JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LE ROUX

Relativité restreinte et Géométrie des systèmes ondulatoires

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 205-253.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__205_0>

Relativité restreinte et Géométrie des systèmes ondulatoires;

Par J. LE ROUX.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est une contribution à l'examen critique de la théorie de la Relativité. Après M. Brillouin (1), M. Lecornu (2), avec M. Painlevé (3), et d'autres encore, j'examine quelques-unes des graves objections que soulèvent les constructions d'Einstein (4).

A la suite du résultat négatif de la célèbre expérience de Michelson et Morley, il sembla légitime d'admettre provisoirement, à titre de *postulat*, l'impossibilité de déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, et il pouvait être utile d'examiner toutes les conséquences qui découlent de cette hypothèse. C'est le point de vue adopté par Poincaré dans la *Dynamique de l'Électron* (5). Poincaré ne se dissimulait pas le caractère conventionnel et un peu arbitraire de la théorie de la Relativité. Au sujet des hypothèses de Lorentz, il faisait remarquer que, dans cette théorie, deux longueurs égales sont, par définition, deux longueurs que la lumière met le même temps à parcourir, et il ajoutait qu'il suffirait peut-être de renoncer à cette définition pour que la théorie de

(1) *Propos sceptiques au sujet du principe de relativité* (*Scientia*, 1913).

(2) *La Mécanique. Les Idées et les Faits*, 1918, p. 45-54. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, p. 337.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 2e semestre 1921.

(4) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 172, p. 1227 et 1467; t. 173, p. 1074 et 1343; t. 174, p. 924.

(5) *Rendiconti di Palermo*, t. XXI, 1906, p. 129.

Lorentz fût aussi complètement bouleversée que l'a été le système de Ptolémée par l'intervention de Copernic.

Ces réserves de Poincaré paraissent justifiées.

Il y a des inconvénients à abuser des principes. Quand on qualifie de principe une proposition scientifique, on n'ajoute rien à son degré de certitude ni à la précision des observations qu'elle résume.

Le principe de la relativité est très contestable. Il diffère des autres propositions fondamentales de la Science par son caractère négatif. La seule chose que l'on puisse affirmer à propos de l'expérience de Michelson, c'est que les phénomènes se passent autrement qu'on ne l'avait supposé. C'est donc dans une analyse plus exacte et plus complète de ces phénomènes qu'il faut chercher la raison du résultat obtenu. Déclarer d'avance qu'on ne devait rien trouver et qu'on ne trouvera jamais rien dans cet ordre d'idées est une affirmation arbitraire et une façon détournée d'escamoter la difficulté.

Le principe de la relativité restreinte tel qu'il a été énoncé par Einstein [1] peut se formuler à peu près de la manière suivante :

1° *Les lois de la Nature, rapportées à un système de référence auquel s'appliquent les lois de la Mécanique newtonienne, conservent la même forme d'expression dans tout autre système qui se déduit du premier par un mouvement de translation uniforme.*

2° *La vitesse de la lumière est une constante universelle, indépendante de la vitesse de translation uniforme du foyer.*

Quand on examine l'application qui est faite de ce principe, on constate dès le début l'une de ces contradictions et de ces équivoques qui se répètent fréquemment dans les travaux publiés sur la relativité. Après avoir parlé, dans l'énoncé, d'une translation uniforme, on remplace dans l'application cette translation par une transformation de Lorentz. Ce n'est pas la même chose.

---

(1) V. LORENTZ, EINSTEIN, MINKOWSKI, *Das Relativitäts Prinzip.* Eine sammlung von Abhandlungen (1920). — WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (1921). — EDDINGTON, *Espace, Temps, Gravitation* (Paris, Hermann, 1921). — BECQUEREL, *Le principe de Relativité et la Théorie de la Gravitation* (Paris, 1922).

On s'aperçoit d'ailleurs que les seules lois naturelles considérées par Einstein dans la relativité restreinte sont celles qui se rapportent à l'équation aux dérivées partielles de la propagation des ondes dans un milieu isotrope quand la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière.

Les phénomènes auxquels pourrait s'appliquer la théorie de la relativité restreinte sont en effet ceux dont l'étude se ramène à cette équation. C'est à tort qu'on a voulu les appliquer à tous les phénomènes sans exception.

Les faits extraordinaires, d'apparence paradoxale, qui ont été déduits de la théorie d'Einstein reposent sur cette extension abusive, et principalement sur une confusion entre le temps local de Lorentz et le temps vulgaire.

Comme ce sont deux choses différentes, on n'a pas le droit d'étendre à l'une ce qui n'est vrai que pour l'autre. La même observation s'applique à la vitesse. On prétend démontrer qu'aucune vitesse ne peut dépasser celle de la lumière. Cette proposition est vraie pour la pseudo-vitesse au sens d'Einstein, elle ne s'applique pas à la vitesse au sens ordinaire du mot; il y a là encore deux choses différentes désignées par le même nom. On pourrait multiplier les exemples de confusions de ce genre. Dans la plupart des cas, les mots employés ont un certain sens dans les raisonnements et les calculs, et on leur donne ensuite un sens différent dans l'application physique.

Le principe de relativité restreinte, au sens d'Einstein, paraît complètement inutile. On en a déduit beaucoup d'absurdités. Les faits positifs auxquels il s'applique peuvent s'obtenir beaucoup plus simplement par une étude analytique régulière de l'équation de la propagation des ondes dans un milieu isotrope. On pourrait même soutenir que l'attirail de règles et de chronomètres idéaux qui s'introduit dans les raisonnements d'Einstein constitue un procédé bizarre pour représenter certaines intégrales de l'équation considérée.

L'analyse n'a nul besoin de cet artifice un peu grossier. La détermination des intégrales à pôle mobile fournit une représentation très nette et très simple de la transformation de Lorentz et de la contraction apparente de Fitz-Gérald. Ces intégrales conduisent à la considération d'ondes d'interférence ellipsoïdales, aplaties comme les électrons de Lorentz.

Pour un observateur en mouvement dans un milieu isotrope vibrant, les phénomènes sont semblables à ceux qui seraient observés dans un milieu en repos, sauf le remplacement de l'onde sphérique de progression par l'onde d'interférence ellipsoïdale aplatie.

C'est l'onde d'interférence qui remplace l'onde de progression dans les phénomènes de réflexion. Dans la propagation d'un train d'ondes planes rapporté à un système de référence mobile, le rayon n'est pas perpendiculaire au front d'onde, il est parallèle au diamètre conjugué de ce front dans l'ellipsoïde d'interférence. C'est encore l'ellipsoïde d'interférence qui intervient comme élément directeur dans la détermination des nappes d'interférence de deux trains d'ondes de même période. Enfin, si l'on mesure les distances en rayons de l'ellipsoïde, les formules analytiques conservent exactement la même forme pour les systèmes mobiles que pour les systèmes en repos.

Ces résultats étant de simples conséquences de l'équation de la propagation des ondes sont applicables dans la mesure où l'équation considérée représente exactement les phénomènes observés. Ils s'étendent aussi bien au son qu'à la lumière. Ils cessent d'être applicables dès que le mouvement de la source produit sur le milieu une action dynamique détruisant l'isotropie.

Les calculs auxquels conduit cette étude sont exactement les mêmes que ceux de la théorie de la relativité restreinte, mais on n'a besoin d'aucun principe nouveau ni même d'aucune hypothèse nouvelle. Si l'on ne perd pas de vue le point de départ, on n'éprouve aucune tentation d'étendre les résultats obtenus à des phénomènes pour lesquels ils ne sont pas démontrés. L'analyse fait voir nettement qu'on n'a pas le droit de déduire de l'expérience de Michelson l'égalité des vitesses relatives de propagation dans tous les sens, et met ainsi en évidence l'erreur de raisonnement qui a été l'origine de la théorie d'Einstein.

Je ne m'occupe pas dans ce premier travail de la théorie de la relativité généralisée qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

CHAPITRE I.

LE TEMPS.

1. Pour discuter valablement en matière scientifique, il est nécessaire d'être d'accord sur le sens des mots. Sans cette précaution élémentaire, toute discussion est vaine.

Les symboles du langage n'ont par eux-mêmes aucune signification et l'on n'est généralement pas très sûr que les mêmes formules représentent les mêmes idées chez deux personnes différentes. Les définitions verbales peuvent évidemment déterminer le sens de certains mots, mais c'est toujours en les ramenant à d'autres termes dont la signification est supposée antérieurement connue. En remontant ainsi de proche en proche, on arrive nécessairement à un ensemble de symboles fondamentaux dont la signification ne peut pas être définie par d'autres mots. Nous reconnaissons cependant que l'accord existe sur le sens de ces symboles en constatant qu'on les applique de la même manière aux mêmes faits d'expérience.

Il est d'ailleurs évident que nous avons appris au début à nous servir du langage en attachant constamment le même mot à la considération d'objets ou de faits similaires. L'association constante du signe et de la chose fait que l'audition du signe verbal rappelle à la mémoire l'image de faits expérimentaux antérieurement perçus.

Les définitions initiales se réduisent donc essentiellement à la constatation du rapport qui existe entre les mots fondamentaux et les faits d'expérience commune. D'où il résulte que la méthode la plus sûre, pour reconnaître si l'on est d'accord sur le sens des termes essentiels d'une théorie, consiste à remonter à ce fonds commun d'observations expérimentales.

Certains logiciens, se plaçant au point de vue de la logique formelle, considèrent les mots comme de simples symboles préalablement vidés de tout sens concret. Le raisonnement consiste alors à combiner ces symboles suivant des règles déterminées, comme des symboles algébriques. Les questions de forme ont leur utilité, comme les règles du calcul algébrique, mais elles ne constituent que l'une des faces du problème. En matière scientifique, il faut toujours partir de l'expérience et y revenir.

Un calcul algébrique peut être exact et conduire néanmoins à des conclusions fausses. Tel sera le cas, par exemple, si l'on désigne par le même symbole deux quantités différentes : erreur assez commune chez des débutants.

C'est précisément l'erreur fondamentale de la théorie d'Einstein. La confrontation avec l'expérience peut seule la révéler.

2. *Le temps dans la Mécanique classique.* — Dans son exposé des principes de la Mécanique, H. Hertz (1) commence par un ensemble de considérations qu'il suppose étrangères à toute expérience et basées uniquement sur les lois de l'intuition interne au sens de Kante. Il y a là évidemment une grande part d'illusion, puisque les mots n'acquièrent de sens transmissible que par leur correspondance avec les faits expérimentaux. La Science n'a pas à se préoccuper des idées de Kant sur le temps et l'espace, auxquelles certains philosophes accordent peut-être beaucoup trop d'importance.

