JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

NICOLAS LUSIN
WACLAW SIERPINSKI

Sur un ensemble non mesurable B

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 53-72.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__53_0>

Sur un ensemble non mesurable B;

PAR NICOLAS LUSIN ET WACLAW SIERPINSKI.

INTRODUCTION.

D'après un théorème connu de M. Baire ([1]) toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. « Maintenant une question très importante se pose (écrit M. H. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*), la condition nécessaire fournie par le théorème XVI est-elle suffisante? Et, si elle ne l'est pas, existe-t-il des fonctions qui n'y satisfont pas? Je n'essaierai pas de répondre à ces difficiles questions. »

En 1914, M. Lusin a démontré que la condition de Baire n'est pas suffisante si la puissance du continu est *aleph-un* ([2]). Il a démontré le même fait en 1917, à l'aide de l'axiome du choix, sans admettre l'hypothèse sur la puissance du continu ([3]). Le but du présent Mémoire est de *définir effectivement une fonction non représentable analytiquement satisfaisant à la condition de Baire*.

Nous prouverons qu'une telle fonction est fournie par la fonction caractéristique de l'ensemble E défini comme il suit :

Soit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots \tag{1}$$

([1]) H. LEBESGUE, *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. I, 1905, p. 188 (théorème XVI).

([2]) *Comptes rendus*, t. 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

([3]) *Fundamenta Mathem.*, t. II, 1921, p. 157.

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels (différents) intérieurs à l'intervalle (o, 1).

Soient x un nombre réel de l'intervalle (o, 1),

$$(2) \qquad x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots)_2 = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \ldots$$

son développement dyadique fini ou infini. Nous désignerons par E(x) l'ensemble formé de tous les nombres r_n de la suite (1), tels qu'on a dans le développement (1) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x, s'il y en a) $c_n = 1$. E sera l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle (o, 1) pour lesquels l'ensemble E(x) n'est pas bien ordonné (si l'on ordonne d'après la grandeur croissante de nombres rationnels qu'il contient).

Il importe de remarquer que l'ensemble E (dont nous prouverons qu'il est non mesurable B) est défini *sans utiliser les opérations d'addition et de multiplication à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles*, ce qui distingue essentiellement notre exemple du premier exemple d'une fonction non représentable analytiquement, trouvé par M. Lebesgue (*loc. cit.*) ([1]).

On pourrait encore prouver (ce que nous ne ferons pas dans ce Mémoire) que l'ensemble E est une projection orthogonale d'un ensemble plan mesurable B (F de classe 1) qu'on pourrait même définir effectivement. L'existence des ensembles mesurables B dont les projections ne sont pas mesurables B a été démontré par M. Souslin ([2]). Ce n'est que par une analyse approfondie de la théorie des ensembles (A) créée par M. Souslin que nous avons obtenu les résultats exposés dans ce Mémoire.

1. Désignons par R l'ensemble de tous les nombres rationnels r satisfaisant à l'inégalité $o < r < 1$. Si à tout nombre r de R correspond un ensemble fermé (ou vide) F_r, d'un espace à m dimensions, nous dirons qu'on a un système déterminant $S = \{F_r\}$. Nous appelle-

---

([1]) Cf. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse, 1922, p. 61.

([2]) *Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917.

rons *noyau* du système S l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré pour lesquels il existe au moins une suite infinie décroissante de nombres de R

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots,$$

telle que p appartient à chacun des ensembles

$$F_{r_1},\quad F_{r_2},\quad F_{r_3},\quad \ldots.$$

Nous appellerons *ensemble* (A) tout ensemble qui est noyau d'un système déterminant ([1]).

Soit E le noyau d'un système déterminant $S = \{F_r\}$. Posons (pour tout nombre r de R)

$$F_r^0 = F_r; \tag{1}$$

$$F_r^\alpha = F_r^{\alpha-1} \sum_{\rho < r} F_\rho^{\alpha-1}, \tag{2}$$

si α est un nombre ordinal de première espèce, la somme $\sum\limits_{\rho<r}$ s'étendant à tous les nombres ρ de R qui sont $< r$, et

$$F_r^\alpha = \prod_{\xi<\alpha} F_r^\xi, \tag{3}$$

si α est un nombre ordinal de seconde espèce, le produit $\prod\limits_{\xi<\alpha}$ s'étendant à tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$.

Les ensembles F_r^α, définis ainsi par l'induction transfinie, sont évidemment mesurables B pour tout nombre r de R et tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ (Ω désignant le plus petit nombre ordinal de la troisième classe).

