JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. FATOU

Sur l'itération analytique et les substitutions permutables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 343-384.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__343_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur l'itération analytique et les substitutions permutables [1];

PAR P. FATOU.

CHAPITRE I.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE DANS LE DOMAINE D'UN POINT DOUBLE ATTRACTIF DE MULTIPLICATEUR NON NUL.

On dit que deux substitutions analytiques effectuées sur une variable complexe z et définies respectivement par $z_1 = f(z)$, $z_1 = g(z)$ sont permutables lorsqu'on a identiquement

$$f[g(z)] = g[f(z)].$$

Pour que cette identité ait un sens, il faut que z appartenant à la fois aux domaines d'existence des deux fonctions f et g, les points $v = f(z)$, $w = g(z)$ appartiennent respectivement aux domaines d'existence des fonctions g et f. Si les fonctions f et g ont des déterminations multiples dans le domaine considéré, cette identité doit naturellement être précisée. Supposons, en particulier, que, lorsque z décrit le domaine D simplement connexe, les points v et w décrivent les domaines D_1 et D'_1 complètement intérieurs à D, les fonctions f et g étant holomorphes dans D. Chacune des substitutions considérées

(1) Les principaux résultats exposés dans ce Mémoire ont été indiqués dans une Note des *Comptes rendus* (t. 173, 10 octobre 1921) : *Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication*. M. Julia a énoncé ensuite dans ce même recueil (séance du 24 octobre 1921) des résultats entièrement analogues, en ce qui concerne les substitutions rationnelles.

possède alors un point double et un seul dans D, et ce point double est attractif; c'est là un fait bien simple à démontrer, au moyen de la représentation conforme (¹) ou des familles normales de M. Montel. Soit alors z_0 le point racine de $z = f(z)$ intérieur à D; on a

$$|f'(z_0)| < 1.$$

D'autre part,

$$f[g(z_0)] = g[f(z_0)] = g(z_0).$$

Le point $g(z_0)$ est donc un point double de f, et comme $g(z_0)$ appartient à D, on a

$$g(z_0) = z_0,$$

z_0 est donc un point double attractif commun aux deux substitutions.

La recherche des substitutions $[z|g(z)]$ permutables à $[z|f(z)]$ est alors équivalente au problème de l'itération analytique et M. Kœnigs, dans son Mémoire des *Annales de l'École Normale* sur les équations fonctionnelles, en a donné une solution extrêmement simple, du moins pour le cas de $f'(z_0) \neq 0$. Nous allons rappeler brièvement les résultats obtenus par M. Kœnigs, en renvoyant pour plus de détails au Mémoire cité.

Supposons que le point double attractif soit à l'origine et soit $f'(0) = s$, avec $0 < |s| < 1$. Soit Γ un cercle ayant son centre à l'origine et dans lequel on a

$$|f(z)| < k|z|,$$

k étant une constante positive comprise entre $|s|$ et 1. L'équation fonctionnelle de Schröder admet une solution $\Sigma(z)$, holomorphe dans Γ, nulle à l'origine et de dérivée égale à 1 en ce point :

$$\Sigma[f(z)] = s\Sigma(z).$$

Si le rayon de Γ est suffisamment petit, l'équation

$$u = \Sigma(z)$$

définit une fonction $z = \psi(u)$, holomorphe au voisinage de $u = 0$,

(¹) *Voir* G. Julia, *Sur l'itération des fonctions rationnelles* (*Journal de Mathématiques*, 1918, p. 61 et suiv.).

nulle en ce point, qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\psi(su) = f[\psi(u)].$$

Si l'on pose, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} z &= \psi(u), \\ f(z) &= \psi(su), \\ f_\lambda(z) &= \psi(s^\lambda u) = \psi[s^\lambda \Sigma(z)], \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire, on a les identités

$$\left\{ \begin{aligned} f_\lambda[f_\mu(z)] &= f_{\lambda+\mu}(z) = f_\mu[f_\lambda(z)], \\ f_0(z) &= z, \\ f_1(z) &= f(z). \end{aligned} \right.$$

On définit ainsi un groupe continu à un paramètre de substitutions régulières à l'origine, permutables entre elles et avec la substitution donnée, et se réduisant à la substitution identique pour $\lambda = 0$, à la substitution donnée pour $\lambda = 1$.

$f_\lambda(z)$ est, comme l'on voit, une fonction analytique de λ. Toute substitution permutable à f, ayant un point double à l'origine et de multiplicateur s' donné, est complètement déterminée et coïncide par suite avec $f_\lambda(z)$, λ étant déterminé par la condition

$$s^\lambda = s'.$$

Pour le voir, il suffit de développer f et g en séries entières :

$$\begin{aligned} f(z) &= sz + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \\ g(z) &= s'z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots \end{aligned}$$

et d'identifier les développements de $f[g(z)]$ et $g[f(z)]$. On obtient ainsi des égalités de la forme

$$su_n + F_n(u_1, \ldots, u_{n-1}) = s^n u_n + G_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

ou

$$(s^n - s)u_n = \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}),$$

F_n, G_n, Φ_n étant des fonctions entières des u_k dépendant en outre de s, s' et des a; en faisant $n = 2, 3, \ldots$ on détermine les u_n de proche en proche d'une manière unique, $s^n - s$ n'étant jamais nul. Il y a donc un développement et un seul qui satisfait formellement à l'équation fonctionnelle exprimant la permutabilité, et dont la convergence est assurée par le fait qu'on connaît d'avance la solution

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)].$$

Nous allons maintenant étudier, avec plus de détails, le cas particulier où $f(z)$ est une fonction rationnelle que nous désignerons dorénavant par $R(z)$, et rechercher la nature des singularités des fonctions $g(z)$ qui vérifient l'équation de permutabilité considérée plus haut, en supposant toujours

$$R(0) = g(0) = 0,$$
$$0 < |R'(0)| < 1,$$

et $g(z)$ régulière à l'origine. Nous avons étudié dans un Mémoire antérieur (1) les singularités de la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs. Nous savons que $\Sigma(z)$ est holomorphe à l'intérieur du domaine connexe D_0 contenant l'origine et invariant par la substitution donnée; qu'elle admet pour points singuliers essentiels tous les points de la frontière f de ce domaine qui est constituée par un ensemble parfait continu ou discontinu; qu'elle est complètement indéterminée en chaque point de cette frontière, mais qu'elle y admet une valeur asymptotique infinie suivant certains chemins, quand le point considéré est accessible; qu'elle admet dans D_0 une infinité de zéros tendant vers tous les points de f, et qui sont les points antécédents de l'origine; qu'enfin sa dérivée $\Sigma'(z)$ y admet également une infinité de zéros tendant vers tous les points frontières et qui sont les antécédents des zéros de $R'(z)$, y compris ces points eux-mêmes. Nous devons maintenant étudier les singularités de la fonction $\psi(u)$ inverse de $\Sigma(z)$, qui est naturellement une fonction multiforme, puisque Σ reprend une infinité de fois chaque valeur finie. Partons de l'élément $\psi_0(u)$ de fonction analytique inverse de $\Sigma(z)$, nulle à l'origine, régulière et univalente dans le cercle Γ

$$(|u| \leq \rho).$$

L'équation fonctionnelle

$$\psi_0(su) = R[\psi_0(u)]$$

(1) *Sur les équations fonctionnelles* (*B. S. M. F.*, Chap. VII, 1920).

permet de faire le prolongement de la fonction ψ_0 dans tout le plan et de trouver ses points singuliers. En effet, considérons la fonction

$$\psi(u) = \overline{R}_{-1}[\psi_0(su)]$$

qui coïncide avec $\psi_0(u)$ dans Γ, $\overline{R}_{-1}(z)$ désignant la branche de fonction inverse de $R(z)$ qui est nulle à l'origine; quand u décrit Γ, le point $z = \psi_0(u)$ décrit un domaine simplement connexe Δ entourant l'origine, et le point $\overline{R}_{-1}(z)$ décrit le domaine Δ_{-1} antécédent de Δ et contenant Δ; Δ_{-1} correspond par l'égalité précédente au cercle de rayon $\frac{\rho}{|s|}$ décrit par le point u; $\psi(u)$ est algébroïde dans ce cercle, où elle admettra des points critiques algébriques si Δ_{-1} contient de tels points pour $\overline{R}_{-1}(z)$. En répétant cette opération, nous définissons par l'équation

$$\psi(u) = \overline{R}_{-n}[\psi_0(s^n u)]$$

une fonction algébroïde dans le cercle : $|u| \leq \frac{\rho}{|s|^n}$, dont le rayon devient infini avec n, identique à $\Psi_0(u)$ dans le cercle initial et dont les valeurs recouvrent le domaine Δ_{-n}, $n^{\text{ième}}$ antécédent de Δ contenant Δ. Une valeur u^* ne pourra devenir critique pour cette fonction que si la valeur correspondante $\Psi_0(s^n u^*)$ est critique pour la fonction algébrique $\overline{R}_{-n}(z)$; or l'on sait ou l'on vérifie immédiatement que les points critiques de la fonction $\overline{R}_{-n}(z)$ dans D_0 sont les conséquents depuis le rang zéro jusqu'au rang $n-1$ inclus, des points critiques c, c', c'', ... de la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ contenus dans D_0; on devra donc avoir

$$\Psi_0(s^n u^*) = R_p(c) \qquad (0 \leq p \leq n-1),$$

ce qui équivaut, puisque Ψ_0 est univalente dans Γ, à

$$s^n u^* = \Sigma[R_p(c)] = s^p \Sigma(c),$$
$$u^* = \frac{\Sigma(c)}{s^{n-p}} \qquad (n-p \geq 1).$$

Ceci étant, marquons dans le plan des u les points

$$\frac{\Sigma(c)}{s^q}, \frac{\Sigma(c')}{s^q}, \frac{\Sigma(c'')}{s^q}, \ldots \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots),$$

qui ont l'infini comme point limite unique; remarquons qu'on peut encore désigner ces points par

$$\frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}, \frac{\Sigma(\zeta')}{s^m}, \frac{\Sigma(\zeta'')}{s^m}, \ldots \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ étant les zéros de $R'(z)$ intérieurs à D_0, en supposant toutefois, comme il est permis, que les points $c, c', \ldots$ n'ont pas d'antécédents à l'infini; en effet, D_0 étant un domaine invariant, $c, c', c'', \ldots$ sont respectivement égaux à $R(\zeta), R(\zeta'), R(\zeta''), \ldots$; $\Sigma(c), \Sigma(c'), \Sigma(c'')$ sont égaux à $s\Sigma(\zeta), s\Sigma(\zeta'), s\Sigma(\zeta'') \ldots$.

Soit alors u_0 un point du plan des u distinct des points de l'ensemble E que nous venons de désigner et joignons Ou_0 par une ligne L ne contenant aucun point de E, formée par exemple de segments de droite, mais absolument arbitraire au point de vue de l'*analysis situs;* soit L la plus grande distance d'un point de cette ligne à l'origine et déterminons l'entier n de manière que

$$\frac{L}{|s|^n} < \rho;$$

la ligne L', transformée de L par $u' = s^n u$, est alors complètement intérieure à Γ, et l'on voit bien que la formule

$$\Psi(u) = \overline{R}_{-n}[\Psi_0(s^n u)]$$

définit une fonction analytique et régulière le long de L; le prolongement analytique de l'élément initial de fonction $\Psi_0(u)$ peut donc se faire au moyen d'une chaîne finie de cercles depuis O jusqu'en u_0, le long de cette ligne; tous les points du plan à distance finie autres que ceux de E sont donc réguliers pour la fonction.