Les considérations métaphysiques n'interviennent ni dans les calculs ni dans l'interprétation des résultats. Ce qu'il importe de connaître, c'est le procédé pratique, effectivement employé pour attacher à la considération du temps une valeur numérique précise sur laquelle tous les observateurs soient d'accord.

Les chronomètres ne sont que des instruments auxiliaires de comparaison dont les indications sont valables seulement pour une durée limitée. On règle les chronomètres d'après les observations astronomiques. La détermination pratique du nombre t revient en définitive à une mesure d'angle horaire. L'observation du mouvement diurne nous fournit donc une sorte de chronomètre commun valable pour tous les observateurs terrestres. Il est prématuré de nous occuper des autres.

3. *L'isochronisme et la simultanéité.* — La correspondance entre

(1) *Die Prinzipien der Mechanik*, 1894, p. 53.

le temps et un phénomène physique quelconque a pour base la notion de simultanéité. L'analyse de cette notion ne présente aucune difficulté quand il s'agit de phénomènes se produisant à proximité de l'observateur. Pour les phénomènes qui se produisent à distance, la question nécessite un certain examen, car c'est à ce sujet que nous observons la première divergence entre le langage relativiste et le langage vulgaire. Tout le monde sait que lorsqu'on tire un coup de canon, un observateur éloigné remarque un intervalle de temps très sensible entre la vue de l'éclair et l'audition du son. Ces deux phénomènes sont pourtant simultanés pour un observateur voisin. Il y a donc lieu de distinguer pour deux phénomènes la simultanéité de production et la simultanéité de perception, quand il s'agit d'observateurs éloignés. Il reste à examiner comment nous établissons la correspondance de simultanéité de production, au sens ordinaire du mot, entre des phénomènes qui se passent en des lieux différents.

Un phénomène se passe à New-York (City Hall), le 7 octobre 1921, à $8^h\,9^m\,23^s$, temps solaire moyen du méridien du lieu; quelle est *au même moment* l'heure de l'Observatoire de Paris? L'angle dièdre compris entre les plans méridiens des deux lieux est la différence de longitude. Elle est de $76^\circ\,20'\,38''$, correspondant à une différence en temps de $5^h\,5^m\,23^s$. L'heure du méridien de Paris qui correspond à l'événement considéré observé à New-York est $13^h\,14^m\,46^s$.

La détermination de cette correspondance nécessite simplement la mesure de la différence de longitude, c'est-à-dire d'un angle dièdre. Une fois qu'on a déterminé les éléments nécessaires, on peut donc reconnaître la correspondance de simultanéité entre des événements qui se passent en des lieux différents, et cela avec une précision comparable à celle des mesures physiques les plus délicates.

Il est évident toutefois que la détermination de la simultanéité ou de l'ordre de succession, dans la production des phénomènes, nécessite la connaissance d'un ensemble d'éléments qui fait quelquefois défaut. L'ordre de perception peut différer d'un observateur à un autre et différer par conséquent de l'ordre de production. Tout cela est bien connu. Mais l'incertitude qui règne sur l'époque règne également sur la position, et elle est du même ordre. Le fait qu'on ignore une date n'est pas un motif suffisant pour déclarer que la notion de date n'existe pas. Toutes les prédictions de phénomènes astronomiques se résolvent par des questions de simultanéité.

4. *Correspondance des mouvements.* — Si l'on veut rattacher la détermination pratique du temps à une notion plus générale, on peut remarquer que la correspondance de simultanéité entre les positions d'un mobile, d'une part, et les indications d'un chronomètre, d'autre part, se ramène à une correspondance entre deux mouvements.

L'un d'entre eux est un *mouvement type* auquel on compare tous les autres. Supposons que la position du mobile qui définit le mouvement type soit déterminée à l'aide d'un paramètre t. On pourra évidemment déterminer la correspondance de simultanéité en employant le même paramètre pour l'étude des autres mouvements.

5. *Le temps dans l'expression des lois physiques.* — Lorsqu'on n'a en vue que cette simple correspondance de simultanéité, il est évident qu'on dispose d'une grande latitude dans le choix du paramètre. On pourrait par exemple employer indifféremment l'angle horaire du Soleil vrai ou celui du Soleil moyen. Il n'en est plus de même lorsque le temps doit intervenir dans l'énoncé d'une loi physique. Une fonction linéaire de l'angle horaire du Soleil moyen n'est pas linéaire par rapport à l'angle horaire du Soleil vrai. La notion de mouvement uniforme qui intervient dans l'énoncé du principe d'inertie suppose donc une graduation déterminée du temps. L'étude des conséquences de ce principe doit indiquer si l'on peut prendre avec une précision suffisante l'angle horaire du Soleil moyen comme graduation du temps ou s'il y a lieu d'y apporter quelques corrections.

A ce sujet, on peut faire une remarque : si l'on prenait l'angle horaire du Soleil vrai pour graduer le temps, il faudrait remplacer l'énoncé ordinaire du principe de l'inertie par un autre énoncé d'après lequel la vitesse d'un point mobile, soustrait à toute action extérieure, serait une fonction variable du temps. Les lois de la Mécanique ne sont indépendantes du temps que pour certains choix du paramètre.

6. *Isochronisme dans la théorie d'Einstein.* — Dans la théorie d'Einstein la définition du temps repose sur d'autres considérations. Chaque observateur est supposé muni d'un chronomètre *idéal* auquel il rapporte les phénomènes de son entourage. La définition de la correspondance de simultanéité ne présente de difficulté que pour les observations qui s'effectuent en des lieux différents. Einstein imagine le procédé suivant : Deux observateurs A et B sont entraînés dans le mouvement de translation d'un système d'axes par rapport auquel on puisse appliquer les principes de la Mécanique de Newton. A un instant t_A marqué par le chronomètre de A, on lance de ce point un signal lumineux qui parvient en B à l'époque t_B marqué par le chronomètre de B. Il s'y réfléchit sur un miroir et revient en A à l'époque t'_A. Les deux chronomètres sont dits isochrones *par définition*, si l'on a

$$t_B - t_A = t'_A - t_B, \qquad \text{d'où} \qquad t_B = \frac{t_A + t'_A}{2}.$$

On admet en outre que le rapport $\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A}$ est une constante universelle V, représentant la vitesse de la lumière dans le vide.

L'heure d'un phénomène dans le système de référence considéré est l'heure marquée par un chronomètre idéal situé au lieu où se produit le phénomène. Deux phénomènes sont dits *simultanés* dans le système S s'ils correspondent à des indications identiques des chronomètres placés dans les lieux où ils se produisent. Après avoir ainsi défini la simultanéité, Einstein fait observer que deux chronomètres qui paraissent isochrones dans un système de référence ne le sont plus dans un autre système S′ en mouvement de translation uniforme par rapport au premier, et par conséquent les conditions de simultanéité diffèrent d'un système à l'autre.

Supposons en effet une barre AB qui se déplace uniformément par rapport à S avec une vitesse v dans sa propre direction. A l'époque t_A, on lance un signal lumineux qui parvient en B à l'époque t_B et, après réflexion, retourne en A à l'époque t'_A. Les heures t_A, t_B, t'_A étant marquées par les chronomètres du système S, on a

$$t_A - t_B = \frac{AB}{V - v}, \qquad t'_A - t_B = \frac{AB}{V + v}.$$

En vertu du déplacement de la barre, ils ne satisfont pas à la condition

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Mais, si l'on considère le système S′ qui participe au mouvement de translation de la barre par rapport au système S, les conditions de l'expérience devront être exactement les mêmes que si le système S′ était au repos. Soient donc θ_A, θ_B, θ'_A les temps analogues à t_A, t_B, t'_A, mais marqués par les chronomètres d'observateurs liés au système S′. La condition d'isochronisme dans le système S′ devra s'exprimer par l'égalité

$$\theta_B - \theta_A = \theta'_A - \theta_B.$$

De plus, la mesure de la longueur AB dans le système S′ devra également satisfaire à la condition

$$\frac{2AB}{\theta'_A - \theta_A} = V,$$

V ayant la même valeur *numérique* pour S et pour S′.

Les nombres θ sont donc différents du nombre t, et des valeurs égales de θ ne correspondent pas à des valeurs égales de t.

La définition de l'isochronisme donnée par Einstein est inspirée par l'idée que la vitesse de la lumière doit être une constante universelle, la même dans toutes les directions et la même aussi pour les systèmes S et S′ qui se déduisent l'un de l'autre par un mouvement de translation uniforme.

Des conditions qu'il s'est imposées, Einstein déduit les relations qui doivent exister entre les coordonnées et les temps, envisagés dans les deux systèmes, pour que ces conditions soient vérifiées. Il obtient ainsi les formules de transformation de Lorentz.

Supposons, pour simplifier les calculs, que les axes Ox et O$'x'$ des deux systèmes coïncident, l'origine O$'$ du système S$'$ décrivant Ox avec la vitesse v. Soient x, y, z, t les coordonnées et le temps du premier système, x', y', z', t' les quantités correspondantes du second; soit en outre c la vitesse de la lumière. Les formules de transformation de Lorentz sont, dans cette hypothèse,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\beta}(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned} \right.$$

On a posé

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Je m'abstiens de reproduire la démonstration d'Einstein. Nous retrouverons plus loin les mêmes résultats par une autre méthode et avec une interprétation précise du paramètre t'.

On sait que les formules de Lorentz sont réversibles. Si l'on résout les équations (1) par rapport à x, y, z, t, on a

$$x = \frac{1}{\beta}(x' + vt'), \qquad t = \frac{1}{\beta}\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right),$$
$$y = y', \qquad z = z'.$$

7. *Comparaison de la définition d'Einstein avec les déterminations expérimentales.* — La définition de l'isochronisme adoptée par Einstein et la condition posée par lui de la conservation de la *valeur numérique* de la vitesse de la lumière entraînent donc cette conséquence nécessaire : le temps n'est pas un élément indépendant du système de référence; il n'a pas, relativement aux changements de coordonnées, le caractère invariant qu'on lui attribue généralement.

Nous nous trouvons, par suite, en face de deux notions différentes : celle du temps vulgaire, commun à tous les observateurs quel que soit le déplacement relatif des uns par rapport aux autres, et celle du temps d'Einstein, qui varie avec le système de référence. On est porté à se demander laquelle de ces notions est la plus correcte. Si l'on remonte aux conditions expérimentales réelles ou supposées, on reconnaît immédiatement qu'il s'agit de deux choses différentes et non pas de deux notions différentes d'une même chose. Nous avons fait voir en effet que le temps vulgaire, temps sidéral ou temps solaire moyen, est déterminé par l'observation d'une sorte de chronomètre universel, le même pour tous les observateurs. Dans l'hypothèse d'Einstein, au contraire, chaque observateur a un chronomètre *idéal* et la correspondance d'isochronisme entre deux chronomètres différents se détermine uniquement par la méthode des signaux lumineux. Les conditions ne sont pas les mêmes, et il n'y a aucune raison d'admettre que les nombres déterminés par les deux méthodes soient identiques.

