JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. RIQUIER

Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 215-280.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__215_0>

Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre ;

PAR CH. **RIQUIER**,

Professeur à l'Université de Caen.

INTRODUCTION.

Le présent Travail, dont un bref résumé a été communiqué à l'Académie des Sciences [1], a pour objet la généralisation des notions classiques relatives aux intégrales complètes de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Il est divisé en deux parties ayant respectivement pour titres :

PREMIÈRE PARTIE. — *Principes fondamentaux de la Théorie hypergéométrique des contacts; figures enveloppes.* (Voir ci-dessous les alinéas I, II et III.)

DEUXIÈME PARTIE. — *Systèmes complètement intégrables d'équations aux dérivées partielles du premier ordre; figures intégrales; familles complètes de figures intégrales; réduction des systèmes quelconques.* (Voir ci-dessous les alinéas IV, V, VI et VII.)

I. Dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, nous nommerons *figure* un ensemble

---

[1] Voir les *Comptes rendus* des 27 juin et 2 novembre 1921.

de *points* défini par un système d'équations reliant les n *coordonnées*, réelles ou imaginaires, x, y, ...; point *ordinaire* d'une figure un point tel, que, dans un voisinage suffisamment rapproché du point, la figure puisse être définie à l'aide d'un système réduit d'équations normalement résolubles. Nous bornant à la considération exclusive de ce voisinage, et supposant tour à tour que le système réduit comprenne 1, 2, 3, ... équations, nous dirons, suivant le cas, que la figure est à $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... *dimensions*.

Deux systèmes réduits numériquement équivalents, et, par suite, nécessairement composés d'un même nombre d'équations, définissent deux figures identiques.

Si, désignant par p et p' deux entiers différents, on suppose que deux systèmes réduits, S et S', comprennent respectivement p et p' équations, et que le premier, S, soit une conséquence numérique du second, S', on a nécessairement $p<p'$, d'où $n-p>n-p'$, et la figure à $n-p'$ dimensions que définit S' sera dite *située sur* la figure à $n-p$ dimensions que définit S; inversement, la figure S sera dite *contenir* la figure S'.

Une figure à $n-p$ dimensions, définie par un système réduit de p équations, peut encore se représenter à l'aide d'un groupe de n formules égalant les n coordonnées $x, y, \ldots$ à n fonctions analytiques et régulières de $n-p$ arbitraires, de telle façon que $n-p$ de ces formules, convenablement choisies, soient résolubles par rapport aux arbitraires : de ces deux modes de représentation, le premier sera qualifié de *réduit*, le second de *paramétrique*.

II. Considérons deux figures ayant un point commun, ordinaire pour chacune d'elles; désignons par $n-p$, $n-r$ leurs nombres respectifs de dimensions, et supposons $n-p \geqq n-r$. Les deux figures étant, dans le voisinage de ce point initial, représentées, la première (celle à $n-p$ dimensions), suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$f_1(x, y, \ldots)=0, \quad f_2(x, y, \ldots)=0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots)=0,$$

la seconde (celle à $n-r$ dimensions), suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$x = \xi(s, t, \ldots), \quad y = \eta(s, t, \ldots), \quad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(s, t, \ldots), \eta(s, t, \ldots), \ldots] \end{array} \right.$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par g un entier positif ou nul, si les fonctions (1) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n - r$ paramètres $s, t, \ldots$) jusqu'à l'ordre g inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $g + 1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir au point considéré un contact d'ordre g (1).

III. Soient $x, y, \ldots$ et $u, v, \ldots$ deux groupes de variables, en contenant respectivement h et k : si, dans l'espace à $h + k$ dimensions

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

deux figures à h dimensions contiennent l'une et l'autre une même figure à $h - q$ dimensions $(0 \leqq q \leqq h)$, et si, en tout point de cette dernière, elles ont l'une avec l'autre un contact proprement dit (c'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro), elles seront dites avoir l'une avec l'autre, suivant cette dernière, un *raccordement de genre* $h - q$.

Supposons actuellement qu'une famille, $\mathcal{F}_h$, de figures à h dimen-

(1) Les deux figures peuvent, d'une infinité de manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique; on peut d'ailleurs, dans l'hypothèse $p = r$, permuter leurs rôles respectifs, et supposer tour à tour que la première figure, puis la deuxième, soit celle que l'on représente suivant le mode réduit : or, le caractère formulé dans la définition est indépendant de ces diverses circonstances variables. Il l'est, en outre, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$.

sions, dépendant des q paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, soit définie à l'aide d'un système de k équations entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q$ (et que ce système soit, comme de raison, résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées, $u, v, \ldots$ par exemple). On peut se proposer de rechercher s'il existe quelque figure fixe à h dimensions avec laquelle chacune des figures $\mathcal{F}_h$ présente un raccordement de genre $h-q$: ce problème, qui dépend d'un système de $k(q+1)$ équations finies à $k+q$ fonctions inconnues, n'est pas toujours possible; en supposant qu'il le soit, la figure fixe obtenue se nommera l'*enveloppe* des figures $\mathcal{F}_h$.

IV. Supposons qu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des h variables indépendantes $x, y, \ldots$, soit résolu par rapport à un groupe de dérivées (premières) de $u, v, \ldots$. Pour disposer nettement les équations d'un système de cette espèce, on peut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables $x, y, \ldots$ et les colonnes aux inconnues $u, v, \ldots$, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x) : on obtient ainsi une sorte de damier où les cases pleines et vides peuvent offrir des dispositions relatives variées. Si, pour fixer les idées, on considère un système du premier ordre, S, impliquant les deux fonctions inconnues u, v des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$, le damier dont il s'agit contiendra trois cases pleines, correspondant à ces trois dérivées, et cinq cases vides, correspondant aux dérivées restantes $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial s}$; quant aux seconds membres du système, ils seront fonctions de ces dernières et de x, y, z, s, u, v.

	(u)	(v)
(x)	$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \ldots$	
(y)	$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	
(z)		$\dfrac{\partial v}{\partial z} = \ldots$
(s)		

Cela posé, nous dirons qu'une figure à 4 dimensions, définie, dans l'espace à $4+2$ dimensions $[[x, y, z, s, u, v]]$, par un groupe réduit de deux équations finies, est une *figure intégrale* du système S, si ce groupe réduit est résoluble par rapport aux deux coordonnées u, v, et que, après résolution, il fournisse un groupe d'intégrales particulières de S. La figure intégrale sera dite *ordinaire*, si l'on peut assigner à (x, y, z, s) quelque domaine de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient analytiques et régulières, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées premières et des variables x, y, z, s, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les seconds membres du système S soient eux-mêmes des fonctions analytiques et régulières.

Une figure intégrale non ordinaire sera dite *singulière*.

V. Supposons désormais que le système S soit *complètement intégrable;* que, d'ailleurs, il ne cesse pas de l'être lorsqu'on y considère les fonctions inconnues u, v comme dépendant, non seulement de x, y, z, s, mais encore d'autres variables, en nombre quelconque, qui ne figurent dans les équations du système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation. (C'est ce qui a lieu, par exemple, pour un système orthonome passif.) Ajoutons alors au nombre des cases vides de son damier, figuré ci-dessus, celui des fonctions inconnues que le système implique, ce qui donne le total 7; puis, en même temps que le système S, considérons les deux relations

$$(2)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \end{cases}$$

où figurent, avec x, y, z, s, u, v, les sept constantes arbitraires α, β, γ, δ, θ, λ, μ. Les relations (2) étant supposées résolubles par rapport à u, v, exécutons sur elles les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, en traitant u, v comme des fonctions de x, y, z, s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ; il vient ainsi

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

Cela étant, les relations (2) seront dites définir une famille *complète* de figures intégrales ordinaires du système S, si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° *En même temps que les relations* (2) *sont résolubles par rapport aux inconnues* u, v, *le système formé par les dix équations* (2) *et* (3) *est résoluble par rapport aux dix quantités* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, α, β, γ, δ, θ, λ, μ (c'est-à-dire par rapport aux sept constantes arbitraires et aux trois dérivées premières qui correspondent respectivement aux trois cases pleines du damier).

2° *Par l'attribution à* α, β, γ, δ, θ, λ, μ *de toutes valeurs numériques, les relations* (2) *donnent des figures intégrales ordinaires de* S.

VI. Soit S un système *complètement intégrable* (V) du *premier ordre*, où se trouvent engagées des fonctions inconnues en nombre k, des variables indépendantes en nombre h, et dont le damier (IV) contient des cases vides, en nombre l, disposées d'une façon quelconque : toute famille complète (V) de figures intégrales ordinaires du système S dépend alors de $k+l$ constantes arbitraires ou paramètres. Soient p le plus petit des deux entiers h, l (d'où résulte $k+l-p \geqq k$), et j un entier auquel on attribuera tour à tour les $p+1$ valeurs vérifiant la double relation

$$k+l-p \leqq j \leqq k+l.$$

Cela posé, et *une famille complète de figures intégrales ordinaires du système* S *étant supposée connue, il suffit, pour avoir sans aucune figure étrangère toutes les figures intégrales ordinaires de ce système, d'effectuer de toutes les manières possibles l'opération consistant à remplacer, dans les relations qui définissent la famille, j des $k+l$ paramètres qui y figurent par autant de fonctions arbitraires des $k+l-j$ paramètres restants, et à prendre, lorsqu'elles existent, les enveloppes des sous-familles ainsi obtenues.*

L'entier j recevant tour à tour $p+1$ valeurs, on peut partager en $p+1$ groupes correspondants les figures intégrales ordinaires de S; *ces groupes n'ont deux à deux aucune figure commune.*

VII. Ce résultat une fois acquis, il était intéressant d'examiner si un système différentiel (non impossible) *de forme et d'ordre quelconques* est toujours réductible à un système complètement intégrable d'ordre 1 (les mots « complètement intégrable » étant pris dans le sens élargi que nous avons indiqué au début de l'alinéa V). De nos recherches antérieures il résultait déjà qu'on peut le ramener à une forme orthonome passive [1], laquelle est généralement d'ordre supérieur à 1 : or, on peut rigoureusement établir que celle-ci se ramène, à son tour, à une forme complètement intégrable d'ordre 1, où se trouvent engagées, en même temps que les inconnues du système primitif, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes.

---

[1] *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. XIV.

En conséquence, *la théorie des familles complètes de figures intégrales d'un système complètement intégrable du premier ordre trouve son application dans l'étude la plus générale des systèmes différentiels quelconques.*

PREMIÈRE PARTIE.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE HYPERGÉOMÉTRIQUE DES CONTACTS; FIGURES ENVELOPPES.

Théorème général des fonctions implicites et propositions s'y rattachant.

1. *Soient*

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0 \end{cases}$$

m équations simultanées entre les diverses variables

$$u, v, \ldots,$$
$$x, y, \ldots,$$

dont les premières, $u, v, \ldots$, sont en nombre m comme les équations. Supposons que les premiers membres $f_1, f_2, \ldots, f_m$ soient, à partir des valeurs particulières

$$(2)\qquad u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots$$

de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, tous développables en séries entières par rapport aux différences $u - u_0, v - v_0, \ldots, x - x_0, y - y_0, \ldots$, et qu'ils s'annulent pour les valeurs (2); supposons en outre que le déterminant différentiel des premiers membres par rapport aux m variables $u, v, \ldots$, ne s'annule pas pour ces mêmes valeurs.

Cela étant :

1° *Le système des m équations proposées (1) est identiquement vérifié par la substitution à $u, v, \ldots$ d'un certain groupe de fonc-*

tions de $x, y, \ldots,$

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \psi(x, y, \ldots), \\ v = \varphi(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

développables, à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots,$ *de* $x, y, \ldots,$ *en séries entières par rapport aux différences* $x - x_0, y - y_0, \ldots,$ *et satisfaisant aux relations numériques*

$$\begin{aligned} u_0 &= \psi(x_0, y_0, \ldots), \\ v_0 &= \varphi(x_0, y_0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2° *Le système* (1), *considéré dans un voisinage suffisamment rapproché des valeurs* (2), c'est-à-dire à l'intérieur d'un domaine ayant pour centre le point

$$(u_0, v_0, \ldots, \quad x_0, y_0, \ldots)$$

avec des rayons suffisamment petits (¹), *équivaut numériquement au système* (3).

On trouvera la démonstration de ce principe aux numéros 118, 119 et 120 de l'Ouvrage intitulé *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.*

Lorsque le système (1) satisfait à l'ensemble des conditions qui y sont énoncées, nous dirons qu'il est résoluble par rapport aux variables $u, v, \ldots$ à partir des valeurs numériques (2), que nous qualifierons de *fondamentales.*

De la démonstration à laquelle nous renvoyons le lecteur il résulte que les dérivées de tous ordres des fonctions de $x, y, \ldots$ obtenues par cette résolution peuvent, par l'application répétée de l'algorithme de Cramer, s'exprimer à l'aide de $x, y, \ldots$ et des fonctions elles-mêmes.

2. *Désignant par* μ *un entier moindre que* n, *supposons :*

(¹) RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 30.

1° *Que les* $\mu + 1$ *fonctions*

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ F_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

soient toutes développables (dans le sens indiqué au numéro précédent) *à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des n variables* $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

2° *Que l'un au moins des déterminants différentiels des* μ *fonctions* (4) *ait une valeur initiale différente de zéro;*

3° *Que les déterminants différentiels des* $\mu + 1$ *fonctions* (4) *et* (5) *soient tous identiquement nuls.*

Cela étant, la fonction (5) *est composée des* μ *fonctions* (4) (¹).

3. L'énoncé précédent suppose $\mu < n$; dans le cas où $\mu = n$, il doit être remplacé par le suivant :

Si n fonctions de n variables sont développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des variables dont il s'agit, et que leur déterminant différentiel ait une valeur initiale différente de zéro, toute autre fonction développable à partir des mêmes valeurs initiales est composée des n premières (²).

Systèmes réduits d'équations finies olotropes.

