JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CARTAN

Sur les équations de la gravitation d'Einstein

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 141-203.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__141_0>

Sur les équations de la gravitation d'Einstein ;

PAR E. CARTAN.

Les équations de la gravitation d'Einstein expriment les composantes T_{ik} du tenseur-matière au moyen des coordonnées x_i de l'univers (espace-temps), des coefficients g_{ik} de la forme différentielle quadratique fondamentale $\Sigma g_{ik}\,dx_i\,dx_k$ et de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres. Ces équations, d'après le principe même de relativité, doivent avoir une signification indépendante du choix des coordonnées. Cela revient à dire que si les équations de la gravitation sont

$$T_{ik} = -G_{ik},$$

la forme différentielle quadratique $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$ *est covariante de la forme fondamentale vis-à-vis d'un changement de coordonnées arbitraire.*

La recherche des équations de la gravitation revient donc à la recherche de toutes les formes différentielles quadratiques covariantes $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$. Einstein ajoute deux conditions supplémentaires : la première que les G_{ik} soient *linéaires* par rapport aux dérivées partielles du second ordre des fonctions g_{ik}, la seconde que la loi de conservation soit respectée.

Je me propose, dans les pages qui suivent, de démontrer rigoureusement que la seule solution mathématiquement possible du problème ainsi formulé est celle qui a été indiquée par Einstein. D'une manière plus précise, toutes les formes différentielles covariantes $\Sigma G_{ik}\,dx_i\,dx_k$ dont les coefficients G_{ik} dépendent linéairement des dérivées partielles du second ordre des g_{ik} se déduisent d'une d'entre elles $\Sigma \overline{G}_{ik} dx_i dx_k$ par la formule générale

$$\Sigma G_{ik}\, dx_i\, dx_k = \alpha \Sigma \overline{G}_{ik}\, dx_i\, dx_k + (\beta A + \gamma) \Sigma g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

où α, β, γ sont trois constantes arbitraires, A étant la courbure scalaire de Riemann. La condition que la loi de conservation soit respectée ne laisse que deux paramètres arbitraires (homogènes) au lieu de trois.

Étant donnée la difficulté qu'on rencontre à avoir connaissance des Mémoires parus à l'étranger pendant la guerre et depuis la guerre, je ne suis pas absolument sûr qu'aucune démonstration de ce théorème n'ait été donnée. Celle que je vais exposer repose naturellement sur la détermination préalable des invariants d'une forme différentielle quadratique vis-à-vis du groupe général à n variables (quatre dans le cas de la relativité) : c'est le problème même étudié par Christoffel (*Journ. de Crelle*, t. LXX), et en vue duquel a été fondé le calcul différentiel absolu. La méthode que j'emploie n'est que la simple application dans un cas particulier d'une méthode générale que j'ai développée en 1908 (¹). Si l'on imagine la forme différentielle donnée décomposée en carrés

$$ds^2 = -\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2,$$

où ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont des expressions différentielles linéaires (non différentielles exactes), le problème revient à trouver les invariants du système de ces quatre formes vis-à-vis des transformations que fait subir à ces formes une substitution linéaire appartenant à un certain groupe (celui qui conserve $\omega_4^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2$). Toute décomposition du ds^2 en carrés revient au fond au choix d'un système de référence euclidien associé à chaque *événement*. La for-

(¹) *Ann. Éc. norm.*, 3ᵉ série, t. XXV, p. 57 et suiv. (Chapitre I du Mémoire). D'une manière générale je renverrai, pour les notations et les éléments essentiels des théories utilisées, à un Mémoire récent du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVII, 1919, p. 125-160, et t. XLVIII, 1920, p. 132-208, spécialement les Chapitres I, II et III.

mation des covariants bilinéaires des ω_i fait intervenir les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée du système de référence mobile (ce qui entraîne la définition du parallélisme due à Levi-Civita), les covariants bilinéaires des ω_{ij} introduisant à leur tour les symboles de Riemann et ainsi de suite.

Je n'utilise pas du tout le calcul différentiel absolu de Ricci; ce n'est pas que j'en méconnaisse l'importance; mais il n'est pas mauvais, je crois, de montrer que des méthodes absolument générales sont applicables à la théorie des invariants d'une forme différentielle quadratique. Les mêmes méthodes s'appliqueraient à la théorie des variétés généralisées de H. Weyl, définies par un ds^2 et une forme différentielle linéaire, et aussi à la théorie des invariants d'une *équation* différentielle quadratique $\Sigma g_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$, ou même d'une équation de Monge quelconque

$$F(x_i; dx_i) = 0.$$

Il est très remarquable que les équations de la gravitation d'Einstein ne font intervenir que dix combinaisons linéaires des vingt symboles de Riemann; il existe dix autres combinaisons linéaires qui se conservent (ou plutôt dont les rapports mutuels se conservent) lorsqu'on multiplie le ds^2 par une fonction arbitraire des x_i et qui constituent les seuls invariants relatifs du second ordre de *l'équation* $ds^2 = 0$; ces dix combinaisons linéaires *intéressent donc uniquement les lois de propagation de la lumière*, tandis que les dix combinaisons qui entrent dans les équations de la gravitation ne les *intéressent pas*. Il est assez déconcertant que ces dix dernières quantités seules aient été considérées par les physiciens. Je montre qu'elles entrent comme parties réelles et imaginaires des coefficients d'une forme quadratique ternaire covariante.

Je signalerai enfin (nº 55 et suiv.) la forme donnée au tenseur de la gravitation conçu comme un vecteur appliqué à un élément à trois dimensions de l'univers, les composantes de ce vecteur étant des formes différentielles symboliques du troisième degré. La loi de conservation s'exprime d'une manière simple au moyen de l'opération de *dérivation extérieure* qui fait passer d'une inté-

grale multiple étendue à une variété fermée à l'intégrale égale étendue au volume limité par la variété.

Ce Mémoire a été rédigé il y a plus d'un an. Depuis j'ai publié, en février et mars derniers, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 174, p. 437, 593, 734, 857, 1104), des Notes relatives à une conception géométrique nouvelle des espaces non euclidiens. L'idée fondamentale de ces Notes est en germe, sous une forme mi-abstraite, mi-géométrique, dans les premiers et les derniers numéros de ce Mémoire (**1-6, 35-40**).

J'ajoute que ce Mémoire résout aussi implicitement, d'une manière rigoureuse, le problème de la détermination de tous les systèmes covariants de relations entre les x_i, les g_{ik} et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, ces relations étant linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Ce problème est lié à celui de la décomposition du tenseur de Riemann-Christoffel en tenseurs *irréductibles;* dans le cas $n=4$, cette décomposition, possible d'une manière et d'une seule, fournit trois tenseurs irréductibles :

1° Le tenseur scalaire A (courbure totale de Riemann);

2° Un tenseur (G) à neuf composantes G_{ij}, $G_{ii}-G_{jj}$;

3° Un tenseur (H) à dix composantes, celles dont il est question plus haut.

Cela posé, si l'on fait abstraction des relations obtenues en annulant toutes les composantes A_{ij}^{kl} du tenseur de Riemann-Christoffel, relations qui expriment que l'espace est euclidien, les seuls systèmes covariants possibles s'obtiennent, soit en annulant l'un des trois tenseurs irréductibles, soit en annulant simultanément deux de ces trois tenseurs. En particulier, les lois de la gravitation d'Einstein, dans une région vide de matière, s'obtiennent en annulant les deux tenseurs A et (G); au contraire, les lois de la gravitation (à potentiel scalaire) de Mie s'obtiennent en annulant (H).

Ces propriétés se généralisent pour un nombre quelconque de dimensions. Elles se rattachent à la théorie générale des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, et au sujet de laquelle je me permets de renvoyer le lecteur à deux de mes Mémoires [*Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 53-96 (1913), et *Journ. Math. pures et appliquées*, 6e série, t. X, p. 149-186 (1914)].

Préliminaires.

1. Considérons dans l'espace euclidien un système de coordonnées curvilignes quelconques et supposons le ds^2 décomposé en une somme de trois carrés

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois expressions linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées, avec des coefficients fonctions de ces coordonnées. Effectuer une telle décomposition revient à choisir en chaque point M de l'espace un trièdre trirectangle ayant ce point pour origine; les expressions ω_1, ω_2, ω_3 désignent alors les composantes, suivant les axes de ce trièdre mobile, du vecteur infiniment petit joignant le point M au point infiniment voisin $M + dM$, ou encore les composantes de la *translation* infiniment petite qui, jointe à une rotation infiniment petite autour d'un axe passant par M, fait passer du trièdre associé au point M au trièdre associé au point $M + dM$.

Désignons maintenant par $\omega_{23} = -\omega_{32}$, $\omega_{31} = -\omega_{13}$, $\omega_{12} = -\omega_{21}$ les composantes de cette rotation. Il est facile de voir, et c'est du reste un résultat classique, qu'il y a entre les six composantes ω_i, ω_{ij} du déplacement instantané du trièdre mobile de référence des relations nécessaires. Remarquons d'abord, et ceci aura une grande importance plus loin, que si x, y, z désignent les coordonnées d'un point fixe par rapport aux axes mobiles, on a les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} dx + y\,\omega_{21} + z\,\omega_{31} + \omega_1 = 0, \\ dy + z\,\omega_{32} + x\,\omega_{12} + \omega_2 = 0, \\ dz + x\,\omega_{13} + y\,\omega_{23} + \omega_3 = 0. \end{cases}$$

En exprimant les conditions d'intégrabilité des équations (1), c'est-à-dire en écrivant que les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (1) sont nuls en tenant compte de ces équations elles-mêmes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\omega'_1 - [\omega_2\omega_{21}] - [\omega_3\omega_{31}] + y\{\omega'_{21} - [\omega_{23}\omega_{31}]\} + z\{\omega'_{31} - [\omega_{32}\omega_{21}]\} = 0,\\
&\omega'_2 - [\omega_3\omega_{32}] - [\omega_1\omega_{12}] + z\{\omega'_{32} - [\omega_{31}\omega_{12}]\} + x\{\omega'_{12} - [\omega_{13}\omega_{32}]\} = 0,\\
&\omega'_3 - [\omega_1\omega_{13}] - [\omega_2\omega_{23}] + x\{\omega'_{13} - [\omega_{12}\omega_{23}]\} + y\{\omega'_{23} - [\omega_{21}\omega_{13}]\} = 0.
\end{aligned}$$

Ces relations ayant lieu quels que soient x, y, z, on en déduit les relations cherchées

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega'_1 &= [\omega_2\,\omega_{21}] + [\omega_3\omega_{31}],\\
\omega'_2 &= [\omega_3\,\omega_{32}] + [\omega_1\omega_{12}],\\
\omega'_3 &= [\omega_1\,\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}],\\
\omega'_{23} &= [\omega_{21}\omega_{13}],\\
\omega'_{31} &= [\omega_{32}\omega_{21}],\\
\omega'_{12} &= [\omega_{13}\omega_{32}].
\end{aligned}\right.$$

Ces relations peuvent être interprétées, en introduisant deux symboles de différentiation arbitraires d et δ, comme étant équivalentes aux relations

$$\begin{aligned}
d\omega_1^\delta - \delta\omega_1^d &= \begin{vmatrix} \omega_2^d & \omega_{21}^d \\ \omega_2^\delta & \omega_{21}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_3^d & \omega_{31}^d \\ \omega_3^\delta & \omega_{31}^\delta \end{vmatrix},\\
d\omega_2^\delta - \delta\omega_2^d &= \begin{vmatrix} \omega_3^d & \omega_{32}^d \\ \omega_3^\delta & \omega_{32}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_1^d & \omega_{12}^d \\ \omega_1^\delta & \omega_{12}^\delta \end{vmatrix},\\
d\omega_3^\delta - \delta\omega_3^d &= \begin{vmatrix} \omega_1^d & \omega_{13}^d \\ \omega_1^\delta & \omega_{13}^\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega_2^d & \omega_{23}^d \\ \omega_2^\delta & \omega_{23}^\delta \end{vmatrix},\\
d\omega_{23}^\delta - \delta\omega_{23}^d &= \begin{vmatrix} \omega_{21}^d & \omega_{13}^d \\ \omega_{21}^\delta & \omega_{13}^\delta \end{vmatrix},\\
d\omega_{31}^\delta - \delta\omega_{31}^d &= \begin{vmatrix} \omega_{32}^d & \omega_{21}^d \\ \omega_{32}^\delta & \omega_{21}^\delta \end{vmatrix},\\
d\omega_{12}^\delta - \delta\omega_{12}^d &= \begin{vmatrix} \omega_{13}^d & \omega_{32}^d \\ \omega_{13}^\delta & \omega_{32}^\delta \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Les trois premières formules (2) montrent que, *si l'on connaît seulement* ω_1, ω_2, ω_3, c'est-à-dire les composantes de la translation instantanée du trièdre mobile, on peut en déduire *par de* *simples différentiations* ω_{23}, ω_{31}, ω_{12}, c'est-à-dire les composantes de la rotation instantanée. Imaginons en effet exprimées les dérivées ω'_1, ω'_2, ω'_3 en fonctions de ω_1, ω_2, ω_3, ce qui est toujours possible, soit

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= a_1[\omega_2\omega_3] + b_1[\omega_3\omega_1] + c_1[\omega_1\omega_2],\\
\omega'_2 &= a_2[\omega_2\omega_3] + b_2[\omega_3\omega_1] + c_2[\omega_1\omega_2],\\
\omega'_3 &= a_3[\omega_2\omega_3] + b_3[\omega_3\omega_1] + c_3[\omega_1\omega_2].
\end{aligned}$$

Posons de plus

$$\begin{aligned}
\omega_{23} &= \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2 + \gamma_1\omega_3,\\
\omega_{31} &= \alpha_2\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \gamma_2\omega_3,\\
\omega_{12} &= \alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2 + \gamma_3\omega_3.
\end{aligned}$$

Un calcul facile donne, sans ambiguïté,

$$\begin{array}{lll}
\alpha_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_2 - c_3), & \beta_1 = a_2, & \gamma_1 = a_3,\\
\alpha_2 = b_1, & \beta_2 = \frac{1}{2}(b_2 - c_3 - a_1), & \gamma_2 = b_3,\\
\alpha_3 = c_1, & \beta_3 = c_2, & \gamma_3 = \frac{1}{2}(c_3 - a_1 - b_2).
\end{array}$$

Les composantes de la rotation étant ainsi déterminées, les équations (1) donnent les conditions pour que le point de coordonnées relatives (x, y, z) soit fixe. En particulier, les conditions pour que la *direction* u, v, w soit invariable sont

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
du &+ v\,\omega_{21} + w\,\omega_{31} = 0,\\
dv &+ w\,\omega_{32} + u\,\omega_{12} = 0,\\
dw &+ u\,\omega_{13} + v\,\omega_{23} = 0;
\end{aligned}\right.$$

elles indiquent comment doivent varier les paramètres directeurs mobiles u, v, w d'une droite issue de M *pour que cette droite reste constamment parallèle à elle-même.*

3. Les considérations précédentes s'étendraient à un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, et même à des espaces euclidiens généralisés, tel que celui de Minkowski, pour lequel le carré de la distance de deux points (x) et (x') serait de

la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i (x'_i - x_i)^2,$$

où les coefficients ε_i sont égaux les uns à $+1$, les autres à -1. Appelons produit géométrique $V \mid V'$ de deux vecteurs V et V' de projections

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$u'_1, \quad \ldots, \quad u'_n,$$

l'expression

$$V \mid V' = \varepsilon_1 u_1 u'_1 + \varepsilon_2 u_2 u'_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n u'_n.$$

Choisissons d'une manière arbitraire en tout point de l'espace un système de vecteurs de référence $V_1, \ldots, V_n$ satisfaisant aux relations

$$(4) \qquad V_i \mid V_i = \varepsilon_i, \qquad V_i \mid V_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

En se déplaçant d'un point M à un point infiniment voisin M', on aura des relations de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} dM = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2 + \ldots + \omega_n V_n; \\ dV_i = \varepsilon_1 \omega_{i1} V_1 + \varepsilon_2 \omega_{i2} V_2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_{in} V_n \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

où les ω_i et les ω_{ij} sont des expressions linéaires par rapport aux différentielles des coordonnées et satisfaisant aux équations

$$\omega_{ii} = 0, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

obtenues en différentiant les équations (4). On en déduit, d'abord

$$(6) \qquad ds^2 = \varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_n^2,$$

puis, en écrivant que les premiers membres de (5) sont des différentielles exactes,

$$(7) \qquad \begin{cases} \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \, \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \, \omega_{kj}]. \end{cases}$$

Les équations qui expriment qu'un point de coordonnées *rela-*

tives $(x_1, \ldots, x_n)$ est *fixe* sont enfin

$$(8) \qquad dx_i + \omega_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} x_k \omega_{ki} = 0.$$

Les expressions ω_i sont les composantes de la *translation instantanée*, les expressions ω_{ij} celles de la *rotation instantanée* du système de référence mobile.