Il est intéressant de rapprocher de cette discussion une argumentation de Pascal à propos des diverses définitions du temps.

En la répétant presque textuellement, nous pouvons dire : « Ensuite de cette définition, il y aura deux choses qu'on appellera du nom de *temps :* l'une est celle que tout le monde entend naturellement par ce mot, et que tous ceux qui parlent notre langue nomment par ce terme; l'autre sera le paramètre t d'Einstein, et que les relativistes désignent aussi sous ce nom, suivant une nouvelle convention. Il faudra donc éviter les équivoques et ne pas confondre les conséquences. Car il ne s'ensuivra pas de là que la chose qu'on entend naturellement par le mot *temps*, soit en effet le paramètre d'Einstein. Il a été libre de nommer ces deux choses de même, mais il ne le sera pas de les faire convenir de nature aussi bien que de nom. »

Une grande partie de la théorie de la relativité restreinte repose sur une équivoque constante qui consiste à appliquer au temps solaire moyen des résultats qui sont applicables seulement au pseudo-temps d'Einstein.

8. *Critique de la définition de l'isochronisme.* — La notion d'iso-

chronisme et de simultanéité étant l'origine de toute l'équivoque relativiste, il est indispensable d'insister sur le caractère artificiel et arbitraire des définitions d'Einstein. Il y a des notions que l'on altère en leur appliquant les règles des définitions logiques. Ce sont celles dont l'idée résulte de l'observation concordante d'une grande multiplicité de faits naturels, et qui finissent par nous être tellement familières que nous n'avons plus le souvenir de les avoir acquises. Telle est celle de la simultanéité qui se détermine pratiquement par un ensemble d'observations de formes diverses. La méthode supposée par Einstein n'est jamais appliquée dans les conditions qu'il indique. Les signaux télégraphiques peuvent être utilisés évidemment pour le problème des longitudes, mais seulement dans la mesure où les erreurs qui pourraient en résulter sont inférieures aux erreurs de mesures provenant de l'application des autres méthodes. Les conclusions qu'en tire Einstein sont basées précisément sur la considération de quantités dont l'ordre de petitesse est celui de ces erreurs. Le problème des longitudes pourrait se poser pour une sphère de dimensions beaucoup plus grandes que celles de la Terre, pour laquelle, par conséquent, les résultats fournis par la méthode des signaux lumineux devraient subir une correction très appréciable. Les chronomètres idéaux d'Einstein n'ont aucune existence réelle. Comme ce sont des produits de pure imagination, l'auteur a pu les doter de toutes les qualités qu'il lui a plu, car il en disposait comme de son ouvrage.

Quand on reste en un même lieu, on peut toujours remplacer le temps solaire moyen par un nombre proportionnel, comme par exemple le temps sidéral, et la définition d'Einstein ne présente aucun inconvénient. Il n'en est plus de même dans les déplacements. La formule de transformation de Lorentz suppose une loi de décalage des indications fournies par les chronomètres mobiles. Il est évident qu'il faut une robuste crédulité pour admettre que la marche des chronomètres soit régie par cette loi. Nous verrons d'ailleurs que le décalage en question se présente dans l'étude des systèmes ondulatoires avec une signification toute différente de celle que suppose Einstein.

Il y a une autre critique à formuler à propos de la confusion établie entre le pseudo-temps d'Einstein et le temps ordinaire. Elle ne concerne pas seulement la différence des valeurs numériques, ce qui serait une question secondaire : elle se rapporte au caractère même de la notion de temps. Les astronomes prennent les précautions les plus minutieuses pour rendre rigoureusement comparables entre elles les observations chronométriques des différents observatoires. Les nombres directement mesurés subissent des corrections diverses destinées à éliminer les circonstances purement locales de l'observation. De cette façon les nombres calculés présentent à l'égard des changements de coordonnées ou d'observateur un véritable caractère invariant. Or, c'est précisément à ce caractère invariant qu'il faut attribuer le rôle spécial du temps en Mécanique. Une durée est une sorte d'invariant intégral. Dans l'expression du théorème des forces vives, on considère le rapport de deux invariants.

Le pseudo-temps d'Einstein ne présentant pas le même caractère, il est abusif de lui conserver le même rôle dans l'expression des lois de la Mécanique. Il y a une conséquence plus grave encore : d'après le raisonnement d'Einstein la constance de la vitesse de la lumière ne serait pas une loi naturelle, une relation entre des faits observés. Elle résulterait simplement de la *convention* arbitraire d'après laquelle les observateurs règlent la correspondance de leurs chronomètres.

9. *Le temps vulgaire et l'intervalle relativiste.* — Dans la théorie de la relativité, l'élément qui jouit des mêmes propriétés d'invariance que le temps ordinaire est la quantité désignée sous le nom d'*intervalle* ou *temps propre* de Minkowski.

L'intervalle élémentaire $d\sigma$ est défini par l'égalité

$$d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Il reste inaltéré par la transformation de Lorentz. Dans le mouvement d'un point matériel, l'intégrale $\int d\sigma$, évaluée entre deux positions ou deux états du mobile est également indépendante du système de référence. Cette propriété correspond au caractère invariant de la durée dans la Mécanique classique.

Si l'on établit entre deux mouvements une correspondance exprimée par une relation entre les intervalles, cette correspondance subsistera donc quand on effectuera un changement de système de référence représenté par une transformation de Lorentz.

Supposons que l'on prenne comme mouvement type un mouvement observable dans les différents systèmes, et que la correspondance de simultanéité soit exprimée par une relation entre les intervalles des divers points mobiles et l'intervalle correspondant du mouvement type : on se trouvera dans un cas analogue à celui de la Mécanique classique. Dans la théorie de la relativité généralisée, c'est en effet l'intervalle qui joue le rôle du temps vulgaire, mais sans en porter le nom.

Les conclusions d'Einstein, en ce qui concerne le temps, ne résultent pas du principe de relativité; elles découlent de la convention spéciale qui sert de base à sa définition de l'isochronisme, et nous avons vu que cette convention est en contradiction avec la détermination de la simultanéité au sens ordinaire du mot. Il aurait pu supposer que les observateurs se déplacent dans un espace jalonné de chronomètres et que chacun d'eux, au lieu de consulter son propre chronomètre idéal, observe l'indication du chronomètre auprès duquel il passe. Ces indications étant indépendantes de la vitesse de l'observateur par rapport à l'espace jalonné, il est évident que les conclusions d'Einstein auraient dû être différentes. Cette hypothèse, sous son apparence paradoxale, est peut-être plus près de la réalité que celle d'Einstein, car les phénomènes astronomiques fournissent précisément une sorte de jalonnage chronométrique de l'espace. On peut rattacher à cette conception la méthode employée en mer pour la détermination des longitudes par l'observation des distances lunaires.

Nous allons voir cependant que l'étude des phénomènes d'ondulations conduit à l'introduction d'un paramètre analogue au temps local de Lorentz et jouissant des mêmes propriétés au point de vue des transformations. Mais ce paramètre n'est pas le temps solaire moyen.

CHAPITRE II.

LES ONDES A PÔLE MOBILE.

10. L'équation de la propagation des ondes dans un milieu homogène et isotrope se ramène, en coordonnées rectangulaires, à la forme suivante :

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0.$$

La constante c est la vitesse de propagation, qui dépend de la constitution du milieu, la variable t est censée désigner le temps ordinaire.

Cette équation admet des intégrales à pôle fixe que l'on obtient facilement par la méthode de Poisson. J'en rappelle sommairement le calcul.

Cherchons, par exemple, les intégrales admettant un pôle fixe à l'origine des coordonnées. Nous posons

$$r^2=x^2+y^2+z^2,$$

et nous sommes conduits à étudier les intégrales qui dépendent seulement de r et de t. Elles satisfont à la célèbre équation d'Euler et de Poisson dont M. Darboux a fait une étude approfondie :

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=0.$$

Un calcul facile la ramène à la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rV)=0;$$

d'où

$$rV=f(r-ct)+\varphi(r+ct),$$

f et φ désignant des fonctions arbitraires des variables caractéristiques $r-ct$ et $r+ct$.

On a donc

$$V = \frac{f(r+ct) + \varphi(r-ct)}{r}.$$

Cette intégrale admet les singularités caractéristiques définies par la forme des fonctions f et φ et, en outre, le pôle fixe $r = 0$. Cette dernière singularité peut disparaître pour certaines combinaisons des fonctions arbitraires. Si l'on a, en particulier,

$$f(r+ct) = \frac{1}{r+ct}, \qquad \varphi(r-ct) = \frac{1}{r-ct},$$

l'intégrale V se ramène à l'intégrale fondamentale (¹)

$$\frac{1}{r^2 - c^2 t^2}.$$

11. Considérons maintenant le cas d'un pôle qui se déplace le long de l'axe Ox avec la vitesse uniforme v. Pour ramener le problème de l'onde à pôle mobile à celui de l'onde à pôle fixe, il est naturel d'effectuer un changement de coordonnées en posant $x = x_1 + vt$.

L'équation aux dérivées partielles (3) devient alors

(5) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - 2v\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial t} + v^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}\right).$$

L'équation (5) contient un terme en $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial t}$. On le fera disparaître par une nouvelle transformation effectuée sur la variable t. Supposant $v^2 < c^2$, nous avons

(6) $$\theta = \beta t - \frac{v x_1}{c^2 \beta},$$

β désignant le facteur de Lorentz, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Prenant v comme nouvelle variable au lieu de t, nous ramenons

(¹) HADAMARD, *Sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1904 et 1905).

l'équation (5) à la forme symétrique

$$(7) \qquad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0.$$

Par une dernière transformation

$$(8) \qquad x'=\frac{x_1}{\beta}=\frac{x-vt}{\beta},$$

nous retrouvons enfin la forme de l'équation primitive

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0.$$

Il est visible que les formules (6) et (8) définissent la transformation de Lorentz. La chose est évidente pour la formule (8). Dans la formule (6), quand on remplace x_1 par sa valeur $x_1=x-vt$, on trouve

$$(10) \qquad \theta=\beta t-\frac{v(x-vt)}{c^2\beta}=\frac{1}{\beta}\left(t-\frac{vx}{c^2}\right).$$

Intégrons l'équation (9) par la méthode de Poisson en posant

$$r'=\sqrt{x'^2+y^2+z^2};$$

nous avons la forme générale de l'intégrale cherchée, avec deux fonctions arbitraires

$$(11) \qquad V=\frac{f(r'-c\theta)+\varphi(r'+c\theta)}{r'}.$$

12. *Module et paramètre de rayonnement.* — Le dénominateur r', exprimé en fonction des variables primitives, prend la forme

$$r'=\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{\beta^2}+y^2+z^2}.$$

Nous donnerons à cette quantité le nom de *module* de l'intégrale V.