Je dis maintenant que tout point de E est un point critique algébrique pour certaines branches de la fonction, régulier pour les autres. En effet, soit x un antécédent de rang m et intérieur à D_0, du point ζ; on a $R'_n(x) = 0$ pour $n > m$, comme il résulte de

$$R'_n(z) = R'(z).R'[R(z)]\ldots R'[R_{n-1}(z)].$$

Prenons $n > m$ et assez grand pour que le domaine Δ_{-n} considéré plus haut et qui tend vers D_0 pour n infini contienne x; joignons Ox

par une ligne C intérieure à Δ_{-n} et qui a pour $n^{\text{ième}}$ conséquente la ligne C′ intérieure à Δ et joignant l'origine au point $R_n(x)$; à ce point $R_n(x)$, point de ramification de la fonction $R_{-n}(z)$ qui fait remonter de Δ à Δ_{-n}, la relation $u = \Sigma(z)$ fait correspondre un point du plan des u intérieur à Γ qu'on peut appeler $s^n u^*$; la ligne L′, correspondant à C′, joint ce point à l'origine dans Γ; on a

$$s^n u^* = \Sigma[R_n(x)] = s^n \Sigma(x),$$

d'où

$$u^* = \Sigma(x);$$

d'autre part, la relation $R_m(x) = \zeta$ entraîne

$$s^m \Sigma(x) = \Sigma(\zeta),$$

d'où

$$u^* = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}.$$

Soit maintenant L la ligne déduite de L′ en multipliant par $\frac{1}{s^n}$ l'affixe de chaque point de L, et qui joint l'origine au point u^*; si l'on effectue le prolongement de $\psi_0(u)$ suivant la ligne L, la relation

$$\psi(u) = R_{-n}[\psi_0(s^n u)]$$

montre alors bien clairement que u^* est un point critique algébrique pour $\psi(u)$, puisque la dérivée de la fonction $\psi_0(u)$ n'est jamais nulle dans Γ. Il suit de là que les points de E sont des points critiques algébriques pour certaines branches de $\psi(u)$ et que le prolongement de cette fonction peut se faire le long d'un chemin absolument quelconque, si l'on admet les éléments algébriques. Quant au fait que certaines branches sont régulières aux points de E, il découle aisément de cette remarque bien facile à vérifier que les ordres des points de ramification de $\overline{R}_{-n}(z)$ restent toujours bornés, tandis que le nombre des branches de cette fonction qui se permutent entre elles à l'intérieur de D_0 croît indéfiniment avec n.

Je dis maintenant que l'∞ est pour toute branche de la fonction un point critique transcendant; s'il en était autrement il existerait une ligne aboutissant au point à l'infini sur laquelle $\psi(u)$ tendrait vers une limite déterminée θ; or $\psi(u) = z$ reste toujours intérieur à D_0

d'après la manière dont on a construit cette fonction; de plus, on a toujours

$$\Sigma[\psi(u)] = u,$$

pour toute branche de la fonction, puisque cette relation est vérifiée pour l'élément initial $\psi_0(u)$, et que le premier membre représente une fonction analytique de u; u tendant vers l'∞ et z vers 0, la relation $\Sigma(z) = u$ montre que 0 est un point frontière de D_0, puisque $\Sigma(z)$ ne devient infinie en aucun point intérieur à D_0. Si $\psi(u)$ admettait un développement de la forme

$$\theta + \frac{b}{u^{\frac{1}{c}}} + \frac{c}{u^{\frac{2}{c}}} + \ldots,$$

réciproquement u serait développable suivant les puissances descendantes de $(z - \theta)^{\frac{p}{q}}$, et le point $z = 0$ serait pour $\Sigma(z)$ un point ordinaire ou singulier algébrique, non un point d'indétermination comme cela a lieu pour tous les points frontières de D_0.

Il n'est pas inutile de démontrer, bien que cela puisse paraître évident, que les diverses valeurs de $\psi(u)$ fournissent bien toutes les solutions de l'équation $\psi(u) = z$, pour un point z quelconque intérieur à D_0. En effet, l'équation $\Sigma(z) = u$ entraîne

$$\Sigma[R_n(z)] = s^n u,$$

n étant choisi assez grand pour que le point $s^n u$ tombe à l'intérieur du cercle Γ, et $R_n(z)$ à l'intérieur de Δ; comme Δ et Γ se correspondent d'une manière univoque par $z = \psi_0(u)$ et $u = \Sigma(z)$, on a

$$R_n(z) = \psi_0(s^n u),$$
$$z = R_{-n}[\psi_0(s^n u)].$$

z a donc bien été obtenu par le procédé de prolongement de $\psi_0(u)$.

Ce qui précède revient à dire que deux racines z et z' de l'équation

$$\Sigma(z) = u$$

sont toujours liées par une relation de la forme

$$R_n(z) = R_n(z'),$$

qui définit une substitution algébrique; l'ensemble de ces substitutions pour toutes les valeurs de u forme un groupe, discontinu à l'intérieur de D_0, et qui admet la fonction $\Sigma(z)$ comme invariant absolu et caractéristique. Nous reviendrons dans un autre Mémoire sur l'étude de ce groupe, dont nous avons indiqué diverses propriétés dans une Note récente (*C. R. Ac. Sc.*, t. 173, 1921, séance du 24 octobre).

Connaissant maintenant d'une manière approfondie les singularités des fonctions $\Sigma(z)$ et $\psi(u)$, il est bien facile d'en déduire celles des substitutions permutables à R. Nous avons

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)].$$

Nous poserons comme plus haut

$$u = \Sigma(z),$$

puis

$$w = s'u \qquad \text{et} \qquad g(z) = \psi(w).$$

La fonction $\psi(w)$ admet comme points critiques à distance finie les points de l'ensemble E; pour que w vienne coïncider avec un point de E, par exemple le point $\frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}$, il faut que l'on ait

$$\Sigma(z) = \frac{\Sigma(\zeta)}{s' s^m}.$$

Dans un domaine fermé D' complètement intérieur à D_0, l'ensemble des équations analogues à la précédente, où l'on remplace ζ successivement par les valeurs $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ en nombre fini et m par $0, 1, 2, \ldots$, n'admet qu'un nombre fini de solutions puisque le second membre tend vers l'infini avec m et que $\Sigma(z)$ est bornée dans D'. Les points racines en infinité dénombrable de l'ensemble des équations précédentes ont donc leurs points limites sur la frontière de D_0; $g(z)$ est donc analytique dans D_0, sauf en des points isolés.

Considérons le point $w^* = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m}$. On peut joindre l'origine au point w^* par une ligne $\mathfrak{L}$ telle que la fonction $\psi(w)$, nulle à l'origine et suivie par continuité le long de cette ligne, ait un point critique en w^*; soit $\mathfrak{L}'$ la ligne déduite de $\mathfrak{L}$ par la transformation $u = \frac{w}{s'}$. On peut faire décrire au point z dans son plan une ligne $\mathfrak{C}$ partant de l'origine et telle que le point $u = \Sigma(z)$ décrive $\mathfrak{L}'$; car on a $z = \psi(u)$, et l'on peut prolonger la fonction $\psi(u)$ le long de $\mathfrak{L}'$; le chemin $\mathfrak{S}$ obtenu va de l'origine à un point $z^\star$ intérieur à D_0; la fonction $g(z)$ prolongée le long de $\mathfrak{S}$ admet certainement un point critique algébrique en $z^\star$, sauf peut-être dans le cas où $\Sigma'(z^\star) = 0$. Que faut-il pour que cela ait lieu? Les points racines de $\Sigma'(z)$ sont les points ζ et leurs antécédents; le lecteur trouvera la démonstration de ce fait dans mon Mémoire cité sur les équations fonctionnelles, ou l'établira lui-même en partant de l'expression

$$\Sigma'(z) = \lim_{n=\infty} \frac{R'_n(z)}{s^n}.$$

Si donc $z^\star$ est racine de $\Sigma'(z)$, on a, en désignant par ζ' une certaine racine de $R'(z)$, et p un entier positif,

$$\Sigma[R_p(z^\star)] = s^p \Sigma(z^\star) = \Sigma(\zeta').$$

Comme on a d'autre part

$$s' \Sigma(z^\star) = u^\star = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m},$$

il vient, en égalant les deux valeurs de $\Sigma(z^\star)$,

$$s' = \frac{\Sigma(\zeta)}{s^m \Sigma(\zeta')} s^p.$$

Ainsi, si l'on se donne ζ et m, pour que les points racines de l'équation

$$\Sigma(z) = \frac{\Sigma(\zeta)}{s' s^m}$$

ne soient critiques pour aucune branche de $g(z)$, il est nécessaire que s' soit de la forme précédente, p étant un entier positif et ζ' une racine de $R'(z)$, distincte ou non de ζ. Cette condition doit être vérifiée, en particulier, si $g(z)$ n'a qu'un nombre fini de points critiques à l'intérieur de D_0. Comme les points $\zeta, \zeta', \ldots$ sont en nombre limité, on a donc

$$s' = A_i s^p,$$

les constantes A_i étant en nombre limité. Si nous posons

$$s' = s^\alpha, \qquad g(z) = R_\alpha(z),$$

l'indice d'itération α ne peut prendre, dans ces conditions, qu'un nombre limité de valeurs suivant les modules s et $\frac{2i\pi}{\log s}$, c'est-à-dire que les fonctions $g(z)$ correspondantes sont de la forme

$$R_n[g^{(k)}(z)] = g^{(k)}[R_n(z)],$$

les fonctions $g^{(k)}$ étant en nombre limité.

Supposons en particulier que $g(z)$ soit une fonction algébrique; $g_q(z) = R_{q\alpha}(z)$ sera évidemment une fonction algébrique, quel que soit l'entier q; comme le multiplicateur de cette fonction à l'origine est s^q, on devra avoir

$$s'^q = A_k s^n.$$

Comme les A_k sont en nombre limité, en faisant $q = 1, 2, \ldots$ on devra retrouver deux fois le même :

$$s'^{q_1} = A_k s^{n_1},$$
$$s'^{q_2} = A_k s^{n_2},$$

d'où

$$s'^{q_2 - q_1} = s^{n_2 - n_1},$$

c'est-à-dire

$$s^m = s'^{m'},$$

m et m' étant des entiers non nuls; les deux fonctions $R(z)$ et $g(z)$ sont donc liées par une relation de la forme

$$g_{m'}(z) = R_m(z).$$

Ainsi toutes les substitutions algébriques permutables à R et ayant un point double à l'origine satisfont à une relation de cette forme (¹). Parmi ces fonctions se trouvent toujours les itérées d'indice entier positif ou négatif de $R(z)$. On est certain qu'il n'y en a pas d'autres quand il y a un seul point racine de $R'(z)$ à l'intérieur du domaine D_0 puisque l'on a alors $\zeta' = \zeta$, par suite $s' = s^{p-n}$, donc

$$g(z) = R_{p-n}(z).$$

(¹) On doit remarquer que la partie fractionnaire de $\frac{m}{m'}$ n'a qu'un nombre fini de valeurs.