4. Dans l'exposé du principe général, formulé plus haut (n° **1**), des fonctions implicites, on fait, comme nous l'avons vu, figurer au nombre des hypothèses l'existence d'une solution numérique à partir de laquelle les premiers membres du système étudié (les seconds

(¹) *Loc. cit.*, n° **124**.

(²) *Ibid.*, n° **125**.

membres étant nuls) soient développables en séries entières par rapport aux accroissements de leurs variables, et les conclusions de l'énoncé ne se trouvent établies que dans un voisinage suffisamment rapproché de cette solution numérique fondamentale. Une observation de ce genre sera, dans ce qui suit, constamment applicable; toutes les fois, par exemple, qu'il s'agira d'équivalence numérique entre deux systèmes d'équations finies olotropes, il faudra entendre que cette propriété, soit qu'on en pose l'existence à titre d'hypothèse, soit qu'il s'agisse, au contraire, de l'établir à titre de conclusion, a lieu dans le voisinage d'une solution numérique commune à partir de laquelle les premiers membres des équations considérées sont tous développables de la manière qui vient d'être indiquée.

Cette observation générale étant faite une fois pour toutes, considérons, entre des indéterminées, u, v, ..., en nombre quelconque, un système d'équations dont les premiers membres soient développables à partir des valeurs particulières u_0, v_0, ... de ces indéterminées : nous dirons que le système, considéré dans le voisinage des valeurs en question, est *réduit*, si l'on peut, conformément au principe général des fonctions implicites, le résoudre à partir de u_0, v_0, ... par rapport à un groupe d'indéterminées en nombre égal à celui des équations du système.

Cette définition implique d'elle-même : 1° que $(u_0, v_0, \ldots)$ est une solution numérique du système (celle que nous qualifions de *fondamentale*); 2° que le nombre total des indéterminées est au moins égal à celui des équations du système; 3° que l'un au moins des déterminants différentiels du système a une valeur fondamentale différente de zéro.

Les systèmes réduits jouissent d'intéressantes propriétés, dont nous rappelons ci-après les principales.

5. *Tout système réduit*, S′, *conséquence numérique d'un système réduit*, S, *se compose d'équations en nombre inférieur ou au plus égal* (1).

---

(1) *Loc. cit.*, n° 120.

6. *Lorsque deux systèmes réduits sont numériquement équivalents :*

1° *Ils comprennent un même nombre, m, d'équations* ([1]);

2° *Ils sont résolubles par rapport aux mêmes groupes de m variables* ([2]);

3° *Si on les résout par rapport à un même groupe de m variables, les formules de résolution obtenues de part et d'autre ont leurs seconds membres respectivement identiques* ([3]).

7. *Étant donné un système réduit composé des m équations*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

l'expression générale des systèmes réduits équivalents est

$$\begin{array}{l} L_{1,1}\, F_1 + L_{1,2}\, F_2 + \ldots + L_{1,m}\, F_m = 0, \\ L_{2,1}\, F_1 + L_{2,2}\, F_2 + \ldots + L_{2,m}\, F_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{m,1} F_1 + L_{m,2} F_2 + \ldots + L_{m,m} F_m = 0, \end{array}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs fondamentales des variables, sont arbitrairement choisies sous la seule restriction de former un déterminant à valeur fondamentale non nulle* ([4]).

8. *Si deux systèmes réduits comprennent le même nombre d'équations, et que le second soit conséquence numérique du premier, inversement, le premier est conséquence numérique du second, et les deux systèmes sont numériquement équivalents* ([5]).

9. *Étant donné un système réduit, S, composé des m équations*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

---

(1) *Loc. cit.*, n° 130.

(2) *Ibid.*, n° 133.

(3) Cette dernière partie de l'énoncé est évidente.

(4) *Loc. cit.*, n° 132.

(5) *Ibid.*, n° 131.

les systèmes réduits de $m-p$ équations qui jouissent de la propriété d'être conséquences numériques de S (n° **5**) *ont pour expression générale*

$$\begin{array}{l} L_{1,1}\ F_1 + L_{1,2}\ F_2 + \ldots + L_{1,m}\ F_m = 0, \\ L_{2,1}\ F_1 + L_{2,2}\ F_2 + \ldots + L_{2,m}\ F_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{m-p,1} F_1 + L_{m-p,2} F_2 + \ldots + L_{m-p,m} F_m = 0, \end{array}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs fondamentales des variables, sont arbitrairement choisies sous la seule restriction que les déterminants d'ordre $m-p$ extraits de leur Tableau n'aient pas tous des valeurs fondamentales nulles* (¹).

10. *Étant donné un système réduit composé de $m-p$ équations, et où se trouvent engagées m variables au moins, considérons :*

D'une part, les divers systèmes réduits de m équations qui ont pour conséquence numérique le proposé;

D'autre part, les divers systèmes réduits de m équations qu'il est possible d'obtenir par l'adjonction de p équations convenablement choisies aux $m-p$ équations du proposé (²).

Cela étant, tout système du second groupe figure aussi dans le premier; inversement, tout système du premier groupe possède dans le second quelque équivalent numérique (³).

11. *Considérons deux systèmes réduits,* S *et* S′, *composés respectivement de m et de $m-p$ équations, et dont le second soit conséquence numérique du premier* (n° **5**).

(¹) *Loc. cit.*, n° 134.

(²) Si l'on désigne par $F_1=0$, $F_2=0$, ..., $F_{m-p}=0$ les $m-p$ équations du système proposé, et par $F_{m-p+1}=0$, ..., $F_m=0$ les p équations à leur adjoindre, ces dernières peuvent être choisies sous les seules conditions : 1° que leurs premiers membres, F_{m-p+1}, ..., F_m, développables à partir des valeurs fondamentales des variables, aient des valeurs fondamentales nulles; 2° que les divers déterminants différentiels des m fonctions F_1, F_2, ..., F_{m-p}, F_{m-p+1}, ..., F_m n'aient pas tous des valeurs fondamentales nulles.

(³) *Loc. cit.*, n° 136.

Si le système S *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de m variables, le système* S′ *l'est nécessairement par rapport à quelque groupe de $m-p$ variables extrait du précédent* ([1]).

Inversement, si le système S′ *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de $m-p$ variables, il existe dans le système* S *quelque groupe de $m-p$ équations résoluble par rapport aux variables dont il s'agit, et l'on peut, par l'adjonction à ces $m-p$ variables de p autres convenablement choisies, former un groupe de m variables par rapport auquel le système* S *soit résoluble* ([2]).

12. *Supposons qu'un système réduit de $h+k$ équations,*

$$(1)\qquad F_1=0,\quad \ldots,\quad F_h=0,\quad F_{h+1}=0,\quad \ldots,\quad F_{h+k}=0,$$

soit résoluble par rapport à un groupe déterminé de $h+k$ variables,

$$(2)\qquad u_1,\quad \ldots,\quad u_h,\quad u_{h+1},\quad \ldots,\quad u_{h+k};$$

supposons en même temps qu'un groupe déterminé de h équations extrait de (1) soit résoluble par rapport à un groupe déterminé de h variables extrait de (2), par exemple, *que le groupe des h premières équations* (1),

$$(3)\qquad F_1=0,\quad \ldots,\quad F_h=0,$$

soit résoluble par rapport aux h premières variables (2),

$$u_1,\quad \ldots,\quad u_h.$$

Cela étant : 1° *Si des h premières équations* (1) *on tire les valeurs de $u_1, \ldots, u_h$ et qu'on les porte dans les k dernières,*

$$F_{h+1}=0,\quad \ldots,\quad F_{h+k}=0,$$

le système des k équations résultantes est nécessairement résoluble par rapport aux k variables

$$u_{h+1},\quad \ldots,\quad u_{h+k}.$$

([1]) *Loc. cit.*, n° 135.

([2]) *Ibid.*, n° 137.

2° *Pour obtenir les formules de résolution correspondantes, il suffit de résoudre le système* (1) *par rapport aux* $h+k$ *variables* (2), *et de retenir les* k *dernières des* $h+k$ *formules de résolution* [1].

---

[1] Résolvons, comme le dit l'énoncé ci-dessus, les h équations (3) par rapport à $u_1, \ldots, u_h$, et soient

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = v_1(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_h = v_h(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) \end{cases}$$

les h formules de résolution : la substitution à $u_1, \ldots, u_h$ des fonctions $v_1, \ldots, v_h$ dans les k dernières équations (1) transforme celles-ci en un groupe de k équations,

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi_{h+1}(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h+k}(u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}, \ldots) = 0, \end{cases}$$

numériquement vérifiées pour les valeurs fondamentales des variables qui y figurent, et ayant leurs premiers membres développables à partir de ces valeurs. Il s'agit de prouver tout d'abord que le système (5) possède, par rapport aux k variables $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, un déterminant à valeur fondamentale non nulle.

Or, si, ayant égard au sens des notations $\Phi_{h+1}, \ldots, \Phi_{h+k}$, ci-dessus définies, on se reporte, dans l'Ouvrage déjà cité, à l'alinéa II du n° 120, on a les identités

$$\begin{gathered} F_{h+1} = (u_1 - v_1)\lambda_{h+1,1} + \ldots + (u_h - v_h)\lambda_{h+1,h} + \Phi_{h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{h+k} = (u_1 - v_1)\lambda_{h+k,1} + \ldots + (u_h - v_h)\lambda_{h+k,h} + \Phi_{h+k}, \end{gathered}$$

où les fonctions λ sont développables à partir des valeurs fondamentales des variables u. On a, d'autre part, à cause de l'équivalence des systèmes réduits (3) et (4) (n° **1**),

$$\begin{gathered} u_1 - v_1 = \mu_{1,1} F_1 + \ldots + \mu_{1,h} F_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_h - v_h = \mu_{h,1} F_1 + \ldots + \mu_{h,h} F_h, \end{gathered}$$

où les μ jouissent de la même propriété que les λ (n° **7**). Il en résulte, évidemment,

$$\begin{gathered} \Phi_{h+1} = \omega_{h+1,1} F_1 + \ldots + \omega_{h+1,h} F_h + F_{h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h+k} = \omega_{h+k,1} F_1 + \ldots + \omega_{h+k,h} F_h + F_{h+k}, \end{gathered}$$

où les ω jouissent de la même propriété que les λ et les μ. Par ces dernières identités, on voit que le système des $h+k$ équations (3) et (5) se déduit du

13. *L'élimination d'un groupe de variables entre les équations d'un système réduit donne un système également réduit* ([1]).

---

système (1) à l'aide de multiplicateurs dont le déterminant a pour valeur l'unité : il est donc en même temps que réduit, numériquement équivalent à (1) [n° **7**], et peut, par suite, être résolu, comme (1), par rapport au groupe des $h+k$ variables (2) (n° **6**). Il a dès lors, par rapport aux variables (2), un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle, d'où résulte que le système (5), indépendant de $u_1, \ldots, u_h$, a lui-même par rapport à $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, comme nous l'avions annoncé, un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle.

Ainsi se trouve établie la première partie (1°) de notre énoncé.

Passons à la deuxième partie (2°).

Je dis que, pour opérer la résolution du système (1) par rapport aux variables (2), on peut procéder de la manière suivante : tirer des h premières équations (1) les valeurs de $u_1, \ldots, u_h$, les porter dans les k dernières, résoudre les k équations résultantes (5) par rapport aux k variables $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, et substituer, finalement, les k expressions ainsi obtenues dans celles qui l'ont été précédemment pour $u_1, \ldots, u_h$.

Considérons en effet le système des $h+k$ formules

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \psi_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ u_h = \psi_h, \end{array}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_{h+1} = \psi_{h+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{h+k} = \psi_{h+k}, \end{array}\right.$$

auquel on parvient ainsi, et qui exprime les $h+k$ variables (2) à l'aide des variables suivantes : il est manifeste que ce système est réduit et qu'il est une conséquence numérique du système formé par les $h+k$ équations (1) : il lui équivaut donc numériquement (n° **8**), et dès lors il est identique (n° **6**) au système des $h+k$ formules que fournirait la résolution de (1). effectuée par rapport à ces mêmes variables (2).

Ainsi, le système [(6), (7)], obtenu par le mécanisme décrit plus haut, est bien celui des $h+k$ formules de résolution du système (1) par rapport aux variables (2) : les formules (7), provenant de la résolution du système (5) par rapport à $u_{h+1}, \ldots, u_{h+k}$, peuvent donc s'obtenir en résolvant le système (1) par rapport aux variables (2) et retenant les k dernières des formules de résolution.

([1]) Si l'on considère un système réduit, (1), de $h+k$ équations, il résulte immédiatement de la théorie générale des déterminants que tout groupe de

14. *Étant donnés deux systèmes réduits numériquement équivalents, si, dans l'un de ces systèmes, on peut effectuer l'élimination d'un groupe déterminé de variables, on le peut également dans l'autre, et les deux systèmes réduits* (n° **13**) *obtenus de part et d'autre sont numériquement équivalents* [1].

---

h équations extrait de (1) forme un système également réduit; considérons, par exemple, le groupe des h premières, et supposons, pour fixer les idées, qu'il soit résoluble par rapport à $u_1, \ldots, u_h$: je dis qu'en tirant de ces h équations les valeurs de $u_1, \ldots, u_h$ et les portant dans les k dernières, le système des k équations résultantes eet nécessairement réduit.

Effectivement, il résulte de la propriété formulée au n° **11** que l'on peut, par l'adjonction à $u_1, \ldots, u_h$ de k autres variables convenablement choisies, former un groupe de $h+k$ variables par rapport auquel le système (1) soit résoluble; puis, de la propriété formulée au n° **12**, que le système des k équations provenant de l'opération ci-dessus spécifiée est nécessairement réduit.

On en déduit la remarque suivante, constamment utilisée :

Étant donné un système réduit composé de $h+k$ équations, on peut, pour ainsi dire, en fragmenter la résolution. Si l'on prend en effet h quelconques des $h+k$ équations, et qu'on choisisse convenablement h variables, on pourra de ces h équations tirer les h variables dont il s'agit en fonctions des autres, puis porter les expressions ainsi obtenues dans les k équations restantes. La résolution de ces dernières, ainsi transformées, fournira alors k des variables restantes, dont il ne restera plus qu'à substituer les valeurs dans les expressions obtenues pour les h premières.

