JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PASQUALE CALAPSO

Sulle transformazioni delle reti cicliche

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 385-401.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__385_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sulle trasformazioni delle reti cicliche;

DI PASQUALE **CALAPSO.**

Diciamo che due reti (sistemi coniugati)

$$M(X_1, X_2, X_3) \quad \text{ed} \quad M'(X'_1, X'_2, X'_3),$$

appartenenti o no ad una stessa superficie, si corrispondono per *trasformazione di Guichard* quando le tangenti t_1 e t_2 alle curve della rete (M) nel punto M incontrano rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 alle curve della rete (M′) nel punto M′ corrispondente di M.

Nella presente nota è trattato esclusivamente il caso delle reti cicliche e sono stabilite le relazioni fra le trasformazioni di tali reti e le trasformazioni di Ribaucour.

In una prima parte è dimostrato che una *rete ciclica è sempre deducibile come inviluppo di un piano che contiene le normali a due superficie corrispondentisi per trasformazione di Ribaucour* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura delle superficie).

L'inversa è nota.

Sotto altra forma: *per avere nel modo più generale una rete armonica ad una congruenza normale si trasformi una superficie* S *ortogonale ai raggi in una nuova superficie* S_1 *mediante una trasformazione di Ribaucour; il piano delle normali ad* S *ed* S_1 *nei punti corrispondenti inviluppa la rete richiesta* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura della superficie ortogonale ai raggi).

Da queste considerazioni segue una classificazione delle transformazioni di Guichard delle reti cicliche; diciamo che due reti cicliche (C) e (C′) si corrispondono *per trasformazione di prima specie* quando esse sono armoniche ad una stessa congruenza normale; le tangenti alle curve delle due reti nei punti corrispondenti si tagliano rispettivamente sui fuochi del raggio della congruenza.

Partendo da una superficie S, riferita alle linee di curvatura, siano S_1 ed S_2 due superficie contigue ad S per transformazioni di Ribaucour; si sa (*) che esiste una quarta superficie S′ da cui S_1 ed S_2 sono deducibili con trasformazioni di Ribaucour.

Se indichiamo con n, n_1, n_2, n' le rispettive normali nei punti corrispondenti otteniamo quatro reti cicliche :

(C_{nn_1}), inviluppo del piano delle normali alle superficie S ed S_1 e similmente

$$(C_{nn_2}),\quad (C_{n'n_1})\quad (C_{n'n_2}).$$

Le quattro reti cicliche

$$(C_{nn_1}),\quad (C_{nn_2}),\quad (C_{n'n_1}),\quad (C_{n'n_2})$$

sono nella configurazione espressa dal teorema di permutabilità di Bianchi nel senso che la seconda e la terza sono contigue alla prima ed alla quarta per trasformazione di Guichard di prima specie.

Nella seconda parte vengono stabilite le *trasformazioni di seconda specie* che si basano sulle considerazioni seguenti.

Si sa che una congruenza armonica ad una rete ciclica non è di necessità una congruenza normale (congruenza O), ma in generale è 3O; nasce quindi il problema di ricercare le coppie di reti cicliche corrispondentisi per trasformazioni di Guichard in guisa che siano armoniche ad una stessa congruenza 3O.

Ad una tale coppia di reti cicliche inponiamo una condizione. Chiamando come sopra con t_1, t_2 le tangenti alle curve della rete (M) e con t'_1, t'_2 le tangenti analoghe della rete (M′), sia P_1 il punto comune alle tangenti t_1 e t'_1 e sia P_2 il punto comune alle tangenti t_2, t'_2. Le reti (M) ed (M′) si deformano rispettivamente in $(\overline{M})$ ed $(\overline{M}')$, e queste nuove reti col metodo di Guichard sono individuate anche in posizione nello spazio (posizione attuale).

La condizione impone che la proprietà, che le tangenti alle curve delle due reti si tagliano rispettivamente, si conservi dopo effettuata la deformazione (nella posizione attuale, a meno di simmetria) e si conservi anche la distanza tra il punto comune ed il punto di contatto.

Le reti (M) ed (M′) nelle condizioni sudette si diranno corrispondenti per *trasformazione di seconda specie*.

Si sa che ad ogni rete ciclica si può sempre associare una rete O dello spazio a quattro dimensioni. Nella presente nota è dimostrato che *la trasformazione di Guichard di seconda specie è equivalente ad una trasformazione di Ribaucour della rete* O.