D'après (2) et (3), on trouve

$$F_r^\alpha \supset F_r^\beta \qquad \text{pour } \alpha < \beta. \tag{4}$$

Posons

$$S^\alpha = \sum_r F_r^\alpha, \tag{5}$$

([1]) Cette définition ne coïncide pas avec celle de M. Souslin (*Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917); or, on pourrait démontrer qu'elle lui est équivalente; ce ne sera pas d'ailleurs nécessaire pour notre but.

la sommation $\sum\limits_r$ s'étendant à tous les nombres r de R. Les ensembles S^α seront tous mesurables B pour $\alpha < \Omega$. D'après (4) on a

$$(6) \qquad S^\alpha \supset S^\beta \quad \text{pour } \alpha < \beta.$$

2. Nous prouverons que

$$(7) \qquad E = \prod_{\alpha<\Omega} S^\alpha.$$

Soit p un point de E. L'ensemble E étant noyau du système $\{F_r\}$, il existe une suite infinie décroissante de nombres de R,

$$(8) \qquad r_1 > r_2 > r_3 > \ldots,$$

telle que

$$(9) \qquad p \in F_{r_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots.$$ (¹)

D'après (1) nous avons donc

$$(10) \qquad p \in F^0_{r_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Supposons qu'on a

$$(11) \qquad p \in F^\xi_{r_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$, où α est un nombre ordinal donné > 1.

Soit n un indice donné. Si α est de première espèce, on a, d'après (2),

$$(12) \qquad F^\alpha_{r_n} = F^{\alpha-1}_{r_n} \sum_{\rho<r_n} F^{\alpha-1}_\rho.$$

D'après l'hypothèse, (11) est vrai pour $\xi = \alpha - 1$, donc $p \in F^{\alpha-1}_{r_n}$ et $p \in F^{\alpha-1}_{r_{n+1}}$. Or, d'après (8), on a $r_{n+1} < r_n$ et par suite $F^{\alpha-1}_{r_{n+1}}$ est un terme de la somme $\sum\limits_{\rho<r_n} F^{\alpha-1}_\rho$ qui contient ainsi le point p. Donc p est un point de l'ensemble (12).

(¹) $x \in X$ signifie que x est un élément de l'ensemble X.

Si α est un nombre de seconde espèce, nous avons, d'après (3),

$$F_{r_n}^{\alpha} = \prod_{\xi<\alpha} F_{r_n}^{\xi};$$

donc, d'après (11),

$$p \in F_{r_n}^{\alpha}.$$

La formule (11) est ainsi établie par l'induction transfinie pour tout $\xi < \Omega$. Il en résulte, d'après (5), que

$$p \in S^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc $x \in P$, où

(13) $$P = \prod_{\alpha<\Omega} S^{\alpha}.$$

Or, soit x un point de l'ensemble (13). Nous avons donc

$$p \in S^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc, d'après (5),

$$p \in \sum_{r} F_{r}^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_{r}$ contenant une infinité dénombrable de termes F_r^{α}, nous en concluons qu'il existe au moins un nombre r_1 de R tel que la formule

$$p \in F_{r_1}^{\alpha}$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux $\alpha < \Omega$; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$. On a donc aussi, pour tout $\alpha < \Omega$,

$$p \in F_{r_1}^{\alpha+1};$$

donc, d'après (2),

$$p \in \sum_{\rho<r_1} F_{\rho}^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_{\rho<r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes F_{ρ}^{α} $(\rho < r_1)$, on en tire, comme plus haut, qu'il existe un nombre $r_2 < r_1$ de R, tel que

$$p \in F_{r_2}^{\alpha}$$

pour une infinité non dénombrable de nombres $\alpha < \Omega$, donc pour tous les $\alpha < \Omega$.

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de R, $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, telle que

$$p \in F^{\alpha}_{r_n} \qquad \text{pour } \alpha < \Omega; \; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

En particulier, pour $\alpha = 0$, on trouve, d'après (1),

$$p \in F_{r_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p est un point de l'ensemble E.

Nous avons ainsi démontré que $E = P$ et la formule (7) est établie.

5. Soient maintenant E et $\overset{*}{E}$ les noyaux respectifs des systèmes $\{F_r\}$ et $\{\overset{*}{F}_r\}$ et supposons qu'on a

(14) $$S^{\alpha}.\overset{*}{E} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

Nous prouverons qu'il en résulte que

$$E\overset{*}{E} \neq 0.$$

De (14) et de la formule

$$\overset{*}{E} = \prod_{\beta < \Omega} \overset{*}{S}{}^{\beta},$$

analogue à la formule (7), résulte

(15) $$S^{\alpha}.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega, \; \beta < \Omega.$$

Soit β un nombre ordinal $< \Omega$. D'après (5), la formule (15) donne

$$\sum_r F^{\alpha}_r.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_r$ contenant une infinité dénombrable de termes, on en tire qu'il existe un nombre $r(\beta)$ de R tel que l'inégalité

(16) $$F^{\alpha}_{r(\beta)}.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux α; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$.