Les points qui correspondent à une même valeur du module dans le système mobile sont situés sur la surface d'un ellipsoïde de révolution ayant pour axe Ox et pour centre le pôle mobile.

Cette surface est aplatie proportionnellement au facteur de contraction de Lorentz.

Les arguments caractéristiques $v' \pm c\,\theta$, dont dépendent les fonctions arbitraires, correspondent à deux séries d'ondes; les ondes positives qui se dilatent concentriquement autour du pôle et les ondes négatives qui se contractent au contraire en se rapprochant de ce point. Pour les unes, le pôle constitue un foyer d'émission et, pour les autres, un foyer d'absorption.

Dans le mouvement de l'onde, la variation du module est toujours égale à celle de l'argument $c\theta$, en valeur absolue. Nous poserons dans la suite $c\theta = u'$ et nous donnerons à cette quantité le nom de *paramètre de rayonnement*.

Cette désignation semble traduire assez exactement le rôle physique de la variable u'.

L'expression du paramètre de rayonnement ne dépend que de la constante c et de la vitesse d'entraînement du système mobile, cette vitesse étant considérée en grandeur et en direction.

Nous désignerons de même par $u = ct$ le paramètre de rayonnement du système d'axes fixes.

13. *Ondes ellipsoïdales d'interférence.* — Considérons le cas d'un *doublet* constitué par la juxtaposition d'un foyer d'émission et d'un foyer d'absorption correspondant à des ondes périodiques égales.

Soit, par exemple,

$$f = \mathrm{A} \sin \frac{2\pi(r' - u' + \alpha)}{\lambda}, \qquad \varphi = \mathrm{A} \sin \frac{2\pi(r' + u' + \beta)}{\lambda},$$

A, α, β, λ désignant des constantes.

La valeur correspondante de V prend la forme suivante :

$$\mathrm{V} = \frac{2\mathrm{A}}{r'} \sin 2\pi \frac{r' + \dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\lambda} \cos 2\pi \frac{\left(u' + \dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\lambda}. \tag{12}$$

Cette forme met en évidence une série de surfaces d'interférence stationnaires dans le système mobile.

La fonction V s'annule quel que soit le paramètre de rayonnement aux points où le module vérifie la condition

$$r' = n\frac{\lambda}{2} \qquad (n \text{ entier}).$$

En ces points il y a interférence.

Nous donnerons pour cette raison le nom d'*ondes d'interférence* aux ondes ellipsoïdales qui correspondent aux valeurs constantes du module.

Si l'on considère un système d'axes mobiles de mêmes directions que les axes fixes et ayant pour origine le pôle de l'onde, la surface de l'onde d'interférence sera représentée par l'équation

$$\frac{x_1^2}{\beta^2} + y_1^2 + z_1^2 = u^2 = \text{const.}$$

14. *Signification physique de la transformation de Lorentz.* — Nous appellerons *ellipsoïde d'interférence du milieu mobile*, la surface particulière correspondant à $u = 1$.

En vertu de la contraction de l'onde d'interférence dans le sens du déplacement du pôle, les longueurs d'onde d'interférence varient avec la direction. Mais si nous évaluons les distances en rayons de l'ellipsoïde, ou plus exactement si nous les rapportons, dans chaque direction, à une unité qui varie proportionnellement au rayon de l'ellipsoïde d'interférence correspondant à cette direction, les axes de l'ellipsoïde seront mesurés par des nombres égaux. Ce changement d'unité équivaut à la transformation

$$\frac{x_1}{\beta} = x', \qquad y_1 = y', \qquad z_1 = z'.$$

Nous avons maintenant une interprétation physique très simple et très précise des transformations de Lorentz.

Désignons respectivement par u et u' les paramètres de rayonnement pour les ondes attachées aux deux systèmes de référence, et posons $\frac{v}{c} = \alpha$. Les formules de Lorentz prennent alors la forme suivante :

$$x' = \frac{1}{\beta}(x - \alpha u), \qquad u' = \frac{1}{\beta}(u - \alpha x),$$
$$y' = y, \qquad z' = z, \qquad \beta = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Dans chaque système, les distances rectilignes sont mesurées en rayons d'ellipsoïde d'interférence relatif au système considéré. Nous donnerons à ces valeurs des coordonnées le nom de *variables de Lorentz.*

15. *Déphasage* ([1]) *du paramètre de rayonnement.* — Les valeurs du paramètre de rayonnement sont simplement proportionnelles au temps dans le système fixe. Dans le système mobile ces valeurs se propagent ou se déphasent par ondes planes. En exprimant u' en fonction de t et de x, on a

$$u' = \frac{c}{\beta}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage est donc égale à $\frac{c^2}{v}$.

Dans le système de variables x_1, y_1, z, t, relatif à des axes entraînés dans le mouvement de translation du pôle mobile, mais où les longueurs conservent leur signification ordinaire, on a

$$u' = \frac{c}{\beta}\left(\beta^2 t - \frac{vx_1}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage est égale à $\frac{c^2\beta^2}{v} = \frac{c^2}{v} - v$, résultat qui concorde naturellement avec le premier. Enfin, si l'on exprime u' à l'aide des variables t et x' on a

$$u' = c\left(\beta t - \frac{vx'}{c^2}\right).$$

La vitesse de déphasage mesurée en longueurs d'onde d'inter-

([1]) Expression employée par M. VARCOLLIER, *Les déplacements dans les champs de vecteurs et la Théorie de la Relativité* (*Revue générale des Sciences*, 1918, p. 101 à 114 et 135 à 146).

férence et en temps est égale à $\frac{c^2\beta}{v}$. Elle est la moyenne géométrique des deux autres.

16. *Périodes.* — Considérons une fonction périodique du paramètre de rayonnement; soit U' la période. La période correspondante rapportée au temps ne sera pas la même pour les deux systèmes d'axes. Soit T la période rapportée au système fixe, prise par conséquent dans l'hypothèse x = const. On a

$$T = \frac{U'\beta}{c}.$$

La période T_1 rapportée au système mobile, prise dans l'hypothèse x_1 = const., sera donnée par la formule

$$T_1 = \frac{U'}{c\beta}.$$

Le rapport des périodes $\frac{T}{T_1}$ est égal à

$$\beta^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Le produit des périodes TT_1 est égal à $\frac{U'^2}{c^2}$. Le rapport $\frac{U'}{c}$ serait la période rapportée à la variable θ défini par l'équation (10) et correspondant au pseudo-temps d'Einstein dans le cas des ondulations lumineuses.

17. *Ondes de progression.* — Au lieu de nous placer au point de vue des interférences, considérons le lieu des points atteints à une époque t par une perturbation instantanée issue du pôle mobile à une époque antérieure t_0. Le problème revient à chercher le lieu des points pour lesquels l'argument caractéristique, $r' - u'$, de l'onde positive a une valeur constante donnée à l'époque considérée t. La valeur initiale est égale à

$$u'_0 = \frac{\beta}{c}\left(t_0 - \frac{vx_0}{c^2}\right),$$

où l'on peut supposer d'ailleurs $x_0 = vt_0$.

On devra donc avoir, à l'époque t,

$$r' - u' = - u'_0$$

ou

$$r'^2 = (u' - u'_0)^2.$$

On en tire, par un calcul facile,

$$(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t - t_0)^2.$$

Le lieu est donc, comme il fallait s'y attendre, une sphère ayant pour centre le point d'origine de la perturbation et dont le rayon croît proportionnellement à la durée. Ce résultat est le même que si le pôle était fixe. Pour distinguer ces ondes ordinaires des ondes d'interférence, nous leur donnerons le nom d'*ondes de progression*. Dans le cas d'un pôle fixe, les ondes d'interférence coïncident avec les ondes de progression.

18. *Caractère analytique des fonctions qui représentent le module et le paramètre de rayonnement de l'onde mobile.* — Quand on introduit le paramètre de rayonnement au lieu du temps, l'équation aux dérivées partielles de la propagation des ondes prend la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0.$$

Les multiplicités caractéristiques sont définies par l'équation du premier ordre

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Nous désignerons par D (φ) le premier membre de cette équation. Le module r' et le paramètre de rayonnement u' satisfont aux relations suivantes :

$$D(r') = 1, \qquad D(u') = -1,$$
$$\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial r'}{\partial z}\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial r'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} = 0.$$

La dernière de ces relations, suivant une notation fréquemment employée, pourrait se représenter par

$$D(r', u') = 0.$$

Il est facile de déduire de ces résultats que les fonctions $r' - u'$ et $r' + u'$ satisfont à l'équation aux dérivées partielles des multiplicités caractéristiques.

En rattachant ainsi la transformation de Lorentz à la théorie des caractéristiques et au mouvement de propagation des ondes à pôle mobile, on voit comment le problème pourrait être généralisé pour des mouvements quelconques. Les difficultés que l'on rencontre sont d'ordre purement analytique, de même nature que pour tous les problèmes relatifs à l'intégration des équations aux dérivées partielles.

19. *Extension au cas des vitesses quelconques.* — Nous avons constamment supposé que la vitesse de translation v est moindre que la vitesse de propagation c. Cette condition restrictive n'est pas obligatoire. Pour des vitesses supérieures à c, les ondes d'interférence sont hyperboliques et le module s'annule sur la surface d'un cône réel. Le coefficient de contraction de Lorentz devrait être remplacé par $\sqrt{\alpha^2 - 1}$; mais, à part ce détail, le calcul est identique. Le cas de $v = c$ est un cas singulier qui nécessiterait une étude spéciale.

Le fait que la transformation de Lorentz peut se présenter dans l'étude des interférences de tout système ondulatoire montre suffisamment que les conclusions qu'on a cru pouvoir en tirer dans le cas spécial de la lumière ne sont pas toutes fondées.

Les théories mathématiques n'ont d'ailleurs aucun pouvoir mystérieux pour régir les phénomènes. La prétention d'Einstein d'édicter *une condition restrictive à laquelle les lois de la nature doivent* SE SOUMETTRE est difficile à admettre.

Les opérations analytiques n'ont ni la signification ni la portée qu'on leur attribue ainsi. Ce ne sont pas les faits qui se plient à nos formules; ce sont nos formules qui doivent s'adapter à l'observation, et nous ne pouvons avoir la prétention d'attribuer au résultat de nos calculs une précision supérieure à celle des données expérimentales sur lesquelles ils sont fondés.