Resta pertanto accertata l'esistenza delle trasformazioni di Guichard di prima e di seconda specie, senza che tale esistenza apporti restrigione alla rete ciclica di partenza (M).

È chiaro che per le trasformazioni di seconda specie sussiste il teorema di permutabilità di Bianchi, giacché esso sussiste per le transformazioni delle reti O dello spazio a quattro dimensioni.

I. — Le reti cicliche dello spazio euclideo S_3.

1. Assumiamo un determinante ortogonale di quarto ordine

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

i cui elementi soddisfano ad equazioni della forma

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_r}{\partial u} &= -a_1 x_{1r} - a_2 x_{2r} - p\eta_r, & \frac{\partial \xi_r}{\partial v} &= q\eta_r \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} &= p\xi_r, & \frac{\partial \eta_r}{\partial v} &= -b_1 x_{1r} - b_2 x_{2r} - q\xi_r \\ \frac{\partial x_{1r}}{\partial u} &= a_1 \xi_r, & \frac{\partial x_{1r}}{\partial v} &= b_1 \eta_r \\ \frac{\partial x_{2r}}{\partial u} &= a_2 \xi_r, & \frac{\partial x_{2r}}{\partial v} &= b_2 \eta_r \\ & & (r &= 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right.$$

È noto che i coefficienti che intervengono in questo sistema soddisfano alle equazioni differenziali

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial a_1}{\partial v} = p b_1, \qquad \frac{\partial b_1}{\partial u} = q a_1; \\ &\frac{\partial a_2}{\partial v} = p b_2, \qquad \frac{\partial b_2}{\partial u} = q a_2; \\ &\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Introduciamo ancora le funzioni x_1, x_2, x_3, x_4 mediante le equazioni

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = h\xi_i, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial v} = l\eta_i, \tag{4}$$

in cui h ed l sono legate alle rotazioni di Δ mediante le equazioni

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lp, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hq. \tag{5}$$

Si sa che il punto dello spazio S_4 che ha le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 descrive una rete O di Guichard.

2. Se poniamo

$$X_i = x_i + \rho x_{1i} + r x_{2i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

in cui ρ ed r sono definite dalle equazioni

$$\begin{cases} h + \rho a_1 + r a_2 = 0, \\ l + \rho b_1 + r b_2 = 0, \end{cases} \tag{7}$$

il punto (X_1, X_2, X_3) dello spazio S_3 descrive una rete ciclica, applicabile sulla rete (iX_4, ρ, r).

Si sa dalle ricerche di Guichard che tutte le reti cicliche si ottengono nel modo indicato.

Dalle (6) per derivazione si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u} x_{1i} + \dfrac{\partial r}{\partial u} x_{2i}, \\[2ex] \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = \dfrac{\partial \rho}{\partial v} x_{1i} + \dfrac{\partial r}{\partial v} x_{2i}; \end{cases} \tag{8}$$

inoltre dalle (7) si deducono le relazioni

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial v} + a_2 \dfrac{\partial r}{\partial v} = 0, \\[2ex] b_1 \dfrac{\partial \rho}{\partial u} + b_2 \dfrac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Con una nuova derivazione si ottengono le formole

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} x_{1i} + \frac{\partial^2 r}{\partial u\, \partial v} x_{2i}. \tag{10}$$

3. Sia (C) una rete ciclica costruita nella maniera indicata; possiamo associare a (C) una rete O dello spazio ordinario S_3 nel modo seguente.

Poniamo

$$
(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\psi = -\frac{x_4}{1+x_{24}}, \qquad 2m\sigma = -\frac{1-x_{24}}{x_4};\\
&\lambda = -\frac{\xi_4}{1+x_{24}}, \qquad \mu = -\frac{\eta_4}{1+x_{24}}, \qquad \nu = -\frac{x_{14}}{1+x_{24}};\\
&m\varphi = \frac{a_2}{1+x_{24}}, \qquad m\Omega = \frac{b_2}{1+x_{24}}\\
&\left[1 + 2m\psi\sigma = \frac{2}{1+x_{24}}\right];
\end{aligned}\right.
$$

$$
(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sqrt{E} = h + a_2\psi, \qquad \sqrt{G} = l + b_2\psi;\\
&-\frac{D}{\sqrt{E}} = a_1 + a_2\nu, \qquad -\frac{D''}{\sqrt{G}} = b_1 + b_2\nu.
\end{aligned}\right.
$$