L'ensemble R étant dénombrable, l'ensemble de tous les nombres $r(\beta)$ correspondant aux nombres ordinaux $\beta < \Omega$ est au plus dénombrable. Or, la formule (16) subsistant pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $\beta < \Omega$, on en déduit l'existence d'un nombre r_1 de R (indépendant de β), tel qu'on a

$$(17) \qquad F^{\alpha}_{r_1}.\overset{*}{S}{}^{\beta} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En se servant de la formule pour $\overset{*}{S}{}^{\beta}$ analogue à la formule (7) et en raisonnant comme plus haut, on déduit de (17) l'existence d'un nombre r'_1 de R tel que

$$(18) \qquad F^{\alpha}_{r_1}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

D'après (18), nous avons donc aussi

$$F^{\alpha+1}_{r_1}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega;$$

donc, d'après (2),

$$F^{\alpha}_{r_1}\sum_{\rho<r_1} F^{\alpha}_{\rho}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

La somme $\sum\limits_{\rho<r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes, on en déduit, comme plus haut, l'existence d'un nombre $r_2 < r_1$ de R tel que

$$F^{\alpha}_{r_1}.F^{\alpha}_{r_2}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En remplaçant, dans cette formule, β par $\beta+1$ et en raisonnant comme plus haut, on prouve l'existence d'un nombre $r'_2 < r'_1$ de R, tel que

$$F^{\alpha}_{r_1}.F^{\alpha}_{r_2}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_2} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à deux suites infinies de nombres de R,

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \qquad \text{et} \qquad r'_1 > r'_2 > r'_3 > \ldots,$$

telles qu'on a

$$F^{\alpha}_{r_1}.F^{\alpha}_{r_2}\ldots F^{\alpha}_{r_n}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_1}.\overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_2}\ldots \overset{*}{F}{}^{\beta}_{r'_n} \neq 0 \qquad \text{pour } \alpha < \Omega,\ \beta < \Omega;\ n = 1, 2, \ldots;$$

donc, en particulier, pour $\alpha = \beta = 0$, d'après (1),

$$(19) \qquad F_{r_1}.F_{r_2}\ldots F_{r_n}.\overset{*}{F}_{r'_1}.\overset{*}{F}_{r'_2}\ldots \overset{*}{F}_{r'_n} \neq 0 \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Les ensembles F_r et $\overset{*}{F}_{r'}$, étant fermés, la formule (19) prouve (d'après un théorème connu de Cantor) l'existence d'un point p commun à tous les ensembles F_{r_n} et $\overset{*}{F}_{r'_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, donc aux ensembles E et $\overset{*}{E}$. C. Q. F. D.

Nous avons donc démontré que si $E\overset{*}{E} = 0$, la formule (14) ne subsiste pas pour tout $\alpha < \Omega$. Il existe donc alors un indice $\alpha < \Omega$, tel que $S^{\alpha}.\overset{*}{E} = 0$, c'est-à-dire : $\overset{*}{E} \subset CS^{\alpha}$.

En particulier, si le complémentaire de E, CE, est un ensemble (A), nous pouvons poser $\overset{*}{E} = CE$ et nous obtenons, pour un $\alpha < \Omega$: $CE \subset CS^{\alpha}$, donc $E \supset S^{\alpha}$, par conséquent, d'après (7), $E = S^{\alpha}$. Donc :

Si E *et* CE *sont des ensembles* (A), E *est mesurable* B (¹).

4. E étant le noyau du système $\{F_r\}$ et p un point donné (appartenant à E ou non), désignons (pour $\alpha < \Omega$) par $R^{\alpha}(p)$ l'ensemble de tous les nombres r de R, tels que

$$p \in F^{\alpha}_{r}.$$

D'après (4), nous aurons évidemment

$$(20) \qquad R^{\alpha}(p) \supset R^{\beta}(p) \qquad \text{pour } \alpha < \beta.$$

Or, les ensembles $R^{\alpha}(p)$ sont au plus dénombrables (comme sous-ensembles de R) : il résulte donc de (20) l'existence (pour tout point p donné) d'un plus petit indice $\mu = \mu(p) < \Omega$, tel que

$$(21) \qquad R^{\mu}(p) = R^{\mu+1}(p).$$

(¹) M. Souslin, *loc. cit.* — N. Lusin et W. Sierpinski, *Sur quelques propriétés des ensembles* (A) (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1918, p. 42 ; théorème de Souslin).