4. Supposons inversement que nous ayons décomposé le ds^2 de l'espace euclidien précédent par une formule telle que (6). Cela revient à associer à chaque point de l'espace un système de référence mobile; les expressions ω_i désignent les composantes de la translation instantanée de ce système; *quant aux composantes de la rotation instantanée, elles sont données sans ambiguïté par les n premières formules* (7). Si, en effet, on pose

$$\omega'_i = \sum_{(jk)}^{1,\ldots,n} c_{jki}[\omega_j \omega_k],$$

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ijk} \omega_k \qquad (\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}),$$

les coefficients inconnus α_{ijk} sont donnés par les équations

$$\alpha_{kil} - \alpha_{lik} = \varepsilon_i c_{kli},$$

qui conduisent à

$$\alpha_{iji} = \varepsilon_i c_{iji},$$

$$\alpha_{ijk} = \frac{1}{2}(\varepsilon_k c_{ijk} - \varepsilon_i c_{jki} - \varepsilon_j c_{kij}).$$

5. Arrivons maintenant à une forme différentielle quadratique à n variables donnée *a priori* et supposons-la décomposable en une somme de carrés de n formes différentielles linéaires indépendantes. Imaginons même que cette décomposition soit effectuée de la manière *la plus générale possible*, ce qui introduit, comme on sait, $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres arbitraires. Nous désignerons par $x_1, \ldots, x_n$

les variables données et $u_1, \ldots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$ les paramètres arbitraires. Soit alors

$$ds^2 = \varepsilon_1 \omega_1^2 + \varepsilon_2 \omega_2^2 + \ldots + \varepsilon_n \omega_n^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{9}$$

Les n formes ω_i sont linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, avec des coefficients fonctions des x et des u. Calculons leurs covariants bilinéaires : chaque terme d'un de ces covariants contiendra en facteur l'une des différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$, et par suite on pourra les mettre (d'une infinité de manières) sous la forme

$$\omega_i' = \varepsilon_i [\omega_1 \omega_{1i}] + \varepsilon_i [\omega_2 \omega_{2i}] + \ldots + \varepsilon_i [\omega_n \omega_{ni}], \tag{10}$$

les ω_{ij} étant des formes linéaires par rapport aux dx et aux du. Exprimons maintenant que le ds^2 donné ne dépend pas des paramètres u. Pour cela employons deux symboles de différentiation d et δ, le second se rapportant à une différentiation par rapport à l'un quelconque des paramètres u. On aura alors évidemment

$$\omega_i^\delta = 0.$$

D'autre part, en écrivant que $\delta(ds^2)$ est nul, on obtient

$$\varepsilon_1 \omega_1^d \delta\omega_1^d + \varepsilon_2 \omega_2^d \delta\omega_2^d + \ldots + \varepsilon_n \omega_n^d \delta\omega_n^d = 0.$$

Or on a

$$\delta\omega_i^d = \delta\omega_i^d - d\omega_i^\delta = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} (\omega_k^\delta \omega_{ki}^d - \omega_k^d \omega_{ki}^\delta) = -\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} \omega_{ki}^\delta \omega_k^d;$$

par suite, la relation précédente devient

$$\Sigma \omega_{ki}^\delta \omega_i^d \omega_k^d = 0,$$

d'où enfin

$$\omega_{ki}^\delta + \omega_{ik}^\delta = 0.$$

Les relations auxquelles nous venons d'arriver prouvent que les *expressions* $\omega_{ij} + \omega_{ji}$ *(ainsi que* ω_{ii}*) sont linéaires en* $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Tenons compte maintenant de l'indétermination des ω_{ij} : on peut, sans changer les formules (10), remplacer ω_{ij} par

$$\overline{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{ijk} \omega_k \qquad \text{avec} \qquad \beta_{kil} = \beta_{lik},$$

l'expression $\omega_{ij} + \omega_{ji}$ est alors remplacée par

$$\overline{\omega}_{ij} + \overline{\omega}_{ji} = \omega_{ij} + \omega_{ji} + \sum_{k=1}^{k=n} (\beta_{ijk} + \beta_{jik})\omega_k;$$

on pourra disposer des indéterminées β_{ijk} pour annuler tous les seconds membres, *et cela est possible d'une manière et d'une seule*, comme il est facile de s'en rendre compte.

Par suite, *à toute décomposition du ds^2 en n carrés de la forme* (9) *correspondent, d'une manière et d'une seule,* $\frac{n(n-1)}{2}$ *expressions de Pfaff* $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, *linéaires en* $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du'_{\frac{n(n-1)}{2}}$, *satisfaisant aux relations* (10)

$$(10) \qquad \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}].$$

6. Rien ne nous empêche de dire que la décomposition (9) en carrés du ds^2 définit en chaque point de la variété à n dimensions considérée un système de référence euclidien et d'appeler respectivement composantes de la translation instantanée et composantes de la rotation instantanée de ce système de référence les expressions de Pfaff

$$\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & \ldots, & \omega_n, \\ \omega_{12}, & & \ldots, & \omega_{n-1,n}. \end{matrix}$$

Nous conviendrons également de dire qu'un point ayant pour coordonnées (euclidiennes) $x_1, \ldots, x_n$ par rapport au système de référence mobile a une vitesse absolue nulle pour un déplacement infiniment petit du système de référence si l'on a les relations

$$(8) \qquad dx_i + \omega_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} x_k \omega_{ki} = 0;$$

nous conviendrons de même de dire qu'une direction issue de M et ayant pour paramètres directeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$ reste parallèle à elle-même quand on a les relations

$$(8') \qquad d\xi_i + \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \omega_{ki} = 0;$$

nous retrouvons ainsi la notion du *parallélisme* de Levi-Civita ([1]).

Dans une variété euclidienne une demi-droite issue de M et se déplaçant parallèlement à elle-même revient coïncider avec sa position initiale quand le point M décrit un contour fermé quelconque. Analytiquement, cette propriété tient à ce que le système de Pfaff (8) est complètement intégrable : si, en effet, on exprime les conditions d'intégrabilité complète de ce système, on trouve les équations (7).

Il est facile de voir que, réciproquement, les équations (7) ne conviennent qu'aux variétés euclidiennes. Il suffit pour s'en convaincre de montrer qu'il est possible de réduire le ds^2 à la forme

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \, dX_i^2,$$

en choisissant pour les x et les u des fonctions convenablement choisies des n variables $X_1, \ldots, X_n$. On y arrive en intégrant le système

$$(11) \qquad \begin{cases} \omega_i - dX_i = 0, \\ \omega_{ij} \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Ce système est complètement intégrable, car les covariants bilinéaires des premiers membres, qui sont respectivement

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_k \, \omega_{ki}],$$

$$\sum \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}],$$

sont nuls en tenant compte des équations du système. La déter-

---

([1]) T. Levi-Civita, *Rendic. del Circ. mat. de Palermo*, t. XLII, p. 173-205.

mination demandée des x et des u en fonction des X est donc possible d'une infinité de manières.

Les variétés euclidiennes sont donc les seules pour lesquelles la notion de parallélisme de deux directions issues de deux points quelconques M et M′ a une signification *absolue*, c'est-à-dire indépendante du chemin suivi pour aller de M en M′.

7. Revenons au cas général et partons des équations

$$\omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}] \tag{10}$$

qui introduisent d'une manière univoque les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée de l'espace. *Dérivons* ces équations, c'est-à-dire égalons les covariants trilinéaires des deux membres; nous obtenons

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} [\omega'_k \omega_{ki}] - [\omega_k \omega'_{ki}],$$

ou, en remplaçant les ω'_k par leurs valeurs,

$$\sum [\omega_k \Omega_{ki}] = 0, \tag{12}$$

en posant

$$\Omega_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \tag{13}$$

On voit que les expressions Ω_{ij}, qui sont nulles dans le cas euclidien, satisfont simplement aux relations (12) dans le cas général. Ces expressions sont des formes en $dx_1, \ldots, dx_n, du_1, \ldots, du_{\frac{n(n-1)}{2}}$, ou, ce qui revient au même, en $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{ij}$. Posons donc

$$\Omega_{ij} = \sum_{(kl)} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l] + \sum_{l,(lm)} B_{ij}^{klm} [\omega_k \omega_{lm}] + \sum_{(kl),(mn)} C_{ij}^{klmn} [\omega_{kl} \omega_{mn}].$$

En portant dans les relations (12), on voit immédiatement que tous les coefficients C sont nuls. La considération des termes en

$$\omega_h \omega_k \omega_{lm}$$

donne ensuite

$$B_{hi}^{klm} = B_{ki}^{hlm},$$

ce qui montre qu'on peut échanger les premiers indices inférieur et supérieur, sans changer la valeur du coefficient B; d'autre part, l'échange des deux indices inférieurs change manifestement le signe de B. On peut donc écrire les six équations

$$B_{hi}^{klm} = B_{ki}^{hlm}, \qquad B_{kh}^{ilm} = B_{ih}^{klm}, \qquad B_{ik}^{hlm} = B_{hk}^{ilm},$$
$$B_{hk}^{ilm} + B_{kh}^{ilm} = 0, \qquad B_{ki}^{hlm} + B_{ik}^{hlm} = 0, \qquad B_{ih}^{klm} + B_{hi}^{klm} = 0,$$

qui entraînent avec elles la nullité de tous les coefficients B.

Enfin, si l'on annule dans (12) le coefficient du terme en $[\omega_h \omega_k \omega_l]$, on obtient entre les A_{ij}^{kl} la relation

$$A_{hi}^{kl} + A_{ki}^{lh} + A_{li}^{hk} = 0.$$

Il est presque inutile de faire observer d'autre part que l'échange des deux indices inférieurs i, j, ou l'échange des deux indices supérieurs h, l, change le signe de A_{ij}^{hl}.

Finalement, *dans le cas d'une variété non euclidienne, les formules* (10) *sont à compléter par les formules*

$$(14) \qquad \omega'_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega_{kj}] + \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} A_{ij}^{kl} [\omega_k \omega_l],$$

où les quantités $A_{ij}^{kl} = -A_{ji}^{kl} = -A_{ij}^{lk}$ *satisfont aux relations*

$$(15) \qquad A_{hi}^{kl} + A_{ki}^{lh} + A_{li}^{hk} = 0 \qquad (i, h, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Les quantités A_{ij}^{kl} sont les *coefficients de courbure* de Riemann.

8. Pour n'être pas arrêtés plus loin dans nos raisonnements, poursuivons nos calculs. La dérivée (covariant trilinéaire) de Ω_{ij}, calculée d'après la formule (13), est

$$\Omega'_{ij} = -\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega'_{ik} \omega_{kj}] + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik} \omega'_{kj}],$$

ou, en remplaçant ω'_{ik} et ω'_{kj} par leurs valeurs tirées de (13),

$$\Omega'_{ij} = -\sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\Omega_{ik}\omega_{kj}] + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik}\Omega_{kj}]. \tag{16}$$

Cette équation développée à son tour, en remplaçant Ω_{ij} par la valeur $\Sigma A_{ij}^{kl}[\omega_k \omega_l]$, donne les équations

$$\sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} [dA_{ij}^{kl}\omega_k\omega_l] = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho}\omega_{l\rho})\omega_k\omega_l]. \tag{17}$$

On peut donc écrire

$$dA_{ij}^{kl} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho}\omega_{l\rho}) + \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ij}^{kl})_h \omega_h, \tag{18}$$

avec de nouveaux coefficients $(A_{ij}^{kl})_h$ satisfaisant aux relations

$$(A_{ji}^{kl})_h + (A_{ki}^{lj})_h + (A_{li}^{jk})_h = 0, \tag{19}$$

$$(A_{ij}^{kl})_h + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{ij}^{hk})_l = 0, \tag{20}$$

dont les premières proviennent de la dérivation des relations (15) et les dernières de l'égalité des termes en $[\omega_h\omega_k\omega_l]$ dans les deux membres des relations (17).

9. Les équations (18) dérivées donnent à leur tour naissance à des formules qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} d(A_{ij}^{kl})_h = {} & \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_h\omega_{i\rho} + (A_{i\rho}^{kl})_h\omega_{j\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_h\omega_{k\rho} + (A_{ij}^{k\rho})_h\omega_{l\rho} + (A_{ij}^{kl})_\rho\omega_{h\rho}] \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl}A_{i\rho}^{h\sigma} + A_{i\rho}^{kl}A_{j\rho}^{h\sigma} + A_{ij}^{\rho l}A_{k\rho}^{h\sigma} + A_{ij}^{k\rho}A_{l\rho}^{h\sigma})\omega_\sigma \\ & + \sum_{m=1}^{m=n} (A_{ij}^{kl})_{hm}\omega_m, \end{aligned} \tag{21}$$

avec de nouveaux coefficients $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ ne dépendant pas de l'ordre des indices inférieurs h, m et satisfaisant aux relations

$$(22)\qquad (A_{ji}^{kl})_{hm} + (A_{ki}^{lj})_{hm} + (A_{li}^{jk})_{hm} = 0,$$

$$(23)\qquad (A_{ij}^{kl})_{hm} + (A_{ij}^{lh})_{km} + (A_{ij}^{hk})_{lm} = 0,$$

conséquences des relations analogues (19) et (20).