Tenendo conto delle equazioni fondamentali (2) si verificano con facilo calcolo le equazioni

$$
(12)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = \sqrt{E}\,\lambda, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \sqrt{G}\,\mu
$$

ed osservando ancora le (3) si ricava

$$
(13)\qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = p + a_2\mu, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = q + b_2\lambda.
$$

Indi seguono facilmente le relazioni

$$
(14)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2m\psi\sigma.
$$

$$
(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\mu + \frac{D}{\sqrt{E}}\nu + m\varphi, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\mu;\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\lambda, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\lambda + \frac{D''}{\sqrt{G}}\nu + m\Omega;\\
&\frac{\partial\nu}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}\lambda, \qquad \frac{\partial\nu}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\mu;\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{\lambda}{\psi}(\varphi - \sigma\sqrt{E}), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\mu}{\psi}(\Omega - \sigma\sqrt{G});\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\Omega, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\varphi.
\end{aligned}\right.
$$

Ed ora consideriamo la superficie S descritta dal punto le cui coordinate x, y, z hanno le espressioni

$$(16)\qquad \begin{cases} x = x_1 + \psi x_{21}, \\ y = x_2 + \psi x_{22}, \\ z = x_3 + \psi x_{23}. \end{cases}$$

Si ha

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_1 + \lambda x_{21}), & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_1 + \mu x_{21}); \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_2 + \lambda x_{22}), & \dfrac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_2 + \mu x_{22}); \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{E}\,(\xi_3 + \lambda x_{23}), & \dfrac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{G}\,(\eta_3 + \mu x_{23}), \end{cases}$$

in cui $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ sono date dalle (11); da queste segue facilmente

$$(18)\qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Inoltre i cosemi degli spigoli del triedro formato dalle tangenti alle linee u et v di S e dalla normale, hanno i valori

$$\begin{array}{lll} \overline{X}_1 = \xi_1 + \lambda x_{21}, & \overline{Y}_1 = \xi_2 + \lambda x_{22}, & \overline{Z}_1 = \xi_3 + \lambda x_{23}; \\ \overline{X}_2 = \eta_1 + \mu x_{21}, & \overline{Y}_2 = \eta_2 + \mu x_{22}, & \overline{Z}_2 = \eta_3 + \lambda x_{23}; \\ \overline{X}_3 = x_{11} + w x_{21}, & \overline{Y}_3 = x_{12} + w x_{22}, & \overline{Z}_3 = x_{13} + w x_{23}, \end{array} .$$

ed il determinante ortogonale del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} \overline{X}_1 & \overline{Y}_1 & \overline{Z}_1 \\ \overline{X}_2 & \overline{Y}_2 & \overline{Z}_2 \\ \overline{X}_3 & \overline{Y}_2 & \overline{Z}_3 \end{vmatrix}$$

è destrorso o sinistrorso secondo che Δ è destrorso o sinistrorso.

Supponendo, come è lecito, che il determinante Δ sia destrorso possiamo calcolare gli altri elementi della superficie S con la formole

$$D = -\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u}, \qquad D' = -\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial v}, \qquad D'' = -\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v}$$

e si trova appunto

$$-\frac{D}{\sqrt{E}} = a_1 + a_2 w, \qquad D' = 0, \qquad -\frac{D''}{\sqrt{G}} = b_1 + b_2 w.$$

Si conclude che la superficie S definita dalle (16) è riferita alle linee di curvatura; si vede inoltre che le (10) danno un sistema di funzioni trasformatrici per il passagio da S ad una sua trasformata di Ribaucour S_1.

4. Infine vediamo come si esprimono le coordinate del punto che descrive la rete ciclica medianti gli elementi della superficie S.