Soit r un nombre de $R^{\mu+1}(p)$: on a donc $p \in F_r^{\mu+1}$; donc, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 1$), il existe un nombre $r_1 < r$ de R, tel que $p \in F_{r_1}^{\mu}$; donc, d'après (21) aussi, $p \in F_{r_1}^{\mu+1}$, ce qui donne, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 2$), $p \in F_r^{\mu+2}$. Donc R appartient à $R^{\mu+2}(p)$. On a ainsi $R^{\mu+1}(p) \subset R^{\mu+2}(p)$; donc, d'après (20), $R^{\mu+1}(p) = R^{\mu+2}(p)$. D'après (3) et (20), on en déduit sans peine par l'induction transfinie que

$$(22) \qquad R^{\alpha}(p) = R^{\mu}(p) \qquad \text{pour } \alpha \geqq \mu = \mu(p).$$

Posons, pour $\alpha < \Omega$,

$$(23) \qquad T^{\alpha} = \sum_{r} (F_r^{\alpha} - F_r^{\alpha+1});$$

ce seront évidemment des ensembles mesurables B.

Si $p \in T^{\alpha}$, on a, pour un nombre r de R, $p \in F_r^{\alpha}$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc $R^{\alpha}(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$, ce qui donne, d'après (22), $\alpha < \mu(p)$.

Or, soit p un point tel que $\mu(p) > \alpha$: on a donc, d'après la définition de l'indice $\mu(p)$, $R^{\alpha}(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$ et il existe, d'après (20), un nombre r de R, tel que $p \in F_r^{\alpha}$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc, d'après (23), $p \in T^{\alpha}$.

Nous avons donc démontré que

$$(24) \qquad T^{\alpha} = \mathop{\mathrm{E}}_{p}[\mu(p) > \alpha] \qquad \text{pour tout } \alpha < \Omega$$

$\{\mathop{\mathrm{E}}_{p}[W(p)]$ désignant l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré satisfaisant à la condition $W(p)\}$.

Soit p un point de E tel que $\mu(p) \leqq \alpha$. D'après (7), nous avons $E \subset S^{\alpha}$, donc $p \in S^{\alpha}$; or, d'après (24), p non $\in T^{\alpha}$; donc $p \in S^{\alpha} - T^{\alpha}$.

Or, soit $p \in S^{\alpha} - T^{\alpha}$: nous avons donc p non $\in T^{\alpha}$; donc, d'après (24), $\mu(p) \leqq \alpha$; d'après (22), nous avons donc

$$(25) \qquad R^{\beta}(p) = R^{\alpha}(p) \qquad \text{pour } \beta \geqq \alpha.$$

Or, puisque $p \in S^{\alpha}$, il existe, d'après (5), un nombre r de R, tel que $p \in F_r^{\alpha}$; donc, d'après (25), nous avons $p \in F_r^{\beta}$ pour $\beta \geqq \alpha$; donc $p \in S^{\beta}$ pour $\beta \geqq \alpha$; donc [d'après (6)] pour tout $\beta < \Omega$, ce qui donne, d'après (7), $p \in$ E. Nous avons ainsi

$$(26) \qquad S^\alpha - T^\alpha = E . \underset{p}{\mathbf{E}} [\mu(p) \leqq \alpha] \qquad (\text{pour } \alpha < \Omega).$$

Puisque pour tout point p on a $\mu(p) < \Omega$, on déduit, de (26), tout de suite la formule

$$(27) \qquad E = \sum_{\alpha < \Omega} (S^\alpha - T^\alpha).$$

Les formules (7) et (27) prouvent que *tout ensemble* (A) *est un produit et aussi une somme de* $\aleph_1$ *ensembles mesurables* B.

5. De la définition du noyau E du système $\{F_r\}$ résulte immédiatement que pour qu'un point p appartienne à E, il faut et il suffit que l'ensemble $R^0(p)$ ne soit pas bien ordonné (si on l'ordonne d'après la grandeur croissante des nombres rationnels qui le constituent).

Soit p un point de CE. L'ensemble $R^0(p)$ est donc bien ordonné ou vide : soit α son type ordinal. (Nous considérons l'ensemble vide comme un ensemble bien ordonné du type o.) Si $R^0(p)$ est vide, nous avons évidemment $\mu(p) = 0$. Or, supposons que $\alpha > 0$ et soient

$$(28) \qquad r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_\xi < \ldots \qquad (\xi < \alpha)$$

les nombres de R constituant $R^0(p)$, rangés d'après leurs grandeurs.