Enfin, une nouvelle dérivation des équations (21) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
(24)\quad d(A_{ij}^{kl})_{hm} = {} & \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_{hm}\,\omega_{i\rho} + (A_{i\rho}^{kl})_{hm}\,\omega_{j\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_{hm}\,\omega_{k\rho} \\
& \qquad + (A_{ij}^{k\rho})_{hm}\,\omega_{l\rho} + (A_{ij}^{kl})_{\rho m}\,\omega_{h\rho} + (A_{ij}^{kl})_{h\rho}\,\omega_{m\rho}] \\
& + \frac{1}{3}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{ij}^{kl})_\rho (A_{h\rho}^{m\sigma} + A_{m\rho}^{h\sigma})\,\omega_\sigma \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=} \varepsilon_\rho [(A_{\rho j}^{kl})_h A_{i\rho}^{m\sigma} + (A_{i\rho}^{kl})_h A_{j\rho}^{m\sigma} + (A_{ij}^{\rho l})_h A_{k\rho}^{m\sigma} \\
& \qquad + (A_{ij}^{k\rho})_h A_{l\rho}^{m\sigma} + (A_{\rho j}^{kl})_m A_{i\rho}^{h\sigma} \\
& \qquad + (A_{i\rho}^{kl})_m A_{j\rho}^{h\sigma} + (A_{ij}^{\rho l})_m A_{k\rho}^{h\sigma} + (A_{ij}^{k\rho})_m A_{l\rho}^{h\sigma}]\,\omega_\sigma \\
& + \frac{1}{6}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho \{ A_{\rho j}^{kl}[(A_{i\rho}^{h\sigma})_m + (A_{i\rho}^{m\sigma})_h] + A_{i\rho}^{kl}[(A_{j\rho}^{h\sigma})_m + (A_{j\rho}^{m\sigma})_h] \\
& \qquad + A_{ij}^{\rho l}[(A_{h\rho}^{k\sigma})_m + (A_{k\rho}^{m\sigma})_h] \\
& \qquad + A_{ij}^{k\rho}[(A_{l\rho}^{h\sigma})_m + (A_{l\rho}^{m\sigma})_h] \}\,\omega_\sigma \\
& + \sum_{r=1}^{r=n} (A_{ij}^{kl})_{hmr}\,\omega_r,
\end{aligned}$$

où les nouveaux coefficients $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ ne dépendent pas de l'ordre des indices extérieurs h, m, r et satisfont aux relations

$$(25)\qquad (A_{ji}^{kl})_{hmr} + (A_{ki}^{lj})_{hmr} + (A_{li}^{jk})_{hmr} = 0,$$

$$(26)\qquad (A_{ij}^{kl})_{hmr} + (A_{ij}^{lh})_{kmr} + (A_{ij}^{hk})_{lmr} = 0.$$

Nous pourrions continuer indéfiniment ces opérations qui nous conduiraient chaque fois à de nouvelles quantités avec un nombre croissant d'indices.

10. Il ne sera pas mauvais, avant d'aller plus loin, de savoir combien, parmi les quantités A_{ij}^{kl}, $(A_{ij}^{kl})_h$, etc., *regardées comme des* *indéterminées liées par les relations* (15), (19), (20), (22), (23), (25), (26), sont indépendantes.

Occupons-nous d'abord des quantités A_{ij}^{kl}. Convenons de désigner par la notation $i \mid hkl$ le premier membre, changé de signe, de la relation (15) :

$$i \mid hkl \equiv A_{ih}^{kl} + A_{ik}^{lh} + A_{il}^{hk}.$$

La relation

$$i \mid hkl - h \mid ikl - k \mid ihl + l \mid ihk = 0$$

donne, après simplifications,

$$A_{ih}^{kl} = A_{kl}^{ih},$$

ce qui montre qu'*on peut échanger les indices inférieurs avec les indices supérieurs.*

Cela posé, on pourra toujours supposer que les indices inférieurs, aussi bien que les indices supérieurs, sont rangés par ordre de grandeur décroissante, et que le plus grand indice inférieur est au moins égal au plus grand indice supérieur; autrement dit, toute quantité A_{ij}^{kl} se ramène à celles pour lesquelles on a

$$i > j, \quad k > l, \quad i \geqq k.$$

Les quantités pour lesquelles ces inégalités sont vérifiées ne sont pas elles-mêmes indépendantes, et l'on peut se ramener à celles pour lesquelles on a en même temps

$$j \geqq l.$$

En effet, supposons qu'on ait

$$i > j, \quad k > l, \quad i \geqq k, \quad j < l,$$

c'est-à-dire

$$i \geqq k > l > j;$$

la relation

$$i \mid jkl \equiv A_{ij}^{kl} + A_{ik}^{lj} - A_{il}^{kj} = 0$$

ramène A_{ij}^{kl} aux deux quantités A_{ik}^{lj} et A_{il}^{kj} pour lesquelles les inégalités exigées sont vérifiées.

Nous conviendrons de dire qu'une expression A_{ij}^{kl} est *normale* lorsque ses indices satisfont aux inégalités précédentes

$$(27) \qquad i > j, \quad k > l, \quad i \geqq k, \quad j \geqq l.$$

Toute expression A_{ij}^{kl} *se ramène à des expressions normales.*

Il est maintenant facile de voir que les *expressions normales sont indépendantes.* Passons pour cela en revue les différents cas qui peuvent se présenter suivant le nombre des indices i, j, k, l *distincts.*

Si deux seulement des quatre indices sont distincts, on aura une seule quantité normale

$$A_{ij}^{ij} \qquad (i > j).$$

Si trois indices sont distincts, $i > j > k$, on aura trois quantités normales

$$A_{ij}^{ik}, \quad A_{ij}^{jk}, \quad A_{ik}^{jk}.$$

Si enfin les quatre indices sont distincts, $i > j > k > l$, on aura deux quantités normales

$$A_{ij}^{kl}, \quad A_{ik}^{jl}.$$

Remarquons maintenant que toute relation $i \mid hkl = 0$ se réduit à une identité si les indices h, k, l ne sont pas tous distincts; par conséquent *les quantités à deux indices distincts n'entrent dans aucune relation.* Les quantités à trois indices distincts $i > j > k$ figureront dans les relations

$$i \mid ijk = 0, \qquad j \mid ijk = 0, \qquad k \mid ijk = 0,$$

dont chacune exprime la loi d'échange des indices inférieurs avec les indices supérieurs et qui par suite n'entraînent aucune relation entre les quantités normales.

Enfin les relations $i \mid jkl = 0$ où figurent quatre indices distincts donnés n'entraînent, il est facile de le vérifier, aucune relation entre les quantités normales.

Les quantités A_{ij}^{kl} *normales sont donc indépendantes,* et leur nombre total est

$$\begin{aligned} C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 &= \frac{n(n-1)}{2} + 3\,\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \\ &= \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

11. Passons aux quantités $(A^{kl}_{ij})_h$ que nous conviendrons d'appeler les quantités A *du premier ordre* (les quantités A^{kl}_{ij} étant d'ordre zéro). Convenons encore de dire que $(A^{kl}_{ij})_h$ est *dérivée* de A^{kl}_{ij}. Les relations (19) nous permettent de *ramener les expressions du premier ordre à celles qui sont dérivées d'une expression normale d'ordre zéro.*

Nous dirons qu'une expression $(A^{kl}_{ij})_h$ du premier ordre est *normale* si ses indices, en outre des inégalités (27) qui expriment qu'elle est dérivée d'une quantité normale d'ordre zéro, satisfont à l'inégalité supplémentaire

$$(28) \qquad\qquad k \geqq h.$$

Toute expression du premier ordre non normale se ramène à des expressions normales avec diminution de l'indice extérieur h. Supposons en effet

$$i > j, \qquad k > l, \qquad i \geqq k, \qquad j \geqq l, \qquad k < h;$$

la relation

$$ij \mid klh \equiv (A^{kl}_{ij})_h + (A^{lh}_{ij})_k + (A^{hk}_{ij})_l = 0$$

ramène l'expression considérée à d'autres expressions pour lesquelles l'indice extérieur est diminué; chacune d'elles peut être ramenée, sans changement de l'indice extérieur, à d'autres dérivées d'expressions normales d'ordre zéro. On raisonnera sur chacune de ces expressions comme sur la première jusqu'à ce qu'on ne puisse plus diminuer l'indice extérieur; on aura donc finalement des expressions toutes normales.

Considérons maintenant une quelconque des relations (20)

$$ij \mid klh \equiv (A^{kl}_{ij})_h + (A^{lh}_{ij})_k + (A^{hk}_{ij})_l = 0,$$

où nous pouvons toujours supposer qu'on a

$$i > j, \quad k > l > h.$$

Cette relation sera dite *normale* si l'on a en même temps

$$i \geqq l, \qquad j \geqq h.$$

On voit qu'à une relation normale correspond une expression A_{ij}^{lh} normale, mais une expression dérivée $(A_{ij}^{lh})_k$ non normale. *Il y a exactement autant d'expressions non normales du premier ordre dérivées d'une expression normale d'ordre zéro qu'il y a de relations normales.*

Remarquons en troisième lieu que *toute relation* (20) *non normale est une conséquence des relations normales.* Prenons en effet une relation non normale

$$ij \mid klh = 0 \qquad (i > j,\ k > l > h)$$

et supposons d'abord $j \geqq h$, mais $i < l$; on a donc les inégalités

$$k > l > i > j \geqq h.$$

L'identité facile à vérifier

$$ij \mid klh - ki \mid ljh + li \mid kjh + kl \mid ijh - lj \mid kih + kj \mid lih \equiv 0$$

ramène la relation donnée à des relations normales.

Supposons maintenant $j < h$, c'est-à-dire supposons

$$k > l > h > j, \quad i > j;$$

l'identité facile à vérifier

$$ij \mid klh - ik \mid lhj - il \mid khj + ih \mid klj \equiv 0$$

ramène la relation donnée à d'autres qui rentrent dans le premier cas examiné.

De tout ce qui précède il résulte que, les relations (20) se ramenant uniquement aux relations normales, *ces relations normales sont indépendantes;* sinon, en effet, il serait impossible, au moyen des relations (20), de tirer les expressions non normales, qui sont en nombre égal aux relations normales, en fonction des expressions normales. On voit de plus qu'*il n'y a aucune relation entre les expressions normales.*

Le dénombrement des expressions normales du premier ordre ne présente aucune difficulté. On calcule facilement le nombre des expressions normales formées avec 2, ou 3, ou 4, ou 5 indices distincts : on trouve respectivement les nombres

$$2, \quad 9, \quad 12, \quad 5;$$

par suite le nombre des expressions normales du premier ordre est

$$2C_n^2 + 9C_n^3 + 12C_n^4 + 5C_n^5 = \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}.$$

12. Les mêmes raisonnements et les mêmes conclusions s'étendent aux expressions *du second ordre* de la forme $(A_{ij}^{kl})_{hm}$. On peut, en vertu des relations (22), ramener ces expressions à celles qui sont dérivées d'expressions normales d'ordre zéro, et l'on peut aussi les ramener au cas $h \overline{\gtrless} m$. Nous conviendrons de dire qu'une telle expression est normale si, *en outre des conditions précédentes*, elle satisfait à l'inégalité

$$(29) \qquad k \overline{\gtrless} h.$$

1° *Toute expression non normale du second ordre se ramène à des expressions normales avec diminution de l'un au moins des indices extérieurs.* On peut d'abord, en effet, ramener l'expression $(A_{ij}^{kl})_h$ à être normale avec diminution de l'indice h. Les nouvelles expressions qui s'en déduisent par addition du second indice extérieur m seront traitées comme l'expression primitive après échange, s'il y a lieu, de l'ordre des deux indices extérieurs. On continuera ainsi tant que cela sera possible et l'on sera finalement ramené à des expressions toutes normales.

2° Désignons par le symbole $ij|klh|m$, le premier membre de la relation

$$ij\,|\,klh\,|\,m \equiv (A_{ij}^{kl})_{hm} + (A_{ij}^{lh})_{km} + (A_{ij}^{hk})_{lm} = 0,$$

où l'on peut toujours supposer

$$i > j, \quad k > l > h.$$

Cette relation sera dite *normale* si l'on a

$$i > j, \qquad k > l > h, \qquad i \geqq l, \qquad j \geqq h, \qquad k \geqq m,$$

c'est-à-dire si l'expression $(A_{ij}^{lh})_{km}$ est dérivée d'une expression normale d'ordre zéro, mais sans être normale elle-même. *Il y a évidemment autant d'expressions non normales dérivées d'expressions normales d'ordre zéro qu'il y a de relations normales.*

3° *Toute relation non normale est une conséquence des relations normales.* On peut en effet, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, ramener la relation donnée, *sans altération du dernier indice m*, à des relations pour lesquelles

$$i > j, \qquad k > l > h, \qquad i \geqq l, \qquad j \geqq h.$$

Si maintenant $k < m$, on tiendra compte de l'identité, facile à vérifier,

$$ij \mid klh \mid m - ij \mid mkl \mid h + ij \mid mkh \mid l - ij \mid mlh \mid k = 0,$$

pour se ramener à de nouvelles relations à dernier indice moindre. On raisonnera sur ces nouvelles relations comme sur la première jusqu'à ce qu'on soit ramené à des relations normales.

La conclusion est la même que précédemment. Les relations normales, les seules qu'on peut se borner à considérer, sont indépendantes, *et les expressions normales ne sont liées par aucune relation.*

Ces conclusions s'étendraient aux expressions du troisième ordre $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$; une telle expression est normale si l'on a

$$(30) \qquad i > j, \qquad k > l, \qquad i \geqq k, \qquad j \geqq l, \qquad k \geqq h \geqq m \geqq r.$$

Les invariants d'une forme différentielle quadratique.

13. Abordons maintenant le problème des invariants d'un ds^2 vis-à-vis d'un changement de variables arbitraire.

Il s'agit en somme de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux formes différentielles quadratiques à n variables puissent être transformées l'une dans l'autre par un changement de variables. Décomposons la première de la manière la plus générale possible en une somme $\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2$ de n carrés, les ω_i étant linéaires par rapport aux différentielles des n variables données $x_1, \ldots, x_n$, avec des coefficients fonctions de ces variables et de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires nouvelles $u_1, \ldots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$. Toute forme *équivalente* à n variables $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ admettra une décomposition correspondante $\Sigma\varepsilon_i\bar{\omega}_i^2$, où interviendront $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires nouvelles $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\frac{n(n-1)}{2}}$. On aura

$$\omega_i = \bar{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en choisissant pour les $\bar{x}_i$ les valeurs en fonction des x_i qui réalisent le passage de la première forme différentielle à la seconde et en prenant pour les $\bar{u}_i$ des fonctions convenablement choisies des x et des u. Autrement dit, *il existera un changement de variables portant sur les $\frac{n(n+1)}{2}$ variables x et u transformant chacune à chacune les n formes linéaires ω_i correspondant au premier ds^2 donné dans les n formes linéaires $\bar{\omega}_i$ correspondant au second ds^2 donné.*

Réciproquement, supposons qu'en décomposant les deux formes quadratiques données, chacune de la manière la plus générale possible, en deux sommes de n carrés

$$\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2 \quad \text{et} \quad \Sigma\varepsilon_i\bar{\omega}_i^2,$$

il existe un changement de variables portant sur les x et les u et transformant chacune à chacune les formes ω_i dans les formes $\bar{\omega}_i$.

On voit d'abord que *dans ce changement de variables les $\bar{x}$ ne dépendent que des x et non des u.* En effet, les égalités

$$\omega_i = \bar{\omega}_i,$$

où n'interviennent que les différentielles des variables x et $\bar{x}$, peuvent être résolues par rapport à $d\bar{x}_1, \ldots, d\bar{x}_n$, qui sont ainsi exprimées linéairement au moyen de $dx_1, \ldots, dx_n$; par suite, chacune des variables $\bar{x}$ est bien une fonction des x indépendante des u. Cela étant, le changement des variables x ainsi défini transforme effectivement l'une dans l'autre les deux formes données.

