$[\overline{U}'_x \overline{V}'_y - \overline{U}'_y \overline{V}'_x] f'_z = Q(x, y, z) = 0.$$

Cette courbe Γ, étant algébrique, est nécessairement *unicursale* ou *elliptique.*

10. Distinguons deux cas suivant que Γ est, ou bien soit unicursale, soit elliptique, mais telle que toutes les intégrales simples de première espèce soient constantes sur elle, ou bien au contraire elliptique et telle qu'il y ait de telles intégrales variables sur elle. Nous allons voir qu'il n'y a qu'un nombre fini de courbes Γ de l'une et l'autre catégorie.

Dans le premier cas, considérons la surface adjointe d'ordre $m - 4$ fournie par deux intégrales arbitraires non fonctions l'une de l'autre : elle contient la courbe Γ. Ainsi, il y a au plus un nombre fini de courbes de cette catégorie.

Dans le second cas, la considération des périodes le long des cycles de la courbe Γ prouve que la matrice de Riemann de S est isomorphe à une matrice dont toutes les lignes, sauf une, commencent par deux zéros consécutifs, et contient par suite une sous-matrice d'ordre $q - 1$, donc aussi une sous-matrice d'ordre 1 ; ainsi, il existe une intégrale de S n'ayant que deux périodes. La courbe Γ appartient à la surface canonique déterminée par deux intégrales quelconques du système parfait complémentaire de l'intégrale à deux périodes; et elle n'appartient pas à celle déterminée par une de ces intégrales et l'intégrale à deux périodes, puisque celle-ci n'est pas constante sur Γ ; appartenant à certaines surfaces canoniques, sans appartenir à toutes, elle appartient au système canonique. A une intégrale à deux périodes ne peut, d'après ce qui précède, correspondre de cette manière qu'un nombre fini de courbes Γ. Si nous prouvons que les intégrales à deux périodes ellesmêmes ne peuvent être qu'en nombre fini, notre assertion sera établie. Or, d'après le théorème B, toute surface d'irrégularité q supérieure à 2 — hormis le cas, qui n'est pas à considérer ici, où toutes les intégrales sont fonctions l'une de l'autre — admet pour transformée rationnelle une surface section d'une variété abélienne de rang 1 à q dimensions, avec correspondance de part et d'autre entre les intégrales. De la sorte vient correspondre à Γ, sur la variété abélienne, une courbe elliptique le long de laquelle une intégrale de cette variété n'est pas constante, c'est-à-dire une trajectoire d'un sous-groupe algébrique à un paramètre (elliptique) du groupe ∞^q des transformations birationnelles; il peut arriver qu'il existe une infinité de tels sous-groupes correspondant à une infinité d'intégrales à deux périodes, mais les degrés des trajectoires croissent indéfiniment pour toute suite infinie de sous-groupes. Ainsi l'existence sur S d'une infinité d'intégrales à deux périodes correspondant à des courbes Γ est contradictoire avec le fait que Γ qui, dans l'hypothèse actuelle, appartient au système canonique, est de degré limité (¹).

On reconnaît immédiatement que le raisonnement de l'alinéa précédent subsiste pour toute surface S d'irrégularité supérieure à 2, même possédant des intégrales fonctions l'une de l'autre, sous la seule condition qu'il n'existe pas deux systèmes parfaits complémentaires

(¹) Ce mode de démonstration est susceptible d'extension à des cas plus généraux. Mais on peut ici, après avoir prouvé la limitation du degré des courbes elliptiques de la surface, raisonner plus simplement. D'après la classification de Halphen, il n'y a qu'un nombre fini de types de courbes gauches de degré déterminé, donc aussi de degré et de genre déterminés; les courbes elliptiques de la surface constituent donc un nombre fini de familles algébriques distinctes; elles sont donc en nombre fini. Le résultat de l'alinéa suivant s'établit de même.

d'intégrales, l'un formé d'une seule intégrale, n'ayant d'ailleurs que deux périodes, l'autre formé d'intégrales toutes fonctions d'une seule d'entre elles. Or s'il en existe, il n'y aura qu'un nombre fini de courbes elliptiques si la surface n'est pas l'image des couples de points d'une courbe elliptique et d'une courbe de genre au moins égal à 2. Ainsi, *sur toute surface d'irrégularité supérieure à 2 qui ne rentre pas dans ce dernier cas, il existe au plus un nombre fini de courbes elliptiques sur lesquelles toutes les intégrales ne soient pas constantes.*

Que l'existence d'intégrales à deux périodes, c'est-à-dire de faisceaux elliptiques, ne suffise pas pour affirmer l'existence de telles courbes, c'est ce qui résulte immédiatement de la considération d'une surface section générique d'une variété abélienne de rang 1 à matrice complètement réductible.

Nous pouvons résumer dans l'énoncé suivant les principaux résultats qui viennent d'être obtenus :

Théorème C. — *Si les coordonnées d'un point d'une surface algébrique d'irrégularité supérieure à 2 sont des fonctions méromorphes d'une variable, la courbe décrite par ce point est algébrique, et, par suite, unicursale ou elliptique.*

Pour qu'il existe sur la surface une infinité de courbes unicursales ou elliptiques, il faut et il suffit qu'elle appartienne à la famille des réglées, ou bien qu'elle contienne un faisceau de courbes elliptiques: le genre du faisceau est égal à l'irrégularité de la surface, à moins que celle-ci ne soit l'image des couples de points de deux courbes, dont une elliptique, auquel cas il lui est inférieur d'une unité.

Si la surface ne contient aucun faisceau de courbes unicursales ou elliptiques, elle ne peut contenir au plus qu'un nombre fini de telles courbes.

Si la matrice de Riemann de la surface est pure ou du moins ne contient aucune sous-matrice d'ordre 1, *il n'existe sur la surface aucune courbe elliptique sur laquelle toutes les intégrales de différentielles totales de première espèce ne se réduisent pas à des constantes.*

11. Passons maintenant au cas des variétés de dimension quelconque dont l'irrégularité surpasse la dimension; nous ne le traiterons pas de manière aussi détaillée que le cas des surfaces; il est aisé cependant de voir que la partie essentielle de la démonstration précédente subsiste sans modifications.

Envisageons, en effet, pour fixer les idées, une variété algébrique tridimensionnelle, d'irrégularité supérieure à 3, définie dans l'hyperespace par une certaine relation $F(x, y, z, t) = 0$. S'il existe trois intégrales simples de première espèce fonctions de deux seulement d'entre elles, la variété est un réseau de courbes birationnellement identique à une surface d'irrégularité supérieure à 2; si cela n'a pas lieu, on montre comme plus haut que, U, V, W, R étant quatre intégrales, des fonctions méromorphes x, y, z, t d'une variable satisfaisant à l'équation de la variété vérifient certainement une relation :

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z & A \\ V'_x & V'_y & V'_z & B \\ W'_x & W'_y & W'_z & C \\ R'_x & R'_y & R'_z & D \end{vmatrix} = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à x, y, z, variables indépendantes déterminant le point de la variété. Il résulte aisément de là et de ce qui a été vu pour les surfaces, que la courbe décrite appartient à une surface d'irrégularité au plus égale à 2 appartenant à la variété donnée, ou bien est algébrique, unicursale ou elliptique (même, dans ce dernier cas, elle appartient visiblement à une surface d'irrégularité au plus égale à 2, mais qui ne peut pas toujours être prise sur la variété donnée).