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque : nous prouverons que l'ensemble $R^\lambda(p)$ coïncide avec l'ensemble H^λ de tous les nombres

$$r_\xi, \quad \text{où} \quad \lambda \leqq \xi < \alpha.$$

L'égalité

$$(29) \qquad R^\lambda(p) = H^\lambda$$

est vraie pour $\lambda = 0$: supposons qu'elle est vraie pour tous les nombres ordinaux $\lambda < \beta$.

Soient β un nombre de première espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. D'après (20), r est donc un nombre de $R^0(p)$, donc un terme de la suite (28), soit $r = r_\xi$, où $0 \leqq \xi < \alpha$. Nous avons donc $p \in F^\beta_{r_\xi}$ et, d'après (2) : $p \in \sum_{\rho < r_\xi} F_\rho^{\beta-1}$; il existe donc dans R un nombre $\rho < r_\xi$, tel que $p \in F_\rho^{\beta-1}$, donc $\rho \in R^{\beta-1}(p)$, ce qui prouve que r_ξ n'est pas le premier élément de $R^{\beta-1}(p)$ qui est, par hypothèse, $r_{\beta-1}$ [puisque (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$]. Or, d'après (20), r_ξ est un nombre de $R^{\beta-1}(p)$: nous avons donc $\xi > \beta - 1$, c'est-à-dire $\xi \geqq \beta$. Donc

$$(30) \qquad R^\beta(p) \subset H^\beta.$$

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : nous avons donc $r_\xi > r_{\beta-1}$. De l'hypothèse que (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$ résulte donc que $r_{\beta-1}$ et $r_\xi > r_{\beta-1}$ appartiennent à $R^{\beta-1}(p)$, donc $p \in F_{r_{\beta-1}}^{\beta-1}$ et $p \in F_{r_\xi}^{\beta-1}$, ce qui donne, d'après (2), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, c'est-à-dire $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

Soient maintenant β un nombre de seconde espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. Comme plus haut, nous trouvons $r = r_\xi$, où $0 \leqq \xi < \alpha$. S'il était $\xi < \beta$, on aurait (β étant de seconde espèce) $\xi + 1 < \beta$. La formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, donc pour $\lambda = \xi + 1$, on en déduit que r_ξ n'appartient pas à $H^{\xi+1} = R^{\xi+1}(p)$; donc, d'après (20), non plus à $R^\beta(p)$, contrairement à l'hypothèse. Nous avons donc $\xi \geqq \beta$, donc (d'après $\xi < \alpha$) r_ξ appartient à H^β. On a donc l'inclusion (30).

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : on a donc $\beta \leqq \xi < \alpha$ et, par suite, la formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, r_ξ appartient à tous les ensembles $R^\lambda(p)$ pour $\lambda < \beta$; donc $p \in F_{r_\xi}^\lambda$ pour $\lambda < \beta$, ce qui donne, d'après (3), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, donc $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

L'égalité (29) est ainsi démontrée par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal λ. Il en résulte que les ensembles $R^\lambda(p)$ $(0 \leqq \lambda \leqq \alpha)$ sont distincts (formant une suite décroissante d'ensembles) et que les ensembles $R^\lambda(p)$ sont vides pour $\lambda \geqq \alpha$. On a donc $\mu(p) = \alpha$.

Nous avons ainsi démontré que *si $p \in CE$, $R^0(p)$ est un ensemble bien ordonné du type $\mu(p)$.*

Soit maintenant E un ensemble (A) dont le complémentaire CE est aussi un ensemble (A). Nous avons démontré plus haut qu'il existe dans ce cas un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $E = S^\alpha$.

Or, soit p un point de CE. S'il était $\mu(p) > \alpha$, on aurait, d'après (24), $p \in T^\alpha$, donc, à plus forte raison $p \in S^\alpha$, puisque, d'après (23) et (5), on a $T^\alpha \subset S^\alpha$. Or, c'est impossible, puisque $S^\alpha = E$ et p est un point de CE.

Nous avons donc démontré que *si* E *et* CE *sont des ensembles* (A), *il existe un nombre ordinal* $\alpha < \Omega$, *tel qu'on a* $\mu(p) \leqq \alpha$ *pour tout point p de* CE.

Ce résultat nous permettra de construire un ensemble (A) dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

6. Soit

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots \tag{31}$$

une suite infinie, formée de tous les nombres (différents) de l'ensemble R. Soient x un nombre réel de l'intervalle (0, 1),

$$x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots) \tag{32}$$

son développement dyadique fini ou infini.