A tale scopo consideriamo il piano passante per le normali alle superficie S ed S_1 nei punti corrispondenti; il punto in cui il piano tocca il suo inviluppo ha le coordinate

$$\bar{x} = x + T\bar{X}_3 + H(\lambda\bar{X}_1 + \mu\bar{X}_2 + \nu\bar{X}_3) \tag{19}$$

in cui le funzioni T ed H sono definite dalle condizioni

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{E} - T\frac{D}{\sqrt{E}} + Hm\varphi = 0,\\ &\sqrt{G} - T\frac{D''}{\sqrt{G}} + Hm\Omega = 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Si ha

$$d\bar{x} = \bar{X}_3 dT + (\lambda\bar{X}_1 + \mu\bar{X}_2 + \nu\bar{X}_3)\, dH$$

e quindi

$$\begin{aligned} d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 &= dT^2 + 2m\psi\sigma\, dH^2 + 2\nu\, dT\, dH\\ &= dT^2 + dH(2\nu\, dT + 2m\psi\sigma\, dH). \end{aligned}$$

Se introduciamo la funzione

$$K = 2\nu T + 2m\psi\sigma H + 2\psi$$

possiamo scrivere

$$d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = dT^2 + dH\, dK.$$

Poniamo

$$\rho = T, \qquad r = \frac{H + K}{2} = \nu T + \psi + \frac{1 + 2m\psi\sigma}{2} H;$$

le (20) si trasformano subito nelle (7), e tenendo conto delle espressioni superiori della quantità $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ ed osservando le (16) otteniamo con facile calcolo

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 + \rho x_{11} + r x_{21},\\ \bar{y} &= x_2 + \rho x_{12} + r x_{22},\\ \bar{z} &= x_3 + \rho x_{13} + r x_{23}. \end{aligned}$$

Dal confronto di queste con le (6) risulta subito il teorema

Una rete ciclica è sempre deducibile come inviluppo di un piano che contiene le normali a due superficie S *ed* S_1 *corrispondentisi per trasformazione di Ribaucour* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura di S ed S_1).

L'inversa è nota.

Si può anche dire: *per avere nel modo più generale una rete armonica ad una congruenza normale si trasformi una superficie* S *ortogonale ai raggi in una nuova superficie* S_1 *mediante una trasformazione di Ribaucour; il piano delle normali ad* S *ed* S_1 *nei punti corrispondenti inviluppa la rete richiesta* (le curve della rete corrispondono alle linee di curvatura della superficie ortogonale ai raggi).

II. — Le trasformazioni di prima specie delle reti cicliche.

5. Diciamo che due reti cicliche (C) e (C′) sono trasformate l'una dell'altra con *trasformazione di Guichard di prima specie*, quando esse sono armoniche ad una stessa congruenza normale. In tali condizioni le tangenti alle curve delle due reti nei punti corrispondenti si tagliano rispettivamente sui fuochi del raggio della congruenza.

Se indichiamo con S, S_1, S_2, S′ le quattro superficie del teorema di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour (*) e con n, n_1, n_2, n' le rispettive normali nei punti corrispondenti otteniamo quattro reti cicliche; cioè:

(C_{nn_1}), che si ottiene come inviluppo del piano delle normali alle superficie S ed S_1 e similmente (C_{nn_2}), $(C_{n'n_1})$, $(C_{n'n_2})$.

In ogni caso la rete $(C_{n_in_j})$ è armonica ad entrambe le congruenze (n_i) ed (n_j); segue che le coppie

$$\begin{array}{ccc} (C_{nn_1}) & \text{e} & (C_{nn_2}), \\ (C_{nn_1}) & \text{e} & (C_{n'n_1}), \\ (C_{n'n_2}) & \text{e} & (C_{nn_2}), \\ (C_{n'n_2}) & \text{e} & (C_{n'n_1}), \end{array}$$

si corrispondono ogni volta in una trasformazione di Guichard di prima specie e quindi

$$(C_{nn_1}),\quad (C_{nn_2}),\quad (C_{n'n_1}),\quad (C_{n'n_2})$$

formano una quaterna di reti cicliche nella configurazione espressa dal teorema di permutabilità di Bianchi.

III. — Le trasformazioni di seconda specie delle reti cicliche.

6. Siano M ed M′ due punti che descrivono due reti cicliche, tali che le tangenti t_1, t_2 alle curve della rete (M) nel punto M incontrino rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 alle curve della rete (M′) nel punto M′ corrispondente di M. Sia P_1 il punto comune alle tangenti t_1 e t'_1 e sia P_2 il punte comune alle tangenti t_2 e t'_2.

Indichiamo con $(\overline{M})$ ed $(\overline{M}')$ le reti deformate nella posizione attuale definita al n° **2**, e con $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}'_1$, $\bar{t}'_2$ le tangenti alle curve delle reti nella nuova configurazione. Diciamo che le reti (M) ed (M′) sono trasformate l'una dell'altra con *trasformazione di Guichard di seconda specie* quando le tangenti $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ incontrano rispettivamente le tangenti t'_1, t'_2 ed in modo da aversi

$$\overline{MP}_1 = MP_1, \qquad MP^2 = \overline{MP}_2 = MP_2.$$

Immaginiamo la rete (M) formata come ai numeri **1** e **2** e la rete (M′) costruita in modo analogo, introducendo per la seconda rete le medesime notazioni munite da un accento.