14. La recherche des invariants d'une forme différentielle quadratique va alors être obtenue en deux temps. Considérons d'abord les $\frac{n(n+1)}{2}$ variables x et u; nous chercherons les invariants du système des expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$, vis-à-vis d'un changement de variables quelconque; nous donnerons à ces invariants le nom d'*invariants relatifs*. *Les invariants absolus, c'est-à-dire ceux qui intéressent le problème primitif, s'obtiendront en cherchant tous les invariants relatifs indépendants des variables u.*

Les expressions ω_i sont elles-mêmes des invariants (ou plutôt, comme on dit d'habitude, des *covariants*) relatifs, tandis que la forme $\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2$ est évidemment un covariant absolu. Les expressions ω_{ij} sont aussi des covariants relatifs, puisqu'elles sont déterminées d'une manière unique par les dérivées ω'_i qui sont covariantes au même titre que les ω_i. Enfin les dérivées ω'_{ij} étant aussi covariantes, les formules (14) conduisent à un premier système d'invariants relatifs finis, à savoir les coefficients A_{ij}^{kl} de Riemann; ils sont au nombre de $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. Ce sont les *invariants fondamentaux*.

Les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff covariantes ω_i, ω_{ij} permettent de déduire d'un invariant fini quelconque I une série d'*invariants dérivés* donnés par la formule

$$dI = I_1\omega_1 + \ldots + I_n\omega_n + \sum_{(ij)} I_{ij}\omega_{ij};$$

ils sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$. Chacun de ceux-ci peut à son tour donner naissance à des invariants dérivés (invariants dérivés du second ordre de I) et ainsi de suite. En employant ce procédé de dérivation aux invariants fondamentaux A_{ij}^{kl}, nous obtenons une infinité d'invariants nouveaux qui sont les $(A_{ij}^{kl})_h$, $(A_{ij}^{kl})_{hm}$, etc.

Nous allons montrer qu'ils constituent le système complet des invariants relatifs.

15. Admettons, ce qui est vrai en général, comme cela sera démontré plus loin, que parmi les $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ invariants fondamentaux, il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ indépendants (c'est-à-dire qui, pour une forme différentielle arbitraire, ne soient liés par aucune relation); appelons-les invariants fondamentaux *principaux.* Les autres invariants fondamentaux (*secondaires*) et les invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux seront, pour chaque forme différentielle quadratique, des fonctions déterminées de ces invariants principaux.

Pour deux formes différentielles équivalentes supposées décomposées de la manière la plus générale possible en carrés, ces fonctions sont manifestement les mêmes. Mais *réciproquement,* supposons que pour les deux formes les invariants secondaires et les invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux soient *les mêmes fonctions* des invariants principaux. Établissons alors entre les variables x et u d'une part, et les variables $\bar{x}$ et $\bar{u}$ d'autre part, les $\frac{n(n+1)}{2}$ relations indépendantes obtenues en égalant chacun à chacun les invariants fondamentaux principaux des deux formes. Le changement de variables ainsi défini entraîne par hypothèse l'égalité chacun à chacun des invariants fondamentaux secondaires et des invariants dérivés du premier ordre des invariants principaux.

Les formules

$$dI_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} I_{\alpha k}\,\omega_k + \sum_{(kl)}^{1,\ldots,n} I_{\alpha kl}\,\omega_{kl} \qquad \left[\alpha = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\right],$$

où les I_α sont les invariants principaux, montrent alors que le changement de variables considéré entraîne les égalités

$$\omega_k = \bar{\omega}_k, \qquad \omega_{kl} = \bar{\omega}_{kl},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les quantités A_{ij}^{kl} et leurs dérivées des différents ordres constituent donc bien le système complet des invariants (relatifs).

16. Il reste, pour être complet, à combler la lacune du raisonnement précédent. Nous allons le faire en recherchant en même temps le *degré d'arbitraire des fonctions qui expriment dans le cas général les invariants non principaux au moyen des invariants principaux.*

Partons pour cela des équations (18) et (21), ou plutôt des équations obtenues en éliminant les ω_i et les ω_{ij} entre ces équations et en y regardant les A_{ij}^{kl}, $(A_{ij}^{kl})_h$, $(A_{ij}^{kl})_{hm}$, comme des indéterminées liées par les relations (15), (19), (20), (22), (23); cela revient à dire qu'on y exprime toutes ces quantités au moyen des quantités que nous avons appelées *normales*, et que ces quantités normales sont regardées comme des indéterminées.

Une première remarque importante est qu'on peut trouver $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (18) permettant de tirer les ω_i et les ω_{ij}. Il suffit par exemple d'associer à chaque combinaison (ij) de deux indices $1, 2, \ldots, n$ un indice k différent de i, j et n et de considérer celles des équations (18) qui donnent dA_{ij}^{ik}; on adjoindra à ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations les n équations qui donnent les dA_{ni}^{ni} et $dA_{n,n-1}^{n,n-2}$. Les seconds membres de ces $\frac{n(n+1)}{2}$ équations sont linéairement indépendants en ω_i et ω_{ij}: il suffit pour s'en convaincre de remarquer qu'ils le sont *en particulier* lorsqu'on annule toutes les expressions A_{ij}^{kl}, sauf les A_{ij}^{ij}, et toutes les expressions $(A_{ij}^{kl})_h$, sauf les $(A_{ni}^{ni})_i$ et $(A_{n,n-1}^{n,n-2})_n$. Les seules quantités non nulles étant normales sont indépendantes. Or, dans ces conditions, on obtient

$$\begin{aligned} dA_{ik}^{jk} &= (\varepsilon_j A_{jk}^{jk} - \varepsilon_i A_{ik}^{ik})\,\omega_{ij}, \\ dA_{ni}^{ni} &= (A_{ni}^{ni})_i\,\omega_i, \\ dA_{n,n-1}^{n,n-2} &= (A_{n,n-1}^{n,n-2})_n\,\omega_n, \end{aligned}$$

et les seconds membres sont manifestement indépendants.

Cette première remarque étant faite, le système obtenu en éliminant les ω_i et les ω_{ij} entre les équations (18) et (21) pourra être considéré comme un système de Pfaff où les variables indépendantes seront les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités A_{ij}^{kl} correspondant aux $\frac{n(n+1)}{2}$ équations qui ont servi à tirer les ω_i et les ω_{ij} (quantités *principales*), et où les variables dépendantes seront les autres quantités A_{ij}^{kl}, les $(A_{ij}^{kl})_h$ et les $(A_{ij}^{kl})_{hm}$, *ces quantités étant toujours supposées exprimées au moyen des quantités normales.*

Il est facile de voir que si l'on calculait les covariants ω'_i et ω'_{ij} des expressions ω_i et ω_{ij}, on retrouverait les expressions (10) et (14). En effet, prenons l'une quelconque des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (18) principales et dérivons-la. D'après la manière même dont on a obtenu les équations (21), nous aurons, en tenant compte de ces équations (21),

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho j}^{kl}\Pi_{i\rho} + A_{i\rho}^{kl}\Pi_{j\rho} + A_{ij}^{\rho l}\Pi_{k\rho} + A_{ij}^{k\rho}\Pi_{l\rho}) + \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ij}^{kl})_h \Pi_h = 0,$$

en posant

$$\Pi_h = \omega'_h - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_h [\omega_k \omega_{kh}],$$

$$\Pi_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{ik}\omega_{kj}] - \sum_{(kl)}^{1,\dots,n} A_{ij}^{kl}[\omega_k \omega_l].$$

D'après les hypothèses mêmes faites sur les équations principales, on en déduit

$$\Pi_h = 0, \qquad \Pi_{ij} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Revenons maintenant à notre système de Pfaff et dérivons ses différentes équations. Les équations (18) dérivées sont identiquement vérifiées si l'on tient compte des équations (21). Quant à ces dernières, leur dérivation conduit manifestement [*cf.* formule (24)] aux équations

$$\sum_{m=1}^{m=n} [\omega_m (\varpi_{ij}^{kl})_{hm}] = 0 \qquad (i, j, k, l, h = 1, 2, \dots, n), \tag{31}$$

en posant

$$
\begin{aligned}
(\varpi_{ij}^{kl})_{hm} = (\varpi_{ij}^{kl})_{mh} & \\
= \quad d(\mathrm{A}_{ij}^{kl})_{hm} - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho \big[& (\mathrm{A}_{\rho j}^{kl})_{hm}\,\omega_{i\rho} + (\mathrm{A}_{i\rho}^{kl})_{hm}\,\omega_{j\rho} + (\mathrm{A}_{ij}^{\rho l})_{hm}\,\omega_{k\rho} \\
& + (\mathrm{A}_{ij}^{k\rho})_{hm}\,\omega_{l\rho} + (\mathrm{A}_{ij}^{kl})_{\rho m}\,\omega_{h\rho} + (\mathrm{A}_{ij}^{kl})_{h\rho}\,\omega_{m\rho}\big] \\
- \frac{1}{3} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho & (\mathrm{A}_{ij}^{kl})_\rho (\mathrm{A}_{h\rho}^{m\sigma} + \mathrm{A}_{m\rho}^{h\sigma})\,\omega_\sigma \\
- \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho \big[& (\mathrm{A}_{\rho j}^{kl})_h \mathrm{A}_{i\rho}^{m\sigma} + (\mathrm{A}_{i\rho}^{kl})_h \mathrm{A}_{j\rho}^{m\sigma} + (\mathrm{A}_{ij}^{\rho l})_h \mathrm{A}_{k\rho}^{m\sigma} \\
& + (\mathrm{A}_{ij}^{k\rho})_h \mathrm{A}_{l\rho}^{m\sigma} + (\mathrm{A}_{\rho j}^{kl})_m \mathrm{A}_{i\rho}^{h\sigma} \\
& + (\mathrm{A}_{i\rho}^{kl})_m \mathrm{A}_{j\rho}^{h\sigma} + (\mathrm{A}_{ij}^{\rho l})_m \mathrm{A}_{k\rho}^{h\sigma} + (\mathrm{A}_{ij}^{k\rho})_m \mathrm{A}_{l\rho}^{h\sigma}\big]\,\omega_\sigma \\
- \frac{1}{6} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho \Big\{ & \mathrm{A}_{\rho j}^{kl}[(\mathrm{A}_{i\rho}^{h\sigma})_m + (\mathrm{A}_{i\rho}^{m\sigma})_h] + \mathrm{A}_{i\rho}^{kl}[(\mathrm{A}_{j\rho}^{h\sigma})_m + (\mathrm{A}_{j\rho}^{m\sigma})_h] \\
& + \mathrm{A}_{ij}^{\rho l}[(\mathrm{A}_{k\rho}^{h\sigma})_m + (\mathrm{A}_{k\rho}^{m\sigma})_h] + \mathrm{A}_{ij}^{k\rho}[(\mathrm{A}_{l\rho}^{h\sigma})_m + (\mathrm{A}_{l\rho}^{m\sigma})_h]\Big\}\,\omega_\sigma.
\end{aligned}
$$

17. C'est la forme même des équations (31) qui va nous permettre de démontrer que *le système de Pfaff considéré est en involution.* Il importe d'abord de remarquer que les expressions $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$ sont liées exactement par les mêmes relations que les quantités $(\mathrm{A}_{ij}^{kl})_{hm}$. D'autre part, la résolution des équations (31) donne évidemment

$$
(\varpi_{ij}^{kl})_{hm} = \sum_{r=1}^{r=n} (a_{ij}^{kl})_{hmr}\,\omega_r,
$$

où les $(a_{ij}^{kl})_{hmr}$ sont liés par les mêmes relations que les $(\mathrm{A}_{ij}^{kl})_{hmr}$ (ce sont du reste les mêmes quantités).

Appliquons maintenant la théorie des systèmes de Pfaff. Désignons par

s_1 le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{h1}$,

$s_1 + s_2$ le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{h2}$ et $(\varpi_{ij}^{kl})_{h1}$,

. . . . ,

$s_1 + s_2 + \ldots + s_i$ le nombre des expressions indépendantes de la forme $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$ avec $m \leqq i$,

. . . . ,

$s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ le nombre total des expressions indépendantes $(\varpi_{ij}^{kl})_{hm}$.

Comme toute expression $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ se ramène à des expressions normales avec diminution soit de l'un des indices h, m, soit de chacun de ces deux indices, on voit immédiatement que :

s_1 est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{h1}$,
s_2 est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{h2}$,
. . . . ,
s_n est le nombre des expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{hn}$.

Pour que le système soit en involution, il faut et il suffit que le nombre des coefficients $(a_{ij}^{kl})_{hmr}$ *indépendants* soit égal à

$$s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n.$$

Or ce nombre est celui des quantités $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ qui sont *normales*. Celles de ces expressions normales pour lesquelles on a $r = 1$ sont en nombre égal aux expressions $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ normales, c'est-à-dire

$$s'_1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_n;$$

celles des expressions $(A_{ij}^{kl})_{hmr}$ normales pour lesquelles $r = 2$ proviennent des

$$s'_2 = s_2 + s_3 + \ldots + s_n$$

expressions normales $(A_{ij}^{kl})_{hm}$ pour lesquelles $m \geqq 2$, et ainsi de suite. La condition

$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_n = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n$$

est effectivement vérifiée et le *système de Pfaff est en involution*.

18. La valeur numérique de s_n est importante parce qu'elle indique le nombre des fonctions arbitraires de n arguments dont dépend la solution générale du système de Pfaff. Or s_n est le nombre des expressions *normales* $(A_{ij}^{kl})_{hm}$; on a donc nécessairement

$$i = k = h = n,$$

et s_n est par suite le nombre des combinaisons avec répétition (jl) de $n-1$ lettres deux à deux

$$s_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La solution générale du système de Pfaff considéré dépend donc de $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de n arguments.

A toute solution du système de Pfaff correspondent, d'après ce qui a été vu plus haut, $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} satisfaisant aux relations (10) et (14). Convenons de dire que deux formes différentielles quadratiques décomposées en carrés appartiennent à la même classe lorsqu'il existe un changement de variables transformant chacune à chacune les expressions ω_i relatives à la première forme dans les expressions ϖ_i relatives à la seconde. Nous voyons qu'à *toute classe de formes différentielles quadratiques décomposées en carrés correspond une solution du système de Pfaff et réciproquement. Les relations qui lient les invariants relatifs d'une forme quadratique arbitraire décomposée en carrés contiennent donc $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de n arguments* (*et naturellement d'autres fonctions arbitraires d'un moindre nombre d'arguments*).

La propriété du système de Pfaff (18) et (21) d'être en involution conduit à une autre conclusion intéressante. Ce système admet en effet au moins une solution correspondant à des valeurs numériques arbitraires des variables, tant dépendantes qu'indépendantes. Il en est de même pour les systèmes de Pfaff prolongés par l'introduction des invariants relatifs des ordres supérieurs. Par conséquent, *il existe toujours au moins une forme quadratique différentielle décomposée en carrés, telle que, pour des valeurs numériques convenablement choisies des variables x et u, les invariants* *relatifs normaux correspondants prennent des valeurs numériques arbitrairement données.*

Nous connaissons donc, non seulement le système complet des invariants relatifs, mais encore le système complet des invariants relatifs *indépendants*.

19. Si nous nous donnons une forme différentielle quadratique à n variables sous la forme

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j,$$

avec des coefficients g_{ij} fonctions indéterminées des x, sa décomposition en carrés

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \omega_i^2$$

nous donnera des expressions de Pfaff ω_i linéaires en $dx_1, \ldots, dx_n$, avec des coefficients qui dépendront d'une manière déterminée des g_{ij} et de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables auxiliaires u. Les composantes ω_{ij} de la rotation instantanée de l'espace, provenant d'une dérivation, contiendront comme coefficients les dérivées partielles du premier ordre des g_{ij}; quant aux invariants fondamentaux A_{ij}^{kl}, comme ils proviennent de la dérivation des ω_{ij}, ils contiendront linéairement les dérivées partielles du second ordre des g_{ij} (ainsi que leurs dérivées du premier ordre et ces fonctions elles-mêmes, mais non plus linéairement).