[1] Soient S et S′ les deux systèmes réduits donnés, numériquement équivalents, et m le nombre d'équations dont ils se composent l'un et l'autre (n° **6**). Supposons que du système S on puisse éliminer un groupe déterminé, $\mathcal{G}_{m-p}$, de $m-p$ variables : on pourra alors (n° **11**), par l'adjonction à ces dernières de p autres convenablement choisies, dont nous désignerons le groupe par $\mathcal{G}_p$, former un groupe de m variables, $(\mathcal{G}_{m-p}, \mathcal{G}_p)$, par rapport auquel le système S soit résoluble. Par rapport à ce groupe $(\mathcal{G}_{m-p}, \mathcal{G}_p)$, le système S′, numériquement équivalent à S, sera, lui aussi, résoluble (n° **6**), et contiendra dès lors nécessairement quelque groupe de $m-p$ équations résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$: l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$ est donc possible dans le système S′.

Je dis maintenant que si l'on effectue l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$ tour à tour dans le système S et dans le système S′, les deux systèmes réduits (n° **13**) qui en résultent ne peuvent manquer d'être numériquement équivalents.

Effectivement, partageons le système S en deux groupes, s_{m-p}, s, dont le premier soit résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$; puis, de même, le système S′ en deux groupes, s'_{m-p}, s', dont le premier soit résoluble par rapport à $\mathcal{G}_{m-p}$; et

En particulier *si, dans un système réduit, on effectue de deux manières différentes l'élimination d'un même groupe déterminé de variables, les deux systèmes réduits obtenus de part et d'autre sont numériquement équivalents.*

15. *Dans un système réduit de m équations,*

$$(8) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

---

soient σ, σ' les deux systèmes auxquels conduit de part et d'autre l'élimination des variables $\mathcal{G}_{m-p}$: ces deux systèmes ne contiennent l'un et l'autre que les variables restantes. En vertu de notre hypothèse, les deux systèmes (s_{m-p}, s) et (s'_{m-p}, s') sont équivalents entre eux; ils sont d'ailleurs, comme nous allons l'établir, respectivement équivalents aux deux systèmes (s_{m-p}, σ) et (s'_{m-p}, σ'). Considérons, par exemple, le système (s_{m-p}, s) : il a manifestement pour conséquence numérique le système (s_{m-p}, σ); ces deux systèmes, composés d'un même nombre d'équations, sont d'ailleurs réduits, le premier par hypothèse, le second parce que s_{m-p} est résoluble par rapport aux variables $\mathcal{G}_{m-p}$, et que σ, où ne figurent que les variables restantes, est, en vertu du n° **13**, un système réduit; cela étant, il résulte du n° **8** que, inversement, (s_{m-p}, σ) a pour conséquence numérique (s_{m-p}, s), et que, dès lors, les deux systèmes sont numériquement équivalents. Semblablement, il y a équivalence numérique entre les deux systèmes (s'_{m-p}, s') et (s'_{m-p}, σ').

En résumé donc, si l'on considère les quatre systèmes

$$\begin{gathered}(s_{m-p}, s), \quad (s'_{m-p}, s'), \\ (s_{m-p}, \sigma), \quad (s'_{m-p}, \sigma'),\end{gathered}$$

que nous représenterons, pour simplifier l'écriture, par

$$\begin{gathered}A, A', \\ B, B',\end{gathered}$$

l'équivalence numérique existe : 1° entre A et A'; 2° entre A et B; 3° entre A' et B'. Elle existe donc aussi entre B et B'. Il est facile d'en déduire l'équivalence à démontrer, savoir celle entre σ et σ'.

Effectivement, toute solution numérique du système σ fournira, si on la complète à l'aide de s_{m-p}, une solution numérique du système (s_{m-p}, σ), et, par suite, du système équivalent (s'_{m-p}, σ'); la solution numérique considérée de σ vérifie donc σ' : on en conclut que σ' est une conséquence numérique de σ. Semblablement, σ est une conséquence numérique de σ'. Les deux systèmes sont donc numériquement équivalents.

aux $m+q$ variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{m+q},$$

la solution générale peut s'obtenir à l'aide d'un système de $m+q$ formules exprimant les variables dont il s'agit en fonctions olotropes de q arbitraires, et telles que q de ces formules (convenablement choisies) soient résolubles par rapport aux arbitraires.

De plus, si, le système réduit (8) étant donné, on en suppose la solution générale exprimée à l'aide d'un système de $m+q$ formules satisfaisant à cette condition,

$$(9)\qquad \begin{cases} u_1 \quad = f_1(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad = f_m(t_1, \ldots, t_q), \\ u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

il faut et il suffit, pour que le système (8) soit résoluble par rapport à m variables u déterminées, les m premières par exemple, que les q dernières formules (9) soient résolubles par rapport aux q arbitraires t.

Pour obtenir un système de $m+q$ formules remplissant la condition énoncée, on peut d'ailleurs procéder comme il suit :

En supposant, pour fixer les idées, que le système (8) soit résoluble par rapport à $u_1, \ldots, u_m$, on posera

$$(10)\qquad \begin{cases} u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

les seconds membres des q formules (10) étant arbitrairement choisis sous les seules conditions d'être développables à partir de certaines valeurs initiales des arbitraires $t_1, \ldots, t_q$, d'avoir pour valeurs initiales celles que possèdent, dans le système (8), les variables $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$, et enfin d'avoir un déterminant différentiel dont la valeur initiale ne soit pas nulle, de telle façon que le système (10) soit résoluble par rapport à $t_1, \ldots, t_q$. Les formules (10) étant posées, on résoudra le système (8) par rapport à $u_1, \ldots, u_m$,

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \end{array}\right.$$

et, dans les seconds membres des formules de résolution (11), on remplacera $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ par leurs valeurs tirées de (10), ce qui donnera

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}). \end{array}\right.$$

Finalement, on groupera en un seul système les $m+q$ relations (10) et (12) (¹).

La proposition formulée au début du présent n° **15** doit être complétée par une double remarque :

1° *Si, le système réduit* (8) *étant donné, on en suppose la solution générale exprimée à l'aide des* $m+q$ *formules* (9), *dont* q *sont résolubles par rapport aux* q *arbitraires* $t_1, \ldots, t_q$, *et si, dans ces* $m+q$ *formules, on effectue un changement des arbitraires, les* $m+q$ *formules résultantes, dont* q *sont résolubles par rapport aux* q *nouvelles arbitraires, expriment encore la solution générale du système* (8) (²).

2° Réciproquement, *si, le système réduit* (8) *étant donné, on en suppose la solution générale exprimée, de deux manières différentes, à l'aide d'un système de* $m+q$ *formules dont* q *soient résolubles par*

(¹) *Loc. cit.*, n° 138.

(²) Il faut, naturellement, supposer que les q formules définissant la transformation sont résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites (n° **1**), tant par rapport aux q arbitraires anciennes que par rapport aux q nouvelles : en opérant leur résolution par rapport aux anciennes et transformant les $m+q$ formules (9), on déduit sans peine de la règle de multiplication des déterminants que si un groupe de q formules extrait de (9) est résoluble par rapport aux anciennes arbitraires, le groupe correspondant qui s'en déduit par *rapport aux q arbitraires qui y figurent, on peut toujours, par une transformation convenable des arbitraires, passer de l'un de ces deux groupes de formules à l'autre* [1].

---

la transformation le sera nécessairement par rapport aux nouvelles. D'ailleurs, pour les valeurs correspondantes des anciennes arbitraires et des nouvelles, les $m+q$ formules (9), d'une part, et leurs transformées, d'autre part, fournissent les mêmes valeurs des $m+q$ variables u : les formules transformées expriment donc la solution générale de (8), puisque, par hypothèse, les formules (9) jouissent elles-mêmes de cette propriété.

[1] Supposons, pour fixer les idées, que le système (8) soit résoluble par rapport aux m premières des $m+q$ variables u qui s'y trouvent engagées, et soient

$$(13)\qquad \begin{cases} u_1 = f_1(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = f_m(t_1, \ldots, t_q), \\ u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q); \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} u_1 = g_1(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = g_m(s_1, \ldots, s_q), \\ u_{m+1} = g_{m+1}(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = g_{m+q}(s_1, \ldots, s_q) \end{cases}$$

les deux groupes de formules dont il s'agit : en vertu de la proposition énoncée au début du n° **15**, les q dernières formules du groupe (13) sont résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$, et les q dernières du groupe (14) le sont par rapport à $s_1, \ldots, s_q$. Or, puisque les groupes (13) et (14) expriment l'un et l'autre la solution générale de (8), à un même système de valeurs de $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ doit correspondre de part et d'autre un même système de valeurs de $u_1, \ldots, u_m$: si donc on pose

$$(15)\qquad \begin{cases} f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q) = g_{m+1}(s_1, \ldots, s_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q) = g_{m+q}(s_1, \ldots, s_q), \end{cases}$$

qu'on résolve le système (15) par rapport à $t_1, \ldots, t_q$ conformément au principe

16. Inversement, *considérons un système de $m+q$ formules égalant les $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$ à autant de fonctions olotropes de q arbitraires, de telle façon que q d'entre ces formules soient résolubles par rapport aux arbitraires.* Cela étant, *l'élimination des q arbitraires entre les $m+q$ formules fournit un système réduit de m équations aux $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$, dont la solution générale se trouve exprimée par les $m+q$ formules données* (¹).

17. Enfin, *si les $m+q$ formules* (9), *dont q sont supposées résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$, vérifient constamment le système réduit des m équations* (8), *aux $m+q$ variables $u_1, \ldots, u_{m+q}$, elles ne peuvent manquer d'en fournir la solution générale* (²).

18. *Toute transformation effectuée sur un système réduit donne un système également reduit* (³).

---

général des fonctions implicites (n° **1**), et qu'on porte les valeurs obtenues dans les m premières formules (13), il est manifeste qu'on tombera identiquement sur les m premières formules (14).

Ainsi, les formules (14) se déduisent de (13) par la simple substitution à $t_1, \ldots, t_q$ de leurs valeurs tirées des équations (15). Pareillement, les formules (13) se déduisent de (14) par la simple substitution à $s_1, \ldots, s_q$ de leurs valeurs tirées des mêmes équations.

(¹) *Ibid.*, n° **139**.

(²) *Ibid.*, n° **140**.

(³) Dans un système réduit de m équations,

$$F_1=0,\ F_2=0,\ \ldots,\ F_m=0, \tag{16}$$

aux $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, effectuons la transformation

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 \quad\ =\psi_1(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \\ u_2 \quad\ =\psi_2(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q}=\psi_{m+q}(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}), \end{array}\right. \tag{17}$$

et supposons, comme de raison, qu'à partir des valeurs initiales de $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, prises conjointement avec certaines valeurs initiales des nouvelles

19. *Considérons un groupe de $m+q$ formules exprimant*, conformément aux énoncés des nos **15** et **16**, *la solution générale d'un système réduit de m équations à $m+q$ variables* $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, *et supposons que dans ce dernier on introduise, aux lieu et place des variables dont il s'agit, les $m+q$ variables nouvelles* $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$. Cela étant, *il suffit, pour exprimer semblablement la solution générale du système résultant, d'effectuer la même transformation sur les premiers membres des $m+q$ formules données, et de résoudre le groupe ainsi transformé par rapport à* $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$ (¹).

Points ordinaires d'une figure.

20. Nous plaçant, indifféremment, soit dans le monde des quantités *réelles*, soit dans le monde des quantités *imaginaires*, nous nommerons *point* de l'*espace* $[[x, y, \ldots]]$ l'association de n valeurs numériques respectivement attribuées aux n *coordonnées* $x, y, \ldots$;

---

variables $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$, le système (17) soit résoluble par rapport à ces dernières conformément au principe général des fonctions implicites. Le système (16) étant indépendant des variables v, il résulte immédiatement de nos hypothèses que le système des $2m+q$ équations (16) et (17), où se trouvent engagées les $2m+2q$ variables u et v, possède par rapport aux $m+q$ variables v et à m convenablement choisies d'entre les variables u, un déterminant à valeur fondamentale non nulle : il est dès lors réduit. Si donc on remplace, dans (16), les variables u par leurs valeurs tirées de (17), ou, en d'autres termes, si l'on effectue entre les équations (16) et (17) l'élimination des variables u, le système résultant est également réduit (n° **13**).

(¹) Soit, en effet,

$$(18) \qquad \begin{cases} u_1 \quad = \varphi_1(t_1, \ldots, t_q), \\ u_2 \quad = \varphi_2(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = \varphi_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

un groupe de $m+q$ formules exprimant la solution générale du système réduit (16), et telles que q d'entre elles soient résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$. Si l'on applique au système (16) la transformation (17), il est clair que, pour avoir un groupe de $m+q$ formules exprimant la solution générale du système résultant, il suffit d'effectuer d'abord la même transformation *figure* un ensemble de points défini par un système d'équations reliant ces coordonnées; point *ordinaire* d'une figure un point tel que, dans un voisinage suffisamment rapproché du point [c'est-à-dire à l'intérieur d'un domaine ayant ce point pour centre avec des rayons suffisamment petits ([1])], la figure puisse être définie à l'aide d'un système *réduit* (n° **4**). *Nous nous bornerons systématiquement à la considération exclusive d'un pareil voisinage*. Il va sans dire d'ailleurs que tout point d'une figure suffisamment voisin d'un point ordinaire de cette figure en est lui-même un point ordinaire.

Supposant tour à tour que le système réduit à l'aide duquel est définie la figure comprenne 1, 2, 3, ... équations, nous dirons, suivant le cas, que la figure est à $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... *dimensions* ([2]).