Le condizioni imposte dal problema si traducono in relazioni della forma

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u} = \rho' - T'\frac{\partial\rho'}{\partial u},\\ &r - T\frac{\partial r}{\partial u} = r' - T'\frac{\partial r'}{\partial u},\\ &x_i + \left(\rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)x_{1i} + \left(r - T\frac{\partial r}{\partial u}\right)x_{2i}\\ &= x'_i + \left(\rho' - T'\frac{\partial\rho'}{\partial u}\right)x'_{1i} + \left(r' - T'\frac{\partial r'}{\partial u}\right)x'_{2i}\end{aligned}\right.$$

essendo T e T′ convenienti funzioni. Se poniamo

$$(22)\qquad A = \rho - T\frac{\partial \rho}{\partial u}, \qquad B = r - T\frac{\partial r}{\partial u}$$

possiamo scrivere

$$(23)\qquad x_i + A x_{1i} + B x_{2i} = x'_i + A x'_{1i} + B x'_{1i}.$$

Similmente si dovrà avere

$$\left\{\begin{aligned} &\rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v} = \rho' - \overline{T}'\frac{\partial \rho'}{\partial v},\\ &r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v} = r' - \overline{T}'\frac{\partial r'}{\partial v},\\ &x_i + \left(\rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right)x_{1i} + \left(r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v}\right)x_{2i}\\ &= x'_i + \left(\rho' - \overline{T}'\frac{\partial \rho'}{\partial v}\right)x'_{1i} + \left(r' - \overline{T}'\frac{\partial r'}{\partial v}\right)x'_{2i}\end{aligned}\right.$$

e ponendo

$$(24)\qquad A' = \rho - \overline{T}\frac{\partial \rho}{\partial v}, \qquad B' = r - \overline{T}\frac{\partial r}{\partial v}$$

scriveremo

$$(25)\qquad x_i + A' x_{1i} + B' x_{2i} = x'_i + A' x'_{1i} + B' x'_{2i}.$$

Da questa e dalla (23) si ricavano le relazioni

$$x_i + \frac{AB' - A'B}{B' - B}x_{1i} = x'_i + \frac{AB' - A'B}{B' - B}x'_{1i},$$

$$x_i + \frac{AB' - A'B}{A - A'}x_{2i} = x'_i + \frac{AB' - A'B}{A' - A}x'_{2i}.$$

Queste si interpretano così; se si considerano le reti (O) ed (O′) dello spazio S_4 descritte rispettivamente dai punti

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{ed} \quad (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),$$

le due normali alla rete (O) *incontrano rispettivamente le due nor-*

mali alla rete O' *in punti equidistanti da* O *ed* O'. La stessa proprietà ha luogo per le tangenti alle reti (O) ed (O'). Il passaggio dalla rete (O) alla rete (O') è perciò una trasformazione di Ribaucour.

Osservazione. — Il caso $B' = B$ non è da considerare; infatti seguirebbe

$$x_{1i} = x'_{1i}; \qquad \text{oppure } A = A'.$$

Nel primo caso, essendo le ξ_i e le η_i proporzionali alle derivate di x_{1i} è due determinanti ortogonali coinciderebbero; nel secondo caso sarebe nullo il determinante funzionale di ρ ed r.

Si osserva in ultimo che derivando ad esempio la prima delle precedenti si ottiene

$$\begin{aligned}&\left(h + \frac{AB' - A'B}{B' - B} a_1\right)\xi_i + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right) x_{1i} \\ &= \left(h' + \frac{AB' - A'B}{B' - B} a'_1\right)\xi'_i + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right) x'_{1i};\end{aligned}$$

il caso $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{AB' - A'B}{B' - B}\right) = 0$ non è da considerare perchè altrimenti i due determinanti ortogonali avrebbero in comune la terza linea e per le (2) anche la quarta.