Faisons maintenant une remarque à peu près évidente, c'est que z, restant intérieur à D_0, il en est de même de $g(z)$: cela résulte immédiatement du fait que la fonction $\psi(w)$ ne prend que les valeurs représentées par les points intérieurs à D_0 pour toute valeur finie de w; il résulte en outre d'un raisonnement fait plus haut, que $g(z)$ prend effectivement toutes les valeurs de D_0, et fait ainsi la représentation conforme de D_0 sur une surface de Riemann, généralement à une infinité de feuillets, étendue sur D_0. D'autre part, si z décrit un chemin $\mathcal{C}$ dont tous les points tendent vers l'ensemble frontière f, nous savons que $\Sigma(z)$ admet toujours l'infini comme limite d'indétermination; comme toute branche $y = \overline{g}(z)$ de la fonction $g(z)$ vérifie l'identité

$$s'\Sigma(z) = \Sigma(y),$$

le second membre est également non borné dans ces conditions, ce qui implique qu'il y a des points frontières dans le domaine d'indétermination de y; en particulier, s'il arrive que $g(z)$ est continue sur l'ensemble frontière, cet ensemble est invariant par la substitution considérée $|z|g(z)|$.

Faisons l'hypothèse que $g(z)$ est uniforme dans D_0; il en sera de même des itérées d'ordre entier et positif de $g(z)$, qui toutes laissent invariant le domaine D_0. Le raisonnement fait plus haut concernant le cas où $g(z)$ est algébrique est encore applicable, et $g(z)$ vérifie une condition de la forme

$$g_n(z) = R_p(z),$$

n et p entiers; on peut supposer $n > 0$, alors $p \geqq 0$, sinon $R_p(z)$ ne serait pas uniforme dans D_0 tandis que $g_n(z)$ est uniforme. On a donc

$$s'^n = s^p \qquad (n > 0,\ p \geqq 0).$$

Je pense que $g(z)$, vérifiant ces conditions, est nécessairement rationnelle, mais ne suis pas parvenu à le démontrer dans le cas général. Voici la démonstration pour le cas où $R(z)$ définit une substitution à cercle fondamental de première espèce. Tout d'abord, $g(z)$ ne prend qu'un nombre limité de fois la même valeur dans D_0; en effet, d'une part il résulte de l'expression

$$g(z) = \psi[s'\Sigma(z)],$$

que $g(z)$ prend une fois au moins toute valeur de D_0; il en est de même de

$$g_{n-1}(z) = \psi[s'^{n-1}\Sigma(z)].$$

Donc si $g(z)$ prenait en $N+1$ points la même valeur, N étant le degré de $R_p(z)$, il en serait de même de

$$g[g_{n-1}(z)] = R_p(z),$$

ce qui est impossible. Ensuite, si z décrit un chemin aboutissant en un point de la frontière f de D_0, les limites d'indétermination de $g(z)$ qui comprennent, comme nous l'avons vu, au moins un point de f, ne contiennent aucun point intérieur à D_0; sinon il y aurait, comme on le sait, au moins un continu limite intérieur à D_0; il y aurait donc aussi une infinité de limites d'indétermination pour

$$g_n(z) = g_{n-1}[g(z)],$$

ce qui n'est pas possible puisque cette fonction est rationnelle. Si l'on suppose que f est la circonférence unité, il s'ensuit que $|g(z)|$ tend vers 1 sur f, et cela uniformément; désignons par $a, b, \ldots, d$ les zéros en nombre fini de $g(z)$ autres que zéro et intérieurs à D_0; par $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{d}$ les symétriques de $a, b, \ldots, d$ par rapport au cercle unité; la fonction rationnelle

$$h(z) = z\frac{z-a}{z-\bar{a}}\cdots\frac{z-d}{z-\bar{d}}$$

a un module constant pour $|z| = 1$; comme d'ailleurs le rapport $\frac{h(z)}{g(z)}$ n'a ni zéros ni pôles dans D_0, et que son module est continu et de valeur constante sur la circonférence, on conclut de propositions élémentaires de la théorie des fonctions que ce module est constant dans D_0; la fonction $\frac{h(z)}{g(z)}$ est donc une constante et $g(z)$ est rationnelle. C. Q. F. D.

Revenons maintenant au cas général et démontrons que, s' ayant une valeur quelconque, les points frontières de D_0 sont singuliers pour toutes les branches de $g(z)$; supposons qu'une branche $\bar{g}(z)$ de cette fonction soit régulière au point θ de f; on a l'identité

$$s'\Sigma'(z) = \Sigma'[\bar{g}(z)]\bar{g}'(z).$$

Nous savons que $\Sigma'(z)$ est nulle en une infinité de points ζ_{-n} antécédents de ζ et tendant vers 0; d'où

$$\Sigma'[\overline{g}(\zeta_{-n})]\overline{g}'(\zeta_{-n}) = 0,$$

et comme le second facteur n'est pas nul, au moins à partir d'un certain rang n, on a

$$\Sigma'[\overline{g}(\zeta_{-n})] = 0,$$

ce qui entraîne

$$\overline{g}(\zeta_{-n}) = \zeta'_{-m},$$

ζ' étant une autre racine de $R'(z)$ et m un entier ≥ 0. On a ensuite les égalités évidentes

$$\Sigma[\overline{g}(\zeta_{-n})] = s'\,\Sigma(\zeta_{-n}) = \Sigma(\zeta'_{-m}),$$

$$\Sigma(\zeta_n) = \frac{1}{s^n}\Sigma(\zeta),$$

$$\Sigma(\zeta'_{-m}) = \frac{1}{s^m}\Sigma(\zeta'),$$

$$s' = \frac{\Sigma(\zeta')}{\Sigma(\zeta)} s^{n-m} = A s^p,$$

A ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, les mêmes que celles obtenues dans la discussion précédente, et p étant un entier de signe inconnu. Ainsi donc les itérées d'indice quelconque de $R(z)$ sont des fonctions admettant dans le domaine D_0 une infinité de points critiques algébriques dont les points limites sont tous les points de l'ensemble frontière de D_0; ces derniers points sont singuliers pour toutes les branches de ces fonctions. L'une de ces propriétés ne cesse d'exister que pour une infinité dénombrable de valeurs de l'indice d'itération, qui sont congrues (mod 1) à un nombre fini d'entre elles; parmi les fonctions exceptionnelles se trouvent les itérées d'indice entier; en général il n'y en a pas d'autres et c'est toujours le cas quand D_0 ne renferme qu'un seul zéro de $R'(z)$.

Il est essentiel de remarquer que le problème de l'itération analytique ainsi résolu n'a pas reçu une solution très satisfaisante; en effet, les fonctions itérées ne sont pas uniformes *dans leur ensemble*, non seulement dans D_0, mais même dans un cercle de rayon arbitrairement petit ayant son centre à l'origine, les points critiques de ces fonctions tendant vers l'origine quand λ croît indéfiniment par valeurs négatives, ou à partie réelle négative, comme on le voit en prenant par exemple λ réel négatif.

L'isomorphisme du groupe continu de substitutions ainsi défini avec un groupe de translations n'est qu'apparent, du moins quand on considère la totalité des transformations du groupe. Ceci s'applique notamment au groupe discontinu de transformations dérivé de la substitution rationnelle donnée et de son inverse et qui s'obtient en donnant à λ des valeurs entières; ce groupe n'est nullement isomorphe à un groupe cyclique simple de substitutions linéaires hyperboliques comme on pourrait le croire au premier abord; ce n'est même pas un groupe abélien; en effet, soient R^0_{-1}, R^1_{-1} deux branches de la substitution inverse de R, la première étant celle qui transforme l'origine en elle-même; si l'on applique d'abord la première puis la seconde, l'origine se transforme en un point antécédent α distinct de O; si au contraire on applique d'abord la seconde puis la première on obtient d'abord α' antécédent de O, puis β nécessairement distinct de α, puisque l'on a $R(\alpha) = 0$, et $R(\beta) = \alpha' \neq 0$; la définition précise des opérations considérées ici exigerait naturellement la considération d'un système de coupures *invariant* par $[z|R(z)]$ que l'on définira sans peine; mais quelles que soient les déterminations choisies, on voit que l'on a toujours

$$R^0_{-1} R^1_{-1} \neq R^1_{-1} R^0_{-1}.$$

Le groupe obtenu n'est donc pas abélien; il doit en outre être considéré comme dérivant en général de ν substitutions distinctes, ν étant le nombre des branches de R_{-1} qui se permutent entre elles à l'intérieur de D_0. C'est ce qui explique pourquoi l'étude de ce groupe discontinu, à laquelle est consacrée en grande partie notre Mémoire cité plus haut, est très complexe et comparable, par exemple, à l'étude des groupes fuchsiens. On voit ici l'importance de ce fait que R_{-1} présente toujours au moins un point critique à l'intérieur du domaine invariant D_0.

Si l'on revient maintenant au groupe continu, on peut encore remarquer que la fonction itérée $R_\lambda(z)$ n'est pas une fonction uniforme de λ; en effet

$$R_\lambda(z) = \Psi[s^\lambda \Sigma(z)]$$

devient ramifiée comme fonction de λ pour

$$s^\lambda \Sigma(z) = \frac{A}{s^p} \qquad [A = \Sigma(\zeta)],$$

$$s^{p+\lambda} = \frac{A}{\Sigma(z)},$$

d'où

$$p + \lambda = \frac{\log \frac{A}{\Sigma(z)} + 2 n i \pi}{\log s},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\lambda = m_1 + \omega m_2 + [C + C' \log \Sigma(z)],$$

m_1, m_2 étant des entiers; ω, C, C' des constantes dont la première est toujours imaginaire et la troisième non nulle; on a donc un ensemble de points congruents par rapport à un demi-réseau ($m_1 \leqq 0$) de parallélogrammes, mais dont l'un peut être pris arbitrairement en donnant à z une valeur convenable ([1]). On ne peut donc pas appliquer sans précautions la formule

$$R_\lambda[R_\mu(z)] = R_{\lambda+\mu}(z).$$

D'une manière générale, on doit observer que les propositions générales relatives aux groupes finis ne peuvent plus être appliquées sans restrictions quand les fonctions qui définissent les transformations cessent d'être uniformes soit par rapport aux variables, soit par rapport aux paramètres.

Des circonstances analogues se présentent dans l'étude analytique des équations différentielles.

En résumé, les fonctions régulières à l'origine, nulles en ce point, qui définissent des substitutions permutables à la substitution rationnelle $[z | R(z)]$ possédant elle-même à l'origine un point double attractif de multiplicateur non nul, ont en général une infinité de points critiques algébriques mobiles, c'est-à-dire dépendant de la constante arbitraire, et une infinité non dénombrable de points singuliers transcendants fixes qui sont les points limites des précédents.

([1]) Si l'on prend s^λ comme paramètre, les points critiques, distribués sur une droite ou une spirale, forment un système à un seul indice et tendent vers l'infini; ils dépendent toujours de z de sorte que l'un d'eux peut prendre une position arbitraire.

CHAPITRE II.

L'ITÉRATION ANALYTIQUE AU VOISINAGE D'UN POINT DOUBLE RÉPULSIF.