---

sur les formules (18), ce qui donne

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi_1(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) &&= \upsilon_1(t_1, \ldots, t_q),\\ &\psi_2(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) &&= \upsilon_2(t_1, \ldots, t_q),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\psi_{m+q}(v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}) &&= \upsilon_{m+q}(t_1, \ldots, t_q),\end{aligned}\right.$$

puis de résoudre le système (19) par rapport à $v_1, v_2, \ldots, v_{m+q}$. Soient

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \varphi_1(t_1, \ldots, t_q),\\ v_2 &= \varphi_2(t_1, \ldots, t_q),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ v_{m+q} &= \varphi_{m+q}(t_1, \ldots, t_q)\end{aligned}\right.$$

les formules de résolution : il reste à établir que q d'entre ces dernières sont résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$.

Or, le système (19) contient, comme (18), q formules résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$; il est d'ailleurs réduit, puisqu'il est résoluble par rapport aux variables v, et, comme il a évidemment pour conséquence numérique le groupe (réduit) des q formules dont nous venons de parler, il est (n° **11**) nécessairement résoluble par rapport à $t_1, \ldots, t_q$ et à m convenablement choisies des variables v. Le système (20), numériquement équivalent à (19), sera donc résoluble par rapport à ce groupe de $m+q$ variables (n° **6**), ce qui exige manifestement que q des équations (20) soient résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$.

([1]) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 30.

([2]) Si, comme cas extrême, le système réduit comprend n équations, la figure est à zéro dimension et se compose d'un point unique.

Deux systèmes réduits numériquement équivalents, et par suite nécessairement composés d'un même nombre d'équations (n° **6**), définissent deux figures *identiques*.

Si, désignant par p et p' deux entiers *inégaux*, on suppose que deux systèmes réduits, S et S', aux indéterminées $x, y, \ldots$, comprennent respectivement p et p' équations, et que le premier, S, soit une conséquence numérique du second, S', on a nécessairement $p < p'$ (n° **5**), d'où $n - p > n - p'$, et la figure à $n - p'$ dimensions que définit S' sera dite *située sur* la figure à $n - p$ dimensions que définit S; inversement, la figure S sera dite *contenir* la figure S'.

Dans ce dernier cas, comme aussi dans celui de l'identité, ci-dessus défini, les deux figures considérées seront dites être *en symptose*.

De la propriété formulée au n° **7** il résulte que, *dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure à $n - p$ dimensions est représentable d'une infinité de manières à l'aide d'un système réduit de p équations reliant les n coordonnées $x, y, \ldots$.* Ce mode de représentation sera qualifié de *réduit*, par opposition à un autre dont nous parlerons plus loin (n° **22**).

Il importe d'observer que *le caractère spécifié dans la définition d'un point ordinaire d'une figure est indépendant de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$.*

Effectivement, soient F une figure contenant le point $(x_0, y_0, \ldots)$, et

$$\begin{aligned} x &= \alpha(x', y', \ldots), \\ y &= \beta(x', y', \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les formules de transformation qui relient les anciennes coordonnées $x, y, \ldots$ aux nouvelles $x', y', \ldots$: on suppose que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ de $x, y, \ldots$, prises conjointement avec certaines valeurs, $x'_0, y'_0, \ldots$, de $x', y', \ldots$, vérifient numériquement les formules de transformation, et que, à partir de la solution numérique

$$(x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots),$$

ces dernières, résolues, en fait, par rapport à $x, y, \ldots$, sont, de plus, résolubles par rapport à $x', y', \ldots$ conformément au principe général des fonctions implicites.

Cela étant, il résulte de la proposition formulée au n° **18** qu'une pareille transformation, opérée sur un système réduit, donne un système également réduit, et que, dès lors, si le point $(x_0, y_0, \ldots)$ est ordinaire pour la figure F, le point correspondant $(x'_0, y'_0, \ldots)$ l'est aussi pour la figure, F′, que fournit la transformation.

Réciproquement, à cause de la réversibilité des formules de transformation, si le point $(x'_0, y'_0, \ldots)$ est ordinaire pour la figure F′, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ l'est pour la figure F [1].

Il va sans dire, enfin, que *la relation de symptose entre deux figures est indépendante, elle aussi, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées* $x, y, \ldots$.

---

[1] Dans l'espace à trois dimensions réelles ou imaginaires $[[x, y, z]]$, on peut citer, comme figures ne contenant que des points ordinaires :

1° La figure définie par l'équation linéaire $Ax + By + Cz + D = 0$, où les constantes numériques A, B, C, D sont quelconques, sous la seule restriction que les trois premières, A, B, C, ne soient pas nulles à la fois.

2° La figure définie par le couple linéaire

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

où les constantes numériques $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont quelconques, sous la seule restriction que les déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{matrix}$$

ne soient pas tous nuls.

3° La figure définie par l'équation

$$(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)^2$$
$$+ (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2)^2 + (A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3)^2 + H = 0,$$

où les constantes numériques $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, H$ sont quelconques, sous les seules restrictions que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H$$

soient différents de zéro.

Opérons en effet sur cette figure la transformation (toujours permise, d'après

21. Soient F_1, F_2, ... des figures, en nombre (limité) quelconque, qui toutes admettent un point ordinaire commun; $n - p_1$, $n - p_2$, ... les nombres de dimensions respectifs de ces figures. Cela étant, *on peut, moyennant une simple transformation linéaire des n coordonnées x, y, ..., faire en sorte que les équations transformées de* F_1 *soient indifféremment résolubles par rapport à tout groupe de* p_1 *coordonnées; qu'en même temps les équations transformées de* F_2 *le soient, indifféremment, par rapport à tout groupe de* p_2 *coordonnées; et ainsi de suite.*

I. Sur les équations définissant l'une des figures données, F, à $n - p$ dimensions, opérons la transformation linéaire (et homo-

---

ce qui a été vu)

$$\begin{aligned}A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= x',\\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= y',\\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= z'.\end{aligned}$$

Pour qu'un point de la figure ainsi obtenue ne fût pas ordinaire, il faudrait qu'il vérifiât, en même temps que l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 + H = 0$, les trois équations dérivées par rapport à x', y', z' respectivement, c'est-à-dire $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; il en résulterait, contrairement à l'hypothèse, $H = 0$.

4° La figure définie par le couple d'équations

$$\begin{gathered}(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)^2\\ + (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2)^2 + (A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3)^2 + H = 0,\\ \lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)\\ + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) + \lambda_3(A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3) = 0,\end{gathered}$$

où A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3, D_3, H ont les mêmes significations respectives que dans l'exemple précédent, et où, de plus, les constantes numériques λ_1, λ_2, λ_3 vérifient l'inégalité $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$.

Les équations de la figure deviennent en effet, par la même transformation que ci-dessus,

$$\begin{aligned}x'^2 + y'^2 + z'^2 + H &= 0,\\ \lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' &= 0.\end{aligned}$$

Pour qu'un point de la figure ainsi obtenue ne fût pas ordinaire, il faudrait qu'il vérifiât, en même temps que les équations de la figure, celles qu'on obtient gène)

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + \ldots, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où $x, y, \ldots$ désignent les anciennes coordonnées, $x', y', \ldots$ les nouvelles, et les lettres $a, b, \ldots$ affectées d'indices des coefficients provisoirement indéterminés dont nous désignerons le déterminant par D ; ce déterminant est une certaine fonction entière, non identiquement nulle, de ses divers éléments, assimilés à autant de variables indépendantes.

Cela étant, *si l'on considère les équations transformées de la figure* F, *la valeur prise, au point ordinaire commun dont parle l'énoncé, par le déterminant différentiel de leurs premiers membres relatif à p quelconques des coordonnées nouvelles est un polynome*

---

en égalant à zéro les trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix} x', & y', & z', \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_3 y' = \lambda_2 z', \qquad \lambda_1 z' = \lambda_3 x', \qquad \lambda_2 x' = \lambda_1 y'.$$

Les constantes λ_1, λ_2, λ_3 ne pouvant être nulles à la fois à cause de

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0,$$

supposons, pour fixer les idées, $\lambda_1 \neq 0$: des deux dernières relations on tire

$$y' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x', \qquad z' = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x',$$

puis, par combinaison avec l'équation $\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' = 0$,

$$x'\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3^2}{\lambda_1}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad x'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) = 0;$$

on a donc, de toute nécessité, $x' = 0$, par suite $y' = 0$, $z' = 0$, et finalement, en portant dans l'équation $x'^2 + y'^2 + z'^2 + H = 0$,

$$H = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

entier par rapport aux éléments de D *et dont les coefficients numériques ne sont pas tous nuls.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, et qu'il s'agisse d'une figure à trois dimensions définie par le système réduit

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, s, t) = 0. \end{cases}$$

Si l'on opère sur ce dernier la transformation

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a_4 s' + a_5 t', \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b_4 s' + b_5 t', \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + c_4 s' + c_5 t', \\ s = d_1 x' + d_2 y' + d_3 z' + d_4 s' + d_5 t', \\ t = e_1 x' + e_2 y' + e_3 z' + e_4 s' + e_5 t', \end{cases}$$

le déterminant différentiel du système transformé par rapport à deux quelconques des coordonnées nouvelles, par exemple x' et y', a pour valeur

$$\begin{vmatrix} a_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + b_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + c_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + d_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial s} + e_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial t} & a_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + c_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + d_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial s} + e_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\ a_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + b_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + c_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} + d_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial s} + e_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial t} & a_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + c_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z} + d_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial s} + e_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix};$$

d'après la règle de multiplication des déterminants généralisée [1]

---

[1] Considérons les deux tableaux rectangulaires

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & \ldots, & l_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_q, & b_q, & \ldots, & l_q, \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \ldots, & \lambda_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \ldots, & \lambda_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_q, & \beta_q, & \ldots, & \lambda_q, \end{matrix}$$

qui contiennent chacun q lignes et $q + r$ colonnes ($q > 0$, $r \geqq 0$). Si l'on pose

$$R_{i,j} = a_i \alpha_j + b_i \beta_j + \ldots + l_i \lambda_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, q \text{ et } j = 1, 2, \ldots, q),$$

appliquée aux deux tableaux

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & e_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & e_2, \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y}, & \frac{\partial f_1}{\partial z}, & \frac{\partial f_1}{\partial s}, & \frac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial f_2}{\partial z}, & \frac{\partial f_2}{\partial s}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}, \end{matrix}$$

il a donc pour valeur

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial s} \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} c_1 & e_1 \\ c_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Or, lorsqu'il s'agit du point ordinaire commun dont parle l'énoncé,

---

le déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix} R_{1,1} & R_{2,1} & \dots & R_{q,1} \\ R_{1,2} & R_{2,2} & \dots & R_{q,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{1,q} & R_{2,q} & \dots & R_{q,q} \end{vmatrix}$$

est égal à la somme des produits que l'on obtient en multipliant les déterminants d'ordre q extraits du premier tableau par les déterminants homologues extraits du second.

les divers déterminants différentiels de f_1 et f_2 qui figurent dans cette dernière expression doivent être remplacés par des valeurs numériques non à la fois nulles.

II. Revenons aux conditions imposées par notre énoncé général. Pour qu'elles se trouvent satisfaites, il faut et il suffit :

Que, dans les équations transformées de E_1, les divers déterminants différentiels (d'ordre p_1) relatifs aux coordonnées nouvelles soient tous différents de zéro au point considéré;

Que, dans les équations transformées de F_2, les divers déterminants différentiels (d'ordre p_2) relatifs aux coordonnées nouvelles jouissent de cette même propriété;

Etc.;

Et enfin, que le déterminant D de la transformation soit lui-même différent de zéro.

Il est donc nécessaire et suffisant, si l'on se reporte à l'alinéa I, que certains polynomes, entiers par rapport aux coefficients indéterminés de la transformation, et dont aucun n'est identiquement nul, puissent prendre des valeurs numériques à la fois différentes de zéro : or, il est toujours possible de disposer des coefficients indéterminés de la transformation de manière que cette condition soit satisfaite.

Représentations diverses d'une figure dans le voisinage d'un point ordinaire.

22. Nous avons déjà eu l'occasion de constater, comme conséquence de la propriété formulée au n° **7**, que, dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure peut, d'une infinité de manières, être représentée dans le mode *réduit*, c'est-à-dire à l'aide d'un système réduit d'équations reliant les n coordonnées. En vertu de cette propriété, si une figure à $n-p$ dimensions, admettant comme point ordinaire le point $(x_0, y_0, \ldots)$, est définie, dans le voisinage de ce point, à l'aide du système réduit

$$f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

l'expression générale de tous les systèmes réduits pouvant représenter cette même figure dans le voisinage de ce même point est

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_{1,1}f_1+\lambda_{1,2}f_2+\ldots+\lambda_{1,p}f_p=0,\\ \lambda_{2,1}f_1+\lambda_{2,2}f_2+\ldots+\lambda_{2,p}f_p=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \lambda_{p,1}f_1+\lambda_{p,2}f_2+\ldots+\lambda_{p,p}f_p=0,\end{array}\right.$$

où les fonctions λ, développables à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, sont arbitrairement choisies sous la seule restriction de former un déterminant à valeur initiale non nulle.

Si, sur l'expression générale des systèmes réduits représentant une figure donnée, F, on opère une transformation ponctuelle des n coordonnées $x, y, \ldots$, on tombe sur l'expression générale des systèmes réduits représentant une nouvelle figure, F′ (¹). Cette dernière sera dite *transformée de* F.

Les propriétés formulées aux nos **15**, **16** et **19** entraînent, d'autre part, les conséquences suivantes :

1° *Dans le voisinage d'un de ses points ordinaires, une figure à $n-p$ dimensions peut, d'une infinité de manières, se représenter à l'aide d'un groupe de n formules exprimant les n coordonnées $x, y, \ldots$ en fonctions olotropes de $n-p$ arbitraires, et telles que $n-p$ de ces formules, convenablement choisies, soient résolubles par rapport aux arbitraires.*

Réciproquement, *un pareil groupe de n formules étant donné, le système réduit en $x, y, \ldots$ que fournit l'élimination des $n-p$ arbitraires définit une figure à $n-p$ dimensions, représentable à l'aide des n formules données.*

Ce nouveau mode de représentation sera qualifié de *paramétrique*.