Le raisonnement est général, et il suffit de l'avoir développé pour les variétés de dimension inférieure à m pour pouvoir le développer pour une variété de dimension m. En effet, on voit alors comme précédemment que la courbe est nécessairement située sur une variété algébrique de dimension $m-1$; si l'irrégularité de celle-ci dépasse encore sa dimension, on obtiendra de même une variété de dimension $m-2$ contenant la courbe et, en continuant, on arrivera certainement à une variété, sous-variété de la proposée contenant la courbe, dont l'irrégularité ne surpasse pas la dimension (il est alors évident que la courbe est nécessairement située dans une variété de dimension $m - 1$ dont l'irrégularité ne dépasse pas la dimension, mais on ne peut pas toujours prendre pour cette variété une sous-variété de la proposée).

On peut remplacer la considération du signe de la différence de l'irrégularité et de la dimension par celle plus précise de la dépendance ou de l'indépendance des intégrales. Nous allons montrer en effet qu'une *courbe décrite par un point dont les coordonnées sont fonctions méromorphes d'une variable, située sur une variété de dimension quelconque dont les intégrales ne sont pas indépendantes, est nécessairement située sur une sous-variété algébrique de celle-ci.* Remarquons pour cela que la variété donnée est l'ensemble des variétés (algébriques) correspondant à des valeurs fixes des intégrales; cet ensemble est birationnellement identique à une variété dont l'irrégularité dépasse la dimension; par conséquent, à la courbe donnée correspond sur cette dernière variété une courbe située sur une sous-variété de celle-ci; revenant à la variété donnée, on voit que la courbe donnée appartient à une de ses sous-variétés. En répétant un nombre suffisant de fois cette opération, *on arrivera nécessairement à une sous-variété à intégrales indépendantes.*

Étant donnée une variété irrégulière, il est aisé de voir que si elle possède une sous-variété sur laquelle certaines de ses intégrales sont constantes, certaines autres ne l'étant pas, la matrice de la proposée est certainement impure. Or, si nous considérons la sous-variété à intégrales indépendantes obtenue à la fin de l'alinéa précédent, certaines des intégrales de la variété donnée sont certainement constantes sur elle. Donc si la matrice de la variété donnée est pure, toutes ses intégrales sont constantes sur la sous-variété en question.

Résumons, dans le théorème suivant, les plus importants des résultats que nous venons d'obtenir :

Théorème D. — *Une courbe décrite sur une variété algébrique par un point dont les coordonnées sont fonctions méromorphes d'une variable, est nécessairement située sur une variété algébrique contenue dans la proposée, dont toutes les intégrales simples de première espèce sont indépendantes, et dont par suite l'irrégularité ne dépasse pas la dimension.*

Si une variété algébrique à intégrales simples de première espèce non indépendantes a une matrice de Riemann pure, toutes ces intégrales sont constantes sur chacune de ses sous-variétés à intégrales simples de première espèce indépendantes.

Étant donnée une sous-variété quelconque d'une variété irrégulière, on peut observer que les intégrales constantes sur cette sous-variété forment un système parfait et que le système parfait complémentaire fournit un système parfait de même dimension d'intégrales de la sous-variété, comprenant la totalité ou une partie seulement de ces dernières.

V. — Théorèmes en termes finis.

12. Dans la présente section vont être données d'abord les propositions en termes finis correspondant aux résultats de la section précédente. Pour les démontrer, il convient de reprendre pièce par pièce les raisonnements de cette dernière section, en traduisant chacun d'eux en termes finis; la chaîne des déductions étant entièrement analogue à celle du Mémoire déjà cité des *Annales de l'École Normale*, il est inutile de la développer ici. Rappelons seulement le rôle important joué par la notion de nullité approchée d'une fonction méromorphe dans un domaine : une telle fonction est approximativement nulle lorsqu'elle est très petite à tout l'intérieur, sauf peut-être dans des contours de longueur totale très petite. Pour une fonction holomorphe, il ne pouvait pas y avoir de contours exceptionnels.

Au théorème C correspond le suivant :

Théorème E. — *Soit une surface d'irrégularité supérieure à deux. Trois fonctions d'une variable t, méromorphes dans le cercle-unité, sont supposées satisfaire à son équation :*

1° *Si la surface ne contient aucune courbe elliptique sur laquelle toutes ses intégrales simples de première espèce ne se réduisent pas à des constantes* (*ce qui arrivera certainement si sa matrice de Riemann est pure*), *la variation d'une de ces intégrales, déterminée, mais quelconque, entre deux points t_1 et t_2 intérieurs au cercle-unité, admet une borne supérieure ne dépendant que de la* *surface, de l'intégrale considérée et de la distance non-euclidienne*

$$2 \operatorname{arg\,th} \sqrt{\frac{(t_1 - t_2)(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)}{(1 - t_1 \bar{t}_2)(1 - \bar{t}_1 t_2)}}.$$

2° *Si la surface contient des courbes elliptiques sur lesquelles toutes ses intégrales ne soient pas constantes, il peut y avoir des intégrales constantes sur toutes ces courbes, formant nécessairement un système parfait. La variation entre t_1 et t_2 d'une intégrale de ce système admet encore une borne supérieure qui ne dépend que de la surface, de l'intégrale considérée, et de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2.*

α. *Si par le point* P_1 *correspondant à t_2 ne passe aucune courbe elliptique de l'espèce considérée, la variation entre t_1 et t_2 d'une intégrale quelconque de la surface admet une borne supérieure ne dépendant que de la surface, de l'intégrale considérée, de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2 et du point* P_1.

β. *Si par* P_1 *passe une seule courbe elliptique de cette sorte, la même propriété a lieu pour toute intégrale constante sur la courbe (c'est-à-dire appartenant au système complémentaire de l'intégrale à deux périodes correspondante).*

γ. *Si par* P_1 *passent plusieurs courbes elliptiques de cette sorte (nécessairement en nombre fini), la même propriété a lieu pour toute intégrale constante sur toutes ces courbes. De plus, à chacune des courbes correspond un système d'inégalités bornant les variations des intégrales constantes sur cette courbe (chaque inégalité ne dépendant toujours que des quatre éléments susnommés) en sorte que pour des fonctions déterminées de t satisfaisant à l'équation de la surface, l'un au moins de ces systèmes, en nombre égal à celui des courbes, soit nécessairement vérifié.*

Au théorème D correspond le suivant :

Théorème F. — *Soit une variété algébrique dont l'irrégularité surpasse la dimension, ou plus généralement dont les intégrales simples de première espèce ne soient pas indépendantes. Des fonctions d'une variable t, méromorphes dans le cercle-unité, sont supposées satisfaire à son équation :*

1° *Si la variété ne contient aucune sous-variété à intégrales simples de première espèce indépendantes, sur laquelle ses propres intégrales ne se réduisent pas toutes à des constantes (ce qui arrivera nécessairement si sa propre matrice de Riemann est pure), la variation d'une de ces intégrales, déterminée mais quelconque entre deux points t_1 et t_2 intérieurs au cercle-unité, admet une borne supérieure ne dépendant que de la surface, de l'intégrale considérée, et de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2.*