IV. — Teorema d'inversione.

7. Ora dobbiamo procedere all'inversione del risultato precedente; mostreremo cioè che *qualunque sia la trasformata di Ribaucour* (O') *della rete* (O) *dello spazio* S_4, *le reti cicliche dello spazio* S_3 *ad esse associate si corrispondono per trasformazione di Guichard di seconda specie.*

Sulla rete O descritta dal punto (x_1, x_2, x_3, x_4) operiamo una trasformazione di Ribaucour nella forma data dal Bianchi. Indicando con

$$\lambda, \quad \mu, \quad w_1, \quad w_2, \quad \psi, \quad \sigma, \quad \varphi, \quad \Omega$$

un sistema di funzioni trasformatrici, si ha il sistema di equazioni

$$
(26)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda}{\partial u}=-a_1w_1-a_2w_2-p\mu+m\varphi, &&\frac{\partial\lambda}{\partial v}=q\mu;\\
&\frac{\partial\mu}{\partial u}=p\lambda, &&\frac{\partial\mu}{\partial v}=-b_1w_1-b_2w_2-q\lambda+m\Omega;\\
&\frac{\partial w_1}{\partial u}=a_1\lambda, &&\frac{\partial w_1}{\partial v}=b_1\mu;\\
&\frac{\partial w_2}{\partial u}=a_2\lambda, &&\frac{\partial w_2}{\partial v}=b_2\mu;\\
&\frac{\partial\psi}{\partial u}=h\lambda, &&\frac{\partial\psi}{\partial v}=l\mu;\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial u}=\frac{\lambda}{\psi}(\varphi-h\sigma), &&\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\frac{\mu}{\psi}(\Omega-l\sigma);\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial v}=p\Omega, &&\frac{\partial\Omega}{\partial u}=q\varphi
\end{aligned}\right.
$$

con la relazione

$$
(27)\qquad \lambda^2+\mu^2+w_1^2+w_2^2=2m\psi\sigma
$$

in cui m è una costante arbitraria diversa da zero.

Le coordinate del punto che descrive la nuova rete O, trasformata della prima sono

$$
(28)\qquad x_i'=x_i-\frac{1}{m\sigma}(\lambda\xi_i+\mu\eta_i+w_1x_{1i}+w_2x_{2i})
$$

e gli elementi del determinante trasformato di Δ hanno le espressioni

$$
(29)\qquad\left\{\begin{aligned}
x_{1i}'&=\frac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_i+\frac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_i+\frac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1x_{1i}+w_2x_{2i})-x_{1i},\\
x_{2i}'&=\frac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_i+\frac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_i+\frac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1x_{1i}+w_2x_{2i})-x_{2i},\\
\xi_i'&=\frac{\lambda^2}{m\psi\sigma}\xi_i+\frac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}\eta_i+\frac{\lambda}{m\psi\sigma}(w_1x_{1i}+w_2x_{2i})-\xi_i,\\
\eta_i'&=\frac{\lambda\mu}{m\psi\sigma}\xi_i+\frac{\mu^2}{m\psi\sigma}\eta_i+\frac{\mu}{m\psi\sigma}(w_1x_{1i}+w_2x_{2i})-\eta_i.
\end{aligned}\right.
$$

Infine le funzioni intrinseche relative alla rete trasformata, sono

$$(30)\quad \begin{cases} h'=\dfrac{\varphi}{\sigma}-h, \qquad l'=\dfrac{\Omega}{\sigma}-l; \\ a'_1=a_1-\dfrac{\varphi w_1}{\psi\sigma}, \qquad b'_1=b_1-\dfrac{\Omega w_1}{\psi\sigma}; \qquad a'_2=a_2-\dfrac{\varphi w_2}{\psi\sigma}, \qquad b'_2=b_2-\dfrac{\Omega w_2}{\psi\sigma}; \\ p'=p-\dfrac{\varphi\mu}{\psi\sigma}, \qquad q'=q-\dfrac{\Omega\lambda}{\psi\sigma}. \end{cases}$$