Quand on se place au point de vue local, ce cas est identique au précédent, comme on le voit en remplaçant la substitution donnée par son inverse; mais lorsqu'on étudie les singularités des fonctions itérées, la fonction donnée étant rationnelle, on obtient des résultats entièrement différents de ceux du paragraphe précédent. L'itération analytique se définit toujours par

$$f(z) = \varphi[s^t X(z)],$$

la fonction $X(z)$ vérifiant la même équation fonctionnelle que la fonction $\Sigma(z)$ de M. Kœnigs, tandis que $\varphi(u)$, fonction inverse de $X(z)$ et qui remplace la fonction $\psi(u)$ de tout à l'heure, satisfait à la relation

$$\varphi(su) = R[\varphi(u)] \qquad (|s| > 1).$$

Mais maintenant $\varphi(u)$ représente une fonction uniforme, méromorphe en général, entière si R est un polynome; c'est la fonction de Poincaré que Lattès a eu l'idée d'introduire dans l'étude de l'itération des fonctions rationnelles; $X(z)$, fonction inverse de $\varphi(u)$ est au contraire une fonction multiforme.

Rappelons quelques propriétés connues de la fonction $\varphi(u)$:

Au point de vue des valeurs exceptionnelles de $\varphi(u)$, au sens de M. Picard, trois cas sont à distinguer :

1° Il y a deux valeurs exceptionnelles; la substitution $[z \mid R(z)]$ est alors la transformée par une substitution linéaire de $(z \mid z^{\pm m})$, la fonction $\varphi(u)$ se ramène à e^u, en faisant correspondre la valeur $u = 0$ au point double répulsif $z = 1$; la fonction inverse $\log z$ admet les deux points singuliers transcendants o et ∞.

2° Il y a une seule valeur exceptionnelle; $[z \mid R(z)]$ est alors la transformée linéaire d'une substitution rationnelle et entière; on peut donc prendre pour $R(z)$ un polynome, pour $\varphi(u)$ une transcendante entière, la valeur exceptionnelle unique étant infinie. $X(z)$ admet toujours l'infini comme point critique transcendant; elle possède en outre des points critiques algébriques qui sont les conséquents (à partir du rang 1) des points racines de $R'(z)$. Elle peut admettre enfin d'autres points critiques transcendants qui sont les valeurs asymptotiques finies de $\varphi(u)$, et qui appartiennent toujours à l'ensemble E'_0 dérivé des conséquents des points racines de $R'(z)$.

3° Il n'y a pas de valeur exceptionnelle; on peut alors supposer, en transformant au besoin $R(z)$ par une substitution linéaire préalable que l'infini n'est pas un point critique des fonctions $R_{-n}(z)$. La fonction $\varphi(u)$ est alors une fonction méromorphe sans pôles multiples; les points critiques algébriques de $X(z)$ sont les conséquents des points racines de $R'(z)$; les points critiques transcendants (qui peuvent ne pas exister) certains des points de l'ensemble dérivé de ces conséquents.

On obtient facilement maintenant les singularités de $f(z)$. Dans le premier cas, on a

$$f(z) = e^{s' \log z} = z^{s'},$$

fonction qui admet en général les deux points critiques o et ∞, et qui devient algébrique pour les valeurs commensurables de s', rationnelle pour les valeurs entières; l'indice d'itération λ est donné par $s' = m^\lambda$ ou $\lambda = \frac{\log s'}{\log m}$. On voit qu'il y a une différence essentielle avec les résultants du Chapitre I, $f(z)$ étant algébrique pour des valeurs du multiplicateur ou de l'indice qui forment un ensemble dense; en outre $f(z)$ devient rationnelle pour des valeurs réelles et incommensurables de l'indice d'itération.

Plaçons-nous maintenant dans le cas 2° ou 3°. Les seuls points singuliers possibles de $f(z)$, en laissant de côté les pôles, sont les points critiques de $X(z)$, d'abord les points critiques algébriques qui sont pour $f(z)$ des points de même nature, puisqu'ils font acquérir à l'argument $w = s'X(z)$ de la fonction φ des valeurs finies; ensuite les points critiques transcendants; si z tend vers un tel point, la branche correspondante de $X(z)$ tend vers l'infini, il en est de même de w; réciproquement, w ne tend vers l'infini que si z tend vers un point critique transcendant de $X(z)$. Ces points sont en général pour $f(z)$ des points critiques transcendants. De toute façon les points critiques de $f(z)$ sont fixes, c'est-à-dire indépendants de s'. Il est à peu près évident que $f(z)$ ne peut devenir fonction algébrique de z que pour des valeurs de s', en infinité dénombrable. Démontrons-le en toute rigueur. Soit

$$z = \varphi(u)$$
$$y = f(z) = \varphi(s'u),$$

et supposons y et z liés par une relation algébrique de degré m et irréductible :

$$\Sigma A y^{\alpha} z^{\beta} = P(y, z) = 0.$$

dont nous laissons les coefficients indéterminés; $\varphi(u)$ étant développable autour de l'origine en série entière : $u + a u^2 + \ldots$, le polynome $P(y, z)$ peut être développé suivant les puissances de u, et en égalant à zéro les coefficients, on obtient une infinité de relations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients A, où s' entre rationnellement. Comme ces relations sont compatibles par hypothèse et qu'il ne peut exister plus d'une relation de la forme précédente, un nombre suffisamment grand de ces équations de condition détermineront les rapports des coefficients A à l'un d'entre eux, sous forme de fractions rationnelles en s'. Mais si toutes les équations de condition se trouvaient vérifiées quand on laisse s' arbitraire, on aurait une relation de la forme

$$\Sigma A(s')\, \varphi^{\alpha}(u)\, \varphi^{\beta}(s'u) = 0,$$

et en donnant à u une valeur numérique fixe u_0 différente de zéro, on obtiendrait une relation algébrique entre $\varphi(s'u_0)$ et s', dont les coefficients ne seraient pas tous nuls pour un choix convenable de u_0; cela revient à dire qu'il y aurait une relation algébrique entre u et $\varphi(u)$, ce qui est impossible puisque φ est une fonction méromorphe, non rationnelle. Ainsi donc l'une des équations de condition n'étant pas identiquement vérifiée quand on y remplace les A par leurs valeurs en fonction de s' donnera une équation algébrique en s' ayant un nombre fini de solutions. Il n'y a donc pour un degré donné m qu'un nombre fini de valeurs de s' qui donnent lieu à une relation algébrique entre y et z; en faisant varier m, on obtient pour s' au plus une infinité dénombrable de valeurs.

Considérons en particulier les fonctions elliptiques telles que $\varphi(pu)$

s'exprime rationnellement en fonction de $\varphi(u)$ pour p entier et qui appartiennent à la classe de fonctions méromorphes considérées ici; $X(z)$ est alors une intégrale abélienne de genre 1 et de première espèce qui n'a comme singularités que des points critiques algébriques en nombre fini; la fonction $f(z)$ possède alors, quel que soit s', la même propriété; de plus $f(z)$ devient algébrique pour toutes les valeurs rationnelles de s'; on a donc encore une infinité de valeurs de s' qui donnent pour $f(z)$ une fonction algébrique.

Supposons maintenant que $f(z)$ soit uniforme dans tout son domaine d'existence qui comprend d'ailleurs tout le plan, sauf un point au plus; je dis que $f(z)$ est nécessairement rationnelle. En effet, d'après la relation

$$\varphi(s^n u) = R_n[\varphi(u)],$$

le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un petit domaine du plan des z entourant l'origine couvre tout le plan pour une valeur finie de n, sauf dans le cas 2° où, l'infini étant une valeur exceptionnelle, ce domaine conséquent recouvre seulement un cercle de rayon arbitrairement grand entourant l'origine; en vertu de l'identité

$$R_n[f(z)] = f[R_n(z)]$$

ou

$$f(z) = R_{-n}\{f[R_n(z)]\};$$

il existe toujours une branche de $f(z)$, faisant le prolongement de l'élément initial holomorphe et nul à l'origine, et qui est algébroïde dans un domaine recouvrant tout le plan (cas des fonctions méromorphes sans valeur exceptionnelle), ou dans un cercle de rayon arbitrairement grand (cas des fonctions entières). Comme $f(z)$ est supposée uniforme, elle est nécessairement rationnelle dans le premier cas, entière (transcendante ou non) dans le deuxième cas. Je dis qu'aucune fonction transcendante entière ne peut vérifier une identité de la forme

$$f[R(z)] = R[f(z)]$$

où R est un polynome. En effet, soit $\mathfrak{M}(r)$, le module maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$; d'après un théorème de M. Hadamard, $\log \mathfrak{M}(r)$ est une fonction *convexe* de $\log r = \rho$, que nous pouvons appeler $M(\rho)$. Si $\rho_1 > \rho$, on a donc

$$M(\rho_1) > (\rho_1 - \rho) M'(\rho),$$

$M'(\rho)$ désignant la dérivée à droite de $M(\rho)$, qui existe toujours et qui est une fonction monotone de ρ; si $M'(\rho)$ restait bornée pour ρ infiniment grand, on aurait : $M(\rho) < A\rho$, A étant une constante, c'est-à-dire $\mathfrak{M}(r) < r^A$, ce qui est contraire au théorème de Liouville. Si donc nous faisons croître ρ et ρ_1 indéfiniment de manière que

$$\rho_1 > k\rho \, (k > 1),$$

on aura

$$M(\rho_1) > (k-1) M'(\rho)\, \rho,$$

d'où l'on conclut que $\frac{M(\rho_1)}{\rho}$ tend vers l'infini. Considérons alors l'équation fonctionnelle précédente. En appelant r_1 le module de $z_1 = R(z)$, e le degré de $R(z)$, on a la double inégalité

$$B r_1^{\frac{1}{e}} < r < B' r_1^{\frac{1}{e}},$$

B et B' étant des constantes positives, dès que r_1 dépasse une certaine limite. L'équation fonctionnelle donne alors l'inégalité

$$M(r_1) < \frac{r^e}{B^e},$$

d'où l'on conclut, en prenant les logarithmes des deux membres, que

$$\frac{M(\rho_1)}{\rho}$$

reste borné; mais, d'autre part, on a

$$\log r_1 > e(\log r - \log B'),$$

d'où

$$\rho_1 > k\rho \qquad (k > 1),$$

pour ρ suffisamment grand; il y a contradiction avec la remarque que nous venons de déduire du théorème de M. Hadamard; donc $f(z)$ ne peut être qu'un polynome. D'une manière plus générale, aucune fonction transcendante entière ne peut vérifier une relation de la forme

$$f[P(z)] = Q[f(z)]$$

où P et Q sont des polynomes.