Soit r un nombre donné de R : c'est donc un nombre de la suite (31) et nous avons $r = r_n$, où n est un nombre naturel donné. Désignons par F_r l'ensemble de tous les nombres réels x de l'intervalle (0, 1), tels qu'on a dans le développement (32) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x s'il y en a) : $c_n = 1$. Les ensembles F_r sont ainsi définis pour tout nombre r de R et l'on voit sans peine qu'ils sont tous fermés (puisque F_{r_n} est une somme de 2^n intervalles fermés). Soit E le noyau du système $\{F_r\}$ [1].

Soit α un nombre transfini $< \Omega$. Les sous-ensembles de R, ordonnés d'après la grandeur des nombres qu'ils contiennent, pouvant, comme l'on sait, représenter tous les types ordinaux dénombrables, il existe un sous-ensemble de R du type α, soit

$$r_{m_1}, \quad r_{m_2}, \quad r_{m_3}, \quad \ldots. \tag{33}$$

---

[1] On voit sans peine que E est le même ensemble qui a été défini dans l'introduction.

Posons

$$x = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \ldots;$$

ce sera, comme on le voit sans peine, un nombre de l'intervalle (o, 1) ayant un développement dyadique unique [puisque l'ensemble (33), ordonné d'après la grandeur de nombres qu'il contient, est bien ordonné du type $\alpha \geqq \omega$]. Il résulte de la définition des ensembles F_r qu'on a $x \in F_r$ pour tout nombre r de la suite (33) et réciproquement. Donc l'ensemble (33) coïncide avec l'ensemble $R^0(x)$, et l'on a

$$\mu(x) = \alpha.$$

α pouvant être un nombre transfini quelconque $< \Omega$, nous en concluons qu'il n'existe aucun nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel qu'on ait $\mu(x) \leqq \alpha$ pour tout point x de CE, ce qui entraîne, comme nous l'avons démontré plus haut, que CE n'est pas un ensemble (A).

Nous avons ainsi *un exemple effectif d'un ensemble* (A) *dont le complémentaire n'est pas un ensemble* (A).

7. Nous prouverons maintenant que *tout ensemble* (A) *de M. Souslin est un ensemble* (A) *dans notre sens.*

Soit donc E_0 un ensemble (A) de M. Souslin, noyau du système déterminant $S\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, où $\delta_{n_1, \ldots, n_k}$ sont des ensembles fermés (correspondant aux systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$) et où l'on a toujours

$$(34) \qquad \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Donc p est un point de l'ensemble E_0 dans ce cas, et seulement dans ce cas, s'il existe une suite infinie de nombres naturels

$$(35) \qquad n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \ldots$$

telle que

$$(36) \qquad p \in \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Soit N l'ensemble de tous les systèmes finis de nombres naturels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, ordonné de sorte qu'on ait

$$(37) \quad (n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \ldots, n_k) \prec \\ \prec (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1}, \ldots, n_{k+l})$$

(pour tous les nombres naturels k, l et $n_1, n_2, \ldots, n_{k+l}$).

On voit sans peine que le type d'ordre de l'ensemble N est le même que de l'ensemble R (ordonné d'après la grandeur croissante des nombres r); il existe donc une application de l'ensemble N sur R qui conserve l'ordre relatif des éléments homologues ([1]). Soit $\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ le nombre de R qui correspond dans cette application au système

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Nous déterminerons maintenant un système $\{F_r\}$ comme il suit.

Soit r un nombre donné de R : le nombre r détermine donc un système $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de N, tel que $r = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Nous poserons

$$(38) \qquad F_r = F_{\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Soit E le noyau du système $\{F_r\}$: nous prouverons que $E = E_0$.

Soit p un point de E_0 et soit (35) une suite infinie de nombres naturels pour laquelle subsiste la formule (36). D'après (37) nous avons

$$(n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \ldots, n_k) \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots;$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}} < \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (36) et (38), nous voyons donc que

$$r_k = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

est une suite infinie décroissante de nombres de R, telle que

$$p \in F_{r_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p est un point du noyau E du système $\{F_r\}$. Il est donc démontré que $E_0 \subset E$.

([1]) Une telle application pourrait être sans peine définie effectivement.