8. La trasformazione di Ribaucour della rete (x_1, x_2, x_3, x_4) trae seco una trasformazione della rete ciclica che ad essa è associata. Le coordinate del punto che descrive la nuova rete ciclica sono

$$(31)\quad \begin{cases} X'_1=x_1-\dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_1+\mu\eta_1+w_1x_{11}+w_2x_{21}] \\ \qquad +\bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_1+\dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_1+\dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1x_{11}+w_2x_{21})-x_{11}\right] \\ \qquad +\bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_1+\dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_1+\dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1x_{11}+w_2x_{21})-x_{12}\right], \\ X'_2=x_2-\dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_2+\mu\eta_2+w_1x_{12}+w_2x_{22}] \\ \qquad +\bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_2+\dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_2+\dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1x_{12}+w_2x_{22})-x_{12}\right] \\ \qquad +\bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_2+\dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_2+\dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1x_{12}+w_2x_{22})-x_{22}\right], \\ X'_3=x_3-\dfrac{1}{m\sigma}[\lambda\xi_3+\mu\eta_3+w_1x_{13}+w_2x_{23}] \\ \qquad +\bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_3+\dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_3+\dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1x_{13}+w_2x_{23})-x_{13}\right] \\ \qquad +\bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_3+\dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_3+\dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1x_{13}+w_2x_{23})-x_{23}\right] \end{cases}$$

e la rete su cui questa è applicabile è rappresentata dalle equazioni

$$(33)\quad \begin{cases} iX'_4=X'=ix_4-\dfrac{i}{m\sigma}[\lambda\xi_4+\mu\eta_4+w_1x_{14}+w_2x_{24}] \\ \qquad +i\bar{\rho}\left[\dfrac{\lambda w_1}{m\psi\sigma}\xi_4+\dfrac{\mu w_1}{m\psi\sigma}\eta_4+\dfrac{w_1}{m\psi\sigma}(w_1x_{14}+w_2x_{24})-x_{14}\right] \\ \qquad +i\bar{r}\left[\dfrac{\lambda w_2}{m\psi\sigma}\xi_4+\dfrac{\mu w_2}{m\psi\sigma}\eta_4+\dfrac{w_2}{m\psi\sigma}(w_1x_{14}+w_2x_{24})-x_{24}\right], \\ \bar{Y}'=-\bar{\rho}, \\ \bar{Z}'=-\bar{r}, \end{cases}$$

Le derivate di X'_1, X'_2, X'_3, $\overline{X}'_4$ si esprimono con le formole analoghe alle (8), e le quantità $\bar{\rho}$ ed $\bar{r}$ sono definite dalle formole

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi}{\sigma} - h + \bar{\rho}\left(a_1 - \frac{\varphi w_1}{\psi\sigma}\right) + \bar{r}\left(a_2 - \frac{\varphi w_2}{\psi\sigma}\right) = 0, \\ &\frac{\Omega}{\sigma} - l + \bar{\rho}\left(b_1 - \frac{\Omega w_1}{\psi\sigma}\right) + \bar{r}\left(b_2 - \frac{\Omega w_2}{\psi\sigma}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

donde

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(a_1 - \frac{\varphi w_1}{\psi\sigma}\right)\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial v} + \left(a_2 - \frac{\varphi w_2}{\psi\sigma}\right)\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} = 0, \\ &\left(b_1 - \frac{\Omega w_1}{\psi\sigma}\right)\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + \left(b_2 - \frac{\Omega w_2}{\psi\sigma}\right)\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} = 0. \end{aligned}\right.$$

9. Ciò premesso consideriamo il determinante

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} & \rho + \bar{\rho} \\ \dfrac{\partial r}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & r + \bar{r} \\ 0 & b_1\dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + b_2\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & b_1\bar{\rho} + b_2\bar{r} - l \end{vmatrix};$$

esso è nullo perchè se agli elementi dell'ultima riga si aggiungono quelli della prima moltiplicati per $(-b_1)$ e quelli della seconda moltiplicate per $(-b_2)$ prende la forma

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} & \rho + \bar{\rho} \\ \dfrac{\partial r}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{r}}{\partial u} & r + \bar{r} \\ -b_1\dfrac{\partial\rho}{\partial u} - b_2\dfrac{\partial r}{\partial u} & 0 & -b_1\rho - b_2 r - l \end{vmatrix}$$

e si annulla per le (7) e (9).

Si deduce che le equazioni

$$(36)\qquad \rho - T\frac{\partial\rho}{\partial u} = -\bar{\rho} + T'\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial u}, \qquad r - T\frac{\partial r}{\partial u} = -r + T'\frac{\partial\bar{r}}{\partial u};$$

$$(37)\qquad T'\left(b_1\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial u} + b_2\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right) = b_1\bar{\rho} + b_2\bar{r} - l$$

sono coesistenti.