20. *Systèmes homogènes non isotropes.* — Le fait que les équations de Maxwell conservent leur forme par les transformations de Lorentz semble indiquer que les ondes d'interférence et le paramètre de rayonnement ont une assez grande importance dans l'étude des phénomènes optiques et électromagnétiques, lorsque l'on a à considérer des foyers mobiles. Au point de vue simplement analytique, leur considération nous permet en outre une généralisation facile de nos résultats. Nous pouvons en effet envisager le cas beaucoup plus général de la propagation des ondes dans un milieu homogène non isotrope. Si l'on prend toujours l'ellipsoïde d'interférence comme quadrique directrice pour la mesure des distances, comme nous l'avons indiqué, les équations conservent exactement la même forme que pour les systèmes isotropes. Les calculs et l'expression même de l'intégrale restent identiques. Nous aurons toujours un module elliptique r et un paramètre de rayonnement u, fonction linéaire du temps et des coordonnées.

L'anisotropie des ondes ne peut être révélée que par des mesures faites avec des instruments qui ne participent pas à la déformation apparente des ondes. Si les longueurs sont évaluées en rayons de l'ellipsoïde d'interférence, toute distinction disparaît entre les systèmes isotropes ou anisotropes.

Nous arrivons donc à un résultat d'un très grand intérêt qui explique le rôle de la théorie de la relativité restreinte dans l'étude intrinsèque des systèmes ondulatoires. On ne peut avoir la notion du déplacement du foyer dans le milieu que par la comparaison avec un autre phénomène.

21. *Remarque sur l'expérience de Michelson.* — Dans l'expérience de Michelson, les phénomènes d'interférence sont observés à l'aide d'instruments réputés rigides. On ne se trouve donc pas dans le cas du phénomène homogène dont nous venons de parler. L'étude de l'expérience peut être facilitée dans une certaine mesure par les résultats que nous avons déjà établis.

La discussion ordinaire est évidemment défectueuse et pourrait laisser subsister quelques doutes sur la validité de la conclusion. Nous l'admettrons cependant comme exacte. Les conséquences en sont intéressantes, mais n'ont aucun rapport avec la théorie d'Einstein.

L'expérience devait mettre en évidence l'aplatissement des ondes d'interférence. Les résultats obtenus tendent au contraire à démontrer que, dans les conditions et les limites de l'observation, l'onde d'interférence est rigoureusement sphérique, au sens physique du mot, les mesures étant faites avec des instruments terrestres.

Le module r désigne alors une véritable distance. L'équation de la multiplicité caractéristique à quatre variables

$$v^2 = (u - u_0)^2,$$

interprétée en supposant $u = \text{const.}$, donne l'onde d'interférence que nous venons d'envisager. La même équation, interprétée en supposant $t = \text{const.}$, donne une autre quadrique représentant l'onde de progression. Comme le paramètre de rayonnement u est une fonction linéaire des coordonnées, cette quadrique est en général un ellipsoïde de révolution ayant pour foyer le pôle mobile.

Nous arrivons ainsi à un résultat intéressant indiqué par M. Poincaré (1) sous une forme moins générale, retrouvé par M. Ch.-E. Guillaume (2) et correspondant également aux recherches de M. Sagnac (3).

C'est l'onde de progression qui donne la loi de variation des vitesses relatives de propagation. *D'après ce résultat on n'a donc pas le droit de dire que ces vitesses sont égales dans toutes les directions. L'isotropie de l'onde d'interférence n'entraîne pas l'isotropie de l'onde de progression.*

Nous obtenons en même temps une autre conséquence très importante.

---

(1) *Science et Méthode*, p. 239.
(2) *Comptes rendus du Congrès Int. des Math. de Strasbourg*, p. 602.
(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 29.

La forme ellipsoïdale de l'onde de progression ne permet plus de supposer que le champ de propagation soit isotrope dans le domaine restreint où s'effectue l'expérience.

Dans ce domaine *il y aurait donc influence de la Terre sur le champ et, par conséquent, sur la propagation de la lumière.*

Quant à la forme et à la nature de cette influence, le champ des hypothèses est extrêmement vaste. Nous n'en formulerons aucune. La seule conséquence légitime que nous puissions tirer de l'expérience de Michelson, c'est l'isotropie de l'onde d'interférence. Nous n'avons aucun renseignement sur l'expression du paramètre u. Le résultat est d'un très grand intérêt, mais ne présente rien de paradoxal quand on l'examine sans idée préconçue.

Dans nos calculs nous avons supposé que le champ puisse être considéré comme homogène dans le domaine de l'expérience et que les mesures soient effectuées à l'aide d'instruments terrestres.

Pour expliquer le résultat de l'expérience de Michelson, Einstein suppose qu'il existe, outre les observateurs terrestres, d'autres observateurs non entraînés dans le mouvement de la Terre. Ces observateurs seraient munis d'un jeu approprié de règles compressibles et de chronomètres à retardement dont les indications correspondent à celles des instruments terrestres par les formules de Lorentz.

L'intervention de ces personnages hypothétiques ne paraît guère utile dans la question, car nous ne pouvons parler qu'en langage terrestre, de mesures terrestres et d'observateurs terrestres. De plus, dans l'expérience de Michelson, on n'a pas à consulter de chronomètre ni à établir de comparaison avec d'autres chronomètres qui n'existent pas, portés par des observateurs qui n'existent pas davantage. Ce sont des éléments entièrement étrangers à l'interprétation du phénomène.

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE DES SYSTÈMES ONDULATOIRES.

22. La géométrie des systèmes ondulatoires dans un milieu isotrope se ramène à l'étude des transformations de Lorentz considérées au point de vue le plus général. On rencontre dans cette étude des propriétés géométriques d'un très grand intérêt.

Nous avons donné la signification précise des formules de Lorentz indépendamment de toutes considérations de chronomètres métaphysiques ou de règles enchantées.

Étant donnés deux systèmes d'axes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre, il correspond à chacun un ellipsoïde d'interférence et un paramètre de rayonnement. Les longueurs étant supposées mesurées en rayons de l'ellipsoïde d'interférence, nous avons les formules de Lorentz sous la forme normale :

$$x' = \frac{1}{\beta}(x - \alpha u); \qquad u' = \frac{1}{\beta}(u - \alpha x); \qquad y' = y; \qquad z' = z.$$

Comme le facteur $\frac{1}{\beta}$ est supérieur à l'unité, nous posons, en introduisant les fonctions hyperboliques,

$$\frac{1}{\beta} = \operatorname{ch}\varphi, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{sh}\varphi, \qquad \alpha = \operatorname{th}\varphi.$$

Les deux premières formules de Lorentz deviennent

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \quad x \operatorname{ch}\varphi - u \operatorname{sh}\varphi, \\ u' &= -x \operatorname{sh}\varphi + u \operatorname{ch}\varphi. \end{aligned} \right.$$

Par leur forme elles rappellent les formules de la rotation, avec substitution des fonctions hyperboliques aux fonctions circulaires.

On a identiquement

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \equiv u^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Entre les différentielles, il existe une relation semblable :

$$du'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \equiv du^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Désignons par $d\sigma^2$ la valeur commune des deux membres de cette identité. La quantité $d\sigma$ que les relativistes appellent l'intervalle élémentaire est un invariant relativement aux transformations de Lorentz. Inversement, le groupe des transformations qui conserve l'invariant $d\sigma$ constitue le groupe de Lorentz le plus général.

23. *Détermination des transformations du groupe de Lorentz.* — Au point de vue géométrique, il est extrêmement facile d'obtenir la transformation la plus générale conservant la forme $d\sigma$.

On sait que les transformations linéaires à coefficients constants sont les seules qui remplacent une forme quadratique de différentielles à coefficients constants par une autre forme de même nature. Nous n'aurons donc à nous occuper que des transformations linéaires. Nous négligerons même les constantes additives pour nous borner au cas des formes homogènes.

L'équation

$$u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{14}$$

peut être considérée comme représentant en coordonnées homogènes une sphère de rayon égal à l'unité. Toute substitution qui ramènera le premier membre à la forme

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

s'obtiendra en prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Inversement, à tout tétraèdre conjugué correspondra une substitution linéaire jouissant de la propriété demandée.

Des quatre sommets d'un tétraèdre conjugué il y en a un seul qui soit intérieur à la sphère; ce sommet sera le point O', ayant pour coordonnées homogènes $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ dans le nouveau système. Le plan $u' = 0$ sera le plan polaire de O'.

Le trièdre $O' x' y' z'$ devra être conjugué par rapport au cône imaginaire, de sommet O' circonscrit à la sphère. Si l'on veut qu'il soit en même temps trirectangle, il faudra que l'un des nouveaux axes de coordonnées coïncide avec l'axe de révolution OO′ du cône; les deux autres seront seulement assujettis à être perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à OO′. Enfin, pour que la transformation soit réciproque, que le premier système se déduise du second comme le second du premier, avec conservation de l'orthogonalité, il faudra également que l'un des axes du premier système coïncide avec OO′.

Prenons donc cette droite pour axe commun des x et des x'. Soient $u = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$, $z = 0$ les coordonnées homogènes du point O′ dans le premier système d'axes. Le plan polaire P′ de ce point a pour équations dans le premier système $u - \alpha x = 0$, et, dans le second, $u' = 0$. Le plan perpendiculaire à OO′ mené par le point O′ est représenté dans les deux systèmes respectivement par les équations

$$x - \alpha u = 0, \qquad x' = 0.$$

On aura donc, en désignant par λ et μ des coefficients constants,

$$u' = \lambda(x - \alpha x), \qquad x' = \mu(x - \alpha u).$$

Les variables u' et x' s'expriment en fonction homogène de u et de x; les variables y' et z' s'expriment également à l'aide des seules variables y, z, puisque les plans de coordonnées correspondants passent par la même droite OO′.

L'identité proposée

$$u'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = u^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

se divise donc en deux autres :

$$u'^2 - x'^2 = u^2 - x^2, \qquad y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2.$$

De la première on tire

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2}.$$

La seconde exprime que les directions des axes O′ x' et O′ z' se déduisent des axes correspondants du premier système par une simple rotation.

Les conditions d'orthogonalité et de réciprocité ont évidemment restreint le nombre des paramètres dont dépendrait la transformation la plus générale. Le résultat obtenu se traduit par une sorte de rotation hyperbolique pour les variables u et x et une rotation circulaire ordinaire pour les variables y et z. En négligeant cette dernière rotation on a la transformation de Lorentz sous la forme ordinaire.