Or, soit p un point de E, et soit

(39) $$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$$

une suite infinie décroissante de nombres de R, telle que

(40) $$p \in F_{r_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'après (37), on a

$$(1) \prec (2) \prec (3) \prec \ldots,$$

donc

$$\rho_1 \prec \rho_2 \prec \rho_3 \prec \ldots;$$

or, $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ étant un système donné quelconque de N, on a

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k) \prec (n_1 + 1),$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k} < \rho_{n_1+1};$$

il existe donc des indices m tels que $\rho_m > r_1$. Soit m_1 le plus petit indice tel que ρ_{m_1} dépasse un terme de la suite (39) : on voit sans peine qu'on aura, pour un indice μ_1 :

(41) $$\rho_{m_1-1} < r_j < \rho_{m_1} \qquad \text{pour } j \geq \mu_1$$

(ρ_{m_1-1} devant être remplacé par o, si $m_1 = 1$).

D'après (37), nous avons

$$(m_1 - 1) \prec (m_1, 1) \prec (m_1, 2) \prec \ldots \prec (m_1),$$

donc

$$\rho_{m_1-1} < \rho_{m_1, 1} < \rho_{m_1, 2} < \ldots < \rho_{m_1}.$$

Il résulte sans peine de (37) que pour tout nombre $r = \rho_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de R, situé entre ρ_{m_1-1} et ρ_{m_1}, on a $n_1 = m_1$, donc $r < \rho_{m_1, n_2+1}$.

Donc, d'après (41), il existe un plus petit indice m_2 tel que ρ_{m_1, m_2} dépasse un terme de la suite (39). Nous aurons donc, pour un indice μ_2 :

$$\rho_{m_1, m_2-1} < r_j < \rho_{m_1, m_2} \qquad \text{pour } j \geq \mu_2.$$

En considérant la suite

$$\rho_{m_1, m_2-1} < \rho_{m_1, m_2, 1} < \rho_{m_1, m_2, 2} < \ldots < \rho_{m_1, m_2},$$

on arrive de même aux indices m_3 et μ_3 tels que

$$\rho_{m_1, m_2, m_3 - 1} < r_j < \rho_{m_1, m_2, m_3} \qquad \text{pour } j \geq \mu_3,$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de nombres naturels m_1, m_2, m_3, ..., telle que

$$\rho_{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k - 1} < r_j < \rho_{m_1, \ldots, m_k} \qquad \text{pour } j \geq \mu_k,$$

en particulier,

$$(42) \qquad \rho_{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k - 1} < r_{\mu_k} < \rho_{m_1, \ldots, m_k};$$

r_{μ_k}, comme un nombre de R, peut être écrit sous la forme

$$r_{\mu_k} = \rho_{n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{s_k}^k}$$

et, d'après (42) et (37), nous trouvons

$$n_1^k = m_1, \qquad n_2^k = m_2, \qquad \ldots, \qquad n_k^k = m_k;$$

d'après (40), (38) et (34), nous trouvons donc

$$p \in F_{\rho_{m_1, m_2, \ldots, m_k}} = \delta_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ce qui prouve que p appartient à E_0. Nous avons ainsi $E \subset E_0$.

Les relations $E_0 \subset E$ et $E \subset E_0$ nous donnent $E_0 = E$. C. Q. F. D.

Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A) de M. Souslin : donc *tout ensemble mesurable* B *est un ensemble* (A) *dans notre sens*. Il en résulte que *si* E *est un ensemble mesurable* B, E *et* CE *sont des ensembles* (A). C'est la réciproque du théorème que nous avons démontré plus haut.

Par conséquent, l'ensemble E que nous avons construit plus haut et dont le complémentaire CE n'est pas un ensemble (A), n'est pas mesurable B. On a ainsi *un exemple effectif d'un ensemble non mesurable* B.

8. Nous allons maintenant démontrer que *tout ensemble* (A) *jouit de la propriété de Baire*.

Soit P un ensemble parfait donné. Nous dirons qu'un ensemble M est sur P *de première catégorie au point p* (appartenant à P ou non), s'il existe une sphère S entourant p et telle que l'ensemble PMS est de première catégorie sur P; s'il n'existe pas une telle sphère, nous dirons que M est sur P de deuxième catégorie au point p.

Soit $M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable d'ensembles M_k et désignons par N_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) l'ensemble de tous les points p de P en lesquels M_k est de première catégorie sur P. On prouve sans peine que l'ensemble

$$K = (P - N_0) N_1 N_2 N_3 \ldots$$

est non dense sur P.

Soient maintenant E un ensemble (A) donné, noyau du système $S = \{F_r\}$, P un ensemble parfait donné, tel que E est de deuxième catégorie sur P en tout point de P.