2° Considérons, sur une figure donnée à $n-p$ dimensions, le voisinage d'un point ordinaire donné. *Pour qu'un groupe déterminé de p coordonnées, celui des p premières par exemple, soit exprimable en fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes, il faut et il suffit qu'en représentant la figure suivant le mode paramétrique à l'aide de $n-p$ arbitraires, le groupe des $n-p$ dernières formules de cette représentation soit résoluble par rapport aux arbitraires.*

(¹) On le voit sans peine, en se reportant, notamment, au n° **18**.

3° *Si, dans une représentation paramétrique d'une figure à $n-p$ dimensions, on opère une transformation des $n-p$ arbitraires, on obtient une nouvelle représentation paramétrique de la figure.*

Inversement, *deux représentations paramétriques d'une même figure peuvent toujours se déduire l'une de l'autre par une transformation convenable des arbitraires.*

4° Considérons, en même temps qu'une figure, F, la figure, F', qui s'en déduit par une transformation opérée sur les n coordonnées $x, y, \ldots$. *Si, sur une représentation paramétrique de* F, *on opère la transformation dont il s'agit, les n formules résultantes, nécessairement résolubles par rapport aux coordonnées nouvelles $x', y', \ldots$, fournissent une représentation paramétrique de* F'.

23. D'une propriété formulée au n° 6 il résulte que les divers systèmes réduits à l'aide desquels on peut représenter une même figure à $n-p$ dimensions fournissent tous, si on les résout par rapport à un même groupe de p coordonnées, un même système de formules de résolution. Ce dernier système fournit un mode de représentation éminemment simple, que nous qualifierons d'*explicite*, et qui, aux avantages du mode réduit, auquel il appartient, joint ceux du mode paramétrique, auquel on le ramène immédiatement : si l'on désigne en effet par $x, \ldots$ un groupe de p coordonnées, et par $y, \ldots$ le groupe des $n-p$ coordonnées restantes, le système des p équations

$$\left\{\begin{array}{l} x = X(y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

peut se remplacer par l'ensemble des n formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = X(\eta, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y = \eta, \\ \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $\eta, \ldots$ désignent $n-p$ variables arbitraires [1].

---

[1] Une figure à zéro dimension, formée, comme nous l'avons observé, d'un point unique, $(x_0, y_0, \ldots)$, se trouve représentée, avec le maximum de simplicité, à l'aide des n formules $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$, qui constituent un cas extrême du mode paramétrique et du mode explicite.

Contacts d'ordres divers entre deux figures.

24. Pour définir un contact d'ordre quelconque entre deux figures, il convient de distinguer deux cas, suivant que ces figures ont ou non le même nombre de dimensions.

Considérons d'abord, dans l'espace à n dimensions $[[x, y, \ldots]]$, deux figures à un même nombre, $n-p$, de dimensions, ayant un point commun, $(x_0, y_0, \ldots)$, *ordinaire* (n° **20**) pour chacune d'elles : les deux figures étant, dans le voisinage de ce point initial, représentées, l'une, suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$(1) \quad f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

l'autre, suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$(2) \qquad x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots] \end{cases}$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par k un entier positif ou nul, si les fonctions (3) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n-p$ paramètres $u, v, \ldots$) jusqu'à l'ordre k inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $k+1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir au point considéré un *contact d'ordre* (exactement) *égal à k*.

Cette définition nécessite diverses observations dont l'importance est essentielle. Effectivement, les deux figures données peuvent, de bien des manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique; comme elles ont, d'autre part, le même nombre de dimensions, une permutation de leurs rôles respectifs est à envisager où l'on supposera, à l'inverse de ce qui précède, que la deuxième figure est représentée suivant le mode réduit, la première suivant le mode paramétrique : or, nous allons établir que *la propriété spécifiée dans la définition est indépendante de ces circonstances variables*. Nous établirons, de plus, qu'*elle l'est de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées x, y, ...*

I. *Supposons que les deux systèmes*

$$(4) \qquad f_1(x, y, \ldots) = 0, \quad f_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad f_p(x, y, \ldots) = 0$$

et

$$(5) \qquad g_1(x, y, \ldots) = 0, \quad g_2(x, y, \ldots) = 0, \quad \ldots, \quad g_p(x, y, \ldots) = 0$$

constituent, dans le voisinage du point considéré, $(x_0, y_0, \ldots)$, *deux représentations de la première figure suivant le mode réduit, et les formules* (2) *une représentation de la deuxième figure suivant le mode paramétrique;* en appliquant le mécanisme indiqué dans la définition ci-dessus, d'abord à (4) et (2), puis à (5) et (2), on forme successivement le groupe des fonctions composées (3), puis le groupe des fonctions composées

$$(6) \qquad \begin{cases} g_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ g_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots]. \end{cases}$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (6) *jouissent de la même propriété.*

A. Les fonctions composées (6) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Effectivement, les systèmes réduits (4) et (5) représentant la même figure, leurs premiers membres (n° **22**) satisfont, quels que soient

$x, y, \ldots$, à des identités de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} g_1 = \lambda_{1,1} f_1 + \lambda_{1,2} f_2 + \ldots + \lambda_{1,p} f_p, \\ g_2 = \lambda_{2,1} f_1 + \lambda_{2,2} f_2 + \ldots + \lambda_{2,p} f_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_p = \lambda_{p,1} f_1 + \lambda_{p,2} f_2 + \ldots + \lambda_{p,p} f_p, \end{array}\right.$$

où les fonctions λ, développables à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, forment un déterminant à valeur initiale non nulle. Si donc on désigne à l'aide des notations f', g', λ' ce que deviennent les fonctions f, g, λ lorsqu'on y remplace $x, y, \ldots$ par leurs valeurs en $u, v, \ldots$ tirées des formules (2), on aura, quels que soient $u, v, \ldots$,

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} g'_1 = \lambda'_{1,1} f'_1 + \lambda'_{1,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{1,p} f'_p, \\ g'_2 = \lambda'_{2,1} f'_1 + \lambda'_{2,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{2,p} f'_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g'_p = \lambda'_{p,1} f'_1 + \lambda'_{p,2} f'_2 + \ldots + \lambda'_{p,p} f'_p, \end{array}\right.$$

en sorte que, pour avoir les dérivées successives (relatives à $u, v, \ldots$) des fonctions composées (6), il suffit de prendre les dérivées successives des divers produits de deux facteurs figurant dans les seconds membres de (7). Considérons, par exemple, une dérivée d'ordre h du produit $\lambda'_{1,1} f'_1$: il résulte immédiatement des règles élémentaires de la dérivation que cette dérivée est une somme de termes dont chacun contient en facteur quelque dérivée des ordres 0, 1, 2, ..., h de f'_1, c'est-à-dire de la première des fonctions (3). Cette simple remarque, rapprochée de nos hypothèses sur les fonctions (3), prouve que le produit $\lambda'_{1,1} f'_1$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré. Il en est de même pour les divers produits de deux facteurs figurant dans les seconds membres de (7), par suite aussi pour les premiers membres, c'est-à-dire pour les fonctions composées (6).

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (6) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (6) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3), ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. *Supposons que les formules*

$$(8)\qquad x=\xi(u, v, \ldots),\qquad y=\eta(u, v, \ldots),\qquad \ldots$$

et les formules

$$(9)\qquad x=\varpi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots),\qquad y=\rho(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots),\qquad \ldots$$

constituent (dans le voisinage du point considéré) *deux représentations de la deuxième figure suivant le mode paramétrique, et le système* (1) *une représentation de la première figure suivant le mode réduit;* en appliquant le mécanisme indiqué dans la définition, d'abord à (1) et (8), puis à (1) et (9), on forme successivement le groupe des fonctions composées (3), puis le groupe des fonctions composées

$$(10)\qquad \begin{cases} f_1[\varpi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \rho(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \ldots], \\ f_2[\varpi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \rho(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\varpi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \rho(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots), \ldots]. \end{cases}$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (10) *jouissent de la même propriété.*

A. Les fonctions composées (10) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Désignons en effet les fonctions (3) et (10) respectivement par les notations abrégées

$$(11)\qquad \varphi_1(u, v, \ldots),\quad \varphi_2(u, v, \ldots),\quad \ldots,\quad \varphi_p(u, v, \ldots)$$

et

$$(12)\qquad \Phi_1(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots),\quad \Phi_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots),\quad \ldots,\quad \Phi_p(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots).$$

En vertu d'une propriété énoncée au n° **22** (3°), il suffit, pour passer des formules (8) aux formules (9), d'effectuer dans les formules (8), sur les $n-p$ arbitraires $u, v, \ldots,$ une certaine transformation : cette même transformation permettra donc, évidemment, de passer des fonctions (3) aux fonctions (10), c'est-à-dire des fonctions (11) aux fonctions (12). Nous pouvons dès lors, pour calculer les dérivées successives de ces dernières, (12), opérer sur les premières, (11), à condition d'y considérer $u, v, \ldots$ comme fonctions de $U, V, \ldots$. Or, il résulte de la règle des fonctions composées qu'une dérivée d'ordre h de $\Phi_1(U, V, \ldots)$, ainsi calculée, est une somme de termes dont chacun contient en facteur quelque dérivée des ordres $0, 1, 2, \ldots, h$ de la composante $\varphi_1(u, v, \ldots)$. Cette simple remarque, rapprochée de nos hypothèses sur les fonctions (3), c'est-à-dire sur les fonctions (11), prouve que $\Phi_1(U, V, \ldots)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré. Il en est de même pour

$$\Phi_2(U, V, \ldots), \quad \ldots, \quad \Phi_p(U, V, \ldots).$$

Ainsi, les fonctions (12), c'est-à-dire les fonctions (10), ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent bien au point considéré.

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (10) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (10) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3), ce qui est contraire à l'hypothèse.

III. Il nous faut, avant de poursuivre, établir un lemme.

Considérons, comme dans notre énoncé général, deux figures à $n-p$ dimensions admettant le point commun $(x_0, y_0, \ldots)$, ordinaire pour chacune d'elles, et représentées, l'une, suivant le mode réduit, par le système (1), l'autre, suivant le mode paramétrique, par les formules (2); supposons, en outre, *que les dérivées premières des fonctions composées* (3) *s'annulent*, comme ces fonctions, *au point considéré*. Cela étant, *si*, *pour la figure* (1), *un certain groupe de* p *coordonnées est exprimable par des fonctions olotropes des* $n-p$ *coordonnées restantes, ce même groupe l'est aussi pour la figure* (2), *et réciproquement.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, que les figures considérées soient à trois dimensions, et soient

$$(13) \qquad f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0$$

le système réduit qui définit la première,

$$(14) \qquad \begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w) \end{cases}$$

les formules paramétriques qui définissent la seconde. Supposons, en outre, que les deux fonctions composées

$$(15) \qquad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ f_2[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \end{cases}$$

ainsi que leurs diverses dérivées premières, s'annulent au point considéré. Cela étant, il s'agit de prouver que si le couple de coordonnées (x, y), par exemple, est exprimable, pour la première figure, par des fonctions olotropes de z, s, t, il l'est aussi pour la seconde figure, et réciproquement; ou, en d'autres termes, que les deux déterminants différentiels

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial w} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} & \frac{\partial \sigma}{\partial v} & \frac{\partial \sigma}{\partial w} \\ \frac{\partial \tau}{\partial u} & \frac{\partial \tau}{\partial v} & \frac{\partial \tau}{\partial w} \end{vmatrix}$$

ont leurs valeurs initiales respectives à la fois nulles ou à la fois différentes de zéro.

Effectivement, supposons que le déterminant (16) ait une valeur initiale différente de zéro. En vertu de notre hypothèse sur les fonctions (15), on a, au point considéré,

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}+\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}+\dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u}=0,\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}+\dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}+\dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u}=0; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v}+\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}+\dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v}=0,\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v}+\dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}+\dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v}=0; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial w}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial w}+\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}+\dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial w}+\dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial w}=0,\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial w}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial w}+\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}+\dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial w}+\dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial w}=0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u}=A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}+B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}+C'\dfrac{\partial \tau}{\partial u},\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}=A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial u}+B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}+C''\dfrac{\partial \tau}{\partial u}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v}=A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial v}+B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}+C'\dfrac{\partial \tau}{\partial v},\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v}=A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial v}+B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}+C''\dfrac{\partial \tau}{\partial v}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial w}=A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}+B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial w}+C'\dfrac{\partial \tau}{\partial w},\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial w}=A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial w}+B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial w}+C''\dfrac{\partial \tau}{\partial w}. \end{cases}$$

Si donc le déterminant (17) avait une valeur initiale nulle, les divers déterminants du troisième ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi}{\partial w},\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial w},\\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial w},\\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial w},\\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial v}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial w} \end{matrix}$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Inversement, supposons que le déterminant (17) ait une valeur initiale différente de zéro. Des formules (18), (19) et (20), groupées comme il suit,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial w}+\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial w}=0;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial w}+\frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial w}=0,
\end{aligned}\right.$$

on tire

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial z}=\mathrm{M}'\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}'\frac{\partial f_1}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_1}{\partial s}=\mathrm{M}''\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}''\frac{\partial f_1}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_1}{\partial t}=\mathrm{M}'''\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{N}'''\frac{\partial f_1}{\partial y};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_2}{\partial z}=\mathrm{M}'\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}'\frac{\partial f_2}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_2}{\partial s}=\mathrm{M}''\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}''\frac{\partial f_2}{\partial y},\\
&\frac{\partial f_2}{\partial t}=\mathrm{M}'''\frac{\partial f_2}{\partial x}+\mathrm{N}'''\frac{\partial f_2}{\partial y}.
\end{aligned}\right.$$