24. *Le module.* — Le cône circonscrit à la sphère (14) et ayant pour sommet le point O′ serait représenté par l'équation

$$(u - \alpha x)^2 - (1 - \alpha^2)(u^2 - x^2 - y^2 - z^2) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se réduit à l'expression suivante

$$(1 - \alpha^2)\left[\frac{(x - \alpha u)^2}{1 - \alpha^2} + y^2 + z^2\right] = (1 - \alpha^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

où l'on reconnaît, à un facteur près, le carré du module des ondes à pôle mobile.

Tous les éléments de la transformation, y compris le module, sont donc entièrement définis par un point O′ supposé intérieur à la sphère fondamentale considérée.

L'abscisse du plan polaire du point O′ est égale à $\frac{1}{\alpha}$.

Elle représente la vitesse de déphasage du nouveau paramètre de rayonnement u' par rapport à u.

25. *Composition des transformations de Lorentz.* — Ce qu'on appelle dans la théorie de la relativité la composition des vitesses équivaut en réalité à la composition des transformations de Lorentz.

Dans le champ des quatre variables u, x, y, z, un déplacement sera représenté par une variation de ces quantités. Considérons un déplacement infiniment petit du, dx, dy, dz et soit $d\sigma$ l'intervalle correspondant. Posons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

L'égalité qui définit l'intervalle peut s'écrire

$$d\sigma^2 = du^2 - ds^2,$$

ce qui permet de poser, en désignant par φ un argument de fonction hyperbolique :

$$du = d\sigma \operatorname{ch} \varphi,$$
$$ds = d\sigma \operatorname{sh} \varphi.$$

Les composantes dx, dy, dz du déplacement suivant les axes sont de la forme

$$dx = l\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi, \qquad dy = m\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi, \qquad dz = n\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi,$$

les paramètres l, m, n étant liés par la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Le rapport $\frac{ds}{du}$ est assimilé à une vitesse dans la théorie de la relativité; nous l'appellerons une *pseudo-vitesse*. Le temps proprement dit n'intervient pas, en effet, dans la question; comme nous l'avons vu, il n'est pas nécessairement proportionnel au paramètre de rayonnement.

On a

$$\frac{ds}{du} = \operatorname{th} \varphi;$$

les composantes de la pseudo-vitesse suivant les axes sont

$$\frac{dx}{du} = l \operatorname{th} \varphi, \qquad \frac{dy}{du} = m \operatorname{th} \varphi, \qquad \frac{dz}{du} = n \operatorname{th} \varphi.$$

A toute *pseudo-vitesse* de cette forme correspond un point O′ intérieur à la sphère fondamentale définie précédemment, et, à ce point O′ correspond également une transformation de Lorentz.

Rapportons le même déplacement à un second système de référence u', x', y', z'. En désignant par φ' l'argument hyperbolique relatif au déplacement dans ce système, on aura des formules analogues aux premières :

$$du' = d\sigma \operatorname{ch} \varphi',$$
$$dx' = l'\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi', \qquad dy' = m'\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi', \qquad dz' = n'\, d\sigma \operatorname{sh} \varphi'.$$

Désignons enfin par θ l'argument hyperbolique de la transformation de Lorentz qui établit la correspondance entre les deux systèmes

$$x' = \quad x' \operatorname{ch}\theta + u' \operatorname{sh}\theta,$$
$$u' = + x' \operatorname{sh}\theta + u' \operatorname{ch}\theta.$$

Nous aurons immédiatement

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{ch}\varphi = \quad \operatorname{ch}\varphi' \operatorname{ch}\theta + l' \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{sh}\theta, \\ l \operatorname{sh}\varphi = l' \operatorname{sh}\varphi' \operatorname{ch}\theta + \quad \operatorname{ch}\varphi' \operatorname{sh}\theta, \\ m \operatorname{sh}\varphi = m' \operatorname{sh}\varphi', \\ n \operatorname{sh}\varphi = n' \operatorname{sh}\varphi'. \end{cases}$$

Comme le coefficient l' désigne un cosinus, les deux premières équations de ce groupe rappellent les formules fondamentales de la trigonométrie non euclidienne. Nous en trouverons plus loin la raison.

Posons, comme précédemment,

$$\operatorname{th}\theta = \alpha, \qquad \frac{1}{\operatorname{ch}\theta} = \beta.$$

Les équations (15) donnent

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = l \operatorname{th}\varphi = \dfrac{\dfrac{dx'}{du'} + \alpha}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}, \\[2ex] \dfrac{dy}{du} = \dfrac{\beta \dfrac{dy'}{du'}}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}, \\[2ex] \dfrac{dz}{du} = \dfrac{\beta \dfrac{dz'}{du'}}{1 + \alpha \dfrac{dx'}{du'}}. \end{cases}$$

Si le déplacement considéré est dirigé suivant l'axe Ox, on a

$$l' = 1, \qquad m' = n' = 0,$$

ce qui entraîne

$$\varphi = \varphi' + \theta;$$

d'où

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi' + \operatorname{th}\theta}{1 + \operatorname{th}\varphi' \operatorname{th}\theta}.$$

26. *Cas des pseudo-vitesses supérieures à l'unité.* — Nous avons supposé jusqu'ici, par l'emploi des fonctions hyperboliques, que les pseudo-vitesses composantes étaient toutes inférieures à l'unité. Un calcul semblable pourrait cependant être effectué dans le cas de pseudo-vitesses quelconques. Considérons le cas de deux pseudo-vitesses de même sens α et α'. La pseudo-vitesse résultante α_1 sera donnée par la formule

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha'}{1 + \alpha\alpha'}.$$

La différence $1 - \alpha_1$ n'est plus nécessairement positive. On a

$$1 - \alpha_1 = \frac{(1-\alpha)(1-\alpha')}{1 + \alpha\alpha'}.$$

Cette quantité change de signe lorsque l'une des vitesses composantes traverse l'unité ou encore quand le dénominateur s'annule.

Donc : si l'une des pseudo-vitesses composantes est égale à l'unité, la pseudo-vitesse résultante est aussi égale à l'unité; si l'une des composantes est égale et opposée à la pseudo-vitesse de déphasage du paramètre de rayonnement, la résultante devient infinie.

La somme $1 + \alpha_1$ peut se mettre sous une forme semblable

$$1 + \alpha_1 = \frac{(1+\alpha)(1+\alpha')}{1 + \alpha\alpha'}.$$

27. *La transformation de Lorentz et la Géométrie cayleyenne* (1). — Nous nous sommes bornés jusqu'ici à considérer les transformations de Lorentz qui conservent l'orthogonalité euclidienne des axes. Mais on peut examiner le cas le plus général par une méthode géométrique simple qui conduit à une application intéressante de la notion cayleyenne d'angle et de distance.

Nous avons montré que la transformation de Lorentz peut se

(1) Cayley, *A sixth memoir on quantics* (*London Transact.*, 1859).

représenter par une transformation de coordonnées homogènes conservant une sphère fixe. Dans un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère, le sommet intérieur joue un rôle spécial quand on ne considère que des pseudo-vitesses de translation inférieures à l'unité.

Le centre O de la sphère correspond à un certain système de référence fondamental (S). Tout autre point P intérieur à la sphère définit une pseudo-vitesse de translation rapportée au système (S), et qui serait mesurée par le vecteur OP. On pourrait prendre pour pôle le point P; il lui correspond un autre système (S'). Les pseudo-vitesses rapportées au système (S') ne sont pas mesurées par les longueurs euclidiennes des vecteurs.

. Si l'on considère par exemple un point P_1, différent de P, la pseudo-vitesse qui correspond à ce point par rapport au système (S) sera bien mesurée par la longueur euclidienne OP_1, mais la pseudo-vitesse relative au système (S') ne sera pas mesurée par la longueur euclidienne PP_1. Il semblerait donc qu'il y a une différence entre les deux systèmes. Or, il est possible de la faire disparaître par un procédé de mesure qui s'applique indifféremment à tous les systèmes, quel que soit le pôle correspondant.

Désignons par v le vecteur $\overline{OP}$. L'argument hyperbolique θ de la transformation de Lorentz qui permet de passer du système (S) au système (S') sera défini par l'égalité

$$\operatorname{th}\theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} = v,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\theta = \frac{1}{2}\log\frac{1+v}{1-v}.$$

Il est facile de donner à cette expression une forme projective, qui se conservera par le changement de pôle. La droite OP coupe la sphère en deux points M et M'. Je suppose qu'on ait pris comme sens positif sur la droite le sens $\overrightarrow{M'M}$.

Le rapport anharmonique des quatre points M, M', O'P est égal à

$$\frac{OM}{OM'} : \frac{PM}{PM'} = \frac{1}{-1} : \frac{1-v}{1+v} = \frac{1+v}{1-v}.$$

En désignant par (MM'OP) ce rapport anharmonique, on a donc

$$\theta = \frac{1}{2}\log(MM'OP).$$

Le rôle particulier de la position attribuée d'abord au point O disparaît dans cette nouvelle expression, et l'on pourra appliquer la même formule pour passer d'un point P_1 à un autre P_2.

La droite $P_1 P_2$ coupe la sphère en deux points N, N'.

L'argument hyperbolique θ de la transformation correspondante sera donné par la formule

$$\theta = \frac{1}{2}\log(NN'P_1P_2).$$

C'est précisément l'expression de la distance cayleyenne qui correspond à la sphère considérée prise comme quadrique fondamentale.

Désignons par $[P_1 P_2]$ cette distance. Il est évident que l'on a pour un système de trois points P_1, P_2, P_3 en ligne droite

$$[P_1P_3] = [P_1P_2] + [P_2P_3].$$

La distance cayleyenne de tout point P à un point de la surface de la sphère est infinie.

La pseudo-vitesse qui correspond à l'argument θ est toujours égale à $\operatorname{th}\theta$, quel que soit le pôle du système de référence. La géométrie cayleyenne fournit donc une image très simple de la composition des pseudo-vitesses.

28. *Expression analytique de la distance cayleyenne.* — Je crois utile de rappeler sommairement le calcul de la distance cayleyenne en fonction des coordonnées.

Soient deux points $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2\, y_2\, z_2)$ intérieurs à la sphère fondamentale. Les coordonnées de tout point de la droite

$P_1 P_2$ peuvent se mettre sous la forme

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

En exprimant que le point M se trouve sur la sphère, on obtient une équation du second degré en λ :

$$(1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2) + 2\lambda(1 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2) + \lambda^2(1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2) = 0.$$

On pose

$$F_{ij} = 1 - x_i x_j - y_i y_j - z_i z_j ;$$

l'équation en λ prend la forme abrégée

$$F_{11} + 2\lambda F_{12} + \lambda^2 F_{22} = 0.$$

Soient λ_1 et λ_2 les racines de cette équation, correspondant aux points d'intersection M_1, M_2.