ρ étant un nombre donné de R, désignons par S_ρ le système qu'on obtient de S en remplaçant tout ensemble F_r, où $r \geqq \rho$, par un ensemble vide. Désignons par E_ρ le noyau du système S_ρ : on vérifie sans peine la formule

$$E = \sum_r F_r E_r, \tag{43}$$

ainsi que la formule

$$E_r = \sum_{\rho < r} F_\rho E_\rho \qquad (\text{pour } r \in R). \tag{44}$$

$r_1, r_2, \ldots, r_k$ étant une suite finie décroissante quelconque de nombres de R, désignons par $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ l'ensemble de tous les points de P en lesquels l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$ est sur P de première catégorie et posons

$$H = \prod_r N_r + \sum^{*} \Big[(P - N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho} \Big], \tag{45}$$

le produit $\prod_r$ s'étendant à tous les nombres r de R, le produit $\prod_{\rho < r_k}$ à tous les nombres $\rho < r_k$ de R, et la sommation $\sum^{*}$ à toutes les suites finies décroissantes $r_1, r_2, \ldots, r_k$ (k variable) de nombres de R.

L'ensemble E étant, par l'hypothèse, de deuxième catégorie sur P en tout point de P, l'ensemble N de points de P en lesquels E est sur P de première catégorie, est vide, donc $P - N = P$. Il résulte donc, comme nous savons, de (43) et de la définition des ensembles N_r, que l'ensemble $\prod\limits_r N_r$ est non dense sur P.

Soit $r_1, r_2, \ldots, r_k$ une suite finie décroissante donnée de nombres de R. D'après (44) nous avons

$$E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_\rho E_\rho,$$

donc

$$F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} F_\rho E_\rho,$$

d'où il résulte, comme nous savons (d'après la définition de $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho}$), que l'ensemble

$$(P - N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \ldots, r_k, \rho}$$

est non dense sur P. La somme $\overset{*}{\sum}$ contenant une infinité dénombrable de termes, il résulte de (45) que l'ensemble H est de première catégorie sur P.

Or, nous prouverons que

$$(46) \qquad P - H \subset E.$$

Soit p un point de $P - H$. Nous avons donc

$$(47) \qquad p \text{ non} \in H;$$

donc, d'après (45), p non $\in \prod\limits_r N_r$; il existe donc un nombre r_1 de R tel que

$$(48) \qquad p \text{ non} \in N_{r_1}.$$

Or, il résulte de (47) et (45), d'après la définition de la somme $\overset{*}{\sum}$, que

$$p \text{ non } \in (P - N_{r_1}) \coprod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho},$$

ce qui donne, d'après (48),

$$p \text{ non } \in \coprod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho}.$$

Il existe donc un nombre $r_2 < r_1$ de R, tel que

(49) $$p \text{ non } \in N_{r_1, r_2}.$$

De même, il résulte de (47) et (45) que

$$p \text{ non } \in (P - N_{r_1, r_2}) \coprod_{\rho < r_2} N_{r_1, r_2, \rho},$$

d'où l'on déduit, d'après (49), l'existence d'un nombre $r_3 < r_2$ de R, tel que

$$p \text{ non } \in N_{r_1, r_2, r_3}.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de R, $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, telle que

(50) $$p \text{ non } \in N_{r_1, r_2, \ldots, r_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Il s'ensuit de la définition de l'ensemble $N_{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ et de (50) que l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$ n'est pas de première catégorie sur P au point p. Il en résulte que p est un point d'accumulation de l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \ldots F_{r_k} E_{r_k}$, donc, à plus forte raison, de l'ensemble F_{r_k} : ce dernier étant fermé, il en résulte que $p \in F_{r_k}$. Nous avons donc prouvé l'existence d'une suite infinie décroissante $r_1 > r_2 > \ldots$ de nombres de R, telle que

$$p \in F_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il en résulte que p appartient au noyau E du système $\{F_r\}$. La formule (46) est ainsi établie. Il en résulte que $P - E \subset H$; donc, H étant de première catégorie sur P, que $P - E$ est de première catégorie sur P.

Nous avons donc démontré que si E est un ensemble (A) et P un ensemble parfait en tout point duquel E est de deuxième catégorie sur P, P — E est de première catégorie sur P. Cela prouve que tout ensemble (A) satisfait à la condition de Baire. Par conséquent, *la fonction caractéristique d'un ensemble* (A) *est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait*, donc satisfait à la condition de Baire, fournie par le théorème XVI du Mémoire de M. Lebesgue : *Sur les fonctions représentables analytiquement.*

La fonction caractéristique de l'ensemble (A) non mesurable B, défini plus haut, nous fournit donc *un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement et cependant satisfaisant à la condition de Baire.*