Si donc le déterminant (16) avait une valeur initiale nulle, les divers déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{matrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial t},\\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial t}
\end{matrix}$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

IV. *Supposons que*, dans le voisinage du point considéré, *le système*

$$(21)\qquad f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0$$

et les formules

$$(22)\qquad x = \Xi(U, V, \ldots), \qquad y = H(U, V, \ldots), \qquad \ldots$$

constituent deux représentations de la première figure, l'une suivant le mode réduit, l'autre suivant le mode paramétrique; supposons, pareillement, *que le système*

$$(23)\qquad F_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad F_2(x, y, \ldots), \qquad \ldots, \qquad F_p(x, y, \ldots) = 0$$

et les formules

$$(24)\qquad x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots$$

constituent deux représentations de la deuxième figure, l'une suivant le mode réduit, l'autre suivant le mode paramétrique. En appliquant le mécanisme indiqué dans la définition, d'abord à (21) et (24), puis à (22) et (23), on forme successivement les fonctions composées (3), puis les fonctions composées

$$(25)\qquad \begin{cases} F_1[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots], \\ F_2[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p[\Xi(U, V, \ldots), H(U, V, \ldots), \ldots]. \end{cases}$$

Cela étant, *si les fonctions composées* (3), *avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées* (25) *jouissent de la même propriété.*

Supposons ici encore, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, et que les figures considérées, admettant le point ordinaire commun $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$, soient à trois dimensions : les formules (21), (22), (23), (24), (3), (25) deviennent respectivement

$$(21\ bis) \qquad f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0;$$

$$(22\ bis) \qquad \begin{cases} x = \Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \\ y = \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \\ z = \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \\ s = \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \\ t = \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}); \end{cases}$$

$$(23\ bis) \qquad \mathrm{F}_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad \mathrm{F}_2(x, y, z, s, t) = 0;$$

$$(24\ bis) \qquad \begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w); \end{cases}$$

$$(3\ bis) \quad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, w),\ \eta(u, v, w),\ \zeta(u, v, w),\ \sigma(u, v, w),\ \tau(u, v, w)], \\ f_2[\xi(u, v, w),\ \eta(u, v, w),\ \zeta(u, v, w),\ \sigma(u, v, w),\ \tau(u, v, w)]; \end{cases}$$

$$(25\ bis) \quad \begin{cases} \mathrm{F}_1[\Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})], \\ \mathrm{F}_2[\Xi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{Z}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \Sigma(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), \mathrm{T}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})]. \end{cases}$$

Il s'agit de prouver que, si les fonctions composées (3 *bis*), avec toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'annulent au point considéré, sans que toutes leurs dérivées d'ordre $k+1$ s'y annulent à la fois, les fonctions composées (25 *bis*) jouissent de la même propriété.

A. Les fonctions composées (25 *bis*) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'annulent au point considéré.

Si l'entier k est nul, le point $(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0)$ étant, par hypothèse, commun aux deux figures, les fonctions composées (25 *bis*) ont, comme les fonctions composées (3 *bis*), des valeurs initiales nulles.

Supposons maintenant que l'entier k soit supérieur à zéro, par suite au moins égal à 1. En rapprochant de l'alinéa précédent III nos hypothèses sur les fonctions composées (3 *bis*), on voit que, pour les deux figures considérées, les mêmes couples de coordonnées sont exprimables en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes, et que dès lors les deux figures seront représentables, suivant le mode explicite (n° **23**), par des couples de formules ayant respectivement les mêmes premiers membres, par exemple

$$x = g_1(z, s, t), \qquad y = g_2(z, s, t)$$

pour la première figure,

$$x = G_1(z, s, t), \qquad y = G_2(z, s, t)$$

pour la deuxième figure. Cela étant, nous allons, dans ce qui suit, associer de diverses manières une représentation, réduite ou paramétrique, de la première figure, avec une représentation, paramétrique ou réduite, de la deuxième.

Première association :

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ f_2(x, y, z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w); \end{cases}$$

Deuxième association :

$$\begin{cases} x - g_1(z, s, t) = 0, \\ y - g_2(z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \xi(u, v, w), \\ y = \eta(u, v, w), \\ z = \zeta(u, v, w), \\ s = \sigma(u, v, w), \\ t = \tau(u, v, w); \end{cases}$$

Troisième association :

$$\begin{cases} x - g_1(z, s, t) = 0, \\ y - g_2(z, s, t) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = G_1(z', s', t'), \\ y = G_2(z', s', t'), \\ z = z', \\ s = s', \\ t = t'; \end{cases}$$

Quatrième association :

$$\begin{cases} x = g_1(z', s', t'), \\ y = g_2(z', s', t'), \\ z = z', \\ s = s', \\ t = t', \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - G_1(z, s, t) = 0, \\ y - G_2(z, s, t) = 0; \end{cases}$$

Cinquième association :

$$\begin{cases} x = \Xi(U, V, W), \\ y = H(U, V, W), \\ z = Z(U, V, W), \\ s = \Sigma(U, V, W), \\ t = T(U, V, W), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - G_1(z, s, t) = 0, \\ y - G_2(z, s, t) = 0; \end{cases}$$

Sixième association :

$$\begin{cases} x = \Xi(U, V, W), \\ y = H(U, V, W), \\ z = Z(U, V, W), \\ s = \Sigma(U, V, W), \\ t = T(U, V, W), \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, s, t) = 0, \\ F_2(x, y, z, s, t) = 0. \end{cases}$$

A ces six associations correspondent respectivement, par l'application du mécanisme indiqué dans la définition du contact, six couples de fonctions composées, savoir :

$$(26) \quad \begin{cases} f_1[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ f_2[\xi(u, v, w), \eta(u, v, w), \zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)]; \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} \xi(u, v, w) - g_1[\zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)], \\ \eta(u, v, w) - g_2[\zeta(u, v, w), \sigma(u, v, w), \tau(u, v, w)]; \end{cases}$$

$$(28) \quad \begin{cases} G_1(z', s', t') - g_1(z', s', t'), \\ G_2(z', s', t') - g_2(z', s', t'); \end{cases}$$

et

$$(29)\quad \begin{cases} g_1(z', s', t') - G_1(z', s', t'), \\ g_2(z', s', t') - G_2(z', s', t'); \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} \Xi(U, V, W) - G_1[Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)], \\ H(U, V, W) - G_2[Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)]; \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} F_1[\Xi(U, V, W), H(U, V, W), Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)], \\ F_2[\Xi(U, V, W), H(U, V, W), Z(U, V, W), \Sigma(U, V, W), T(U, V, W)]. \end{cases}$$

De ces six couples de fonctions composées, le premier, (26), est identique à (3 *bis*), et le dernier, (31), identique à (25 *bis*).

Or, la propriété que possèdent, par hypothèse, les fonctions (3 *bis*), ou (26), d'avoir des valeurs initiales nulles ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement, s'étend tout d'abord de (26) à (27), en vertu de l'alinéa I; puis de (27) à (28), en vertu de l'alinéa II; puis, évidemment, de (28) à (29), qui se compose de fonctions respectivement identiques au signe près; puis de (29) à (30), en vertu de l'alinéa II; puis enfin de (30) à (31), c'est-à-dire à (25 *bis*), en vertu de l'alinéa I.

B. Les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions composées (25 *bis*) ne s'annulent pas toutes au point considéré.

Effectivement, si la nullité initiale établie pour les fonctions (25 *bis*) et leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement s'étendait à toutes leurs dérivées de l'ordre $k+1$, elle s'étendrait, par le même raisonnement fait en sens inverse, à toutes les dérivées d'ordre $k+1$ des fonctions (3 *bis*), ce qui est contraire à l'hypothèse.

V. De l'exposé qui précède (alinéas I, II et IV) il résulte que la propriété spécifiée dans notre définition du contact d'ordre k est indépendante des diverses circonstances variables mentionnées au début du présent n° **24** : établissons maintenant qu'*elle est indépendante de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées* $x, y, \ldots$.

Soient donc

$$(32)\quad \begin{cases} x = \alpha(x', y', \ldots), \\ y = \beta(x', y', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les formules de transformation qui lient les anciennes coordonnées $x, y, \ldots$ aux nouvelles $x', y', \ldots$: les anciennes coordonnées, $x_0, y_0, \ldots$, du point ordinaire commun aux deux figures, prises conjointement avec ses coordonnées nouvelles, $x'_0, y'_0, \ldots$, vérifient numériquement les formules (32), et, à partir de la solution numérique

$$(x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots),$$

les formules dont il s'agit, résolues, en fait, par rapport à $x, y, \ldots$, sont, de plus, résolubles par rapport à $x', y', \ldots$ conformément au principe général des fonctions implicites.

Par cette transformation, le système (1) et les formules (2) deviennent respectivement

$$(33) \qquad \begin{cases} f_1[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0, \\ f_2[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\alpha(x', y', \ldots), \beta(x', y', \ldots), \ldots] = 0 \end{cases}$$

et

$$(34) \qquad \begin{cases} \alpha(x', y', \ldots) = \xi(u, v, \ldots), \\ \beta(x', y', \ldots) = \eta(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le système (33) fournit d'ailleurs une représentation, dans le mode réduit, de la première figure transformée (nº **18**), et les formules déduites de (34) à l'aide d'une résolution par rapport à $x', y', \ldots$ une représentation, dans le mode paramétrique, de la deuxième figure transformée (nº **22**). Or, si l'on porte dans les premiers membres de (33) les valeurs de $x', y', \ldots$ obtenues par cette résolution, les fonctions composées qui en résultent sont respectivement identiques à (3).

Ainsi se trouve établi le point que nous avions en vue.

25. Définissons maintenant un contact d'ordre quelconque entre deux figures dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, et supposons $n-p > n-r$. Les deux figures étant, dans le voisinage d'un point ordinaire commun, représentées, la première (celle à $n-p$ dimensions), suivant le mode réduit, par le système des p équations

$$(35)\quad f_1(x, y, \ldots) = 0, \qquad f_2(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_p(x, y, \ldots) = 0,$$

la seconde (celle à $n-r$ dimensions), suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$(36)\qquad x = \xi(u, v, \ldots), \qquad y = \eta(u, v, \ldots), \qquad \ldots,$$

les p fonctions composées

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ f_2[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p[\xi(u, v, \ldots), \eta(u, v, \ldots), \ldots] \end{array}\right.$$

ont évidemment des valeurs initiales nulles. Cela posé, et en désignant par k un entier positif ou nul, si les fonctions (37) et toutes leurs dérivées (relatives aux $n-r$ paramètres $u, v, \ldots$) jusqu'à l'ordre k inclusivement ont des valeurs initiales nulles, sans que toutes celles d'ordre $k+1$ jouissent à la fois de cette propriété, les deux figures seront dites avoir, au point considéré, un *contact d'ordre* (exactement) *égal à* k.

Cette définition, comme celle du numéro précédent, nécessite diverses observations essentielles. On n'a pas, il est vrai, dans le cas actuel où les deux figures n'ont pas le même nombre de dimensions, à envisager une permutation entre leurs rôles respectifs; mais, ici encore, elles peuvent, de bien des manières, être représentées, la première suivant le mode réduit, la deuxième suivant le mode paramétrique : or, la propriété spécifiée dans la définition est indépendante de ces circonstances variables. Elle l'est, en outre, de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées $x, y, \ldots$. C'est ce que mettent en évidence des raisonnements tout semblables à ceux que nous venons d'exposer dans les alinéas I, II et V du numéro précédent.

26. Il convient, enfin, de dire un mot du contact d'ordre infini entre deux figures.

Deux figures à $n-p$ dimensions, ayant un point commun, ordinaire pour chacune d'elles, seront dites avoir en ce point un *contact d'ordre infini*, si, l'une d'elles étant représentée dans le mode réduit par le système des p équations (1), et l'autre dans le mode paramétrique à l'aide des n formules (2), les p fonctions composées (3) et leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales nulles.

Considérons maintenant deux figures dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, et supposons $n-p>n-r$: en un point commun, ordinaire pour chacune d'elles, ces figures seront dites avoir un *contact d'ordre infini*, si, la première (celle à $n-p$ dimensions) étant représentée dans le mode réduit par le système des p équations (35), et la seconde (celle à $n-r$ dimensions) étant représentée dans le mode paramétrique à l'aide des n formules (36), les p fonctions composées (37) et leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales nulles.

De l'exposé qui précède il résulte que les caractères pris pour bases respectives de ces deux définitions sont indépendants des diverses circonstances mentionnées au début des n^{os} **24** et **25**.

Pour que deux figures, ayant, ou non, le même nombre de dimensions, et admettant le point commun $(x_0, y_0, \ldots)$, *ordinaire pour chacune d'elles, soient en symptose* (n° **20**), *il faut et il suffit qu'elles aient en ce point un contact d'ordre infini.*

Effectivement, si les deux figures sont en symptose, les p fonctions composées que donne l'application du mécanisme indiqué ci-dessus ne peuvent manquer d'être identiquement nulles; elles s'annulent donc numériquement avec leurs dérivées de tous ordres au point $(x_0, y_0, \ldots)$ [1], c'est-à-dire que les deux figures ont en ce point un contact d'ordre infini.

Réciproquement, si les deux figures ont au point $(x_0, y_0, \ldots)$ un contact d'ordre infini, les p fonctions composées dont il s'agit s'annulent numériquement en ce point avec leurs dérivées de tous ordres; elles sont donc identiquement nulles [2], d'où résulte que les deux figures sont en symptose.

27. *Si deux figures à $n-p$ dimensions*, $F^{(n-p)}$, $G^{(n-p)}$, *ont entre elles un contact d'ordre au moins égal à k, toute figure à $n-q$ di-*

(1) *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 56.
(2) *Ibid.*, n° 57.

mensions, $J^{(n-q)}$, *ayant avec la première,* $F^{(n-p)}$, *un contact d'ordre au moins égal à* k, *a aussi avec la seconde,* $G^{(n-p)}$, *un contact d'ordre au moins égal à* k.