De même les $(A_{ij}^{kl})_h$ contiendront linéairement les dérivées partielles du troisième ordre des g_{ij} et ainsi de suite.

Il est important de savoir si les $\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}$ invariants normaux $(A_{ij}^{kl})_h$ sont des fonctions *indépendantes* des dérivées partielles du troisième ordre des g_{ij}, et plus généralement si les invariants normaux, pris jusqu'à un certain ordre p, sont des fonctions indépendantes des dérivées partielles des g_{ij} du

$3^{\text{ième}}$ au $(p+2)^{\text{ième}}$ ordre inclus. Cela est vraisemblable, mais il faut le démontrer rigoureusement.

Partons pour cela des expressions ω_i formées comme il a été dit plus haut et *où nous regarderons les g_{ij} comme des indéterminées.* On peut évidemment écrire

$$(32) \qquad \omega'_i = \varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{ki}]$$

avec n^2 expressions de Pfaff ω_{ij} qui dépendent linéairement des dx, des du et des dg_{ij}. Ces expressions ne sont pas déterminées d'une manière univoque : *nous les prendrons les plus générales possible,* en introduisant des indéterminées auxiliaires nouvelles qui seront évidemment en nombre $\frac{n^2(n+1)}{2}$, car de tout choix possible des ω_{ij} on déduit le choix le plus général en ajoutant à ω_{ij} l'expression

$$\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{kij} \omega_k,$$

où les indéterminées α_{kij} satisfont aux seules conditions

$$\alpha_{kij} = \alpha_{ikj}.$$

Les équations (32) dérivées conduisent aux formules

$$(33) \qquad \omega'_{ji} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k [\omega_{jk} \omega_{ki}] + \sum [\omega_k \omega_{kji}]$$

avec de nouvelles expressions de Pfaff $\omega_{kji} = \omega_{jki}$ linéaires par rapport aux dx, du, dg_{ij} et $d\alpha_{kij}$. Ces expressions, si on les choisit de la manière la plus générale possible, font intervenir à leur tour de nouvelles indéterminées α_{lkji} dans lesquelles l'ordre des trois premiers indices est indifférent.

Les équations (33) donnent, par dérivation, comme le montre un calcul facile,

$$(34) \quad \omega'_{kji} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [\omega_{k\rho} \omega_{\rho ji}] + \varepsilon_\rho [\omega_{j\rho} \omega_{k\rho i}] + \varepsilon_\rho [\omega_{i\rho} \omega_{kj\rho}] + \sum_{l=1}^{l=n} [\omega_l \omega_{lkji}],$$

avec de nouvelles expressions de Pfaff ω_{lkji}, dans lesquelles l'ordre des trois premiers indices l, k, j peut être changé sans altérer l'expression.

Une nouvelle dérivation donne

$$
(35) \quad \begin{aligned} \omega'_{lkji} = & \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho \big\{ [\omega_{lk\rho}\omega_{\rho ji}] + [\omega_{lj\rho}\omega_{k\rho i}] + [\omega_{li\rho}\omega_{kj\rho}] \\ & \quad + [\omega_{l\rho}\omega_{\rho kji}] + [\omega_{k\rho}\omega_{l\rho ji}] + [\omega_{j\rho}\omega_{lk\rho i}] + [\omega_{i\rho}\omega_{lkj\rho}] \big\} \\ & + \sum_{m=1}^{m=n} [\omega_m \omega_{mlkji}] \end{aligned}
$$

avec de nouvelles expressions ω_{mlkji}, et ainsi de suite.

20. Ces formules générales étant établies, *si l'on suppose maintenant que les g_{ij} sont des fonctions des seules variables x*, on pourra (n° **5**), toujours supposer qu'on a

$$
(36) \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0;
$$

les formules (33), comparées aux formules (14), nous donneront ensuite

$$
\sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k \omega_{kji}] = \sum_{(kl)}^{1,\dots,n} A_{ji}^{kl} [\omega_k \omega_l],
$$

ce qui permettra d'écrire

$$
(37) \qquad \omega_{kji} = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{l=n} (A_{ji}^{kl} + A_{ki}^{jl})\, \omega_l,
$$

formule dans le second membre de laquelle les indices k et j entrent bien symétriquement. Ces équations dérivées donnent, en tenant compte des équations (34) et (18),

$$
\sum_{l=1}^{l=n} [\omega_l \omega_{lkji}] = \frac{1}{3} \sum_{(lm)}^{1,\dots,n} [(A_{ji}^{km})_l + (A_{ki}^{jm})_l - (A_{ji}^{kl})_m - (A_{ki}^{jl})_m] [\omega_l \omega_m],
$$

ce qui permettra d'écrire

$$(38)\qquad \omega_{lkji} = \frac{1}{12}\sum_{m=1}^{m=n}\left[(A_{ij}^{km})_l + (A_{ik}^{jm})_l + (A_{ij}^{lm})_k + (A_{il}^{jm})_k + (A_{ik}^{lm})_j + (A_{il}^{km})_j\right]\omega_m;$$

formule dans le second membre de laquelle les indices j, k et l entrent symétriquement. Les formules (36), (37), (38) sont compatibles avec des fonctions *arbitraires* g_{ij} des x.

21. Revenons maintenant à notre point de vue primitif du n° **19** où les g_{ij}, α_{kij}, etc. sont des *indéterminées*. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations

$$(36)\qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

expriment que les indéterminées g_{ij} ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_n$; elles sont donc équivalentes à des équations de la forme

$$(36')\qquad dg_{ij} - \sum_{k=1}^{k=n} g_{ij}^{(k)}\, dx_k = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $g_{ij}^{(k)}$ sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i et ω_{ij}, et *nous savons d'avance que les quantités x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$ sont indépendantes.*

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (36′) sont

$$\sum_{k=1}^{k=n} [dx_k\, dg_{ij}^{(k)}],$$

tandis que ceux des premiers membres des équations (36) sont, en tenant compte de ces équations elles-mêmes et utilisant les formules (33),

$$\sum_{k=1}^{k=n} [\omega_k(\omega_{kji} + \omega_{kij})].$$

Il en résulte que les expressions $\omega_{kji} + \omega_{kij}$, à des combinaisons linéaires près des ω_k et des premiers membres des équations (36), c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx et des dg_{ij}, doivent être linéaires par rapport aux $dg_{ij}^{(k)}$ et, de plus, que *par* *rapport aux* $dg_{ij}^{(k)}$, *il doit y en avoir autant de linéairement indépendantes qu'il y a de différentielles* $dg_{ij}^{(k)}$, *c'est-à-dire* $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Or, d'après l'égalité de ω_{kji} et de ω_{jki}, on voit facilement que toutes les expressions ω_{kji} se déduisent linéairement des expressions $\omega_{kji}+\omega_{kij}$, et leur nombre est précisément $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Par suite, *chaque expression* ω_{kij} *est linéaire en* dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k)}$ *et, par rapport aux* $dg_{ij}^{(k)}$, *les* $\frac{n^2(n+1)}{2}$ *expressions* ω_{kij} *sont linéairement indépendantes.*

Introduisons maintenant $\frac{n^2(n-1)}{12}$ *indéterminées* A_{ij}^{kl} liées par les relations (15) et considérons les équations

$$(37)\qquad \omega_{kji}=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{l=n}(A_{ji}^{kl}+A_{ki}^{jl})\omega_l.$$

D'après ce qui vient d'être dit, et d'après ce qui a été vu au numéro précédent, le système formé des équations (36) et (37) est équivalent au système formé des équations (36′) et des nouvelles équations

$$(37')\qquad dg_{ij}^{(k)}-\sum_{l=1}^{l=n}g_{ij}^{(kl)}dx_l=0,$$

où les $g_{ij}^{(kl)}=g_{ij}^{(lk)}$ sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i, les ω_{ij} et les ω_{kji}, ainsi que des indéterminées A_{ij}^{kl}, et *nous savons d'avance que les* $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *quantités* $g_{ij}^{(kl)}$ *sont indépendantes entre elles et indépendantes des* x, u, g_{ij} *et* $g_{ij}^{(k)}$.

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations du système (36′) et (37′) se réduisent, en tenant compte de ces équations, à

$$\sum_{l=1}^{l=n}[dx_l dg_{ij}^{(kl)}].$$

Si l'on effectue la même opération sur le système (36) et (37), on obtient, en utilisant les formules (34),

$$\sum_{l=1}^{l=n}\left[\omega_l\left(\omega_{lkji}-\frac{1}{3}\varpi_{ji}^{kl}-\frac{1}{3}\varpi_{ki}^{jl}\right)\right],$$

en posant [*cf.* formule (18)]

$$\varpi_{ji}^{kl} = dA_{ji}^{kl} - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho i}^{kl}\omega_{j\rho} + A_{j\rho}^{kl}\omega_{i\rho} + A_{ji}^{\rho l}\omega_{k\rho} + A_{ji}^{k\rho}\omega_{l\rho}).$$

Il résulte de là qu'à des combinaisons linéaires près des ω_i et des premiers membres des équations (36) et (37), c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k)}$, les expressions

$$\omega_{lkji} - \frac{1}{3}\varpi_{ji}^{kl} - \frac{1}{3}\varpi_{ki}^{jl} \tag{39}$$

sont des combinaisons linéaires des $dg_{ij}^{(kl)}$ et, de plus, qu'il y en a exactement autant de linéairement indépendantes qu'il y a de différentielles $dg_{ij}^{(kl)}$, c'est-à-dire $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Or si l'on effectue sur l'expression (39) deux permutations circulaires successives sur les indices j, k, l et qu'on ajoute les deux expressions obtenues à l'expression primitive, on obtient $3\omega_{lkji}$; on voit de même que tous les ϖ_{ji}^{kl}, se déduisent linéairement des expressions (39). Or les expressions ω_{lkji} sont au nombre de

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6},$$

les ϖ_{ji}^{kl} au nombre de

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12};$$

les expressions (39) indépendantes sont donc en nombre total

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n^2(n^2-1)}{12} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Par conséquent, *les expressions ω_{lkji} et ϖ_{ji}^{kl} sont linéairement indépendantes par rapport aux $dg_{ij}^{(kl)}$* (et dépendent en outre des dx, dg_{ij}, $dg_{ij}^{(k)}$). Si nous portons en particulier notre attention sur les expressions ϖ_{ij}^{kl} et si nous remarquons que ces expressions sont égales à dA_{ij}^{kl}, à des combinaisons linéaires près des ω_{ij}, c'est-à-dire à des combinaisons linéaires près des dx, du et dg_{ij}, nous voyons qu'*il ne peut exister entre les différentielles des invariants relatifs* *fondamentaux, considérés comme fonctions des* x, u, g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$, *aucune relation indépendante des dérivées partielles du second ordre* $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$.

Autrement dit, *les invariants fondamentaux (normaux) sont des fonctions indépendantes des dérivées partielles du second ordre des coefficients* g_{ij}.

Introduisons maintenant $\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}$ *indéterminées* nouvelles $(A_{ij}^{kl})_h$ assujetties uniquement à satisfaire aux relations (19) et (20) et considérons le système formé des équations (36), (37) et

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi_{ji}^{kl} &= \sum_{h=1}^{h=n} (A_{ji}^{kl})_h \omega_h, \\ \omega_{lkji} &= \frac{1}{12}\sum_{h=1}^{h=n} [(A_{ij}^{kh})_l + (A_{ik}^{jh})_l + (A_{ij}^{lh})_k + (A_{il}^{jh})_k + (A_{ik}^{lh})_j + (A_{il}^{kh})_j]\,\omega_h. \end{aligned}\right.$$

D'après ce qui vient d'être dit et d'après ce qui a été vu au numéro précédent, ce système est équivalent au système formé des équations (36′), (37′) et

$$(38')\qquad dg_{ij}^{(kl)} - \sum_{h=1}^{h=n} g_{ij}^{(klh)}\, dx_h = 0,$$

où les $g_{ij}^{(klh)}$, dans lesquelles l'ordre des indices supérieurs est indifférent, sont des fonctions des indéterminées qui figurent dans les ω_i, les ω_{ij}, les ω_{kji}, les ω_{lkji}, ainsi que des A_{ji}^{kl} et $(A_{ji}^{kl})_h$. Nous savons d'avance que les $\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}$ quantités $g_{ij}^{(klh)}$ sont indépendantes entre elles et indépendantes des x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$ et $g_{ij}^{(kl)}$.

Les covariants bilinéaires des premiers membres des équations (36′), (37′) et (38′) se réduisent, en tenant compte de ces équations, à

$$\sum_{h=1}^{h=n} [dx_h\, dg_{ij}^{(klh)}].$$

La même opération, effectuée sur le système (36, (37) et (38), donne

$$\sum_{h=1}^{h=n} [\omega_h (\varpi_{ji}^{kl})_h]$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \Big\{ \omega_h \Big[\omega_{hlkji} - \frac{1}{12}(\varpi_{ij}^{kh})_l - \frac{1}{12}(\varpi_{ik}^{jh})_l - \frac{1}{12}(\varpi_{ij}^{lh})_k - \frac{1}{12}(\varpi_{il}^{jh})_k - \frac{1}{12}(\varpi_{ik}^{lh})_j - \frac{1}{12}(\varpi_{il}^{kh})_j \Big] \Big\},$$

en posant

$$(\varpi_{ji}^{kl})_h = d(A_{ji}^{kl})_h - \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho [(A_{\rho i}^{kl})_h \omega_{j\rho} + (A_{j\rho}^{kl})_h \omega_{i\rho} + (A_{ij}^{\rho l})_h \omega_{k\rho} + (A_{ji}^{k\rho})_h \omega_{l\rho} + (A_{ji}^{kl})_\rho \omega_{h\rho}]$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} \varepsilon_\rho (A_{\rho i}^{kl} A_{j\rho}^{h\sigma} + A_{i\rho}^{kl} A_{i\rho}^{h\sigma} + A_{ji}^{\rho l} A_{k\rho}^{h\sigma} + A_{ji}^{k\rho} A_{l\rho}^{h\sigma}) \omega_\sigma.$$

Il résulte de là que les expressions

$$\omega_{hlkji} \quad \text{et} \quad (\varpi_{ji}^{kl})_h$$

sont des combinaisons linéaires des dx, des dg_{ij}, des $dg_{ij}^{(k)}$, des $dg_{ij}^{(kl)}$ et des $dg_{ij}^{(klm)}$ et que, *considérées par rapport à ces dernières quantités* $dg_{ij}^{(klm)}$, il doit y en avoir exactement $\frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}$ indépendantes.

Or le nombre des expressions ω_{hlkji} est de

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{24};$$

les ϖ_{ji}^{kl} sont de leur côté (n° **11**) au nombre de

$$\frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24}.$$

La somme de ces deux derniers nombres est

$$\frac{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{24} + \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24} = \frac{n^2(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Par conséquent, *il n'existe entre les* ω_{mlkji} *et les* $(\varpi_{ji}^{kl})_h$ *aucune relation linéaire indépendante des* $dg_{ij}^{(klm)}$. En particulier, il n'existe aucune relation pareille entre les $(\varpi_{ji}^{kl})_h$. Autrement dit, il n'existe aucune combinaison linéaire des $d(A_{ji}^{kl})_h$ qui puisse s'exprimer linéairement au moyen des dx, des du, des dg_{ij}, des $dg_{ij}^{(k)}$ et des $dg_{ij}^{(kl)}$. Donc enfin *les invariants normaux* $(A_{ij}^{kl})_h$ *ne sont liés par aucune relation indépendante des dérivées partielles du troisième ordre des coefficients* g_{ij}.