Nous allons maintenant rechercher les valeurs de s' pour lesquelles $f(z)$ est rationnelle. Cela revient à chercher les substitutions rationnelles permutables à R et ayant avec celle-ci un point double commun à l'origine. Faisons d'abord une remarque générale sur les substitutions rationnelles permutables :

$$R[S(z)] = S[R(z)].$$

Soit F l'ensemble des points où les $R_n(z)$ ne forment pas une famille normale de fonctions méromorphes au sens de M. Montel; nous savons que F est un ensemble parfait; son complémentaire O est un ensemble ouvert formé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines; appelons F' et O' les ensembles analogues à F et O relatifs à S; F et O sont invariants par R, F' et O' par S. Soit ζ un point de O; je dis que $\zeta' = S'(\zeta)$ est encore de O. En effet, à un petit cercle de centre ζ et contenu dans O, la relation $z' = S(z)$ fait correspondre un petit domaine entourant ζ'; appelons δ et δ' les deux domaines ainsi définis; les fonctions $R_n(z)$ forment une famille normale dans δ'; on a, en effet,

$$R_n(z') = R_n[S(z)] = S[R_n(z)].$$

Des propriétés des suites normales il résulte qu'on peut prendre δ assez petit pour que les domaines conséquents $R_n(\delta)$, représentés sur la sphère de Riemann, restent eux-mêmes aussi petits que l'on veut; il en sera de même des domaines transformés de ces derniers par S, c'est-à-dire en vertu des relations qui précèdent, des domaines $R_n(\delta')$. Les domaines $R_n(\delta')$ restant ainsi bornés projectivement, et, par exemple, compris dans un hémisphère de la sphère de Riemann, il en résulte que ζ' appartient à O; en effet, les conséquents d'un domaine arbitrairement petit comprenant un point de F finissent par recouvrir toute la sphère, sauf au plus le voisinage immédiat de deux points.

Ainsi ζ' est de O; donc d'une manière générale, si ζ est de O, il en est de même de $S_n(\zeta)$, quel que soit n; ou, si l'on veut, δ étant un domaine fermé contenu dans O, il en sera de même de $S_n(\delta)$. Donc les fonctions $S_n(z)$ forment une famille normale dans δ, puisqu'elles n'y prennent jamais les valeurs en nombre infini de l'ensemble F; tout point de O est donc de O', et comme la réciproque a lieu en vertu du même raisonnement, on a $O = O'$, $F = F'$. Ceci suppose, bien entendu, que R et S sont toutes deux de degré > 1. Si S, par exemple, est du premier degré, le raisonnement précédent permettrait de prouver que S est elliptique; mais on arrive plus rapidement à ce résultat de la manière suivante :

Soit $L(z)$, une fonction rationnelle linéaire telle que

$$L[R(z)] = R[L(z)]$$

et soit x un point double de L; on a

$$L(x) = x,$$
$$L[R(x)] = R(x),$$

$R(x)$ est donc encore un point double; si donc x' est l'autre point double on a : $R(x) = x$ ou x' et $R(x') = x'$ ou x; dans tous les cas, $R_2(x) = x$. Si x, x' sont distincts, on peut alors transformer R et L par une substitution linéaire préalable, de manière à avoir

$$R_2(z) = az^p + bz^q + cz^r + \ldots \qquad (a\,bc\ldots \neq 0),$$
$$L(z) = Kz$$

et, en exprimant la permutabilité, il vient,

$$k^{p-1} = k^{q-1} = k^{r-1} = \ldots = 1.$$

Si k est racine primitive de $k^h = 1$, les entiers $p, q, \ldots$ sont congrus à $1 \pmod h$ et $R(z)$ prend la forme $z\Lambda(z^h)$; réciproquement, si $R(z)$ est de cette forme, la substitution correspondante est permutable aux substitutions linéaires elliptiques de période h et de points doubles (0 et ∞). On démontre du reste bien facilement qu'une substitution parabolique ne peut pas convenir. Par conséquent, les substitutions L sont en nombre fini puisque leurs points doubles sont en nombre fini et que celles dont les points doubles sont donnés forment un groupe cyclique fini. Le groupe fini des substitutions L peut d'ailleurs coïncider, comme on le verra facilement, avec l'un quelconque des groupes de cette espèce.

Revenons maintenant à la représentation analytique des substitutions permutables et à la recherche effective de celles qui sont rationnelles; on est ramené à trouver les fonctions de Poincaré possédant deux théorèmes de multiplication :

$$\varphi(su) = R[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'u) = S[\varphi(u)].$$

Je dis que si S n'est pas du premier degré, on doit supposer $|s'| > 1$ (on a $|s| > 1$, par hypothèse). En effet, dans un petit domaine du plan des z entourant le point double répulsif, et correspondant à un petit cercle du plan des u qui entoure $u = 0$, les fonctions $S_n(z)$ ne peuvent pas former une famille normale, puisque les ensembles F et F' coïncident et que le point double répulsif ($z = 0$) de R appartient à F. Or, on a

$$\varphi(s'^n u) = S_n[\varphi(u)];$$

si l'on avait $|s'| \leqq 1$, le premier membre resterait borné pour $|u| < \rho$ et $n \to +\infty$. On doit donc supposer $|s'| > 1$, sauf dans le cas où S est du premier degré et par suite de période finie h, ce qui entraîne $s'^h = 1$. Comme on a

$$\varphi(s^n u) = R_n[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'^p u) = S_p[\varphi(u)],$$

nous dirons que les deux théorèmes de multiplication envisagés ici sont essentiellement distincts si l'on a $s^n \neq s'^p$, par suite $R_n(z) \neq S_p(z)$ et nous nous efforcerons de trouver les fonctions $\varphi(u)$ possédant une telle propriété et dont nous avons déjà donné des exemples.

A l'ensemble parfait F du plan des z, la relation $z = \varphi(u)$ fait correspondre dans le plan des u un ensemble parfait II, invariant par les deux substitutions linéaires $(u|su)$ et $(u|s'u)$, de sorte que si u appartient à II, il en est de même de $s^{m_1} s'^{m_2} u$ pour m_1 et m_2 entiers. Cherchons quelles valeurs peut prendre le facteur

$$s^{m_1} s'^{m_2} = e^{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3}$$
$$(\omega_1 = \log s, \qquad \omega_2 = \log s', \qquad \omega_3 = 2i\pi)$$

ou encore l'expression $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ pour m_1, m_2, m_3 entiers, sachant que cette expression n'est jamais nulle quand m_1, m_2, m_3 ne sont pas nuls tous les trois, puisqu'il n'existe aucune relation de la forme $s^n = s'^p$. Deux cas sont à distinguer :

1° Le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est imaginaire et les points multiples entiers de ω_3 n'appartiennent jamais aux droites joignant deux sommets du réseau de parallélogrammes construit sur (ω_1, ω_2). Les composantes du vecteur ω_3 suivant ω_1 et ω_2 sont de la forme $k\omega_1$, $k'\omega_2$, k et k' étant des nombres réels et incommensurables qui ne sont liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers; en effet, de

$$\omega_3 = k\omega_1 + k'\omega_2,$$
$$p_1 k + p_2 k' + p_3 = 0,$$

on déduirait

$$p_2\omega_3 = k(p_2\omega_1 - p_1\omega_2) + p_3\omega_2,$$

exprimant que le point $p_2\omega_3$ se trouve sur la droite joignant le point $p_3\omega_2$ au point $p_2\omega_1 - (p_1 p_3)\omega_2$, c'est-à-dire deux points du réseau (distincts, puisque p_1 et p_2 ne sont pas tous deux nuls); on peut alors écrire

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = \omega_1(m_1 + m_3 k) + \omega_2(m_2 + m_3 k') = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2.$$

En vertu d'un théorème général dû à Kronecker concernant la résolution approchée des équations de Diophante et dont nous donnons à la fin de ce travail une démonstration simple pour le cas particulier qui nous occupe, les expressions

$$\lambda = m_1 + m_3 k,$$
$$\mu = m_2 + m_3 k$$

s'approchent autant que l'on veut et simultanément de tout système de deux valeurs réelles données à l'avance. Les points $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ sont denses dans tout le plan, il en est de même des $s^{m_1} s'^{m_2}$; par suite H couvre tout le plan des u, F tout le plan des z. On sait qu'une telle circonstance ne peut pas se présenter si R est un polynome, c'est-à-dire si $\varphi(u)$ est une transcendante entière; mais elle se présente pour les fonctions elliptiques à multiplication complexe et de manière que les nombres s et s' présentent les caractères que nous venons de leur attribuer. Soit par exemple une fonction elliptique, telle que pu, admettant une formule de multiplication rationnelle par un entier ordinaire arbitraire et par l'entier quadratique imaginaire $s' = \rho e^{i\theta}$, on posera donc

$$\begin{aligned} \log s &= \log E, \\ \log s' &= \log \rho + i\theta = \frac{1}{2} \log N + i\theta, \end{aligned}$$

N étant la norme de s'. Une relation linéaire à coefficients entiers entre les quantités désignées plus haut par k et k' équivaudrait à

$$N^{m_2} = E^{2m_1+m_3\frac{\theta}{\pi}},$$

ce qui est impossible si l'on suppose E premier à N et $\frac{\theta}{\pi}$ incommensurable; cette dernière condition est en général vérifiée; $\frac{\theta}{\pi}$ n'est commensurable que si le nombre $\frac{s'}{\sqrt{N}}$ est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, par suite un entier algébrique, ce qui n'a pas lieu en général; on le constatera sur l'exemple

$$s' = 2 + \sqrt{-3}, \qquad \frac{s'}{\sqrt{N}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \xi, \qquad 7\xi^4 - 2\xi^2 + 7 = 0.$$

2° Le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est réel et incommensurable, ou un point multiple entier de ω_3 se trouve sur une droite joignant deux points du réseau (ω_1, ω_2).

Plaçons-nous d'abord dans la seconde hypothèse; le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est imaginaire, et le point $p\omega_3$ se trouve sur une droite du réseau (ω_1, ω_2), p étant le plus petit nombre positif qui satisfasse à cette condition; soit d cette droite du réseau; si d ne passe pas par l'origine, la première droite du réseau parallèle à d que l'on rencontre à partir de l'origine se déduit de d par une homothétie de rapport $\frac{1}{q}$ et de centre O, q étant un entier positif; le point $\frac{p\omega_3}{q}$ se trouve par conséquent entre deux sommets du réseau qui forment avec l'origine un triangle, moitié d'un parallélogramme générateur du réseau; soient ω'_1, ω'_2 les deux sommets en question; on a

$$\frac{p}{q}\omega_3 = \omega'_1 + k\omega'_2,$$

k étant un nombre réel (compris entre o et 1), nécessairement incommensurable; tout point Ω du système $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$ peut aussi se représenter par $m_1\omega'_1 + m_2\omega'_2 + m_3\omega_3$, et en remplaçant ω'_1 par sa valeur tirée de l'équation précédente,

$$\Omega = m_3\omega_3 + \omega'_2(m_2 - km_1) + m_1\frac{p}{q}\omega_3.$$

En vertu d'une propriété classique des incommensurables, $m_2 - km_1$ prend des valeurs infiniment voisines de tout nombre réel pour m_1 et m_2 entiers; d'autre part, p et q étant premiers entre eux, on peut écrire

$$\Omega = \lambda\omega'_2 + m_3\omega_3 + \frac{m}{q}\omega_3,$$

λ étant un paramètre réel qui prend des valeurs discrètes mais denses de $-\infty$ à $+\infty$, et m prenant les valeurs entières d'un système complet (mod q).