(On suppose, indifféremmenl, $n-p$ supérieur, égal ou inférieur à $n-q$.)

I. Considérons d'abord les deux figures à $n-p$ dimensions, $L^{(n-p)}$, $M^{(n-p)}$, définies par les systèmes respectifs

$$\left\{\begin{array}{l} x = X_L(z, s, \ldots), \\ y = Y_L(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = X_M(z, s, \ldots), \\ y = Y_M(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui, pour l'une et pour l'autre, expriment un même groupe, $(x, y, \ldots)$, de p coordonnées en fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes $z, s, \ldots$: pour que, en un point ordinaire,

$$(x_0, y_0, \ldots, z_0, s_0, \ldots),$$

commun à ces deux figures, il y ait entre celles-ci un contact d'ordre g, il faut et il suffit que les développements de $x, y, \ldots$, construits, pour l'une et pour l'autre, à partir de $z_0, s_0, \ldots$, et qui sont entiers par rapport aux différences $z-z_0, s-s_0, \ldots$, soient respectivement identiques de part et d'autre jusqu'aux termes de degré g inclusivement, sans que l'identité dont il s'agit s'étende à l'ensemble des termes de degré $g+1$.

Pour s'en convaincre, on mettra les équations de la première figure sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} X_L(z, s, \ldots) - x = 0, \\ Y_L(z, s, \ldots) - y = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

on représentera la deuxième, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = X_M(\zeta, \sigma, \ldots), \\ y = Y_M(\zeta, \sigma, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z = \zeta, \\ s = \sigma, \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

(n° **23**), et l'on appliquera notre définition du n° **24**.

II. Revenons à notre énoncé.

La définition d'un contact d'ordre quelconque entre deux figures étant, comme nous l'avons vu, indépendante de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées, il est toujours permis, si l'on y trouve quelque avantage, de recourir à une pareille transformation. Or, en vertu d'une remarque exposée au n° **21**, on peut, au besoin, opérer sur les coordonnées une transformation linéaire telle, qu'un même groupe de p coordonnées devienne, pour les deux figures $F^{(n-p)}$, $G^{(n-p)}$, exprimable en fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes. Supposant, dès lors, les équations de ces deux figures mises respectivement sous les formes

$$\left\{\begin{array}{l} x = X_F(z, s, \ldots), \\ y = Y_F(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = X_G(z, s, \ldots), \\ y = Y_G(z, s, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

nous distinguerons dans la démonstration deux cas, suivant que l'on a

$$n-p \geqq n-q \qquad \text{ou} \qquad n-p < n-q.$$

Premier cas. — On suppose $n-p \geqq n-q$.

La figure $J^{(n-q)}$ étant représentée, suivant le mode paramétrique, à l'aide des n formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \Xi(u, v, \ldots), \\ y = H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z = Z(u, v, \ldots), \\ s = \Sigma(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

on formera les deux groupes de fonctions composées

$$(38) \qquad \left\{\begin{array}{l} X_F[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - \Xi(u, v, \ldots), \\ Y_F[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et

$$(39) \qquad \left\{\begin{array}{l} X_G[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - \Xi(u, v, \ldots), \\ Y_G[Z(u, v, \ldots), \Sigma(u, v, \ldots), \ldots] - H(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $J^{(n-q)}$ il résulte que les fonctions composées (38) ont des valeurs initiales nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement. Si l'on compare alors (38) à (39), il résulte du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $G^{(n-p)}$ et de l'alinéa I, combinés avec la règle des fonctions composées, que les fonctions composées (39) jouissent de cette même propriété : les figures $G^{(n-p)}$, $J^{(n-q)}$ présentent donc, elles aussi, un contact d'ordre au moins égal à k.

Deuxième cas. — On suppose $n-p < n-q$.

La figure $J^{(n-q)}$ étant représentée, suivant le mode réduit, par le système des q équations

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \\ f_2(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q(x, y, \ldots, z, s, \ldots) = 0, \end{cases}$$

on formera les deux groupes de fonctions composées

$$(40) \qquad \begin{cases} f_1[X_F(z, s, \ldots), Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ f_2[X_F(z, s, \ldots), Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q[X_F(z, s, \ldots), Y_F(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots] \end{cases}$$

et

$$(41) \qquad \begin{cases} f_1[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ f_2[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_q[X_G(z, s, \ldots), Y_G(z, s, \ldots), \ldots, z, s, \ldots]. \end{cases}$$

Du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $J^{(n-q)}$ il résulte que les fonctions composées (40) ont des valeurs initiales nulles, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre k inclusivement. Si l'on compare alors (40) à (41), il résulte du contact supposé entre $F^{(n-p)}$ et $G^{(n-p)}$ et de l'alinéa I, combinés avec la règle des fonctions composées, que les fonctions composées (41) jouissent de cette même propriété : les figures $G^{(n-p)}$, $J^{(n-q)}$ présentent donc, elles aussi, un contact d'ordre au moins égal à k.

28. Considérons les quatre figures

$$F^{(n-p)}, \quad G^{(n-p)},$$
$$F^{(n-q)}, \quad G^{(n-q)},$$

dont les deux premières sont à $n-p$ dimensions, les deux dernières à $n-q$ dimensions. (On suppose, indifféremment, $n-p$ supérieur, égal, ou inférieur à $n-q$.)

Cela étant, *s'il existe un contact d'ordre au moins égal à k :*

1° *entre* $F^{(n-p)}$ *et* $G^{(n-p)}$,

2° *entre* $F^{(n-q)}$ *et* $G^{(n-q)}$,

3° *entre* $F^{(n-p)}$ *et* $F^{(n-q)}$,

il y a certainement aussi un contact d'ordre au moins égal à k entre $G^{(n-p)}$ *et* $G^{(n-q)}$.

Il résulte en effet du théorème précédent (n° **27**) que le contact supposé de $F^{(n-p)}$ avec $G^{(n-p)}$ et avec $F^{(n-q)}$ entraîne, entre $G^{(n-p)}$ et $F^{(n-q)}$, un contact d'ordre au moins égal à k; puis, que le contact ainsi établi de $F^{(n-q)}$ avec $G^{(n-p)}$ et son contact supposé avec $G^{(n-q)}$ entraînent, entre $G^{(n-p)}$ et $G^{(n-q)}$, un contact d'ordre au moins égal à k.

29. Lorsqu'il existe entre deux figures un *contact proprement dit*, c'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro, une dernière remarque est à noter : nous distinguerons, dans l'énoncé, deux cas, suivant que les figures offrent ou non le même nombre de dimensions.

I. *Si deux figures à $n-p$ dimensions ont entre elles un contact proprement dit, et si, pour l'une d'elles, un certain groupe de p coordonnées est, dans le voisinage du point de contact, exprimable par p fonctions olotropes des $n-p$ coordonnées restantes, ce même groupe l'est aussi pour l'autre figure.*

Supposons, par exemple, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t, que les figures considérées, dont le contact est d'ordre supérieur à zéro, soient à trois dimensions, et que, pour l'une d'elles, le couple (x, y) soit exprimable par des fonctions olotropes de z, s, t : je dis que ce même couple (x, y) ne pourra manquer de l'être aussi pour l'autre figure.

Pour l'établir, il suffit de supposer la première figure définie par le système (13), la deuxième par les formules (14), d'observer que les fonctions composées (15), ainsi que leurs diverses dérivées premières, s'annulent au point considéré, et de raisonner comme nous l'avons fait à l'alinéa III du n° **24**.

II. Considérons maintenant deux figures, $F^{(n-p)}$, $F^{(n-r)}$, dont les nombres respectifs de dimensions, $n-p$, $n-r$, soient inégaux, tels que l'on ait, par exemple, $n-p > n-r$, d'où $p < r$, et *supposons que ces deux figures aient entre elles un contact proprement dit.* Cela étant :

1° *Si, pour la figure* $F^{(n-p)}$, *un certain groupe,* $\mathcal{G}_p$, *de p coordonnées est, dans le voisinage du point de contact, exprimable par p fonctions olotropes des* $n-p$ *restantes, l'un au moins des divers groupes de r coordonnées obtenus par l'adjonction à* $\mathcal{G}_p$ *de* $r-p$ *coordonnées est, pour la figure* $F^{(n-r)}$, *exprimable par r fonctions olotropes des* $n-r$ *restantes.*

2° *Inversement, si, pour la figure* $F^{(n-r)}$, *un certain groupe,* $\mathcal{G}_r$, *de r coordonnées est exprimable par r fonctions olotropes des* $n-r$ *restantes, l'un au moins des divers groupes de p coordonnées extraits de* $\mathcal{G}_r$ *est, pour la figure* $F^{(n-p)}$, *exprimable par p fonctions olotropes des* $n-p$ *restantes.*

Supposons, par exemple, qu'il y ait cinq coordonnées, x, y, z, s, t; que les deux figures considérées soient, l'une à trois dimensions, l'autre à deux dimensions; et que ces deux figures soient respectivement définies, la première, F''', suivant le mode réduit, par le système

$$f_1(x, y, z, s, t) = 0, \qquad f_2(x, y, z, s, t) = 0,$$

la deuxième, F'', suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi(u, v),\\ y &= \eta(u, v),\\ z &= \zeta(u, v),\\ s &= \sigma(u, v),\\ t &= \tau(u, v).\end{aligned}\right.$$

Leur contact étant, par hypothèse, d'ordre supérieur à zéro, les deux fonctions composées

$$(42)\qquad \begin{cases} f_1[\xi(u,v),\ \eta(u,v),\ \zeta(u,v),\ \sigma(u,v),\ \tau(u,v)], \\ f_2[\xi(u,v),\ \eta(u,v),\ \zeta(u,v),\ \sigma(u,v),\ \tau(u,v)] \end{cases}$$

ont des valeurs initiales nulles, ainsi que leurs diverses dérivées premières. Cela étant :

1° Si, pour la figure F‴, le groupe (x, y) est exprimable en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes, l'un au moins des divers groupes (x, y, z), (x, y, s), (x, y, t) sera, pour la figure F″, exprimable en fonctions olotropes des deux coordonnées restantes. En d'autres termes, si le déterminant

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro, l'un au moins des trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$(44)\qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

aura une valeur initiale différente de zéro.

2° Inversement, si, pour la figure F″, le groupe (x, y, z) est exprimable en fonctions olotropes des deux coordonnées restantes, l'un au moins des divers groupes (x, y), (x, z), (y, z) sera, pour la figure F‴, exprimable en fonctions olotropes des trois coordonnées restantes. En d'autres termes, si le déterminant

$$(45)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u} & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro, l'un au moins des trois déterminants du second ordre extraits du tableau

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{cases}$$

aura une valeur initiale différente de zéro.

Effectivement :

1° Supposons que le déterminant différentiel (43) ait une valeur initiale différente de zéro. En vertu de l'observation faite plus haut sur les fonctions (42), on a, au point de contact,

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial u} = 0; \end{cases}$$

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_1}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial s}\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\dfrac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial u}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = A'\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B'\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C'\dfrac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = A''\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} + B''\dfrac{\partial \sigma}{\partial v} + C''\dfrac{\partial \tau}{\partial v}. \end{cases}$$

Si donc les déterminants du second ordre extraits de (44) avaient tous des valeurs initiales nulles, les divers déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u}, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u}, & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} \end{matrix}\right|$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Supposons que le déterminant différentiel (45) ait une valeur initiale différente de zéro. Des formules (47) et (48), groupées comme il suit,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial v} = 0, \end{aligned}\right.$$

on tire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial s} &= M'\frac{\partial f_1}{\partial x} + N'\frac{\partial f_1}{\partial y} + P'\frac{\partial f_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} &= M''\frac{\partial f_1}{\partial x} + N''\frac{\partial f_1}{\partial y} + P''\frac{\partial f_1}{\partial z}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial s} &= M'\frac{\partial f_2}{\partial x} + N'\frac{\partial f_2}{\partial y} + P'\frac{\partial f_2}{\partial z}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} &= M''\frac{\partial f_2}{\partial x} + N''\frac{\partial f_2}{\partial y} + P''\frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Si donc les déterminants du second ordre extraits de (46) avaient tous des valeurs initiales nulles, les divers déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \end{array}\right.$$

auraient tous aussi des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Figures enveloppes.

30. Désignons actuellement par

$$\begin{array}{l} x,\ y,\ \ldots, \\ u,\ v,\ \ldots \end{array}$$

deux groupes d'indéterminées, en contenant respectivement h et k, et plaçons-nous dans l'espace

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

dont les $h+k$ dimensions sont supposées, indifféremment, soit réelles, soit imaginaires. Si, dans cet espace, deux figures à h dimensions sont l'une et l'autre en symptose (n° **20**) avec une même figure à $h-q$ dimensions $(0 \leqq q \leqq h)$, et si, en tout point de cette dernière, elles ont l'une avec l'autre un contact proprement dit (n° **29**), elles seront dites avoir l'une avec l'autre, suivant cette dernière, un *raccordement de genre* $h-q$.

Les deux cas extrêmes d'un raccordement ainsi défini correspondent respectivement aux deux hypothèses $q=h$, $q=0$. Dans le premier, fourni par l'hypothèse $q=h$, la figure de raccordement est à zéro dimension et se réduit à un simple point : on a alors un raccordement de genre zéro. L'autre cas extrême, fourni par l'hypothèse $q=0$, est celui d'une figure à h dimensions, que l'on peut considérer comme étant en symptose avec elle-même; en vertu d'une proposition formulée au n° **26**, elle présente avec elle-même en chacun de ses points un contact d'ordre infini, et se raccorde avec elle-même dans toute son étendue : on a alors un raccordement de genre h.