22. Le raisonnement pourrait se poursuivre de proche en proche, mais il exigerait des calculs très fastidieux. Nous allons montrer par un raisonnement *a priori* que *tout invariant relatif formé avec les variables x et u, les fonctions $g_{ij}(x)$ et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres est nécessairement une fonction des seuls invariants* A_{ij}^{kl} *et* $(A_{ij}^{kl})_h$. Il en résultera en particulier, d'après ce qui vient d'être vu, que *tout invariant relatif formé avec les variables x et u, les fonctions $g_{ij}(x)$ et leurs dérivées partielles des deux premiers ordres est nécessairement une fonction des seuls invariants fondamentaux* A_{ij}^{kl}.

Revenons, pour la démonstration de ce théorème, au système de Pfaff (18) et (21). Nous savons qu'il admet toujours au moins une solution correspondant à des valeurs numériques arbitrairement données des variables, tant dépendantes qu'indépendantes. Donnons-nous par conséquent des valeurs numériques *arbitraires* $(a_{ij}^{kl})_h$ et a_{ij}^{kl} pour les invariants fondamentaux et leurs dérivés du premier ordre, et considérons une des solutions correspondantes du système de Pfaff. Nous pouvons définir cette solution en prenant pour les variables, indépendantes et dépendantes, certaines fonctions déterminées de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres ξ. Désignons par $\overline{(A_{ij}^{kl})_h}$ et $\overline{A_{ij}^{kl}}$ les fonctions de ξ obtenues.

Cela posé, partons d'une forme quadratique indéterminée, décomposée en carrés. Désignons par g_{ij} les coefficients de cette forme et par $(A_{ij}^{kl})_h$, A_{ij}^{kl} les fonctions des x, u, g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$, etc., qui définissent les invariants relatifs. Les équations qui définissent les formes (décomposées en carrés) appartenant à la classe choisie plus haut sont évidemment (n° **15**)

$$(40) \qquad A_{ij}^{kl} = \overline{A_{ij}^{kl}}, \qquad (A_{ij}^{kl})_h = \overline{(A_{ij}^{kl})_h};$$

ce sont des équations où les variables indépendantes sont les ξ et les fonctions inconnues les x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$, $g_{ij}^{(kl)}$, $g_{ij}^{(klh)}$. On peut évidemment les remplacer par le système de Pfaff

$$
(41) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\omega_{ij}+\omega_{ji}=0, \\
&\omega_{kji}=\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{l=n}\left(\overline{A_{ji}^{kl}}+\overline{A_{ki}^{jl}}\right)\omega_l, \\
&d\overline{A_{ji}^{kl}}=\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\varepsilon_\rho\left(\overline{A_{\rho i}^{kl}}\omega_{j\rho}+\overline{A_{j\rho}^{kl}}\omega_{i\rho}+\overline{A_{ji}^{\rho l}}\omega_{k\rho}+\overline{A_{ji}^{k\rho}}\omega_{l\rho}\right)+\sum_{h=1}^{h=n}\left(\overline{A_{ji}^{kl}}\right)_h\omega_h.
\end{aligned}
\right.
$$

En effet, les équations (36), (37) et (38) montrent que les équations (41) entraînent les équations (40) et réciproquement.

Or *le système* (41) *est en involution*, car les équations quadratiques extérieures qui en résultent par dérivation sont, d'après les calculs faits au nº **21**,

$$
(42) \qquad \sum_{l=1}^{l=n}[\omega_l\varpi_{lkji}]=0,
$$

$$
(43) \qquad \sum_{h=1}^{h=n}\left[\omega_l\overline{(\varpi_{ji}^{kl})_h}\right]=0,
$$

en posant

$$
\varpi_{lkji}=\omega_{lkji}-\frac{1}{12}\sum_{h=1}^{h=n}\left[\overline{(A_{ij}^{kh})_l}+\overline{(A_{ik}^{jh})_l}+\overline{(A_{ij}^{lh})_k}+\overline{(A_{il}^{jh})_k}+\overline{(A_{ik}^{lh})_j}+\overline{(A_{il}^{kh})_j}\right]\omega_h.
$$

Or, d'après la discussion qui a été faite du système de Pfaff (18) et (21), les équations (41) écrites à la dernière ligne entraînent pour les $d\overline{(A_{ji}^{kl})_h}$ des expressions de la forme (21), où les quantités seraient surlignées et par suite, d'après la définition même de $\overline{(\varpi_{ij}^{kl})_h}$, les équations (43) sont identiquement vérifiées. Il ne reste donc à considérer que les équations (42) *dont la forme met en évidence la propriété du système de Pfaff* (41) *d'être en involution.*

23. Le système (41) étant en involution admet au moins une solution correspondant à des valeurs numériques *arbitrairement* données des variables indépendantes ξ et des variables dépendantes x, u, g_{ij}, $g_{ij}^{(k)}$, $g_{ij}^{(kl)}$, (g_{ij}^{klm}) *sous la seule condition que ces valeurs numériques satisfassent aux relations* (40). Donnons en particulier aux ξ les valeurs numériques ξ^0 pour lesquelles les invariants A_{ij}^{kl} et $(A_{ij}^{kl})_h$ prennent les valeurs numériques données a_{ij}^{kl} et $(a_{ij}^{kl})_h$, et considérons un invariant relatif quelconque de la forme

$$I\left(x, u, g_{ij}, \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_k \, \partial x_l}, \frac{\partial^3 g_{ij}}{\partial x_k \, \partial x_l \, \partial x_h}\right);$$

cet invariant gardera sa valeur numérique si l'on change arbitrairement les valeurs numériques de ses arguments, sous la seule condition que les nouvelles valeurs numériques donnent aux invariants A_{ij}^{kl} et $(A_{ij}^{kl})_h$ les mêmes valeurs numériques. Autrement dit, *l'invariant* I *est une fonction des seules quantités* A_{ij}^{kl} *et* $(A_{ij}^{kl})_h$. C'est ce qu'il fallait démontrer. En particulier, comme nous l'avons déjà fait remarquer, *tout invariant relatif contenant les dérivées partielles des* g_{ij} *jusqu'au second ordre au plus est une fonction des seuls invariants fondamentaux* A_{ij}^{kl}.

D'une manière plus particulière encore, *si l'invariant* I *est linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre des* g_{ij}, *c'est une fonction linéaire à coefficients constants des* A_{ij}^{kl}.

Ce résultat, qu'on pouvait regarder *a priori* comme très vraisemblable, et qui a une très grande importance dans la théorie de la relativité généralisée, est ainsi démontré rigoureusement.

Les invariants absolus d'une forme différentielle quadratique.

24. Arrivons maintenant à la détermination des invariants *absolus*.

Un premier procédé théorique consiste à partir de $\frac{n(n-1)}{2}$ invariants fondamentaux qui soient des fonctions indépendantes des variables auxiliaires u et à particulariser la décomposition en carrés de manière que ces invariants prennent des valeurs numériques fixes données. On obtient ainsi pour les u des fonctions déterminées des x; en portant leurs valeurs dans les autres invariants relatifs, on obtient évidemment le système complet des invariants absolus. Seulement ils se présentent en général sous forme irrationnelle.

La méthode précédente met en tout cas en évidence ce fait qu'il y a

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$$

invariants absolus fonctions des invariants relatifs fondamentaux.

Il nous suffit pour la suite de savoir déterminer ces

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{12}$$

invariants absolus. Considérons pour cela la forme différentielle

$$\Phi=\sum[\omega_i\omega_j].\Omega_{ij}=\sum \mathrm{A}_{ij}^{kl}[\omega_i\omega_j].[\omega_k\omega_l],$$

où le point indique une multiplication algébrique ordinaire. C'est en somme une forme quadratique ordinaire des $\frac{n(n-1)}{2}$ variables $[\omega_i\omega_j]$.

Les variables u n'entrent que dans les coefficients de cette forme, supposée développée suivant les quantités $[dx_i\,dx_j]$. Calculons la variation de Φ pour une variation arbitraire des u, les x restant fixes. Désignons par δ le symbole de cette variation.

On a, en utilisant une notation déjà employée,

$$\omega_i^\delta=0,$$

$$\delta\omega_i^d=\delta\omega_i^d-d\omega_i^\delta=-\varepsilon_i\sum_{k=1}^{k=n}\omega_{ki}^\delta\omega_k^d,$$

$$\delta[\omega_i\omega_j]=-\sum_{k=1}^{k=n}\varepsilon_j\,\omega_{kj}^\delta[\omega_i\omega_k]-\sum_{k=1}^{k=n}\varepsilon_i\,\omega_{ki}^\delta[\omega_k\omega_j],$$

puis, d'après (17), et en remarquant que Ω_{ij}^δ est nul,

$$\delta\Omega_{ij}=\sum_{k=1}^{k=n}\varepsilon_k(\omega_{ik}^\delta\,\Omega_{kj}-\omega_{kj}^\delta\,\Omega_{ik}),$$

d'où enfin

$$\begin{aligned}\partial\Phi = & -\sum \varepsilon_j\, \omega^{\delta}_{k\,j} [\omega_i \omega_k] \Omega_{ij} - \sum \varepsilon_i\, \omega^{\delta}_{k\,i} [\omega_k \omega_j] \Omega_{ij} \\ & + \sum \varepsilon_k\, \omega^{\delta}_{i\,k} [\omega_i \omega_j] \Omega_{kj} - \sum \varepsilon_k\, \omega^{\delta}_{k\,j} [\omega_i \omega_j] \Omega_{ik}.\end{aligned}$$

En échangeant dans la première somme les indices de sommation j et k et dans la seconde les indices i et k, on voit immédiatement que *le second membre est nul.*

Autrement dit, *la forme Φ est un covariant absolu* (1).

25. La recherche des invariants absolus, fonctions des invariants relatifs fondamentaux, revient alors à la résolution d'un problème de Géométrie analytique.

Regardons provisoirement $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif à $n-1$ dimensions; nous pouvons alors regarder les $\frac{n(n-1)}{2}$ expressions $[\omega_i \omega_j]$ comme les coordonnées plückériennes d'une droite dans cet espace. *Il s'agit alors de trouver les invariants de la forme quadratique plückérienne*

$$\Phi = \sum A^{kl}_{ij} [\omega_i \omega_j][\omega_k \omega_l], \tag{43}$$

lorsqu'on effectue sur les coordonnées ponctuelles une substitution linéaire conservant la forme $\sum \varepsilon_i \omega_i^2$.

D'une manière moins précise et pas tout à fait exacte, il s'agit de *trouver les invariants d'un complexe quadratique de droites vis-à-vis du groupe des transformations projectives qui laissent invariante la quadrique $\sum \varepsilon_i \omega_i^2 = 0$.*

(1) C'est la forme quadrilinéaire classique introduite par E.-B. Christoffel dans son Mémoire : *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 70, 1869, p. 46-70). Les $(A^{\,l}_{ij})_h$ sont de même les coefficients d'une forme covariante à cinq séries de différentielles, et ainsi de suite.

Analytiquement, on peut remarquer que, pour toute substitution linéaire conservant la forme $\sum \varepsilon_i \omega_i^2$, les coefficients de Φ subissent une substitution linéaire appartenant à un certain groupe. Les transformations infinitésimales de ce groupe sont précisément données par les formules (18), d'après lesquelles on a

$$\delta A_{ij}^{kl} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \varepsilon_\rho (\omega_{i\rho}^\delta A_{\rho j}^{kl} + \omega_{j\rho}^\delta A_{i\rho}^{kl} + \omega_{k\rho}^\delta A_{ij}^{\rho l} + \omega_{l\rho}^\delta A_{ij}^{k\rho}).$$

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations infinitésimales qui engendrent le groupe sont caractérisées par les valeurs e_{ik} des constantes ω_{ik}^δ.

26. Il existe une combinaison linéaire à coefficients constants des A_{ij}^{kl} qui est un invariant absolu, à savoir

$$\Lambda = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j A_{ij}^{ij},$$

et c'est la seule : c'est la *courbure totale* de Riemann.

Il existe en outre une forme quadratique en ω_i qui est aussi un covariant absolu, c'est la forme

$$\varphi = \sum_{i,j,k} \varepsilon_i A_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k,$$

qui se déduit de Φ par saturation des indices (*Verkürzung*); il en est de même plus généralement de la forme quadratique

$$\varphi + (\alpha\Lambda + \beta) \sum \varepsilon_i \omega_i^2,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires.

Dans le cas général $n > 4$, la théorie que j'ai développée des groupes linéaires ne laissant invariante aucune variété plane permettrait sans trop de difficulté de démontrer qu'on peut trouver

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$$

combinaisons linéaires des A_{ij}^{kl} indépendantes entre elles et indépendantes des coefficients de la forme φ, qui sont transformées entre elles par le groupe considéré *sans qu'il soit possible d'en trouver un moindre nombre jouissant des mêmes propriétés.*

27. Le cas $n=4$, qui intéresse la théorie de la relativité généralisée, mérite d'être traité en détail. Ici la forme quadratique fondamentale est, comme on sait,

$$-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2.$$

Avec l'interprétation géométrique indiquée plus haut, elle définit, égalée à zéro, une *quadrique réelle non réglée* (quadrique fondamentale). Cette quadrique admet deux systèmes de génératrices rectilignes imaginaires conjuguées; chacune des génératrices du premier système, rencontrant trois génératrices fixes du second système, appartient à trois complexes linéaires dont les équations sont faciles à obtenir. Soit en effet

$$\begin{aligned}\omega_1+i\omega_2\ +\lambda(\omega_3+\omega_4)&=0,\\ \lambda(\omega_1-i\omega_2)-\ \ \omega_3+\omega_4&=0\end{aligned}$$

les équations d'une génératrice quelconque du premier système; les coordonnées plückériennes de cette droite sont, avec les notations indiquées plus haut,

$$\frac{[\omega_2\omega_3]}{1-\lambda^2}=\frac{[\omega_3\omega_1]}{i(1+\lambda^2)}=\frac{[\omega_1\omega_2]}{2\lambda}=\frac{[\omega_1\omega_4]}{i(\lambda^2-1)}=\frac{[\omega_2\omega_4]}{\lambda^2+1}=\frac{[\omega_3\omega_4]}{-2i\lambda}.$$

Les trois complexes cherchés sont donc définis par les équations

$$(44)\qquad\left\{\begin{aligned}\xi_1&\equiv[\omega_2\omega_3]-i[\omega_1\omega_4]=0,\\ \xi_2&\equiv[\omega_3\omega_1]-i[\omega_2\omega_4]=0,\\ \xi_3&\equiv[\omega_1\omega_2]-i[\omega_3\omega_4]=0.\end{aligned}\right.$$

Les génératrices rectilignes du second système appartiennent alors aux trois complexes linéaires définis par les équations

$$(45)\qquad\left\{\begin{aligned}\eta_1&\equiv[\omega_2\omega_3]+i[\omega_1\omega_4]=0,\\ \eta_2&\equiv[\omega_3\omega_1]+i[\omega_2\omega_4]=0,\\ \eta_3&\equiv[\omega_1\omega_2]+i[\omega_3\omega_4]=0.\end{aligned}\right.$$

Effectuons maintenant un changement de coordonnées plückériennes de la droite en prenant pour nouvelles coordonnées les six quantités ξ_i et η_i. La relation à laquelle satisfont les six nouvelles coordonnées d'une même droite est maintenant

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2. \tag{46}$$

Le complexe quadratique des droites tangentes à la quadrique fondamentale est manifestement défini par l'équation

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=0. \tag{47}$$

Cette équation est en effet vérifiée par chaque génératrice de cette quadrique, puisque chaque génératrice, du premier système par exemple, ayant ses coordonnées ξ toutes nulles, la vérifie en vertu de (46). Toute droite tangente à la quadrique en un point défini par l'intersection des deux génératrices

$$(0,\ 0,\ 0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3), \quad (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ 0,\ 0,\ 0)$$

a pour coordonnées

$$(\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2,\ \lambda\xi_3,\ \mu\eta_1,\ \mu\eta_2,\ \mu\eta_3)$$

et par suite satisfait aussi à l'équation (47).