Si la droite d passe par l'origine, on a

$$\omega_3 = \frac{1}{k}\omega'_2 \qquad (k, \text{ réel, incommensurable}),$$

$$\Omega = m_1\omega'_1 + (m_3 + m_2 k)\omega_3 = m_1\omega'_1 + \lambda\omega_3,$$

λ étant encore un paramètre qui prend des valeurs réelles et denses de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, si $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ est réel et incommensurable, on a

$$\omega_2 = k\omega_1,$$

$$\Omega = (m_1 + km_2)\omega_2 + m_3\omega_3 = \lambda\omega_2 + m_3\omega_3.$$

En définitive, on peut écrire, dans tous les cas,

$$s^{m_1}s'^{m_2} = e^{\lambda(a+bi)+2i\pi\frac{m}{q}},$$

λ conservant sa signification, m prenant les valeurs entières d'un système complet (mod q); q peut être égal ou inférieur à 1; a n'est pas nul, sinon on aurait $|s^{m_1} s'^{m_2}| = 1$, contrairement à l'hypothèse $|s| > 1$ et $|s'| > 1$.

Soit u_0 un point fixe du plan des u; posons

$$u_0 = e^{\alpha_0} e^{i\omega_0}.$$

Il vient

$$s^{m_1} s'^{m_2} u_0 = e^{\alpha_0 + \lambda a} e^{i\left(\omega_0 + \lambda b + 2m\frac{\pi}{q}\right)},$$

ou

$$u = e^t e^{i(ct + \varkappa)},$$

en posant

$$t = \alpha_0 + \lambda a,$$

$$c = \frac{b}{a},$$

$$\varkappa = \omega_0 - c\alpha_0 + 2\frac{m\pi}{q},$$

t prend toujours des valeurs denses de $-\infty$ à $+\infty$, c est indépendant de u_0, $\varkappa$ seul en dépend et prend en outre q valeurs distinctes (mod 2π). L'équation qui donne u définit un système de q spirales logarithmiques égales, et qui restent égales à l'une d'entre elles quand on fait varier $\varkappa$; elles s'enroulent toutes dans le même sens autour de l'origine. Pour $b = 0$, ces spirales sont remplacées par des droites.

Si l'ensemble parfait II ne couvre pas tout le plan, il est donc constitué par un faisceau de spirales ou de demi-droites issues de l'origine; chacune de ces lignes coupe en un seul point un cercle de centre O; sur la circonférence d'un tel cercle, il existe des arcs contigus à II. Examinons le changement produit sur ce faisceau par la substitution $(u|su)$ et ses puissances; nous savons qu'il est invariant; or, si l'on pose

$$s = e^{h+ik},$$

il vient

$$s^p u = e^{t+ph} e^{i(ct+\varkappa+pk)} = e^{t'} e^{ict' + i\varkappa + ip(k-ch)},$$

en posant

$$t' = t + ph.$$

La substitution $(u|s^p u)$ produit donc sur ce faisceau l'effet d'une rotation de l'angle $p(k - ch)$; donc pour que les transformés successifs d'un arc contigu à II, qui doivent rester des arcs contigus, n'empiètent pas les uns sur les autres, il faut que $k - ch$ soit commensurable à 2π; donc il existe une puissance de la substitution $(u|su)$

qui laisse invariant le secteur, contigu à H, limité par deux spirales ou deux droites du faisceau. Remarquons que H est continu, deux de ses points pouvant toujours être reliés à l'origine par deux arcs de spirale. Cherchons la traduction de ces faits dans le plan des z, quand on pose $z = \varphi(u)$; pour éviter les difficultés relatives aux valeurs limites de $\varphi(u)$ à l'infini, les domaines considérés n'étant pas bornés, considérons seulement la partie Δ_0 du secteur Δ intérieure à un petit cercle de centre O; à Δ_0 correspond point par point un domaine D_0 du plan des z; comme $(u|s^p u)$ change Δ_0 en $\Delta'_0 > \Delta_0$, on en conclut que $[z|R_p(z)]$ change D_0 en $D'_0 > D_0$; le domaine D, contigu à F, dont font partie D_0 et D'_0 est par suite invariant par la même substitution; aux deux arcs de spirale qui limitent Δ_0 correspondent deux arcs de courbe simples au sens de M. Jordan, et d'ailleurs analytiques sauf en O dans le plan des z; ces deux arcs qui font partie de F constituent la frontière de ce domaine D_0, en y adjoignant la coupure artificielle formée d'un arc analytique, image de l'arc de cercle par lequel on a limité Δ_0. Remarquons, en outre, que D est simplement connexe, puisque F est continu en vertu de la remarque faite plus haut au sujet de H. Je dis enfin que D n'est pas un domaine invariant singulier, au sens que j'ai donné à ce mot dans mon Mémoire cité, c'est-à-dire que les fonctions limites des itérées de $R(z)$ ne peuvent y être que des constantes; en effet, nous avons démontré qu'un domaine singulier, invariant par une substitution rationnelle $[z|T(z)]$, ne contient qu'un antécédent de chacun de ses points, les points limites des antécédents successifs étant fonctions de la position du point initial; or le domaine Δ_0 contient les transformés de ses points par les puissances négatives de la substitution $(u|s^p u)$, lesquels tendent uniformément vers l'origine; donc le domaine D_0 contient les antécédents successifs de chacun de ses points, obtenus par certaines branches de $T_{-n}(z)$ ou $-R_{-np}(z)$, ces points tendant uniformément vers l'origine. Il y a contradiction avec le théorème que nous venons de rappeler et l'hypothèse que Δ est un domaine singulier.

Donc D n'est pas un domaine singulier, et ne peut être, comme je l'ai démontré en détail, dans mon Mémoire sur les équations fonctionnelles, que le domaine immédiat d'un point double attractif ou d'un point double singulier de multiplicateur $+1$; comme, en outre, la frontière continue de ce domaine présente des arcs analytiques isolés, il faut nécessairement que la frontière de ce domaine soit une circonférence (ou une droite); ou un arc de circonférence (ou un segment de droite), cette ligne frontière constituant à elle seule l'ensemble F. Cette propriété, qui est vraie pour $|z|R_p(z)|$, l'est également pour $|z|R(z)|$. Cette dernière substitution est donc de la classe particulière que j'ai appelée $\mathfrak{S}$ et qui comprend : 1° des substitutions à cercle fondamental de première espèce (cas de la frontière fermée); 2° des substitutions qui se déduisent des premières par une transformation du second degré (cas de la frontière ouverte).

Ces résultats importants étant rappelés, il est maintenant facile de déterminer celles des fonctions $\varphi(u)$ qui sont entières. Il s'agit, en définitive, d'obtenir des substitutions de la classe $\mathfrak{S}$, qui sont entières; c'est là une discussion facile et que j'ai déjà faite dans mon Mémoire sur les équations fonctionnelles (Chap. III, § 25). Le résultat est le suivant : les substitutions cherchées peuvent être transformées par une substitution linéaire en $Z = z^m$, pour la première sorte, et pour la deuxième en $Z = \pm P_m(z)$, $P_m(z)$ étant le polynome de Serret qui exprime $\cos m\varphi$ en fonction de $z = \cos\varphi$. On en déduit les fonctions entières cherchées, c'est-à-dire les fonctions de Poincaré, correspondant aux divers points doubles répulsifs $\left(z^{m-1} = 1,\ z = e^{\frac{2\nu i\pi}{m-1}}\right)$; elles sont de la forme Ae^{ku}, A et k étant déterminés par les conditions

$$\varphi(0) = z_0 \qquad \text{(point double)},$$
$$\varphi'(0) = 1,$$

d'où

$$\varphi(u) = z_0 e^{\frac{u}{z_0}}.$$

Les multiplicateurs donnant lieu à des formules rationnelles de multiplication sont les nombres entiers.

Pour les substitutions du second type, on obtient essentiellement les fonctions $\cos u$. Soit, par exemple,

$$z = \cos w,$$
$$P(z) = \cos mw.$$

Posons

$$\varphi(u) = \cos(ku + h) = \cos w,$$
$$\varphi(mu) = \cos(mku + h) = \cos mw.$$

La première relation donne

$$ku + h = \pm w,$$
$$mku + h = \pm mw - (m-1)h.$$

On aura

$$\cos(mku + h) = \cos mw$$

si

$$(m-1)h = 2N\pi.$$

Si l'on attribue à $\varphi(u)$ le multiplicateur $-m$, on trouve

$$(m+1)h = 2N\pi.$$

Les valeurs qui en résultent pour $\varphi(0) = \cos h$ sont bien toutes les racines de $z = P(z)$; le facteur k qui est resté arbitraire pourra être choisi de manière que $\varphi'(0) = 1$, du moins si $\sin h$ n'est pas nul, car on a

$$\varphi'(0) = -k \sin h.$$

h peut toujours prendre la valeur zéro qui correspond au point double $z = 1$: la fonction de Poincaré correspondante n'est donc pas la fonction $\cos u$, dont la dérivée est nulle pour $u = 0$, mais la fonction

$$\varphi(u) = \cos(i\sqrt{2u}) = 1 + u + \ldots.$$

En écrivant

$$w = i\sqrt{2u},$$
$$\cos mw = \cos(i\sqrt{2su}),$$

on voit que

$$s = m^2.$$

Pour $z = -1$ (m impair), on doit prendre de même

$$z = \varphi(u) = -\cos(\sqrt{2u}) = -1 + u + \ldots,$$
$$\sqrt{2u} = w + \pi,$$
$$\varphi(m^2 u) = -\cos(mw + m\pi) = \cos mw = P(z).$$

Si l'on considère maintenant la substitution

$$z = \cos w,$$
$$P(z) = -\cos mw,$$

elle se ramène à la précédente dans le cas de m impair par la transformation $(z \mid -z)$, mais dans le cas de m pair, elle en est distincte; car elle échange entre eux les points $(-1, +1)$, tandis que précédemment le point $(+1)$ était un point double. On voit facilement que les fonctions de Poincaré sont toujours de la forme $\cos(ku+h)$ pour tous les points doubles répulsifs.

Si l'on se donne, *a priori*,

$$\varphi(u) = \cos(ku+h),$$

on trouve que $\varphi(su)$ s'exprime rationnellement en fonctions de $\varphi(u)$ pour s entier et $h = \frac{m\pi}{s-1}$; on a donc $\frac{h}{\pi} = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux, et les multiplicateurs qui conviennent sont les entiers congrus à 1 (mod q). Pour les expressions $\cos(k\sqrt{u})$, les multiplicateurs cherchés sont les carrés des nombres entiers.

On voit bien que les fonctions entières de Poincaré admettant deux théorèmes de multiplication distincts sont essentiellement les fonctions e^u et $\cos u$, sans qu'il y ait lieu d'insister davantage sur la signification du mot essentiellement.

La recherche des fonctions méromorphes possédant la même propriété et qui ne sont pas, comme $\operatorname{tang} u$, la transformée linéaire d'une fonction entière paraît difficile, et je ne sais pas s'il y en a d'autres que les fonctions elliptiques ([1]). On peut démontrer, toutefois, que les substitutions à cercle fondamental ne fournissent pas d'autre solution du problème que les transformées linéaires des fonctions entières déjà obtenues. Mais pour arriver à ce résultat, nous avons besoin de quelques préparatifs que nous allons maintenant exposer.

Démontrons d'abord ceci : soient $|z|R(z)|$ et $|z|S(z)|$ deux substitutions rationnelles permutables ; si α est un point double de la première, il en est de même des points $S(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, ..., $S_p(\alpha)$, ..., qui, en outre, sont de la même espèce que α.