2° *Si la variété contient des sous-variétés à intégrales indépendantes sur chacune desquelles ses intégrales ne soient pas toutes constantes, il peut exister des intégrales constantes sur chacune de ces sous-variétés formant nécessairement un système parfait. La variation entre t_1 et t_2 d'une intégrale de ce système admet encore une borne supérieure qui ne dépend que de la variété, de l'intégrale considérée et de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2.*

α. *Si par le point P_1, correspondant à t_1, ne passe aucune sous-variété de l'espèce considérée, la variation entre t_1 et t_2 d'une intégrale quelconque de la variété admet une borne supérieure ne dépendant que de la variété, de l'intégrale considérée, du point P_1 et de la distance non-euclidienne de t_1 et de t_2.*

β. *Si par P_1 passe une seule sous-variété de cette sorte, la même propriété a lieu pour toute intégrale constante sur la sous-variété.*

γ. *Si par P_1 passent plusieurs sous-variétés de cette sorte, elles sont toutes situées sur un nombre fini d'entre elles, et la même propriété a lieu pour toute intégrale constante sur toutes. De plus, à chacune de ces sous-variétés en nombre fini correspond un système d'inégalités bornant les variations des intégrales constantes sur elle (chaque inégalité ne dépendant toujours que de la variété, de l'intégrale, du point P_1 et de la distance non-euclidienne), en sorte que pour des fonctions déterminées de t vérifiant l'équation de la variété, l'un au moins de ces systèmes, en nombre égal à celui des sous-variétés, soit nécessairement vérifié.*

15. Nous allons donner maintenant des théorèmes relatifs à des fonctions de plusieurs variables vérifiant l'équation d'une variété d'irrégularité supérieure à sa dimension, et nous nous bornerons d'ailleurs au cas où les variables sont en nombre égal à cette dimension. Le principe de l'extension au cas de plusieurs variables de la méthode des valeurs moyennes logarithmiques de MM. Nevanlinna, a été exposé dans la Note citée des *Comptes rendus*, et il n'y a pas de difficulté à étendre à cet ordre d'idées les lemmes I, II et III (le dernier tout au moins pour une variété à matrice complètement réductible).

THÉORÈME G. — *Soit une surface d'irrégularité q telle qu'il n'existe pas $q-1$ linéairement indépendantes de ses intégrales qui soient fonctions d'une seule d'entre elles; soient trois fonctions de deux variables, satisfaisant à l'équation de la surface, et méromorphes dans l'hypersphère-unité. Alors le jacobien à l'origine de deux d'entre elles, holomorphes dans le voisinage, admet une borne supérieure dépendant uniquement du point de la surface correspondant à l'origine.*

Pour établir ce théorème, observons que (comme nous le verrons plus loin) la supposition faite au sujet des intégrales équivaut à celle-ci : les rapports respectifs des $\frac{q(q-1)}{2}$ jacobiens de ces q intégrales prises deux à deux ne sont pas fonctions d'un seul d'entre eux. Ces jacobiens étant, d'après l'identité de Noether, proportionnels à des polynomes canoniques, il résulte aisément des lemmes I, II, III étendus au cas de deux variables que la surface n'est pas uniformisable par des fonctions méromorphes partout à distance finie. Ce fait résultait de ce qui a été vu dans les deux sections précédentes, mais sa démonstration actuelle, d'ailleurs beaucoup plus courte, permet de passer immédiatement à la proposition en termes finis qu'il s'agissait d'établir. Le raisonnement à employer est celui de l'article de M. R. Nevanlinna inséré aux *Gött. Nachr.* déjà cité; il consiste à établir que si le jacobien des deux fonctions à l'origine dépasse par exemple l'unité, les fonctions sont bornées supérieurement en valeur moyenne logarithmique à l'intérieur de l'hypersphère-unité, et par suite le jacobien à l'origine est borné supérieurement lui aussi.

Observons que l'hypothèse faite au sujet des intégrales équivaut à celle-ci : l'irrégularité q dépasse deux, et la surface ne contient aucun faisceau irrationnel de genre q ou $q-1$.

Établissons maintenant le point dont la démonstration a été réservée, à savoir l'équivalence de cette même hypothèse avec celle que les rapports respectifs des jacobiens des q intégrales, prises deux à deux, ne sont pas fonctions d'un seul d'entre eux.

Tout d'abord, si $q-1$ linéairement distinctes des intégrales sont fonctions d'une seule d'entre elles, les rapports des jacobiens sont fonctions d'un seul d'entre eux; en effet, les jacobiens sont alors visiblement des combinaisons linéaires des $q-1$ d'entre eux formés avec chacune des $q-1$ intégrales fonctions l'une de l'autre, et la $q^{\text{ième}}$ intégrale; et le rapport de deux de ces $q-1$ jacobiens, formés respectivement avec les intégrales U et V fonctions l'une de l'autre, est égal à $\frac{dU}{dV}$.

Pour démontrer la réciproque, considérons trois intégrales I, J, K, dont les trois jacobiens ont par hypothèse des rapports fonctions l'un de l'autre; cela signifie que le point de coordonnées I, J, K, décrit une surface développable, dont les génératrices correspondent aux courbes le long desquelles les rapports des jacobiens sont constants, lesquelles courbes forment un faisceau. Il résulte de là que le long des mêmes courbes, les q intégrales se réduisent linéairement à une seule d'entre elles; autrement dit, le système, nécessairement parfait, des intégrales demeurant constantes le long d'une de ces courbes à la dimension $(q-1)$; ce système ne pouvant changer lorsque la courbe varie, il y a bien $q-1$ intégrales fonctions d'une seule d'entre elles. Il y a de plus une intégrale à deux périodes. La surface possède un faisceau de genre $q-1$ et un faisceau elliptique.

Bien entendu, il y a en outre, pour ne pas satisfaire à l'hypothèse du théorème G, les surfaces possédant un faisceau de genre q, implicitement écartées dans les deux alinéas précédents.

Le théorème plus général suivant s'établit de manière analogue :

Théorème H. — *Soit une variété algébrique de dimension d et d'irrégularité q, telle qu'il n'existe pas $q-1$ linéairement indépendantes de ses intégrales qui soient fonctions de $d-1$ d'entre elles; soient $d+1$ fonctions de d variables, satisfaisant à l'équa-*

tion de la variété, et méromorphes dans l'hypersphère-unité. Alors le jacobien à l'origine de d d'entre elles, holomorphes dans le voisinage, admet une borne supérieure dépendant uniquement du point de la variété correspondant à l'origine.

L'hypothèse faite sur les intégrales admet encore ici une interprétation purement géométrique : l'irrégularité doit dépasser la dimension et dans le cas, par exemple, d'une variété tridimensionnelle, celle-ci ne doit contenir ni réseau de courbes d'irrégularité q ou $q-1$, ni faisceau de surfaces de genre q, $q-1$ ou $q-2$ (l'énoncé est analogue pour une valeur quelconque de d).

VI. — Extension des résultats précédents à des variétés sur lesquelles sont imposées certaines sous-variétés lacunaires.

14. La méthode des sections précédentes peut être étendue au cas où, sur la variété considérée (qui peut être irrégulière ou régulière), sont imposées au système de fonctions envisagé certaines *sous-variétés lacunaires* de dimension inférieure d'une unité à celle de la variété donnée. Il y a lieu, à cet effet, d'introduire les intégrales simples de troisième espèce admettant les sous-variétés lacunaires pour variétés logarithmiques.