28. Remarquons maintenant que toute substitution linéaire conservant la forme fondamentale $-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2$ se traduit évidemment par une substitution linéaire *orthogonale* sur les ξ et par une substitution linéaire *orthogonale* sur les η (à moins qu'elle n'échange les coordonnées ξ avec les coordonnées η, mais nous ne considérerons que les substitutions qui n'échangent pas entre elles les deux systèmes de génératrices de la quadrique fondamentale). Ces deux substitutions linéaires sont naturellement à coefficients complexes conjugués.

Avec les nouvelles coordonnées de la droite, la forme covariante Φ se décomposera en une somme de trois formes respectivement covariantes :

1° Une forme quadratique $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$;
2° Une forme quadratique (complexe conjuguée) $f'(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$;

3° Une forme d'Hermite $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ bilinéaire par rapport à chaque série de variables et prenant des valeurs numériques réelles quand on donne aux variables des deux séries des valeurs numériques complexes conjuguées (c'est cette propriété qui définit une forme d'Hermite).

En effectuant le calcul, qui n'offre aucune difficulté, on trouve

$$\begin{aligned}4f(\xi) = {} & (A^{23}_{23} - A^{14}_{14} + 2iA^{14}_{23})\xi_1^2 + (A^{31}_{31} - A^{24}_{24} + 2iA^{24}_{31})\xi_2^2 \\ & + (A^{12}_{12} - A^{34}_{34} + 2iA^{34}_{12})\xi_3^2 - 2(A^{13}_{12} + A^{34}_{24} + iA^{24}_{21} - iA^{34}_{31})\xi_2\xi_3 \\ & - 2(A^{21}_{23} + A^{14}_{34} + iA^{34}_{32} - iA^{14}_{12})\xi_3\xi_1 \\ & - 2(A^{32}_{31} + A^{24}_{14} + iA^{14}_{13} - iA^{24}_{23})\xi_1\xi_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\psi(\xi;\eta) = {} & (A^{23}_{23} + A^{14}_{14})\xi_1\eta_1 + (A^{24}_{14} - A^{23}_{13} - iA^{14}_{13} - iA^{24}_{23})\xi_1\eta_2 \\ & + (A^{34}_{14} - A^{32}_{12} + iA^{14}_{12} + iA^{34}_{32})\xi_1\eta_3 \\ & + (A^{14}_{24} - A^{13}_{23} + iA^{24}_{23} + iA^{14}_{13})\xi_2\eta_1 \\ & + (A^{31}_{31} + A^{24}_{24})\xi_2\eta_2 + (A^{34}_{24} - A^{31}_{21} - iA^{24}_{21} - iA^{34}_{31})\xi_2\eta_3 \\ & + (A^{14}_{34} - A^{12}_{32} - iA^{34}_{32} - iA^{14}_{12})\xi_3\eta_1 \\ & + (A^{24}_{34} - A^{21}_{31} + iA^{34}_{31} + iA^{24}_{21})\xi_3\eta_2 + (A^{12}_{12} + A^{34}_{34})\xi_3\eta_3.\end{aligned}$$

Nous remarquerons que la somme des coefficients de $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^3$ dans $f(\xi)$ est *réelle*. On peut alors écrire

$$\Phi = \frac{1}{12}A(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \bar{f}(\xi) + \bar{f}'(\eta) + \psi(\xi;\eta),$$

en désignant par A la courbure totale

$$A = A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} - A^{14}_{14} - A^{24}_{24} - A^{34}_{34},$$

et en posant

$$\bar{f}(\xi) = f(\xi) - \frac{1}{12}A(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2);$$

la somme des coefficients des termes carrés dans $\bar{f}(\xi)$ est alors nulle.

Quand on effectuera sur les ξ une substitution orthogonale, les cinq coefficients complexes de $\bar{f}(\xi)$ seront échangés linéairement entre eux sans qu'on puisse trouver $h < 5$ combinaisons linéaires indépendantes de ces coefficients qui soient aussi échangées entre elles.

Les invariants fondamentaux relatifs de la forme différentielle donnée peuvent ainsi se distribuer en quatre groupes :

1° L'invariant absolu A;

2° Les cinq coefficients complexes de $f(\xi)$;

3° Les cinq coefficients complexes conjugués de $\overline{f}'(\eta)$;

4° Les neuf coefficients (réels ou deux à deux imaginaires conjugués) de $\psi(\xi; \eta)$.

Toute substitution linéaire sur les ω_i échange entre eux les invariants relatifs de chaque groupe et il est facile de voir que ces groupes sont indécomposables en d'autres dont les éléments soient séparément échangés entre eux.

29. Nous avons introduit dans le cas général, au n° **26**, la forme quadratique covariante

$$\varphi = \sum \varepsilon_i A_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k,$$

et plus généralement

$$\varphi' = \sum \varepsilon_i A_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k + \alpha A \sum \varepsilon_i \omega_i^2.$$

Si l'on détermine le coefficient α par la condition que la somme des coefficients des termes en $\varepsilon_i \omega_i^2$ soit nulle, ce qui donne

$$n \alpha A = -\sum \varepsilon_i \varepsilon_j A_{ij}^{ij} = 2A, \qquad \alpha = -\frac{2}{n},$$

les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ coefficients restants sont échangés entre eux sans qu'on puisse en trouver des combinaisons linéaires en moindre nombre qui jouissent de la même propriété.

Ici $\frac{n(n+1)}{2} - 1 = 9$; les coefficients qui restent sont donc nécessairement des combinaisons linéaires indépendantes de la forme d'Hermite $\psi(\xi; \eta)$. On a en effet

$$\begin{aligned}
\varphi' = {} & \frac{1}{2}(A_{12}^{12} + A_{13}^{13} - A_{23}^{23} - A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34})\omega_1^2 + \ldots \\
& + \frac{1}{2}(A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34})\omega_4^2 \\
& + 2(A_{21}^{31} - A_{24}^{34})\omega_2\omega_3 \ + \ldots + 2(A_{21}^{24} + A_{31}^{34})\omega_1\omega_4 + \ldots
\end{aligned}$$

et l'on retrouve sans difficulté, mais avec d'autres combinaisons, les coefficients de la forme d'Hermite $\psi(\xi;\eta)$.

Il doit y avoir d'après cela une relation géométrique importante entre la forme quadratique φ' *et la forme d'Hermite* ψ. Cette relation peut être mise en évidence sous différentes formes. D'abord l'équation obtenue en annulant la forme d'Hermite ψ définit un complexe quadratique de droites auquel appartiennent manifestement toutes les génératrices de la quadrique fondamentale (puisque ψ s'annule en même temps que les ξ et aussi en même temps que les η). Considérons une génératrice G du premier système de la quadrique fondamentale $(0;\eta^0)$; l'équation linéaire en ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\psi(\xi;\eta^0)=0,$$

jointe à l'équation

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=0,$$

définit deux génératrices du second système, qui coupent la génératrice donnée G en deux points; ces points jouissent évidemment de la propriété que toute tangente en un de ces points à la quadrique fondamentale appartient au complexe quadratique. Quand la génératrice G varie, ces points engendrent une biquadratique gauche, à laquelle correspond un faisceau de quadriques : la quadrique $\varphi'=0$ fait partie de ce faisceau.

Mais le complexe quadratique $\psi=0$ peut être défini par une propriété géométrique simple le rattachant à la quadrique fondamentale et à la quadrique $\varphi'=0$. Partons en effet *a priori* d'une quadrique

$$a_{11}\omega_1^2+a_{22}\omega_2^2+a_{33}\omega_3^2+a_{44}\omega_4^2+2a_{23}\omega_2\omega_3+\ldots+2a_{14}\omega_1\omega_4+\ldots=0,$$

et cherchons l'équation du complexe des droites qui découpent sur cette quadrique et sur la quadrique fondamentale deux segments formant une division harmonique. Un calcul facile donne pour l'équation de ce complexe

$$\begin{aligned}
&a_{11}\{[\omega_1\omega_2]^2+[\omega_1\omega_3]^2-[\omega_1\omega_4]^2\}+\ldots\\
+\;&a_{44}\{[\omega_1\omega_4]^2+[\omega_2\omega_4]^2+[\omega_3\omega_4]^2\}\\
+\;&2a_{23}\{[\omega_1\omega_2][\omega_1\omega_3]-[\omega_4\omega_2][\omega_4\omega_3]\}+\ldots\\
+\;&2a_{14}\{[\omega_2\omega_1][\omega_2\omega_4]+[\omega_3\omega_1][\omega_3\omega_4]\}+\ldots=0,
\end{aligned}$$

ou, en introduisant les coordonnées ξ et η,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{44})(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)\\
&+\ (a_{22}+a_{33}+a_{44}-a_{11})\xi_1\eta_1-2(a_{12}-ia_{34})\xi_1\eta_2-2(a_{31}+ia_{24})\xi_1\eta_3\\
&-2(a_{12}+ia_{44})\xi_2\eta_1+(a_{33}+a_{11}+a_{44}-a_{22})\xi_2\eta_2-2(a_{23}-ia_{14})\xi_2\eta_3\\
&-2(a_{31}-ia_{24})\xi_3\eta_1-2(a_{23}+ia_{14})\xi_3\eta_2+(a_{11}+a_{22}+a_{44}-a_{33})\xi_3\eta_3=0.
\end{aligned}$$

En identifiant cette équation avec l'équation $\psi=0$, on retrouve pour les a_{ij} les coefficients de la forme φ'.

Par conséquent, la relation géométrique entre la forme quadratique φ' et la forme d'Hermite ψ est la suivante : *le complexe quadratique de droites obtenu en annulant la forme ψ est celui des droites qui découpent sur la quadrique fondamentale et sur la quadrique $\varphi'=0$ deux segments formant une division harmonique.*

30. On peut encore associer les formes $\overline{f}$ et $\overline{f'}$ à des formes *binaires* et la forme ψ à une forme doublement binaire. On peut en effet exprimer les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 d'une génératrice du second système de la quadrique absolue au moyen d'un paramètre, ou de deux paramètres homogènes u_1, u_2, par exemple par les formules

$$\xi_1=u_1^2-u_2^2,\qquad \xi_2=i(u_1^2+u_2^2),\qquad \xi_3=2u_1u_2;$$

on aura de même pour toute génératrice du premier système

$$\eta_1=v_1^2-v_2^2,\qquad \eta_2=-i(v_1^2+v_2^2),\qquad \eta_3=2v_1v_2.$$

Toute substitution orthogonale sur les ξ se traduira par une substitution linéaire *à déterminant égal à* 1 effectuée sur les deux variables u_1, u_2. Quant à la forme $\overline{f}(\xi)$, elle devient une forme biquadratique binaire en u, v; la forme $\overline{f'}(\eta)$ devient la forme biquadratique binaire en v_1, v_2 dont les coefficients sont complexes conjugués de ceux de la première; enfin la forme d'Hermite $\psi(\xi,\eta)$ devient une forme quadratique en (u_1, u_2) et quadratique en (v_1, v_2).

Les vingt coefficients A_{ij}^{kl} de Riemann se répartissent ainsi en quatre groupes dont chacun comprend un certain nombre de combinaisons linéaires de ces coefficients :

1° La courbure totale A;

2° Les cinq coefficients complexes d'une forme biquadratique binaire F (u_1, u_2);

3° Les cinq coefficients complexes conjugués de la forme biquadratique binaire conjuguée F' (v_1, v_2);

4° Les neuf coefficients, réels ou deux à deux complexes conjugués, d'une forme $\Psi(u_1, u_2; v_1, v_2)$ quadratique par rapport à u_1, u_2 et quadratique par rapport à v_1, v_2.

La signification géométrique des variables u_1, u_2 est classique : le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ désigne le nombre complexe qui sert à définir la position d'un point réel sur la quadrique fondamentale. Toute transformation projective de la quadrique fondamentale en elle-même se traduit en effet par une transformation projective à coefficients complexes sur $\frac{u_1}{u_2}$. L'équation $\Psi = 0$ définit sur la quadrique fondamentale une courbe qui n'est autre que la biquadratique considérée plus haut.

51. La recherche des invariants *absolus*, fonctions des A_{ij}^{kl}, revient maintenant à un problème classique de la théorie des formes. En particulier, la forme F donnera deux invariants rationnels, l'un du second degré, l'autre du troisième degré; la forme F' donnera les deux invariants complexes conjugués.

Ces invariants s'obtiennent du reste aussi facilement en partant de la forme quadratique $f(\xi)$: il suffit, comme on sait, de considérer la somme des mineurs principaux du discriminant de cette forme, ainsi que ce discriminant lui-même. La forme ψ, ou plutôt la forme φ' qui lui est équivalente, donne de même un invariant quadratique, un invariant cubique et un invariant biquadratique par la considération du discriminant et de ses mineurs principaux : ce sont les coefficients des différentes puissances de λ dans l'équation obtenue en annulant le discriminant de la forme

$$\varphi' + \lambda(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2).$$

En dehors de ces sept invariants (ou plutôt huit en tenant compte de l'invariant A) fournis par la considération isolée de chacune des formes $\bar{f}$, $\bar{f}'$, $\bar{\psi}$, il y en a six autres (mixtes) formés avec les coefficients de plusieurs de ces formes. Nous n'insisterons pas davantage sur cette question.

32. Ce qui est plus intéressant pour les applications à la théorie de la relativité généralisée, c'est la résolution du problème suivant :

Trouver, de la manière la plus générale possible, dix combinaisons linéaires à coefficients constants R_{ij} *des quantités* A_{ij}^{kl} *qui soient échangées entre elles comme les coefficients d'une forme quadratique quand on effectue sur les* ω_i *une substitution linéaire conservant la forme fondamentale* $-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2$.

Autrement dit, *construire une forme quadratique covariante*

$$\sum R_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

dont les coefficients soient des combinaisons linéaires à coefficients constants des A_{ij}^{kl}.

Nous avons déjà obtenu une solution de ce problème, à savoir la forme quadratique

$$\lambda\varphi'+(\alpha A+\beta)(-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2),$$

où λ, α et β sont trois constantes arbitraires.

Il est facile de voir que *le problème ne comporte pas d'autre solution.*

Soit en effet

$$\Phi=\sum R_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

une forme quadratique covariante; posons

$$R=-R_{11}-R_{22}-R_{33}+R_{44},$$
$$\overline{R}_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{4}\varepsilon_{ij}R \qquad (\varepsilon_{ij}=0 \text{ si } i\neq j;\ \varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=-1,\ \varepsilon_{44}=+1);$$

on peut alors écrire

$$\Phi=\frac{1}{4}R(-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2)+\sum \overline{R}_{ij}\,\omega_i\omega_j,$$

et l'on a

$$\overline{R_{11}} + \overline{R_{22}} + \overline{R_{33}} - \overline{R_{44}} = 0.$$

La quantité R est, comme on sait, un invariant absolu ; par suite, par sa propriété même d'être une combinaison linéaire des A_{ij}^{kl}, on a

$$R = \alpha A + \beta.$$

Quant aux quantités $\overline{R_{ij}}$, elles dépendent linéairement de neuf d'entre elles que nous pourrons, sans préciser davantage, désigner par

$$\overline{R_1}, \quad \overline{R_2}, \quad \ldots, \quad \overline{R_9}.$$

Elles subissent entre elles une transformation linéaire quand on effectue une substitution linéaire quelconque conservant la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, et il est impossible de trouver $h < 9$ combinaisons linéaires indépendantes des $\overline{R_i}$ jouissant de la même propriété.