Cela posé, considérons une famille, $\mathfrak{F}_h$, de figures à h dimensions dépendant des q paramètres arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_q$, et définie à l'aide d'un système de k équations entre les $h+k$ coordonnées $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les q paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$; ce système,

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \end{cases}$$

est, comme de raison, supposé *résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées*, $u, v, \ldots$ *par exemple*. On peut se proposer de rechercher s'il existe quelque figure fixe à h dimensions avec laquelle chacune des figures de la famille $\mathfrak{F}_h$ présente un raccordement de genre $h - q$: une pareille figure, si elle existe, se nommera l'*enveloppe* des figures de la famille $\mathfrak{F}_h$, chacune de ces dernières se nommera elle-même une *enveloppée*, et la figure de raccordement de l'enveloppe avec une enveloppée se nommera la *caractéristique* de cette enveloppée.

Dans le cas très particulier où l'on suppose $q = 0$, la figure (1), définie par un système d'équations où ne figurent que $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ à l'exclusion de tout paramètre, est une figure fixe; l'enveloppe cherchée existe manifestement et se confond avec cette figure fixe, ainsi que les enveloppées et les caractéristiques.

Dans le cas général $q > 0$, nous raisonnerons comme il suit.

A chaque figure particulière de la famille $\mathfrak{F}_h$, c'est-à-dire à chaque système de valeurs particulières des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_q$, faisons correspondre, suivant une loi provisoirement indéterminée, une figure à $h - q$ dimensions, $\mathfrak{f}_{h-q}$, que nous représenterons, dans le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(2) \qquad \begin{cases} U = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ V = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ Y = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

puis, cherchons à déterminer cette loi, c'est-à-dire les fonctions

λ, μ, ..., ψ, ω, ..., ou U, V, ..., X, Y, ..., de telle sorte que le lieu de $\mathfrak{f}_{h-q}$ soit une figure à h dimensions se raccordant suivant $\mathfrak{f}_{h-q}$ avec la détermination particulière correspondante de la figure (1).

Observons à cet effet que la figure cherchée, si elle existe, est représentée par les formules (2), où les a et les t sont variables; et que, d'autre part, une détermination particulière de la figure variable $\mathfrak{F}_h$ s'obtient en attribuant aux a, dans les relations (1), des valeurs constantes. Il faudra donc, pour exprimer le contact que l'on a en vue, former (n° **24**) les fonctions composées

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q), \end{array}\right.$$

y considérer comme des constantes les a qui y figurent explicitement en dehors de U, V, ..., X, Y, ..., comme des variables les a et les t qui y figurent implicitement par l'intermédiaire de U, V, ..., X, Y, ..., puis écrire que, dans cette hypothèse, les fonctions dont il s'agit et leurs dérivées premières sont nulles. Les relations résultantes,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c} f_i(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, k); \end{array}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_1} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_2} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_q} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_q} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_q} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_q} + \ldots = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k); \end{array}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_1} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_1} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_2} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_2} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_{h-q}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_{h-q}} + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_{h-q}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_{h-q}} + \ldots = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array}\right.$$

devront être vérifiées quels que soient les a et les t. Au système [(3), (4), (5)] ainsi obtenu on peut d'ailleurs en substituer un plus simple, qui lui équivaut au point de vue de la recherche des $k+h$ fonctions U, V, ..., X, Y, ... : car, les relations dont il se compose devant être vérifiées quels que soient les a et les t, on tire de (3), par différentiation,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_1}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_1}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0,\\
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_2}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_2}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a_q}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_q}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial a_q}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial a_q}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0\\
&\qquad\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,k)
\end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_1}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_1}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_1}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_2}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_2}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_2}+\ldots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_{h-q}}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{V}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t_{h-q}}+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t_{h-q}}+\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t_{h-q}}+\ldots=0\\
&\qquad\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,k).
\end{aligned}\right.$$

Au point de vue de la recherche des $k+h$ fonctions U, V, ..., X, Y, ..., les équations (5) sont donc de simples conséquences des équations (3), et les équations (4) peuvent être remplacées par

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0,\qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0$$
$$(i=1,2,\ldots,k).$$

L'application de notre théorie des contacts nous donne donc comme conditions les $k(q+1)$ équations finies

$$\left\{\begin{aligned}
&f_i(\mathrm{U},\mathrm{V},\ldots,\mathrm{X},\mathrm{Y},\ldots,a_1,a_2,\ldots,a_q)=0,\\
&\frac{\partial f_i}{\partial a_1}=0,\qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_2}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_q}=0\\
&\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,k);
\end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant les notations majuscules U, V, ..., X, Y, ..., introduites pour la commodité du raisonnement, par les notations minuscules u, v, ..., x, y, ...,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} f_i(u, v, \ldots, x, y, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0, \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial a_1} = 0, \quad \dfrac{\partial f_i}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial f_i}{\partial a_q} = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{array}\right.$$

31. Le nombre q des paramètres a_1, a_2, ..., a_q étant supérieur à zéro, et les k équations (1) étant résolubles par rapport aux k coordonnées u, v, ..., ainsi que nous l'avons supposé dans ce qui précède, si, dans le système (6), on considère u, v, ..., a_1, a_2, ..., a_q comme des fonctions inconnues des h variables x, y, ..., on peut formuler l'énoncé suivant :

La recherche d'une enveloppe des figures de la famille $\mathfrak{F}_h$ se ramène à celle d'un groupe de $k + q$ fonctions des h variables x, y, ...,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \upsilon(x, y, \ldots), \\ v = \varphi(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 = \alpha_1(x, y, \ldots), \\ a_2 = \alpha_2(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_q = \alpha_q(x, y, \ldots), \end{array}\right.$$

assujetties à la double condition : 1° *que les q fonctions* (8) *aient, par rapport à quelque groupe de q variables extrait du groupe $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul;* 2° *que les $k + q$ fonctions* (7) *et* (8), *prises conjointement, vérifient identiquement les $k(q+1)$ équations* (6).

De la démonstration ci-après il résultera d'ailleurs que, *lorsqu'un pareil groupe de fonctions existe, l'enveloppe et la caractéristique*, représentées, dans le mode réduit, l'une par le système (7), l'autre par le système [(7), (8)], *peuvent* également *se représenter, la première par le système* (1), *où a_1, a_2, ..., a_q ont été remplacés par les* *valeurs* (8), *la seconde par le système* [(1), (8)] (où $a_1, a_2, \ldots, a_q$ sont considérés comme des constantes).

I. *A toute enveloppe des figures* $\mathfrak{F}_k$ *correspond un groupe de* $k+q$ *fonctions*, (7), (8), *remplissant la double condition énoncée.*

Si l'on se reporte en effet à notre raisonnement du nº **30**, l'enveloppe d'existence supposée et la caractéristique se trouveront définies à l'aide d'un seul et même système de $k+h$ équations,

$$(9)\qquad \begin{cases} u = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ v = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ y = \omega(a_1, a_2, \ldots, a_q, t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

pour avoir la caractéristique, il suffira, dans les relations (9) et (10), de considérer les a comme des constantes en laissant les t variables; pour avoir l'enveloppe, on laissera variables à la fois les a et les t. Comme l'enveloppe se raccorde avec chacune des enveloppées, et que, pour chacune des enveloppées, les k coordonnées $u, v, \ldots$ sont exprimables en fonctions olotropes de $x, y, \ldots$, la même chose aura lieu pour l'enveloppe (nº **29**, I), et il en résulte (nº **15**) que les formules (10) sont résolubles par rapport aux h quantités

$$(11)\qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & \ldots, & a_q, \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_{h-q}; \end{cases}$$

après cette résolution, les h quantités (11) se trouveront exprimées à l'aide des h variables $x, y, \ldots$, et elles auront, par rapport à celles-ci, un déterminant différentiel non identiquement nul : on en déduit, par l'application des propriétés générales des déterminants, que les q premières, $a_1, a_2, \ldots, a_q$, auront elles-mêmes, par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul.

Observons maintenant que les $k+h$ fonctions (9) et (10) vérifient identiquement les équations (6), quels que soient les a et les t : si donc on opère sur (6) la transformation définie par (10), ce qui change les h quantités (11), et, du même coup, les k quantités u, v, ... définies par (9), en autant de fonctions x, y, ..., savoir

$$(7') \quad \begin{cases} u = \upsilon\,(x, y, \ldots), \\ v = \varphi\,(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{cases} a_1 = \alpha_1(x, y, \ldots), \\ a_2 = \alpha_2(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_q = \alpha_q(x, y, \ldots), \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} t_1 = \tau_1\,(x, y, \ldots), \\ t_2 = \tau_2\,(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_{h-q} = \tau_{h-q}(x, y, \ldots), \end{cases}$$

les relations résultantes sont identiquement vérifiées, quels que soient x, y, ... Les $k+h$ fonctions (7'), (8'), (12) vérifient donc identiquement les équations (6), et, comme ces dernières ne contiennent pas les t, on peut dire que les $k+q$ fonctions (7'), (8') les vérifient identiquement.

Finalement, observons que les k équations (1), étant, d'après cela, des conséquences numériques du système [(7'), (8')], peuvent se mettre sous la forme

$$(12\ bis) \quad \begin{cases} \lambda_{1,1}(u-\upsilon) + \lambda_{1,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{1,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{1,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{1,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \\ \lambda_{2,1}(u-\upsilon) + \lambda_{2,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{2,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{2,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{2,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{k,1}(u-\upsilon) + \lambda_{k,2}(v-\varphi) + \ldots + \mu_{k,1}(a_1-\alpha_1) + \mu_{k,2}(a_2-\alpha_2) + \ldots + \mu_{k,q}(a_q-\alpha_q) = 0, \end{cases}$$

où les λ et les μ désignent des fonctions convenalement choisies de

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad x, \quad y, \quad \ldots, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_q;$$

observons en outre que les λ, en nombre k^2, forment certainement un déterminant différent de zéro, puisque les k équations (1) sont supposées résolubles par rapport aux k quantités u, v, ... Cela posé, l'enveloppe, représentée, dans le mode paramétrique, par le système [(9), (10)], où les a et les t sont variables, le sera tout aussi bien par le système numériquement équivalent [(7'), (8'), (12)] (après résolution convenable de celui-ci) : elle le sera donc, dans le mode réduit, par les k formules (7'), ou, ce qui revient au même en vertu de l'observation précédente, par les k formules (1), où l'on aura tenu compte de (8'). De même, la caractéristique, représentée, dans le mode paramétrique, par le système [(9), (10)], où les a sont considérés comme des constantes et les t comme des variables, le sera tout aussi bien par le système [(7'), (8'), (12)] : elle le sera donc, dans le mode réduit, par les $k+q$ formules (7') et (8'), ou, ce qui revient au même, par les $k+q$ formules (1) et (8').

II. *Réciproquement, à tout groupe de $k+q$ fonctions*, (7), (8), *remplissant la double condition énoncée, correspond une enveloppe des figures $\mathfrak{F}_h$.*

Supposons en effet que les $k+q$ fonctions (7) et (8), prises conjointement, vérifient identiquement le système (6), quels que soient $x, y, \ldots$, et que les q fonctions (8) aient, par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, un déterminant différentiel non identiquement nul.

Les k équations (1), qui font partie du système (6), étant identiquement vérifiées par les fonctions (7) et (8), peuvent, en vertu du raisonnement fait plus haut, se mettre sous la forme (12 *bis*), où les λ forment un déterminant différent de zéro, et, dès lors, le système [(1), (8)] équivaut numériquement au système [(7), (8)].

Les équations (8) étant, d'autre part, supposées résolubles par rapport à quelque groupe de q variables extrait de $(x, y, \ldots)$, considérons les $h-q$ variables restantes du groupe $(x, y, \ldots)$, et aux q équations (8) adjoignons les $h-q$ formules

$$t_1 = \ldots, \qquad t_2 = \ldots, \qquad \ldots, \qquad t_{h-q} = \ldots, \tag{13}$$

égalant aux $h-q$ variables dont il s'agit autant de nouvelles indéterminées, $t_1, t_2, \ldots, t_{h-q}$: du système (13) on peut alors tirer ces $h-q$ variables en fonctions des t, et, du système [(8), (13)], les h variables $x, y, \ldots$ en fonctions des a et des t; les h formules de résolution de ce dernier système ont d'ailleurs, par rapport aux a et aux t, un déterminant différentiel non identiquement nul.

En conséquence, si, dans les $k+h$ formules (7), (8), (13), on attribue aux a des valeurs particulières déterminées en laissant les t variables, on aura, après résolution par rapport à $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, une représentation, dans le mode paramétrique, d'une certaine figure à $h-q$ dimensions, laquelle se trouvera représentée, dans le mode réduit, par les $k+q$ équations (7), (8) (telles qu'elles sont écrites), ou, ce qui revient au même, par les $k+q$ équations (1), (8).

Et si, dans ces mêmes formules (7), (8), (13), on laisse variables à la fois les a et les t, on aura, après résolution par rapport à $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, une représentation, dans le mode paramétrique, d'une certaine figure à h dimensions, laquelle se trouvera représentée, dans le mode réduit, par les k équations (7) (telles qu'elles sont écrites), ou, ce qui revient au même, par les k équations (1), où l'on aura remplacé $a_1, a_2, \ldots, a_q$ par les valeurs (8).

Cela posé, il résulte de notre hypothèse que les équations (6), où ne figurent pas les t, sont identiquement vérifiées, quels que soient $x, y, \ldots$, par les $k+h$ fonctions (7), (8), (13) : si donc on opère sur ces équations la transformation définie par [(8), (13)], qui change les h quantités $x, y, \ldots$, et, du même coup, les k quantités $u, v, \ldots$ définies par (7), en autant de fonctions des a et des t, les relations résultantes sont identiquement vérifiées quels que soient les a et les t. Cette conséquence, rapprochée des remarques précédentes et du raisonnement exposé au n° **30**, achève notre démonstration.

32. Il convient de noter que, *lorsqu'on suppose* $k=1$, *le nombre des fonctions* (7), (8) *est précisément égal au nombre des équations du système* (6), car tous deux ont pour valeur $1+q$: la possibilité du problème de l'enveloppe est alors le cas général, et son impossibilité le cas exceptionnel. C'est le contraire qui a lieu lorsqu'on suppose $k>1$.

(*A suivre.*)