Il serait aisé d'obtenir par ce moyen des théorèmes relatifs aux variétés algébriques les plus générales, admettant un nombre suffisant de sous-variétés lacunaires en position générale. Mais cela ne présenterait actuellement que peu d'intérêt, car, comme l'on ne sait encore que bien peu de chose sur les systèmes de fonctions satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique générale, sans sous-variétés lacunaires, il serait impossible de déterminer ici le rôle exact joué par ces dernières, et il pourrait même fort bien arriver que celui-ci fût en réalité inexistant, ou du moins de pure forme, les théorèmes obtenus demeurant vrais, avec peut-être d'insignifiantes modifications, après suppression de toutes les sous-variétés lacunaires, ceci sans qu'on eût le moyen de le savoir. Aussi nous bornerons-nous à étudier, de façon d'ailleurs sommaire, des cas particuliers, suffisamment simples pour que l'on puisse se rendre compte sans peine de l'influence sur le résultat des différentes parties de l'hypothèse, au moyen des seules connaissances acquises jusqu'à ce jour.

15. Considérons une surface hyperelliptique de rang un, correspondant point par point, sans exception, au parallélotope des périodes (c'est-à-dire telle que les quatre fonctions thêta, coordonnées homogènes d'un point de la surface, soient sans zéros communs); soit sur la surface une courbe algébrique; et soit aussi sur la surface une courbe décrite par un point dont les coordonnées soient fonctions méromorphes d'une variable t, ne rencontrant pas cette courbe algébrique.

Envisageons la matrice de Riemann de la surface: en doublant les deux éléments de la première colonne sans changer les six autres, nous obtenons une nouvelle matrice, qui peut être considérée comme celle d'une nouvelle surface hyperelliptique correspondant également sans exception à son propre parallélotope, lequel s'obtient en doublant par une translation convenable celui de la surface donnée. De la sorte est réalisée entre les deux surfaces une correspondance telle qu'à un point de la première correspondent deux points de la seconde, ces deux points ne venant jamais coïncider. Il résulte de là qu'à la courbe algébrique donnée sur la première (¹) correspondent deux courbes algébriques de la seconde; à la courbe décrite par le point dépendant de t correspondent également deux courbes de la seconde, mais il suffira de considérer l'une d'elles.

Les deux courbes algébriques obtenues sur la seconde surface sont représentées par des équations

$$\Phi(u, v) = 0, \qquad \Phi(u-a, v-b) = 0,$$

$\Phi(u, v)$ étant une certaine fonction intermédiaire des arguments des fonctions abéliennes (²). L'expression

$$\log \frac{\Phi(u-a, v-b)}{\Phi(u, v)}$$

(¹) Ceci ne s'applique qu'à des courbes particulières de la surface; *voir* l'addendum.

(²) P. Appell, *Journal de Mathématiques*, 1891, p. 195; G. Humbert, *ibid.*, 1893, p. 42-43.

est une intégrale de différentielle totale de troisième espèce attachée à la seconde surface, ayant pour courbes logarithmiques les deux courbes en question. Le raisonnement de la section IV s'applique alors sans modification au cas actuel où, au lieu de trois intégrales de première espèce, on en a deux de première et une de troisième espèce : la courbe décrite sur la seconde surface par le point dont les coordonnées sont fonctions méromorphes de t, et qui ne vient sur aucune des deux courbes algébriques, est nécessairement *algébrique;* il en est donc de même pour celle décrite sur la première surface.

Or la surface donnée, étant représentable sans exception sur le champ hyperelliptique, ne contient aucune courbe unicursale; la courbe décrite est donc elliptique; la surface est donc de type elliptique (autrement dit, sa matrice est réductible). Il est alors clair que la courbe algébrique donnée sur elle ne peut être qu'une courbe elliptique du même faisceau que celle décrite par le point dépendant de t (ou un ensemble de plusieurs courbes de ce faisceau).

Ce qui précède s'étend aux surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang supérieur à 1, puisqu'une telle surface représente une involution d'une surface de rang 1 (d'ailleurs elliptique), ne possédant pas de points unis [1].

Il serait intéressant d'étudier aussi le cas des surfaces régulières, lesquelles représentent une involution d'une surface de rang 1 n'ayant qu'un nombre fini de points unis, correspondant à un groupe fini de transformations birationnelles de la surface de rang 1 [2]. Il est très probable que l'on trouvera encore que la courbe décrite, si elle existe, est nécessairement algébrique. Si la surface est elliptique, on pourra encore prendre pour courbe lacunaire une courbe d'un faisceau (ici rationnel) de courbes elliptiques, et la courbe décrite sera une courbe quelconque du même faisceau. Mais ici le problème pourra admettre des solutions, même si la surface ne satisfait à aucune condition arithmétique particulière. Considérons, en effet, une surface de Kummer : elle est bien représentable point par couple, sans exception, sur le

[1] F. ENRIQUES et F. SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta mathematica*, t. 32, p. 329.

[2] L. GODEAUX, *Ibid.*, p. 338 (*Rendic. Acc. Lincei*, t. 23, 1914, p. 408).

champ hyperelliptique; elle possède seize coniques dont deux quelconques se coupent en deux des seize points nodaux; ces deux coniques peuvent être prises pour les deux courbes, l'une lacunaire, l'autre décrite par le point dépendant de t. Il est probable que l'on a des propriétés analogues pour les autres surfaces hyperelliptiques régulières.

On peut rassembler dans l'énoncé suivant l'essentiel des résultats obtenus sur les surfaces irrégulières, et les principales propositions en termes finis correspondantes :

Théorème I. — *Soit une surface hyperelliptique irrégulière représentable sans exception dans le champ quadruplement périodique, point par point si son rang est* 1, *point par système de r points si son rang est r ($r = 2, 3, 4, 6$). S'il existe sur elle une courbe algébrique, lacunaire pour un point dont les coordonnées sont fonctions méromorphes d'une variable, la courbe en question et celle décrite par le point sont deux courbes elliptiques d'un même faisceau. La surface est donc nécessairement elliptique, même si son rang est* 1.

Soient trois fonctions d'une variable t, méromorphes dans le cercle-unité, satisfaisant à l'équation d'une surface hyperelliptique irrégulière représentable sans exception dans le champ quadruplement périodique et admettant pour courbe lacunaire une courbe algébrique de cette surface. Si cette courbe n'est pas elliptique (ce qui aura lieu nécessairement si la surface ne l'est pas elle-même), la variation d'une intégrale de première espèce de la surface entre deux points t_1, t_2 intérieurs au cercle-unité, admet une borne supérieure (¹) *ne dépendant que de la surface, de la courbe lacunaire, de l'intégrale considérée et de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2. Si la courbe lacunaire est elliptique, la variation entre t_1 et t_2 de l'intégrale de première espèce constante sur elle jouit de la propriété précédente (cette intégrale existe certainement, et est unique,*

(¹) L'exactitude de cette propriété, si près que soient de la courbe lacunaire les points correspondant à t_1 et t_2, résulte de la démonstration même, qui remplace la courbe par deux (ou, si l'on veut, plusieurs) courbes lacunaires; tout point de la nouvelle surface est alors éloigné de l'une au moins d'entre elles.