En effet, si $R(\alpha) = \alpha$, en vertu de l'identité

$$R[S(z)] = S[R(z)],$$

on a aussi

$$R[S(\alpha)] = S(\alpha).$$

$S(\alpha)$ est donc un point double de la première substitution. En outre, en dérivant l'identité qui précède, on a

$$R'[S(z)]S'(z) = S'[R(z)]R'(z).$$

([1]) Il résulte des recherches de M. F. Ritt, parues depuis la rédaction du présent Mémoire, que les fonctions elliptiques répondent seules à la question. Les démonstrations de M. Ritt, de nature algébrique, sont sans lien avec les méthodes employées ici.

Au voisinage de $z = \alpha$, on a

$$R(z) = \alpha + k(z-\alpha)^m + l(z-\alpha)^{m+1} + \ldots \qquad (k \neq 0);$$
$$S(z) = S(\alpha) + c(z-\alpha)^p + d(z-\alpha)^{p+1} + \ldots \qquad (c \neq 0),$$
$$S'(z) = cp(z-\alpha)^{p-1} + d(p+1)(z-\alpha)^p + \ldots = cp(z-\alpha)^{p-1}[1 + \mathfrak{P}_1(z-\alpha)],$$
$$S'[R(z)] = cpk^{p-1}(z-\alpha)^{m(p-1)}[1 + \mathfrak{P}_2(z-\alpha)],$$
$$R'(z) = km(z-\alpha)^{m-1}[1 + \mathfrak{P}_3(z-\alpha)],$$

d'où

$$R'[S(z)] = \frac{S'[R(z)]\,R'(z)}{S'(z)} = mk^p(z-\alpha)^{(m-1)p}[1 + \mathfrak{P}_4(z-\alpha)],$$

en désignant en général par $\mathfrak{P}_i(z-\alpha)$ une série entière en $z-\alpha$, nulle pour $z = \alpha$. Pour $m = 1$, la formule précédente devient

$$R'[S(z)] = k^p(1 + \mathfrak{P}_4(z-\alpha)],$$

et pour $z = \alpha$,

$$R'[S(\alpha)] = k^p.$$

Pour $m > 1$, on a

$$R'[S(\alpha)] = 0.$$

Ainsi le multiplicateur au point $S(\alpha)$ de la première substitution est une puissance d'exposant positif entier, du multiplicateur en α; ces deux points doubles sont donc de même espèce : attractifs, répulsifs, indifférents, et dans le premier cas, en même temps, de multiplicateur nul ou différent de zéro; il en sera de même pour tous les points de la suite $S(\alpha)$, $S_2(\alpha)$, ..., et comme R n'a qu'un nombre fini de points doubles, cette suite comprend deux points identiques

$$S_p(\alpha) = S_{p+q}(\alpha) = S_q[S_p(\alpha)].$$

Le point $S_p(\alpha)$ est donc un point double de R et un point périodique d'ordre q de S, et de même espèce que α; en tant que point double de la substitution S_q, il est encore de même espèce pour S_q et pour R.

Considérons deux substitutions rationnelles permutables R et S de degré > 1, telles que l'on n'ait jamais $R_m = S_{m'}$ pour m et m' entiers; si R n'a pas de point double répulsif, on sait qu'il existe une puissance R_h de R qui possède un point double répulsif α; on pourra trouver, d'autre part, d'après ce qui précède, un point double répulsif β commun à R_h et à $S_{h'}$ pour une valeur convenable de h'; les deux substitutions R_h et $S_{h'}$ étant désignées par R' et S', on a toujours

$$R'S' = S'R'$$

et

$$R'_m \neq S'_{m'}$$

pour m et m' entiers, R' et S' ayant, en outre, un point répulsif commun. Si R et S sont entières, il en est de même de R' et S'; réciproquement, si R' et S' sont entières, ce sont deux substitutions de la classe $\mathfrak{S}$ que nous venons d'étudier; R et S sont elles-mêmes entières et de la même classe; il y a toutefois une exception pour les substitutions $\mathfrak{S}$ de la première catégorie, réductibles à la forme $(z \mid z^m)$, qui peuvent être les itérées d'ordre entier d'une substitution fractionnaire $(z \mid z^{-\mu})$, pour une valeur paire de l'indice d'itération.

Soient donc R et S deux substitutions permutables, rationnelles et entières telles que l'on n'ait jamais $R_m = S_{m'}$. Deux cas sont à distinguer :

1° R peut être transformée par une substitution linéaire en $(z \mid z^m)$; la même substitution linéaire transforme alors S en $(z \mid a z^{m'})$; on a $a^{m-1} = 1$; m' peut être un entier quelconque.

2° R peut être ramenée par une transformation linéaire à la forme paramétrique

$$z = \cos w,$$
$$R(z) = \pm \cos m w,$$

qui est la forme générale des substitutions rationnelles et entières admettant comme ensemble F le segment $(-1, +1)$. La substitution S sera donc ramenée, par la même transformation linéaire, à la forme paramétrique

$$z = \cos w,$$
$$S(z) = \pm \cos m' w.$$

Si l'on écrit

$$z = \cos w,$$
$$R(z) = \varepsilon \cos m w;$$
$$z = \cos w',$$
$$S(z) = \varepsilon' \cos m' w',$$

on vérifie facilement que R et S sont permutables : 1° si $\varepsilon = \varepsilon' = +1$; 2° si $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$, m impair; 3° si $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, m' impair; 4° si $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, m et m' de même parité.

Revenons maintenant au cas des substitutions du type $\mathfrak{S}$, que nous désignons toujours par R et S, ayant un point double répulsif commun à l'origine, R ne pouvant être transformée par aucune substitution linéaire en une substitution entière; la fonction de Poincaré $\varphi(u)$ qui vérifie les identités

$$\varphi(su) = \mathrm{R}[\varphi(u)],$$
$$\varphi(s'u) = \mathrm{S}[\varphi(u)],$$

avec $s^{m_1} \neq s'^{m_2}$, pour m_1 et m_2 entiers, est donc une fonction méromorphe sans valeurs exceptionnelles au sens de M. Picard, et tout point du plan z possède, relativement à R, une infinité d'antécédents distincts; en outre, R et S, étant du type $\mathfrak{S}$, possèdent chacune un ou deux points doubles attractifs, ou encore un point double singulier de multiplicateur $+1$; on peut, en effet, laisser de côté le cas des substitutions à cercle fondamental du type II qui possèdent un cycle attractif d'ordre 2, et permutent entre eux l'intérieur et l'extérieur du cercle; il suffit, pour cela, de changer R en R_2, s en s^2; d'autre part, d'après une discussion faite plus haut, il est permis de supposer que ces points doubles attractifs ou singuliers sont les mêmes pour R et S; il suffit de changer S en S_p.

Soient d'abord z_0 un point double attractif de R et S, u_0 une racine de $\varphi(u) = z_0$; on a

$$\varphi(s'^p u_0) = \mathrm{S}_p(z_0) = z_0,$$
$$\mathrm{R}_n\left[\varphi\left(\frac{s'^p}{s^n} u_0\right)\right] = z_0.$$

Les points $\frac{s'^p}{s^n} u_0$ du plan des u ont donc pour homologues dans le plan des z des antécédents du point double z_0; les nombres s et s' sont d'ailleurs nécessairement réels, l'ensemble Π devant se réduire à une droite ou à une demi-droite; le rapport $\frac{\log|s|}{\log|s'|}$ est incommensurable; donc $\frac{s^n}{s'^p}$ pour n et p entiers positifs prend des valeurs infiniment voisines de 1 et distinctes de 1; les antécédents de z_0 par R, distincts de z_0, auraient donc z_0 pour point limite; ceci est impossible, les points limites des antécédents de z_0 appartenant à la frontière F.

Supposons maintenant que R possède un point double singulier; la démonstration qui précède ne s'applique plus. Remarquons alors (*loc. cit.*, Chap. VII, § **70**) que les points critiques algébriques de la fonction inverse de $\varphi(u)$ coïncident avec les conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$ (à partir du rang zéro); ceci est vrai sans exception, $\varphi(u)$ n'ayant pas de valeur exceptionnelle. Ces points critiques algébriques coïncident, d'autre part, avec les conséquents des points critiques de $S_{-1}(z)$. Si donc α, α', ... sont les points critiques de $R_{-1}(z)$; β, β', ... ceux de $S_{-1}(z)$, à tout $\alpha^{(i)}$ et à tout entier n positif ou nul correspond un $\beta^{(k)}$ et un entier p positif ou nul tel que

$$R_n(\alpha^{(i)}) = S_p(\beta^{(k)})$$

et réciproquement; ceci reste vrai quand on se borne aux $\alpha^{(i)}$ et $\beta^{(k)}$ qui sont extérieurs à F, et nous savons qu'il en existe. Soit donc α un point critique de R_{-1} extérieur à F; considérons les points z qui vérifient les équations

$$R_n(z) = S_p(\alpha),$$

en donnant à n et p toutes les valeurs positives entières. Si l'on appelle u' une racine de l'équation $\varphi(u) = \alpha$, l'équation qui précède est vérifiée pour

$$z = \varphi\left(\frac{s'^p u'}{s^n}\right).$$

Or, comme nous l'avons remarqué plus haut, les points $\frac{s'^p u'}{s^n}$ sont répartis d'une manière dense sur une droite et ont notamment pour limite le point u'; les points z correspondants auraient donc le point α pour point limite. Je dis que ceci est impossible. En effet, l'équation $R_n(z) = S_p(\alpha)$ équivaut à

$$R_n(z) = R_q[\beta^{(k)}];$$

autrement dit, z est homologue de $\beta^{(k)}$, par une substitution du groupe G des substitutions algébriques

$$R_n(z) = R_q(z').$$

Or les $\beta^{(k)}$ sont en nombre fini et intérieurs au domaine ou à l'un des deux domaines de convergence relatifs au point double singulier; or en tous les points intérieurs à un tel domaine, le groupe G est proprement discontinu; cela résulte, si l'on veut, de l'existence d'une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur de ce domaine, invariante par les substitutions de G, par exemple, la fonction

$$I(z) = e^{\frac{2i\pi}{\omega}A(z)},$$

$A(z)$ étant la solution fondamentale de l'équation d'Abel,

$$A[R(z)] = A(z) + \omega,$$

qui est elle-même holomorphe dans le domaine considéré. Les points homologues des $\beta^{(k)}$ par les substitutions de G tendent donc vers F et ne sauraient tendre vers α, qui est extérieur à F. Nous retrouverons d'ailleurs dans les chapitres suivants une démonstration plus générale du fait que nous venons d'établir.

En résumé, si deux substitutions rationnelles R et S sont permutables et ne vérifient aucune relation

$$R_n = S_p$$

pour des valeurs entières de l'indice d'itération, R et S étant, d'ailleurs, l'une et l'autre, de degré > 1, il y a deux cas à distinguer :

1° L'une des substitutions R ou S est telle que l'ensemble F correspondant ne couvre pas tout le plan : ce qui arrive, notamment, quand R est une substitution entière, ou plus généralement possède un point double ou un cycle attractif ou de multiplicateur $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$. Alors les deux substitutions peuvent être ramenées par une même transformation linéaire à la forme

$$Z = z^m,$$
$$Z = a z^{m'},$$

m et m' étant des entiers positifs ou négatifs et $a^{m-1} = 1$; ou bien encore R et S seront transformables de la même manière en

$$Z = \varepsilon \cos(m \arccos z),$$
$$Z = \varepsilon' \cos(m' \arccos z),$$

m, m' entiers, $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$, les signes de ε et ε' étant convenablement choisis.