Le rapport anharmonique $(M_1 M_2 P_1 P_2)$ est égal à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

On a donc

$$e^\theta = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

d'où

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = -\frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}}.$$

Nous tirons de là

$$\operatorname{sh}^2\theta = \frac{F_{12}^2 - F_{11} F_{22}}{F_{11} F_{22}}$$

et, par suite,

$$\operatorname{th}^2\theta = \frac{F_{12}^2 - F_{11} F_{22}}{F_{12}^2}.$$

En développant l'expression de $\operatorname{sh}^2\theta$, on trouve

$$\operatorname{sh}^2\theta = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (y_1 z_2 - z_2 y_1)^2 - (z_2 x_1 - x_1 z_2)^2 - (x_1 y_2 - y_2 x_1)^2}{(1 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2)}.$$

L'expression de l'élément linéaire cayleyen s'en déduit immédiatement :

$$d\theta^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - (y\,dz - z\,dy)^2 - (z\,dx - x\,dz)^2 - (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

Ces formules résolvent dans le cas le plus général le problème de la composition des pseudo-vitesses.

L'expression de $d\theta^2$, assimilée à un élément linéaire, conduit à l'expression de l'élément qui, dans la terminologie cayleyenne, remplace l'angle.

L'angle cayleyen se ramène à un logarithme de rapport anharmonique comme la distance.

Soient Δ et Δ' deux droites qui se coupent en un point P intérieur à la sphère. Par le point P et dans le plan $\Delta\Delta'$, on peut mener à la sphère deux tangentes imaginaires conjuguées P et P'. L'angle cayleyen des deux droites est le produit par $\frac{1}{2i}$ du rapport anharmonique des quatre droites T, T', Δ, Δ'. Cette définition et celle de la distance sont évidemment inspirées par l'expression de l'angle ordinaire donnée par Laguerre en 1853 [1].

29. *Géométrie cayleyenne et Géométrie de Lobatschewski.* — F. Klein [2] observa en 1871 que la géométrie cayleyenne fournit une représentation simple des propositions de la géométrie de Lobatschewski, quand on prend comme éléments les points et les segments de droite intérieurs à la sphère fondamentale, et qu'on évalue la distance suivant la définition de Cayley. Il est intéressant d'indiquer comment cette représentation se rattache à la représentation utilisée par Poincaré pour la théorie des fonctions fuchsiennes. La correspondance est extrêmement simple dans le cas de la géométrie plane. La sphère fondamentale est alors remplacée par un cercle (C) du plan fixe considéré Π.

Imaginons une demi-sphère (Σ) située au-dessus du plan Π et passant par le cercle fondamental (C). Tout point P du plan Π intérieur au cercle (C) est la projection d'un point P' de la demi-sphère. Un segment de droite intérieur au cercle (C) est la projection d'un demi-cercle de Σ. Les tangentes imaginaires issues de P au cercle (C) sont les projections des génératrices rectilignes de la sphère passant en P'.

---

(1) Laguerre, *Sur la Théorie des foyers* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 72, p. 57).

(2) F. Klein, *Math. Annalen*, t. IV, 1871; t. VI, 1873; t. VII, 1874.

Le rapport anharmonique du faisceau formé par deux droites quelconques passant en P et les deux tangentes imaginaires au cercle (C) est égal à celui du faisceau des quatre droites homologues passant en P′ et tracées dans le plan tangent à la sphère en ce point. Il résulte immédiatement de là que l'angle cayleyen de deux droites passant par P est égal à l'angle sous lequel se coupent sur la sphère les demi-cercles de la demi-sphère (Σ) qui correspondent respectivement à ces droites.

Il reste à transformer l'expression de la distance cayleyenne. Soient P_1 et P_2 deux points du plan Π intérieur au cercle (C), M et M′ les deux points où la droite $P_1 P_2$ coupe le cercle fondamental (C). Désignons par ρ le rayon du demi-cercle qui se projette suivant la droite $M' P_1 P_2 M$, par φ_1 et φ_2 respectivement, les angles que forment avec $M'M$ les rayons de ce demi-cercle aboutissant aux points P'_1, P'_2, homologues de P_1 et P_2. Le rapport anharmonique $(MM' P_1 P_2)$ est égal à

$$\frac{\rho(1-\cos\varphi_1)}{-\rho(1+\cos\varphi_1)} : \frac{\rho(1-\cos\varphi_2)}{-\rho(1+\cos\varphi_2)} = \frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_2}{2}}.$$

L'argument hyperbolique que nous avons désigné par θ et qui représente la distance cayleyenne des deux points est donc égal à $\log\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}}$.

Or si l'on joint le point M′ aux points M, P'_1, P'_2, et que l'on complète ce faisceau en y adjoignant la tangente au demi-cercle en M′, le rapport anharmonique du faisceau ainsi construit est le rapport anharmonique constant des quatre points M, M′, P'_1, P'_2 du demi-cercle.

Les coefficients angulaires des quatre droites considérées sont respectivement O, ∞, $\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}$; le rapport anharmonique a donc pour valeur $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}}$.

Et l'on a

$$\theta = \log.\ \text{rapp. anh. } MM' P'_1 P'_2.$$

Effectuons maintenant une projection stéréographique de la demi-sphère (Σ) sur le plan Π. Les demi-cercles dont le plan est perpendiculaire à Π se projetteront suivant des arcs de cercles normaux au cercle (C). Les points M_1, M'_1 se conservent; P'_1, P'_2 se projettent respectivement en P''_1, P''_2. Le rapport anharmonique $(MM' P''_1 P''_2)$ sur l'arc de cercle de la projection stéréographique est égal au rapport anharmonique $(MM' P'_1 P'_2)$ sur le demi-cercle de la sphère (Σ). Il est égal par conséquent à la racine carrée du rapport anharmonique des quatre points en ligne droite M, M'_1, P_1, P_2.

Comme les angles se conservent en projection stéréographique, l'angle euclidien de deux arcs de cercle normaux au cercle fondamental est égal à l'angle cayleyen de leurs cordes.

On retrouve donc ainsi la représentation bien connue des éléments fondamentaux de la géométrie non euclidienne.

L'emploi de la demi-sphère (Σ) fournit également une image très simple de la contraction de Lorentz. Soit P un pôle du plan Π, P′ son image sur (Σ). Un petit cercle de Σ ayant pour pôle le point P′ se projette sur Π suivant une ellipse. Le rapport des axes de cette ellipse est égal au coefficient de contraction de Lorentz pour la vitesse de translation qui correspondrait au point P.

30. *Extension aux figures à trois dimensions.* — L'extension de la méthode précédente aux figures à trois dimensions est extrêmement simple. La sphère fondamentale

$$(S) \qquad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

est la projection sur l'espace (x, y, z) de la demi-hypersphère (Σ) à quatre dimensions définie par l'équation et l'inégalité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = 0, \\ w > 0. \end{array} \right.$$

On peut répéter sur cette figure à quatre dimensions les raisonnements que nous avons faits sur la figure à trois dimensions considérée précédemment, et l'on obtient la transformation des segments rectilignes en arcs de cercles normaux à la sphère fondamentale.

Si l'on considère les coordonnées x, y, z comme les composantes d'une pseudo-vitesse dans un système (S), la quatrième coordonnée w représente la dérivée $\frac{d\sigma}{du}$ de l'intervalle par rapport au paramètre de rayonnement. Cette quatrième variable a donc une signification physique très précise.

Bien que les résultats que je viens d'exposer n'aient rien d'essentiellement nouveau, il m'a paru utile de les rappeler pour faire ressortir l'intérêt mathématique de la géométrie des systèmes ondulatoires.

31. *L'univers de Minkowski* (¹). — Pour terminer cette étude sommaire de la transformation de Lorentz et des questions qui s'y rattachent, je dois ajouter quelques observations sur l'*univers* de Minkowski. On sait que Minkowski considère les trois coordonnées d'espace et le temps comme les éléments d'une multiplicité à quatre dimensions qu'il appelle l'*univers*. L'emploi du langage géométrique pour figurer les ensembles dans lesquels les coordonnées d'espace et le temps varient simultanément n'est pas nouveau. Il présente des avantages dans certaines questions et M. Hadamard, entre autres, en a fait un usage courant dans ses *Leçons sur la propagation des ondes*. On pourrait critiquer la terminologie employée; il est quelque peu ridicule de vouloir représenter l'univers à l'aide de quatre variables seulement. Mais il y a d'autres reproches plus graves. Sous prétexte que les quatre variables figurent symétriquement dans ses formules, Minkowski prétend nier la distinction physique entre ces quantités, ce qui est absurde. Si l'on remplace u par si, dans la forme quadratique

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2,$$

(¹) *Die Grundgleichungen für die electromagnetische Vorgänge in bewegtenkorpem* (*Nachr. der K. Ges. d. Wiss. zu Gottingen*, 1908).

elle devient

$$-d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + ds^2.$$

Cette forme symétrique présente des avantages pour certains calculs. En particulier, les transformations de Lorentz se ramènent aux transformations orthogonales à quatre variables, ce qui constitue un rapprochement intéressant.

De même l'équation de la propagation des ondes prend la forme symétrique de l'équation du potentiel ordinaire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = 0.$$

Mais il ne faut pas se dissimuler que cette simplification est illusoire dans l'interprétation des phénomènes réels. Les caractères analytiques des intégrales réelles sont très différents suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires. Dans les transformations de Lorentz, également, la distinction du réel et de l'imaginaire est essentielle.

Pour se rendre compte du caractère de la transformation de Minkowski, on peut la comparer à la transformation de $x^2 - y^2$ en $x^2 + y^2$, qui remplacerait une hyperbole équilatère par un cercle.

Cet artifice de calcul peut être avantageux dans certains cas; il peut présenter des inconvénients dans d'autres. Mais ce n'est qu'un artifice, et les conclusions qu'on a prétendu en déduire au point de vue des réalités physiques sont absolument inacceptables.

CHAPITRE IV.

INTERFÉRENCE ET RÉFLEXION DES ONDES PLANES.

32. Les ondes planes étant considérées comme issues d'un pôle infiniment éloigné, on peut les rapporter indifféremment à deux systèmes S et S′, en mouvement uniforme de translation l'un par rapport à l'autre. Nous dirons que S est fixe et S′ en mouvement.

Une intégrale V de la forme

$$V = A \sin 2\pi \frac{lx + my + nz + a - u}{\lambda},$$

rapportée au système S, devient par la transformation de Lorentz

$$V = A \sin 2\pi \frac{l'x' + m'y' + n'z' + a' - u'}{\lambda'},$$

en posant

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} l' = \dfrac{l - \alpha}{1 - l\alpha}, \qquad m' = \dfrac{m\beta}{1 - l\alpha}, \qquad n' = \dfrac{n\beta}{1 - l\alpha}, \\ a' = \dfrac{a\beta}{1 - l\alpha}, \qquad \lambda' = \dfrac{\lambda\beta}{1 - l\alpha}. \end{array} \right.$$

L'égalité $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ entraîne $l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$.