à moins que, la surface étant de rang supérieur à 1, *la courbe lacunaire n'appartienne pas à un faisceau elliptique, mais à un faisceau rationnel de courbes elliptiques); si la courbe lacunaire appartient à un faisceau rationnel de courbes elliptiques, qui dépendent d'un paramètre* λ, *l'expression* $gm[\rho, \lambda(t)]$ *admet pour* $\rho < 1$ *une borne supérieure ne dépendant que de la surface de la courbe lacunaire, du choix accompli entre les* ∞^3 *manières de définir* λ, *de la courbe du faisceau sur laquelle se trouve le point correspondant à l'origine, et de* ρ.

16. En opérant comme il a été indiqué au paragraphe V, on obtient sur le même sujet des théorèmes relatifs à des fonctions de deux variables. Pour une surface irrégulière, il n'y a pas de difficulté, puisqu'elle représente toujours une involution sans points unis d'une surface de rang *un*. Une surface régulière au contraire représente une involution ayant un nombre fini de coïncidences; si trois fonctions de deux variables, méromorphes dans un domaine linéairement simplement connexe, satisfont à l'équation de la surface régulière, on en déduit par inversion trois fonctions méromorphes dans le même domaine, satisfaisant à l'équation de la surface de rang *un*; en effet, l'inversion ne pourrait cesser d'être uniforme qu'aux points du domaine donnant des points de la surface régulière correspondant à des points de coïncidence de l'involution; il y aurait dans ce cas un point isolé de non-uniformité, ce qui est impossible. Ceci suppose toutefois qu'il n'existe pas dans le domaine de courbe le long de laquelle les trois fonctions demeurent constamment égales aux trois coordonnées d'un des points multiples en question de la surface régulière. Il est aisé de voir que si ce fait a lieu, l'inversion peut n'être pas uniforme; considérons en effet un point conique d'une surface de Kummer; on aura approximativement par exemple (X, Y, Z) étant le point de cette surface, (x, y, z) celui de la surface de rang 1, u et v les deux variables :

$$X = x^2 = u^3, \qquad Y = xy = u^2 v, \qquad Z = y^2 = uv^2,$$

d'où

$$x = u\sqrt{u}, \qquad y = v\sqrt{u};$$

il n'y a donc pas uniformité de l'inversion; on a constamment

$$X = Y = Z = 0$$

le long de la droite $u = 0$.

C'est donc seulement sous la réserve que, dans le cas d'une surface régulière, il ne se produise pas la circonstance spéciale qui vient d'être envisagée, que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème J. — *Soit une surface hyperelliptique représentable sans exception, point par point, ou point par système de r points, dans le champ quadruplement périodique, et soit sur cette surface une courbe algébrique n'appartenant pas à un faisceau sans points-bases de courbes elliptiques. Soient trois fonctions de deux variables méromorphes dans l'hypersphère-unité, satisfaisant à l'équation de la surface et admettant cette courbe pour courbe lacunaire. Alors le jacobien à l'origine de deux d'entre elles, holomorphes dans le voisinage, admet une borne supérieure dépendant uniquement de la surface de la courbe lacunaire et du point de la surface correspondant à l'origine.*

Si son genre géométrique n'est pas nul (ce qui arrivera nécessairement si la matrice est pure), la surface possède une intégrale double de première espèce. Soit alors, intérieur au sens strict à l'hypersphère-unité, un continuum bilatère ouvert à deux dimensions réelles. La valeur de l'intégrale double correspondant à ce continuum, admet une borne supérieure dépendant d'abord naturellement de la surface et de la courbe lacunaire et ensuite uniquement du continuum lui-même et par suite uniquement de sa frontière (composée d'une ou plusieurs lignes fermées).

Il est d'ailleurs probable que la réserve faite avant l'énoncé du théorème est inutile; l'étude complète (dont nous avons seulement dit quelques mots plus haut) des fonctions d'une seule variable satisfaisant à l'équation d'une surface hyperelliptique régulière à courbe lacunaire, conduira peut-être à s'en affranchir partiellement; mais le résultat complet ne pourra vraisemblablement être obtenu que par la considération directe des fonctions de deux variables satisfaisant à l'équation de la surface, sans recours à la surface de rang 1.

17. Comme on a établi le théorème I, on établit la proposition suivante, relative aux variétés abéliennes générales de rang 1

Théorème K. — *Soit une variété abélienne de rang 1 et de dimension p, représentable point par point, sans exception, dans le champ $2p$ fois périodique. Une de ses sous-variétés algébriques, de dimension $p-1$, est supposée lacunaire pour $p+1$ fonctions d'une variable t, méromorphes dans tout le plan complexe, satisfaisant à l'équation de la variété. Alors :*

Si la matrice de Riemann de la variété donnée est pure, ces $p+1$ fonctions se réduisent nécessairement à des constantes.

Si la matrice est impure, la variété donnée est de deux, ou plus de deux manières, un système abélien de rang 1 de sous-variétés abéliennes de rang 1; il existe une telle génération de la variété pour laquelle la sous-variété lacunaire soit engendrée par certaines de ces sous-variétés abéliennes, la courbe décrite par le point dépendant de t étant elle-même située dans une de ces sous-variétés.

2° *Soient maintenant $p+1$ fonctions d'une variable t, méromorphes dans le cercle-unité, satisfaisant à l'équation de la variété précédente, et pour lesquelles une de ses sous-variétés algébriques, de dimension $p-1$ soit lacunaire. Alors :*

Si la matrice de Riemann est pure, ou si la matrice étant impure, la sous-variété lacunaire n'est pas engendrée par des sous-variétés abéliennes, la variation d'une intégrale simple de première espèce entre deux points t_1 et t_2 intérieurs au cercle-unité, admet une borne supérieure dépendant uniquement de la variété, de la sous-variété lacunaire, de l'intégrale considérée et de la distance non-euclidienne de t_1 et t_2.

Si la matrice étant impure, la sous-variété lacunaire est engendrée par des sous-variétés abéliennes, au plus grand sous-groupe du groupe des transformations birationnelles de la variété la laissant fixe, correspond une génération de la sous-variété par des sous-variétés abéliennes ayant pour dimension l'ordre de ce sous-groupe. La limitation précédente a lieu pour la variation entre t_1 et t_2 de toute intégrale demeurant constante sur chacune de ces sous-variétés abéliennes.

Il n'est pas impossible, par contre, que l'énoncé suivant, analogue au théorème J, ne soit exact que moyennant de légères modifications :

Soit une variété abélienne de dimension p représentable point par point, ou point par système de r points, dans le champ $2p$ fois périodique; une sous-variété algébrique, de dimension $p-1$, tracée sur elle, est quelconque si la matrice de Riemann de la variété est pure, mais est supposée n'appartenir à aucun système continu de sous-variétés engendrées par des sous-variétés abéliennes si la matrice est impure; cette sous-variété est supposée lacunaire pour un système de $p+1$ fonctions de p variables, méromorphes dans l'hypersphère-unité, satisfaisant à l'équation de la variété. Alors :

Le jacobien à l'origine de p d'entre ces fonctions, holomorphes dans son voisinage, admet une borne supérieure ne dépendant que de la variété, de la sous-variété lacunaire et du point de la variété correspondant à l'origine.