2° L'ensemble F relatif aux substitutions R et S couvre tout le plan.

On ne connaît pas, dans ce cas, la forme générale des substitutions R et S, mais seulement des exemples provenant des formules de multiplication des fonctions elliptiques ([1]).

Je rappelle que F peut être défini comme l'ensemble dérivé des points racines des équations $R_n(z) = z$.

Une conséquence immédiate de ce qui précède est que, si R et S sont deux substitutions permutables de degré > 1, les points des cycles attractifs relatifs à R et S forment deux groupes (finis) de points qui coïncident.

On peut traiter d'une manière analogue le problème qui consiste à trouver, parmi les fonctions méromorphes de Poincaré possédant un théorème de multiplication, celles qui sont périodiques, soit à trouver les fonctions méromorphes qui vérifient les deux équations

$$\varphi(ku) = R[\varphi(u)],$$
$$\varphi(u + \omega) = \varphi(u).$$

On suppose

$$\varphi(0) = R(0) = 0 \qquad (|k| > 1),$$

hypothèses faciles à justifier.

On déduit de là

$$\varphi(ku + k\omega) = R[\varphi(u + \omega)] = R[\varphi(u)] = \varphi(ku),$$

d'où, en changeant u en $\frac{u}{k}$ dans les deux membres extrêmes,

$$\varphi(u + k\omega) = \varphi(u);$$

$k\omega$ est donc encore une période. Si k est imaginaire, $\varphi(u)$ est une fonction doublement périodique à multiplication complexe; k est alors un nombre quadratique imaginaire.

Si k est réel, il est nécessairement commensurable. Je dis même qu'il est entier. En effet, si u^* est racine de $\varphi(u) = 0$, il en est de même de $k^n u^*$, en vertu de

$$\varphi(k^n u) = R_n[\varphi(u)]$$

et de

$$R_n(0) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, $k^n\omega$ est une racine, de même que $(k^n - x)\omega$ pour x entier, à cause de la périodicité; prenons pour x la partie entière

([1]) Voir la note, page 374, et les travaux de M. F. Ritt parus dans les *Transactions of the mathematical american Society*.

de k^n et soit $k = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux; si $q > 1$, on aura une infinité de zéros distincts, de la forme précédente, compris par conséquent à l'intérieur du segment $(0, \omega)$; en effet, deux de ces nombres ne peuvent coïncider que si la différence

$$\frac{p^{n+\nu}}{q^{n+\nu}} - \frac{p^n}{q^n} = \frac{p^n(p^\nu - q^\nu)}{q^{n+\nu}}$$

est un nombre entier, ce qui est impossible; $\varphi(u)$ aurait ainsi des points d'indétermination à distance finie, contrairement à l'hypothèse. On a donc $q = 1$, k est entier.

Soient deux points z et z' du plan des z, équivalents par rapport au groupe G' des transformations

$$R_n(z) = R_n(z').$$

Cette relation équivaut à

$$\varphi(k^n u) = \varphi(k^n v)$$

si $z = \varphi(u)$, $z' = \varphi(v)$; on vérifie la relation précédente en posant

$$k^n u = k^n v + x\omega \qquad (x \text{ entier}),$$

$$u = v + \frac{x}{k^n}\omega$$

Les nombres $\frac{x}{k^n}$ étant partout denses, on peut écrire

$$u = v + \lambda\omega,$$

λ prenant des valeurs denses de $-\infty$ à $+\infty$; si l'on se donne v, l'ensemble dérivé des points u contient donc la parallèle au vecteur ω menée par v. Appelons toujours Π l'ensemble parfait du plan des u qui correspond à l'ensemble parfait F du plan des z attaché à la fraction rationnelle R. De la remarque que nous venons de faire et de l'invariance de F par rapport aux substitutions de G', on déduit que Π est formé de parallèles au vecteur ω, parmi lesquelles se trouve la droite $O\omega$. Si π contient u_0 extérieur à cette dernière droite, il contient tous les points

$$u_0 k^{\pm p} + \lambda\omega;$$

λ variant de $+\infty$ à $-\infty$ et p prenant les valeurs entières, ces points sont répartis sur une infinité de droites parallèles à $O\omega$; les domaines contigus à π, s'ils existent, sont formés de bandes parallèles à cette même droite.

Bornons-nous au cas où R est un polynome, $\varphi(u)$ une fonction entière; nous pouvons alors achever la détermination de $\varphi(u)$ sans avoir recours, comme précédemment, aux propriétés des frontières des domaines invariants par les substitutions rationnelles. En effet, soit Δ une bande de largeur finie, contiguë à Π; dans Δ la fonction $\varphi(u)$ est bornée, à cause de la périodicité, et quand u décrit Δ, $z = \varphi(u)$ décrit un domaine borné, d'un seul tenant, contigu à F. Or, prenons un point u_0 arbitraire sur une droite d de Π distincte de $O\omega$, auquel correspond le point $z_0 = \varphi(u_0)$ de F; à un petit cercle du plan des u entourant u_0 correspond un petit domaine du plan des z entourant z_0, ce dernier contenant certainement des points du domaine D_∞ du point à l'infini; on sait, en effet, que D_∞, qui est d'un seul tenant, admet tous les points de F comme points frontières; il y a donc des bandes telles que Δ qui correspondent à D_∞, puisque tout point u suffisamment voisin de u_0 et extérieur à Π appartient à une bande contiguë, Δ, de largeur finie. Le domaine D_∞ serait donc borné, ce qui est absurde. Il faut donc que l'ensemble Π se réduise à la seule droite $O\omega$. Quand u décrit cette droite, $z = \varphi(u)$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et décrit une courbe analytique, ouverte ou fermée, Γ, du plan des z. Si z est de Γ (qui constitue ici l'ensemble F), l'équation $\varphi(u) = z$ a inversement tous ses points racines sur la droite $O\omega$.

Si l'on pose $w = e^{\frac{2i\pi u}{\omega}}$, $\varphi(u)$ devient une fonction $\theta(w)$ développable suivant les puissances entières, positives ou négatives de w; si z est un point de Γ, les racines de l'équation $\theta(w) = z$ ont l'unité pour module; donc, la fonction $\theta(w)$ ne prenant jamais les valeurs de Γ au voisinage des points o et ∞, ces points sont des pôles ou des points ordinaires pour la fonction, et $\theta(w)$ a par suite un développement limité :

$$\theta(w) = a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}.$$

Exprimons ensuite le théorème de multiplication de $\varphi(u)$; changer u en ku revient à changer w en w^k; soit maintenant

$$R(z) = kz + Az^2 + \ldots + L_1 z^m.$$

On doit avoir l'identité

$$
\begin{aligned}
& a_0 + a_1 w^k + a_{p-1} w^{(p-1)k} + \frac{a_{-1}}{w^k} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^{kq}} \\
= \; & k\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right] \\
& + \mathrm{A}\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right]^2 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \mathrm{L}\left[a_0 + a_1 w + \ldots + a_p w^p + \frac{a_{-1}}{w} + \ldots + \frac{a_{-q}}{w^q}\right]^m.
\end{aligned}
$$

On doit tenir compte, en outre, de la condition $\varphi'(0) \neq 0$, qui donne $\theta'(1) \neq 0$.

On trouve facilement $m = k$. L'identification donne ensuite

$$
\begin{aligned}
a_{p-1} &= a_{p-2} = \ldots = a_1 = 0, \\
a_{-(q-1)} &= a_{-(q-2)} = \ldots = a_{-1} = 0
\end{aligned}
$$

et $\theta(w)$ se réduit à

$$a_p w^p + a_0 + \frac{a_{-q}}{w^q}$$

que nous écrirons plus commodément

$$\theta(w) = \lambda w^p + \mu + \frac{\rho}{w^q}.$$

Nous devons exprimer que $\theta(w^k)$ est un polynome en $\theta(w)$. On voit facilement qu'il n'y a pas d'inconvénient à supposer $\mu = 0$. On écrit alors l'identité écrite plus haut sous la forme plus simple

$$\lambda w^{pk} + \frac{\rho}{w^{qk}} = c_0\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right)^k + c_1\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right)^{k-1} + \ldots + c_{k-1}\left(\lambda w^p + \frac{\rho}{w^q}\right) + c_k.$$

Supposons, par exemple, $p > q$; on obtient, en identifiant, d'abord

$$
\begin{aligned}
\lambda - c_0 \lambda^k &= 0, \\
c_1 \lambda^{k-1} &= 0,
\end{aligned}
$$

puis, en égalant les termes en $w^{p(k-1)-q}$,

$$c_1 \lambda^{k-1} \rho = 0.$$

Si $\lambda\rho \neq 0$, ceci est impossible; on doit donc avoir $p \leqq q$; de même

$p \geqq q$; donc $p = q$. On est donc conduit à exprimer que

$$\lambda w^{pk} + \frac{\rho}{w^{pk}}$$

est fonction rationnelle de

$$\lambda w^{p} + \frac{\rho}{w^{p}}$$

ou, en posant $w^p = t$, que

$$\mathrm{Y} = \lambda t^k + \rho t^{-k}$$

est fonction rationnelle de

$$\mathrm{X} = \lambda t + \rho t^{-1}.$$

Le produit des racines de cette dernière équation en t étant $\frac{\rho}{\lambda}$, Y ne doit pas changer si l'on change t en $\frac{\rho}{\lambda t}$, ce qui conduit à

$$\rho^{k-1} = \lambda^{k-1},$$
$$\lambda = \rho e^{2i\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{\mathrm{N}\pi}{k-1}\right).$$

En remplaçant ensuite t par sa valeur $w^p = e^{\frac{2i\pi p u}{\omega}} = e^{iv}$, on trouve

$$\mathrm{X} = 2\rho e^{i\alpha} \cos(v + \alpha),$$
$$\mathrm{Y} = 2\rho e^{i\alpha} \cos(kv + \alpha).$$

On est ramené au problème de trigonométrie élémentaire déjà rencontré : exprimer que $\cos(kv + \alpha)$ est fonction rationnelle de $\cos(v + \alpha)$, ce qui a bien lieu pour $\alpha = \frac{\mathrm{N}\pi}{k-1}$. Comme v est proportionnel à u, on n'obtient en définitive que le théorème de multiplication de $\cos u$. Pour λ ou $\rho = 0$, on est conduit à la fonction exponentielle.

Ainsi toute fonction périodique entière qui admet un théorème de multiplication se ramène par les substitutions $(\varphi | \mathrm{A}\varphi + \mathrm{B})$ effectuée sur la fonction et $(u | cu)$ effectuée sur la variable, aux fonctions $\cos(u + h)$ et e^u.

On pourrait généraliser un peu la démonstration précédente; toutefois, nous ne sommes pas parvenus, par cette méthode, à l'expression générale des fonctions méromorphes périodiques ayant un théorème de multiplication, quand le multiplicateur est réel et par suite entier ordinaire.

(*A suivre.*)