L'ultima di queste si riduce alla forma

$$T'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u}w_1 + T'\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}w_2 - \bar{\rho}w_1 - \bar{r}w_2 + \psi = 0,$$

donde segue facilmente che per i valori T e T' dati dalle (36) sono soddisfatte le equazioni

$$X_i - T\frac{\partial X_i}{\partial u} = X'_i - T'\frac{\partial X'_i}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, 3, 4); \tag{38}$$

$$\left\{\begin{aligned} \rho - T\frac{\partial \rho}{\partial u} &= -\bar{\rho} + T'\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u}, \\ r - T\frac{\partial r}{\partial u} &= -\bar{r} + T'\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Relazioni analoghe sussistono fra le stesse funzioni e le loro derivate rispetto a v. Si conclude che le reti (X_1, X_2, X_3) ed (X'_1, X'_2, X'_3) si corrispondono in una trasformazione di Guichard di seconda specie.

10. Risolviamo il sistema (36) rispetto a T; si ottiene il valore

$$T = \frac{w_1\rho + w_2 r + \psi}{w_1\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + w_2\dfrac{\partial r}{\partial u}},$$

e quindi le quantità

$$X_i - T\frac{\partial X_i}{\partial u}$$

prendono la forma

$$x_i + \frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2}x_{1i} - \frac{w_1 l - \psi b_1}{b_2 w_1 - b_1 w_2}x_{2i}. \tag{40}$$

Indicando, come al n° 6, con P_1 e P_2 i punti d'incontro delle tangenti alle due reti cicliche, i parametri direttori della rete $P_1 P_2$ sono dati dalle formole

$$w_2 x_{1i} - w_1 x_{2i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{41}$$

Deriviamo le (40) rispetto a v, osservando le equazioni fondamentali (2), (3), (4), (5), si ha

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(x_i + \frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2} x_{1i} - \frac{w_1 l - \psi b_2}{b_1 w_1 - b_1 w_2} x_{2i}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) x_{1i} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_1 l - \psi b_1}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) x_{2i};$$

ma si riconosce facilmente che

$$w_1 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_2 l - \psi b_2}{b_2 w_1 - b_1 w_2}\right) - w_2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w_1 l - \psi b_1}{b_3 w_1 - b_1 w_2}\right) = 0,$$

quindi il punto P_1 è uno dei fuochi del raggio P_1P_2; similmente per il punto P_2; si conclude che *la congruenza descritta dalla reta* P_1P_2 *è armonica ad entrambe le reti cicliche* (X_1, X_2, X_3) ed (X'_1, X'_2, X'_3).

11. Si verifica col calcolo diretto che l'equazione di Laplace a cui soddisfano i parametri direttori del raggio della congruenza ha la forma

$$(42)\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{p(b_2 w_1 - b_1 w_2) - \mu(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_2 w_1 - a_1 w_2} \frac{\partial \theta}{\partial u}$$
$$+ \frac{q(a_2 w_1 - a_1 w_2) + \lambda(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{b_2 w_1 - b_1 w_2} \frac{\partial \theta}{\partial v}$$
$$+ \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\left[\begin{array}{c} q\mu(a_2 w_1 - a_1 w_2) \\ -p\lambda(b_2 w_1 - b_1 w_2) + \lambda\mu(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{array}\right]}{(a_2 w_1 - a_1 w_2)(b_2 w_1 - b_1 w_2)} \theta.$$

Questa equazione ammette, oltre le soluzioni

$$w_2 x_{11} - w_1 x_{21}, \quad w_2 x_{12} - w_1 x_{22}, \quad w_2 x_{13} - w_1 x_{23}$$

anche le soluzioni

$$w_2 x_{14} - w_1 x_{24}, \quad w_1, \quad w_2;$$

a causa della relazione

$$\sum_{i=1}^{4} (w_2 x_{1i} - w_1 x_{2i})^2 - w_1^2 - w_2^2 = 0,$$

la congruenza descritta dalla rete P_1P_2 è in generale 30; anzi risulta facilmente che se le funzioni trasformatrici

$$\lambda, \quad \mu, \quad \ldots, \quad \varphi, \quad \Omega,$$

non sono soggette ad altre condizioni oltre le (26) e (27), non si può avere riduzione di grado per la congruenza $P_1 P_2$.

È chiaro che per le trasformazioni di seconda specie sussite il teorema di permutabilità di Bianchi, giacchè esso sussiste per le trasformazioni delle reti O dello spazio a quattro dimenzioni.