Si le genre géométrique de la variété n'est pas nul, elle possède une intégrale p-uple de première espèce. Soit alors, intérieur à l'hypersphère-unité, un continuum bilatère ouvert à p dimensions réelles. La valeur de l'intégrale p-uple, correspondant à ce continuum, admet une borne supérieure dépendant d'abord naturellement de la variété et de la sous-variété, et ensuite uniquement du continuum lui-même, c'est-à-dire uniquement de sa frontière à $p-1$ dimensions.

Cet énoncé, même à supposer les variétés abéliennes de rang supérieur à 1, aussi bien connues pour la dimension p que pour la dimension 2, comporterait d'abord naturellement une réserve analogue à celle formulée plus haut dans le cas des surfaces — réserve peut-être inutile —. Mais de plus, comme l'on n'a pas encore, à notre connaissance, rattaché les variétés abéliennes générales de rang supérieur à 1 à celles de rang 1 [1], ainsi que cela a été fait pour les surfaces hyperelliptiques, il ne semble pas que l'on puisse actuellement, même avec la réserve en question, considérer comme établie aucune partie de cet énoncé qui ne soit pas une conséquence immédiate du théo-

---

[1] *Voir* cependant : S. LEFSCHETZ, *Trans. of the Amer. Soc.* 1921, p. 327-482.

rème précédent; c'est pourquoi nous ne le donnons que sous forme dubitative.

18. Une autre application très simple de l'extension au cas d'intégrales simples de troisième espèce (se réduisant ici à des logarithmes) de la méthode développée dans les sections précédentes, pour les variétés possédant des intégrales de première espèce, est la détermination des fonctions entières sans zéros (exponentielles) satisfaisant à des relations données. Le cas où ces relations sont linéaires (¹) est bien connu; mais celui de relations algébriques quelconques ne semble pas encore avoir été traité.

Nous pouvons supposer que les fonctions considérées ne dépendent que d'une variable. Le cas de fonctions de plusieurs variables est en effet identique à celui d'une seule si l'on ne suppose rien sur l'indépendance des fonctions; et si l'on impose certaines conditions d'indépendance, les résultats obtenus pour une seule variable donneront encore immédiatement la solution.

Considérons deux fonctions méromorphes dans tout le plan complexe, satisfaisant à l'équation d'une courbe algébrique du plan trilinéaire, et admettant pour courbes lacunaires les côtés du triangle de référence c'est-à-dire la droite de l'infini, l'axe des x et l'axe des y. Les deux intégrales abéliennes de troisième espèce $\log x$ et $\log y$ doivent n'être pas distinctes. On a donc une relation $x^\alpha y^\beta = \text{const.}$, où α et β ont un rapport rationnel, et peuvent par suite être supposés entiers premiers entre eux; c'est là l'équation de la courbe, ou du moins de sa partie irréductible parcourue par le point dont les coordonnées sont les deux fonctions méromorphes.

Soient de même trois fonctions méromorphes, coordonnées dans l'espace d'un point décrivant une courbe gauche algébrique, et admettant pour surfaces lacunaires les faces du tétraèdre de référence, c'est-à-dire le plan de l'infini et les trois plans des coordonnées. Les trois intégrales $\log x$, $\log y$, $\log z$ doivent n'être pas distinctes. On a donc $x^\alpha : y^\beta : z^\gamma :: A : B : C$, où α, β, γ ont des rapports rationnels; d'où un

(¹) E. Borel, *Acta Mathematica*, t. XX.

système d'équations

(8) $x^{\lambda_1}y^{\mu_2} = \text{const.}, \quad y^{\mu_1}z^{\nu_2} = \text{const.}, \quad z^{\nu_1}x^{\lambda_2} = \text{const.} \qquad (\lambda_1\mu_1\nu_1 + \lambda_2\mu_2\nu_2 = 0),$

où les exposants sont entiers, ceux d'une même équation étant premiers entre eux; ce sont là les équations de la courbe ou du moins de sa partie irréductible parcourue par le point.

Si, toutes choses égales d'ailleurs, la courbe gauche décrite n'est pas algébrique mais seulement située par une surface algébrique, on a sur celle-ci trois intégrales simples de troisième espèce, $\log x$, $\log y$, $\log z$ qui doivent se réduire linéairement à deux d'entre elles (sans quoi la courbe serait algébrique). On a donc une relation

$$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} = \text{const.},$$

où α, β, γ ont des rapports rationnels et peuvent donc être supposés entiers, premiers entre eux; c'est là l'équation de la surface algébrique, ou du moins de sa partie irréductible, parcourue par le point.

Les résultats précédents s'appliquent sans peine à la détermination des systèmes de trois fonctions entières sans zéros satisfaisant à des relations algébriques données. Ces relations déterminent en effet dans l'espace un nombre fini de courbes ou de surfaces algébriques irréductibles; une courbe, pour donner une solution du problème, devra avoir des équations de la forme (8); pour une surface, on regardera d'abord si son équation est de la forme $x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} = \text{const.}$; dans le cas contraire, on recherchera s'il existe sur elle des courbes de la forme (8), ce qui se fera par un nombre fini d'opérations (1).

Il serait possible de déduire de là des théorèmes en termes finis, analogues à ceux obtenus dans le Mémoire déjà cité des *Annales de l'École Normale*, mais nous n'y insisterons pas.

Le problème général de la détermination des exponentielles liées par des relations algébriques données en nombre quelconque, est de même complètement résolu par le théorème général suivant, qui s'établit comme précédemment.

---

(1) En effet, pour une courbe de la forme (8), $f(x, y, z) = 0$ étant l'équation de la surface on a

$$\frac{xf'_x}{\alpha} + \frac{yf'_y}{\beta} + \frac{zf'_z}{\gamma} = 0.$$

THÉORÈME L. — *Soit dans l'espace à p dimensions un point dont les coordonnées sont des fonctions méromorphes d'une variable, admettant pour variétés lacunaires les p variétés linéaires de coordonnées et la variété linéaire à l'infini. Alors la plus petite variété algébrique contenant constamment le point est une trajectoire d'un sous-groupe algébrique du groupe projectif laissant fixes les $p+1$ susdites variétés linéaires, c'est-à-dire est représentée, si sa dimension est q, par $p-q$ relations distinctes de la forme*

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots = \text{const.},$$

où les exposants sont rationnels, et est déterminée sans ambiguïté par les C_p^{q+1} équations binomes, à exposants entiers premiers entre eux, auxquelles elle satisfait par rapport aux C_p^{q+1} combinaisons de $q+1$ coordonnées.

Il serait possible de traiter la question faisant l'objet de ce numéro à l'aide des résultats connus pour les relations linéaires entre exponentielles; par exemple, si l'on considère une courbe plane à l'équation de laquelle satisfont des exponentielles, on a nécessairement entre les différents termes les relations classiques, et l'on en peut déduire $x^\alpha y^\beta =$ const.; on pourrait établir de même le théorème général L. Mais la méthode actuelle est certainement préférable : au point de vue théorique, parce qu'elle ne s'appuie pas, pour une variété de dimension donnée, à l'équation de laquelle satisfont un nombre borné de fonctions, sur un théorème dans l'énoncé duquel figurent un nombre arbitrairement grand de fonctions; au point de vue pratique, parce qu'elle conduit de la manière la plus rapide au résultat essentiel. Il est superflu d'ajouter que, les seules intégrales considérées ici étant des logarithmes, la méthode actuelle ne suppose nullement l'établissement de l'inégalité (3).