Les trois premières des formules (17) sont équivalentes aux formules (16).

On peut rapprocher ces résultats des conditions pour que deux trains d'ondes planes admettent des plans d'interférence stationnaires dans un système de référence donné.

Soient deux intégrales de même intensité et de même période dans le système S

$$V = A \sin 2\pi \frac{lx + my + nz + a - u}{\lambda},$$

$$V_1 = A \sin 2\pi \frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z + a_1 - u}{\lambda_1}.$$

La somme $V + V_1$ s'annule en tous les points des plans représentés par l'équation

$$(18) \quad (l - l_1)x + (m - m_1)y + (n - n_1)z + (a - a_1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n \text{ entier}).$$

Ces plans sont par conséquent des nappes d'interférence stationnaires dans le système S.

Dans le système S' ces deux trains d'ondes n'auraient plus en général la même période et ne pourraient pas y fournir de nappes d'interférence stationnaires.

33. *Des nappes d'interférence stationnaires dans le système mobile.*

— Cherchons la relation qui doit exister entre les périodes de deux trains d'ondes dans le système S pour qu'elles puissent interférer en S'. La transformation de Lorentz fournit immédiatement le résultat; cependant il m'a paru utile de faire le calcul directement en supposant d'abord que S' se déduise de S par une simple translation au sens ordinaire du mot. Nous désignons par λ et λ_1 les périodes.

Posons par conséquent

$$x_1 = x - \alpha u$$

et conservons les autres variables.

Les arguments caractéristiques des intégrales deviennent

$$\frac{lx_1 + my + nz + a - u(1 - l_1\alpha)}{\lambda},$$
$$\frac{l_1x_1 + m_1y + n_1z + a_1 - u(1 - l_1\alpha)}{\lambda_1}.$$

Pour que le paramètre de rayonnement u disparaisse dans la différence des arguments, il faut et il suffit que l'on ait

$$(19) \qquad \frac{\lambda}{1 - l\alpha} = \frac{\lambda_1}{1 - l_1\alpha}.$$

Ce résultat rapproché de la dernière des formules (17) exprime que les périodes transformées de λ et de λ_1 par la transformation de Lorentz sont égales entre elles.

Si cette condition est réalisée, les plans d'interférence stationnaires des deux trains d'ondes, observés dans le système S', seront parallèles au plan

$$(20) \qquad \frac{lx_1 + my + nz}{1 - l\alpha} - \frac{l_1x_1 + m_1y + n_1z}{1 - l_1\alpha} = 0.$$

L'équation (20) se simplifie par l'introduction de la transformation de Lorentz.

Un calcul immédiat la ramène en effet à la forme

$$(21) \qquad l' - l'_1)x' + (m' - m'_1)y' + (n' + n'_1)z' = 0.$$

Il reste à interpréter géométriquement le résultat obtenu. Si l'on suppose que, dans le système S, les ondes d'interférence sont de véritables sphères, les plans des nappes d'interférence (18) sont parallèles à l'un des plans bissecteurs des plans des ondes planes considérées.

Mais, dans ce cas, les ondes d'interférence du système (S') sont des ellipsoïdes ; l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

représente un ellipsoïde, et l'équation (21) doit être interprétée en conséquence.

Les plans bissecteurs d'un dièdre sont les plans conjugués harmoniques à la fois par rapport aux faces du dièdre et par rapport à une sphère qui aurait son centre sur l'arête du dièdre.

Si la sphère directrice est remplacée par un ellipsoïde d'interférence, on se trouve dans le cas du système mobile S'. Donc :

Les plans d'interférence stationnaires dans le système mobile S' *sont parallèles à l'un des deux plans conjugués en direction par rapport aux plans des fronts d'ondes et par rapport à l'ellipsoïde d'interférence.*

L'expression de front d'onde doit être précisée. L'emploi des coefficients l', m', n' implique qu'il s'agit des plans qui correspondent à l'hypothèse $u' =$ const., et non à l'hypothèse $u =$ const. C'est donc le paramètre de rayonnement du système mobile qui doit intervenir dans la détermination de ces plans.

Le raisonnement précédent ne précise pas lequel des plans conjugués est celui qui correspond à la direction des plans d'interférence stationnaire. Le procédé d'élimination de u, que nous avons employé, indique que le plan considéré est celui sur lequel les vitesses de propagation des deux ondes se projettent dans le même sens.

34. *Rayons de propagation. Aberration.* — M. Hadamard a rattaché la notion des *rayons* de propagation à celle des *bicaractéristiques*, c'est-à-dire des lignes ou multiplicités à une dimension suivant lesquelles les multiplicités caractéristiques touchent leur enveloppe.

Nous avons donné, au n° **18**, l'équation aux dérivées partielles des multiplicités caractéristiques dans le système des variables u, x, y, z.

Les équations différentielles des bicaractéristiques correspondant à une intégrale donnée sont

$$\frac{dx}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)} = \frac{dy}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)} = \frac{dz}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = \frac{-du}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}.$$

Dans le cas particulier des ondes planes

$$lx + my + nz - u = \text{const.},$$

on a

$$\frac{dx}{m} = \frac{dy}{n} = \frac{dz}{n} = \frac{du}{1}.$$

Ces équations peuvent être appliquées indifféremment aux systèmes de coordonnées fixes ou mobiles, pourvu que la variable u désigne le paramètre de rayonnement relatif au système considéré, et que l'on ait soin de les interpréter en tenant compte de la forme de l'ellipsoïde d'interférence.

Elles expriment que le rayon est parallèle au diamètre conjugué du plan d'onde dans l'ellipsoïde d'interférence. C'est ce que nous appellerons la direction *pseudo-normale* du plan.

La correspondance entre les directions des rayons par rapport à deux systèmes d'axes en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre, résulte immédiatement des formules (17) quand on emploie dans les deux systèmes les variables de Lorentz.

A un rayon de propagation du premier

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = \frac{u - u_0}{1},$$

correspond un rayon homologue du second

$$\frac{x' - x'_0}{l'} = \frac{y' - y'_0}{m'} = \frac{z' - z'_0}{n'} = \frac{u' - u'_0}{1},$$

les dénominateurs des deux groupes étant liés par les formules (17).

Les trois premiers rapports de chaque système définissent la direction spatiale stationnaire du rayon, exprimée en variables de Lorentz.

Ces équations résolvent par conséquent le problème de l'aberration dans le cas le plus général.

35. *Réflexion.* — Les résultats obtenus pour le phénomène de l'interférence stationnaire s'appliquent également à la réflexion des ondes sur un miroir plan qui se déplace dans le milieu considéré suivant un mouvement de translation uniforme.

Nous devons supposer nécessairement que le mouvement du miroir n'altère pas l'homogénéité ni l'isotropie du milieu. Le plan du miroir est alors un plan d'interférence stationnaire pour l'onde incidente et l'onde réfléchie.

La loi de réflexion se déduit immédiatement de cette remarque. A la direction du plan de réflexion correspond une direction *pseudo-normale*, définie plus haut.

Le rayon incident, le rayon réfléchi et la pseudo-normale sont situés dans un même plan.

Les deux rayons sont conjugués harmoniques par rapport à la pseudo-normale et à la droite d'intersection de leur plan avec le plan du miroir. C'est donc l'ellipsoïde d'interférence qui remplace encore la sphère dans l'étude du phénomène de la réflexion. Pour que le rayon lumineux se réfléchisse dans sa propre direction, il faut qu'il soit dirigé suivant la pseudo-normale au plan du miroir.

On peut faire à ce sujet une remarque intéressante. Dans le système S', qui participe au mouvement de translation au miroir, le rayon incident et le rayon réfléchi ont la même longueur d'onde. Au contraire, dans le système S, les longueurs d'onde diffèrent en général entre elles. Même dans le cas où les deux rayons se superposent en S', les deux rayons du système S ont des périodes différentes. S'il s'agit, par exemple d'ondulations lumineuses, le rayon incident et le rayon réfléchi du système S ne sont pas de même couleur. Il convient d'ajouter, d'ailleurs, que les rayons considérés ne sont pas stationnaires dans le système S. Nos calculs de périodes s'appliquent en réalité aux deux systèmes d'ondes planes du système S qui correspondraient respectivement à la direction de l'onde incidente et de l'onde réfléchie du système S'.

36. *Réflexion et interférence d'ondes polaires élémentaires.* — On arrive à des conclusions semblables quand on étudie dans un système mobile la réflexion d'une onde élémentaire issue d'un pôle simple ou l'interférence de deux ondes élémentaires identiques issues de deux pôles différents liés au même système. Dans ces questions, c'est le module elliptique de l'onde (nº **12**) qui remplace la distance, et la pseudo-normale qui remplace la normale.

Les formules relatives aux phénomènes stationnaires d'interférence ou ces réflexions s'obtiennent en général par l'élimination du temps. Mais d'après la forme même de l'intégrale, l'élimination de t entraîne celle du paramètre de rayonnement u. Les calculs et les résultats conserveront donc la même forme dans le cas du repos ou du mouvement, en tenant compte toutefois de la signification physique du module.

37. Je me suis borné dans tout ce qui précède à déduire les conséquences mathématiques de l'équation de la propagation des ondes, sans formuler d'hypothèses ni introduire aucun principe nouveau.

Nous avons pu constater que pour les observations effectuées dans un système de référence mobile, c'est toujours l'ellipsoïde d'interférence qui joue le rôle d'élément directeur.

Le temps n'intervient que dans le paramètre de rayonnement, où il figure au premier degré, en général avec les coordonnées de position, mais avec un coefficient qui peut varier beaucoup d'un phénomène à un autre.

Nos calculs ne visent pas particulièrement les phénomènes lumineux; ils s'étendent à tous les phénomènes vibratoires qui se propagent dans un milieu isotrope.

Les formules obtenues sont analogues à celles qu'on prétend établir en se basant sur le principe de relativité restreinte. Nous démontrons ainsi que ce principe est inutile pour l'étude des phénomènes optiques et électromagnétiques, puisque les mêmes résultats s'obtiennent avec beaucoup plus de netteté et de précision par la simple étude analytique de l'équation des ondes.

D'autre part, comme l'extension du principe d'Einstein en dehors de cette catégorie de phénomènes constitue un abus basé sur une équivoque, la conclusion très nette à laquelle nous aboutissons est la suivante :

Le principe de la relativité restreinte, au sens d'Einstein, constitue tantôt une superfétation et tantôt une absurdité, suivant le domaine auquel on l'applique.