VII. — Sur les séries abéliennes de groupes de points d'une courbe.

19. La présente section où, comme dans la section II, il s'agit uniquement de Géométrie algébrique, est probablement la partie la plus imparfaite du Mémoire actuel. Nous aurions voulu étudier de manière approfondie les séries de groupes de points d'une courbe dénommées ici « séries abéliennes »; nous n'y sommes pas parvenu, même de loin. Cela tient peut-être, en partie, à ce que la théorie des intégrales réductibles n'a pas encore été étudiée de manière systématique au point de vue de la Géométrie sur la courbe; lorsque MM. Enriques et Chisini auront publié le Volume IV, consacré aux intégrales abéliennes, et actuellement en préparation, de leur magistral Traité, déjà cité, il est probable que l'on y trouvera tout l'essentiel de la solution du problème en question.

On pourra dès lors donner au théorème O de la section suivante une forme beaucoup plus précise; si son énoncé actuel satisfait l'esprit en ce qui concerne les courbes à modules généraux, il est loin d'en être de même au sujet des courbes à modules particuliers; et l'on désirerait savoir dans quelles conditions existent les séries abéliennes qui y sont envisagées. Il est donc grandement à souhaiter que l'on résolve ce problème; et nous ne sommes pas en mesure de prévoir si les résultats seront simples ou compliqués.

Considérons sur une courbe de genre p un système algébrique de séries linéaires complètes, de degré n; c'est ce que l'on peut appeler une série algébrique *linéairement complète*. Pour une telle série, les p sommes abéliennes de première espèce ne sont pas toutes constantes si la série n'est pas linéaire. Mais si la courbe est impure, $p-q$ linéairement indépendantes d'entre elles peuvent être constantes, les autres ne l'étant pas; à ces $p-q$ intégrales, formant un système parfait, correspond un système parfait complémentaire de q intégrales. Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien les q sommes abéliennes correspondantes ne peuvent pas prendre tous les systèmes de valeurs, lorsque le groupe de n points varie dans la série algébrique, ou bien elles peuvent les prendre tous; dans ce dernier cas, nous dirons que la série est *abélienne* (de dimension non linéaire égale à q); elle est, en tant que système de séries linéaires complètes, birationnellement identique à une variété abélienne de rang 1 et de dimension q, à matrice isomorphe à celle du système parfait des q intégrales abéliennes.

Occupons-nous maintenant de la détermination des séries abéliennes appartenant à une courbe impure déterminée. Si le degré n de la série est égal ou supérieur au genre p de la courbe, la question est identique à celle de la détermination des sous-variétés abéliennes d'une variété abélienne impure de rang 1, correspondant point par point, sans exception, à son parallélotope des périodes. Rappelons la solution de cette question, déjà utilisée d'ailleurs dans les sections précédentes : si l'on considère deux systèmes parfaits complémentaires d'intégrales de la variété abélienne envisagée, et que l'on fixe les valeurs des intégrales d'un de ces systèmes, le point décrit une sous-variété abélienne, de rang 1, ayant une matrice isomorphe à celle du second système; cela résulte de ce qu'à un point de la sous-variété décrite correspond un système de valeurs des intégrales de ce système, déterminées aux périodes près, et réciproquement.

Ainsi lorsque n est donné égal ou supérieur à p, à tout système parfait de q intégrales abéliennes correspondent exactement ∞^{p-q} séries abéliennes distinctes, et la dimension de la série linéaire complète génératrice d'une de ces séries abéliennes, est au moins égale à $n-p$. Mais le cas intéressant pour la section suivante est celui où n est inférieur à p.

Considérons donc une série abélienne pour laquelle n est inférieur à p. Ajoutons un groupe de $p-n$ points fixes à la série linéaire complète génératrice; la série linéaire complète de degré p, obtenue de la sorte, engendre une série abélienne de degré p. Réciproquement, considérons une série abélienne de degré p, et supposons que de la série linéaire complète variable de dimension nulle ou non nulle qui l'engendre, il soit possible de retrancher un certain groupe fixe de $p-n$ points, c'est-à-dire que cette série variable possède toujours au moins un groupe comprenant ces $p-n$ points : cette soustraction faite, il restera une série abélienne birationnellement identique à la proposée en tant que système de séries linéaires complètes, mais de degré n.

Observons incidemment qu'une série abélienne peut-être simplement définie comme un système algébrique de séries linéaires complètes birationnellement identique à une variété abélienne de rang 1. Si le degré n est égal ou supérieur à p, cela résulte de ce qui a été rappelé précédemment au sujet des variétés abéliennes impures; si n est inférieur à p, il suffit d'ajouter à la série linéaire complète variable du système un groupe fixe de $p-n$ points pour être ramené au cas où $n=p$.

Parmi les séries abéliennes de degré n inférieur à p, il y a tout d'abord les involutions abéliennes de degré n inférieur à p. Si une telle involution est r fois infinie, la courbe proposée est nécessairement, d'après le théorème de Castelnuovo-Humbert (n° 4), $\frac{n}{r}$ fois multiple ($n=\nu r$) d'une courbe de genre ρ ($\rho \leq r$), et l'involution abélienne est formée de tous les groupes constitués par r groupes de l'involution simple d'ordre $\frac{n}{r}$ correspondante. Pour déduire de l'involution la série abélienne correspondante, il faut remplacer chaque groupe de n points de l'involution par la série linéaire complète qu'il engendre; puisque $n<p$, cette série complète sera de dimension nulle, en général, pour un groupe générique de n points de l'involution si $\rho=r$ et aura en général la dimension $r-\rho$ si $\rho<r$. D'autre part, il n'est pas prouvé que toute série abélienne de degré n inférieur à p coïncide ainsi avec une involution abélienne, deux groupes équivalents n'étant pas considérés comme distincts.

Soit une courbe de genre 3; à quelle condition possède-t-elle une série elliptique de degré 2? Un raisonnement sans élégance, qu'il ne semble pas utile de reproduire, nous a montré qu'une telle série elliptique est nécessairement une involution; il faut donc et il suffit que la courbe soit elliptique double.

Soit maintenant une courbe de genre 4, à quelle condition possède-t-elle une série elliptique de degré 2? Ici, puisque les différentielles de trois sommes abéliennes sont nulles, l'on voit tout de suite, en se reportant à la sextique canonique de l'espace, que la droite joignant les deux points de cette courbe appartenant au groupe variable de la série passe par un point fixe, et que cette sextique est en conséquence l'intersection d'une quadrique et d'un cône elliptique du troisième ordre; la série est donc encore une involution, et la courbe elliptique double.

On peut aussi, pour une courbe de genre 4, envisager des séries abéliennes de degré 3. Peut-il exister sur une telle courbe d'autres séries elliptiques de degré 3 que l'involution d'ordre 3 qui se présente quand la courbe est elliptique triple? Peut-il exister des séries abéliennes de degré 3 et de dimension 2, birationnellement identiques à des surfaces hyperelliptiques de rang 1? Ces deux questions ont peut-être été déjà résolues.

VIII. — Les groupes de points d'une courbe fonctions méromorphes d'une variable.

20. A l'aide des résultats des sections IV et V et de ce qui vient d'être dit sur les séries abéliennes, nous nous trouvons en mesure d'énoncer des théorèmes sur les groupes de points d'une courbe déterminés univoquement par des fonctions méromorphes d'une variable. En effet, la variété des séries linéaires complètes d'un degré déterminé n inférieur au genre p de la courbe est une variété dont l'irrégularité dépasse la dimension, et dont les seules sous-variétés d'irrégularité égale à la dimension sont les séries abéliennes de degré n.

Nous avons donc, en vertu des théorèmes C et D, le théorème suivant :

Théorème M. — *Étant donnée une courbe de genre p, si un groupe de n points de cette courbe, n étant inférieur à p, est fonction méromorphe dans tout le plan complexe d'une variable t, c'est-à-dire si les fonctions symétriques des coordonnées des points du groupe sont fonctions méromorphes dans tout le plan de cette variable, le groupe varie dans une série linéaire complète fixe* (¹) *ou bien dans une série abélienne de degré n.*

De même, en vertu des théorèmes E et F, nous avons les théorèmes suivants en termes finis, d'abord pour une courbe de genre 3 :

Théorème N. — *Soit une courbe de genre 3, non elliptique double, et sur cette courbe un groupe de deux points, fonction méromorphe d'une variable t dans le cercle-unité; soit une intégrale*

(¹) Il n'est pas inutile de rappeler que la courbe générique de genre p possède des séries linéaires complètes de degré inférieur à p et de dimension aussi grande qu'on veut, pourvu que p soit assez grand; *cf.* F. Enriques et O. Chisini, *op. cit.*, vol. III, p. 115.

de première espèce de la courbe; alors la variation entre deux points t_1, t_2 intérieurs au cercle-unité de la somme abélienne relative à l'intégrale considérée, étendue au groupe des deux points de la courbe, admet une borne supérieure ne dépendant que de l'intégrale considérée et de la distance non-euclidienne des deux points t_1, t_2.

Si, toutes choses égales d'ailleurs, la courbe est elliptique double d'une seule manière, la même propriété a lieu pour les deux sommes abéliennes linéairement distinctes du système parfait complémentaire (constantes sur l'involution elliptique); si elle est elliptique double de deux manières, la même propriété a lieu pour la somme abélienne relative à l'unique intégrale complémentaire.

Si la courbe étant elliptique double d'une ou plusieurs manières, le groupe correspondant au point t_1 n'appartient pas à l'involution ou aux involutions correspondantes, la même propriété a lieu pour toute somme abélienne, mais la borne supérieure dépendant désormais en outre de la position du groupe pour t_1.

Si la courbe étant elliptique double d'une ou plusieurs manières, le groupe correspondant à t_1 appartient à une ou deux des involutions correspondantes, la propriété qui vient d'être énoncée a lieu pour les deux sommes abéliennes, ou la somme abélienne du système complémentaire. Si le groupe appartient à deux ou plusieurs involutions elliptiques d'ordre 2, à chacune de ces involutions correspond un système d'inégalités bornant les variations des sommes abéliennes constantes sur cette involution (toujours en fonction des éléments susnommés), en sorte que pour une manière déterminée pour le groupe d'être fonction de t, l'un au moins de ces systèmes, en nombre égal à celui des involutions elliptiques comprenant le groupe pour $t = t_1$ soit nécessairement vérifié.

Il y aurait donc intérêt à examiner les différentes manières dont une courbe de genre 3 peut être elliptique double; leur nombre est nécessairement fini d'après le théorème de Painlevé (n° 4); c'est un problème qui a peut-être déjà été traité.

Pour une courbe de genre quelconque, nous avons :

Théorème O. — *Soit une courbe de genre p, à matrice pure, ou du* *moins ne possédant pas de séries abéliennes d'un certain degré n inférieur à p; soit un groupe de n points de la courbe, fonction méromorphe d'une variable t dans le cercle-unité; soit une intégrale de première espèce de la courbe; alors la variation entre deux points t_1 et t_2, intérieurs au cercle-unité, de la somme abélienne relative à l'intégrale considérée, étendue au groupe des n points, admet une borne supérieure ne dépendant que de l'intégrale considérée, et de la distance non-euclidienne des deux points t_1 et t_2.*

Si, toutes choses égales d'ailleurs, la courbe possède des séries abéliennes de degré n, la même propriété a lieu pour toute somme abélienne du système parfait complémentaire (c'est-à-dire constante sur chacune de ces séries abéliennes).

Si, la courbe possédant des séries abéliennes de degré n, le groupe correspondant au point t_1 n'appartient à aucune de ces séries, la même propriété a lieu pour toute somme abélienne, mais la borne supérieure dépendant désormais en outre de la position du groupe pour t_1.

Si le groupe appartient pour $t = t_1$ à une série abélienne, la propriété qui vient d'être énoncée a lieu pour toute somme abélienne du système complémentaire.

Si le groupe appartient pour $t = t_1$ à plusieurs séries abéliennes (nécessairement comprises dans un nombre fini d'entre elles), la même propriété a lieu pour toute somme abélienne constante sur toutes. De plus, à chacune de ces séries en nombre fini correspond un système d'inégalités bornant les variations des sommes abéliennes constantes sur elle (toujours en fonction des éléments susnommés), en sorte que pour une manière déterminée pour le groupe d'être fonction de t, l'un au moins de ces systèmes, en nombre égal à celui des séries abéliennes comprenant le groupe pour $t = t_1$, soit nécessairement vérifié.

On pourrait interpréter les trois théorèmes précédents d'une manière différente, en considérant des couples de fonctions algébroïdes liées par l'équation de la courbe; c'est, on le sait, le point de vue adopté dans leurs travaux par MM. Rémoundos et Varopoulos.

G. Humbert [1] a considéré la surface régulière que l'on obtient à partir d'une courbe de genre trois en faisant correspondre à un couple de points de la courbe un point de la surface, et à un point de la surface deux couples de points de la courbe formant un groupe canonique. Il y aurait intérêt, à l'aide de ce qui précède, à étudier les fonctions liées par l'équation de cette surface, et l'on trouverait probablement qu'elle n'est pas uniformisable par les fonctions méromorphes.

ADDENDUM.

N° 15. — La duplication de la courbe lacunaire ne réussit que pour des courbes particulières, car pour une courbe arbitraire de la surface, le procédé donne en général une courbe unique, et non deux courbes distinctes. Le contenu des n^{os} 15, 16, 17 ne sera donc confirmé que lorsque l'on aura établi, outre l'inégalité (3), une égalité analogue, où figurera directement la fonction intermédiaire nulle sur la courbe, et dont la démonstration se fera par les mêmes considérations que celle de (3).

N° 20. — Pour prouver que les seules séries linéairement complètes d'irrégularité égale (ou même inférieure) à la dimension non linéaire sont les séries abéliennes, observons que la variété des groupes de n points de la courbe peut être considérée comme placée sur une variété abélienne de rang *un*. La série donnée correspond alors à une section de cette variété abélienne; l'irrégularité en est par suite au moins égale à la dimension, puisque si l'on fixe un certain nombre d'intégrales de la variété abélienne, on détermine sur cette dernière une sous-variété dont la dimension est plus petite de ce même nombre. Pour que l'irrégularité soit égale à la dimension, il faut et il suffit que la sous-variété correspondant à la série donnée coïncide avec cette sous-variété abélienne et n'en soit pas une sous-variété.

[1] *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Mathématiques*, 1896, p. 263-293).