Chacune des neuf quantités $\overline{R_i}$ peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$\overline{R_i} = H_i + K_i + L_i + \alpha_i A + \beta_i,$$

où H_i est une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\bar{f}(\xi)$, K_i une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\bar{f}'(\eta)$, L_i une combinaison linéaire et homogène des coefficients de la forme $\psi(\xi; \eta)$, α_i et β_i enfin des constantes.

Quand on effectue sur les ω_i une substitution linéaire conservant la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, les quantités $\overline{R_i}$ subissent entre elles une substitution linéaire; il en est de même des coefficients de la forme $\bar{f}(\xi)$, de ceux de la forme $\bar{f}'(\eta)$ et de ceux de la forme $\psi(\xi; \eta)$. Si les H_i ne sont pas tous nuls, comme la forme $\bar{f}(\xi)$ contient cinq coefficients indépendants, il y aura un certain nombre $h (4 \leqq h < 9)$ de combinaisons linéaires indépendantes des $\overline{R_i}$ qui ne contiendront pas les coefficients de la forme $\bar{f}(\xi)$: nous pouvons toujours supposer que ces combinaisons sont précisément $\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_h}$. Mais cela est impossible, car si par exemple, par une substitution linéaire arbitraire laissant invariante la forme $-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2+\omega_4^2$, la forme linéaire $\overline{R_1}$ était changée en

$$\lambda_1\overline{R_1}+\lambda_2\overline{R_2}+\ldots+\lambda_9\overline{R_9},$$

les coefficients $\lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_q$ devraient être tous nuls, puisque K_1 est changée dans une combinaison linéaire des coefficients de $f'(\eta)$, L_1 dans une combinaison linéaire des coefficients de $\psi(\xi;\eta)$ et que A est conservée. Il faudrait donc que les quantités $\overline{R_1}, \overline{R_2}, \ldots, \overline{R_h}$ fussent échangées entre elles par une substitution linéaire quelconque du groupe considéré, ce que nous avons vu être impossible.

Le raisonnement précédent montre que tous les termes H_i sont nuls; on verrait de même que tous les K_i sont nuls, ainsi que tous les coefficients α_i et β_i. Par suite, les $\overline{R_i}$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de $\psi(\xi;\eta)$ ou, ce qui revient au même, des coefficients de $\varphi'(\omega)$.

Considérons alors la forme quadratique

$$\sum \overline{R}_{ij}\,\omega_i\omega_j-\lambda\varphi'(\omega)$$

qui est, par hypothèse, covariante quelle que soit la constante λ et dont les coefficients sont des combinaisons linéaires et homogènes des neuf coefficients de $\varphi'(\omega)$. Déterminons la constante λ par la condition que les neuf coefficients de ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, $\omega_i\omega_j$, soient *linéairement dépendants*, ce qui est toujours possible. Si ces nouveaux coefficients n'étaient pas tous nuls, on aurait $h<9$ combinaisons linéaires indépendantes des coefficients de φ' qui seraient transformés linéairement entre eux, ce que nous savons être impossible. Il faut donc que la forme quadratique écrite ci-dessus devienne identiquement nulle pour une valeur convenablement choisie de la constante λ. *C'est précisément ce que nous voulions démontrer.*

En définitive, *toutes les formes quadratiques covariantes absolues dont les coefficients sont linéaires par rapport aux A_{kl}^{ij} sont données* *par la formule*

$$\lambda \sum_{i,j,k} \varepsilon_i A_{i,j}^{ik} \omega_j \omega_k + \left(\alpha \sum_{(ij)} \varepsilon_i \varepsilon_j A_{i,j}^{ij} + \beta\right)(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2), \tag{48}$$

avec trois constantes arbitraires α, β, λ.

33. Les équations de la gravitation d'Einstein sont en rapport très étroit avec le problème qui vient d'être résolu. Étant donné un ds^2 à quatre variables

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k$$

réductible à la forme $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$, les équations de la gravitation d'Einstein sont de la forme

$$G_{ik} = -T_{ik},$$

où les G_{ik} sont les coefficients d'une forme différentielle quadratique *covariante*

$$\Phi = \sum G_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Einstein admet que ces quantités G_{ik} sont des fonctions déterminées des variables x, des fonctions $g_{ik}(x)$ et de leurs dérivées partielles du premier et du second ordre, et qu'elles sont linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. La forme

$$\sum G_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

doit être covariante : *cela signifie que si l'on effectue sur les x une transformation arbitraire*

$$x_i = f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}),$$

et si par cette transformation on a

$$\sum g_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k = \sum \overline{g}_{ik}(\overline{x})\, d\overline{x_i}\, d\overline{x_k},$$

on a en même temps

$$\sum G_{ik}\left(x,\, g_{\alpha\beta}(x),\, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho},\, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_\rho \partial x_\sigma}\right) dx_i\, dx_k$$
$$= \sum G_{ik}\left(\bar{x},\, \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x}),\, \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\rho},\, \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}_\rho \partial \bar{x}_\sigma}\right) d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k.$$

Pour obtenir toutes ces formes quadratiques covariantes, imaginons que nous ayons décomposé, de la manière la plus générale possible, la forme donnée ds^2 en quatre carrés $-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2$; les coefficients des quatre expressions de Pfaff seront des fonctions déterminées des $g_{ik}(x)$ et de six variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_6$. La forme Φ pourra alors s'exprimer comme forme quadratique en ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, soit

$$\Phi = \sum R_{ik}\, \omega_i \omega_k,$$

où les R_{ik} sont des fonctions déterminées des x, des u, des $g_{ik}(x)$, de leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, les dérivées du second ordre entrant linéairement. La forme Φ étant par hypothèse un covariant absolu et les expressions ω_i étant des covariants relatifs, *chacun des coefficients* R_{ik} *est un invariant relatif* et par suite, d'après ce qui a été démontré au nº **25**, *une combinaison linéaire à coefficients constants des invariants fondamentaux* Λ_{ij}^{kl}.

La forme d'Einstein $\Sigma G_{ik} dx_i dx_k$ *est donc nécessairement de la forme* (48)

$$\sum G_{ik}\, dx_i\, dx_k \equiv \lambda \sum_{i,j,k}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i \Lambda_{ij}^{ik} \omega_j \omega_k + \left(\alpha \sum_{(ij)}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i \varepsilon_j \Lambda_{ij}^{ij} + \beta\right)(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2).$$

34. Avant de particulariser les coefficients constants α, β, λ par la condition que la loi de conservation soit respectée, faisons quelques remarques sur ceux des invariants fondamentaux qui n'entrent pas dans les équations de la gravitation. Ces équations font intervenir seulement la courbure totale A et les coefficients de la forme d'Hermite $\psi(\xi;\eta)$, mais pas ceux des formes quadratiques $f(\xi)$ et $\bar{f}(\eta)$. Les dix équations, linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre des g_{ij}, qu'on obtient en annulant les coefficients de ces formes, ont évidemment une signification invariante absolue. Ces équations sont, en se reportant aux expressions de $\bar{f}(\xi)$ données (nº **28**)

$$\begin{aligned}
&A^{23}_{23} - A^{14}_{14} = A^{31}_{31} - A^{24}_{24} = A^{12}_{12} - A^{34}_{34},\\
&A^{21}_{43} = A^{31}_{42} = 0,\\
&A^{13}_{12} + A^{34}_{24} = A^{21}_{23} + A^{14}_{34} = A^{32}_{31} + A^{24}_{14} = 0,\\
&A^{24}_{21} - A^{34}_{31} = A^{34}_{32} - A^{14}_{12} = A^{14}_{13} - A^{24}_{23} = 0.
\end{aligned}$$

On peut démontrer qu'elles expriment la réductibilité du ds^2 à la forme

$$\rho(dX_4^2 - dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2);$$

autrement dit, *elles expriment que la propagation de la lumière se fait suivant les mêmes lois que dans la théorie de la relativité restreinte.*

D'une manière plus générale, les dix invariants fondamentaux fournis par les coefficients de $\bar{f}(\xi)$ et $\bar{f}'(\eta)$ sont des invariants relatifs, non seulement pour la forme $\Sigma g_{ij}dx_i dx_j$, mais encore pour l'*équation* obtenue en l'égalant à zéro.

La loi de conservation et les équations de la gravitation.

35. Le tenseur gravitationnel G_{ik} est considéré arbitrairement comme formé des coefficients d'une forme quadratique covariante $\Sigma G_{ik}dx_i dx_k$. C'est ce que nous avons fait jusqu'à présent. Mais il peut y avoir intérêt à le considérer d'un autre point de vue.

Revenons à l'origine physique de la notion de tenseur. Étant donné un milieu élastique dans l'espace euclidien, sur chaque élément de surface du milieu ayant pour composantes

$$[dy\,dz],\quad [dz\,dx],\quad [dx\,dy]$$

suivant les plans de coordonnées, il agit une tension (un vecteur) dont les composantes suivant les trois axes de coordonnées sont

$$\begin{aligned}
&p_{xx}[dy\,dz] + p_{xy}[dz\,dx] + p_{xz}[dx\,dy],\\
&p_{yx}[dy\,dz] + p_{yy}[dz\,dx] + p_{yz}[dx\,dy],\\
&p_{zx}[dy\,dz] + p_{zy}[dz\,dx] + p_{zz}[dx\,dy].
\end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique si le tableau des coefficients est symétrique.

Au lieu de représenter le tenseur dont les composantes sont les quantités p_{xx}, etc., au moyen de la forme quadratique

$$p_{xx}\,dx^2 + 2\,p_{xy}\,dx\,dy + \ldots,$$

on peut le représenter, d'une manière plus conforme à sa nature, par la projection de la tension elle-même sur un axe de cosinus directeurs indéterminés ξ, η, ζ. On aura alors la forme

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & \xi\,\{ p_{xx}[dy\,dz] + p_{xy}[dz\,dx] + p_{xz}[dx\,dy] \} \\ +\, & \eta\,\{ p_{yx}[dy\,dz] + p_{yy}[dz\,dx] + p_{yz}[dx\,dy] \} \\ +\, & \zeta\,\{ p_{zx}[dy\,dz] + p_{zy}[dz\,dx] + p_{zz}[dx\,dy] \}.\end{aligned}$$

Au *fond*, Ω *est la quantité sous le signe* $\iint$ *dans l'intégrale qui exprime la somme des projections sur l'axe* (ξ, η, ζ) *des tensions élémentaires exercées sur une surface donnée.*

Si l'on regarde la direction (ξ, η, ζ) comme *fixe*, et qu'on prenne le covariant trilinéaire de l'expression Ω, on obtient

$$\begin{aligned}\Omega' = \Big[\quad & \xi\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right) \\ & + \eta\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right) + \zeta\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) \Big] [dx\,dy\,dz],\end{aligned}$$

c'est-à-dire la projection sur l'axe considéré de la force de volume élémentaire équivalente aux tensions du milieu élastique.

Le tenseur Ω est dit *satisfaire à la loi de conservation* si sa dérivée Ω' est nulle, quelle que soit la direction fixe (ξ, η, ζ).

En particulier, si l'on a affaire à un fluide parfait à pression constante,

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p = \text{const.}, \qquad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0,$$

le tenseur Ω se réduit, à un facteur constant près, à

$$\Omega = \xi\,[dy\,dz] + \eta\,[dz\,dx] + \zeta\,[dx\,dy],$$

et l'on a

$$\Omega' = 0.$$

Le tenseur précédent se déduit très facilement de la forme qui donne le volume élémentaire

$$\Pi = [dx\, dy\, dz];$$

c'est

$$\Omega = \xi \frac{\partial \Pi}{\partial [dx]} + \eta \frac{\partial \Pi}{\partial [dy]} + \zeta \frac{\partial \Pi}{\partial [dz]};$$

sous cette forme sa signification invariante (c'est-à-dire indépendante du choix des axes) est mise en évidence.

56. Revenons au tenseur gravitationnel G_{ik}. Nous regarderons ses composantes comme des coefficients entrant dans l'expression de la projection sur une direction fixe d'une tension appliquée à un élément à trois dimensions de l'univers à quatre dimensions. Soit un en point quelconque ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les composantes d'une direction.

Considérons d'abord le tenseur obtenu en partant de l'élément de volume (à quatre dimensions) de l'univers

$$\Pi = [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4],$$

élément qui a une signification invariante, et en formant

$$\begin{aligned}\Omega &= \xi_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_1} + \xi_2 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_2} + \xi_3 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_3} + \xi_4 \frac{\partial \Pi}{\partial \omega_4} \\ &= \xi_1 [\omega_2 \omega_3 \omega_4] + \xi_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4] + \xi_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4] - \xi_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3].\end{aligned}$$

Ce tenseur est analogue à la pression (constante) d'un fluide parfait.

Plus généralement nous considérerons le tenseur

$$\Omega = \xi_1 \Pi_1 + \xi_2 \Pi_2 + \xi_3 \Pi_3 + \xi_4 \Pi_4,$$

où Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 sont des éléments d'intégrales triples.

La *dérivée covariante* de ce tenseur s'obtiendra en prenant la dérivée ordinaire de Ω, *mais en supposant que les différentielles* $d\xi_i$ *satisfont aux relations* (8') *qui expriment que la direction* (ξ) *reste parallèle à elle-même :*

$$(8') \qquad d\xi_i = -\varepsilon_i \sum_{k=1}^{k=4} [\xi_k \omega_{ki}].$$

Dans ces conditions, on a

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{i=4} \xi_i \left\{ \Pi'_i - \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}] \right\}.$$

On pourrait dire que si Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 représentent les composantes d'une tension élastique s'exerçant sur un élément à trois dimensions de l'univers, les quantités

$$\Pi'_i - \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}]$$

sont les composantes de la force s'exerçant sur un élément de volume à quatre dimensions de l'univers.

Le *tenseur Ω sera dit satisfaire à la loi de conservation si sa dérivée covariante Ω' est nulle*, c'est-à-dire si l'on a les relations

$$\Pi'_i = \sum_{k=1}^{k=4} \varepsilon_k [\Pi_k \omega_{ki}].$$

Il en est ainsi par exemple du tenseur particulier

$$\Omega = \xi_1 [\omega_2 \omega_3 \omega_4] + \xi_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4] + \xi_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4] - \xi_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3];$$

on a en effet, par exemple,

$$\begin{aligned}
\Pi'_1 = [\omega_2 \omega_3 \omega_4]' &= [\omega'_2 \omega_3 \omega_4] - [\omega_2 \omega'_3 \omega_4] + [\omega_2 \omega_3 \omega'_4] \\
&= \varepsilon_2 [\omega_1 \omega_{12} \omega_3 \omega_4] - \varepsilon_3 [\omega_2 \omega_1 \omega_{13} \omega_4] + \varepsilon_4 [\omega_2 \omega_3 \omega_1 \omega_{14}] \\
&= \varepsilon_2 [\omega_3 \omega_1 \omega_4 \omega_{21}] + \varepsilon_3 [\omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_{31}] - \varepsilon_4 [\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_{41}] \\
&= \varepsilon_2 [\Pi_2 \omega_{21}] + \varepsilon_3 [\Pi_3 \omega_{31}] + \varepsilon_4 [\Pi_4 \omega_{41}].
\end{aligned}$$

57. A chaque tenseur Ω peut être associée une forme quadratique en ω_i. Il suffit pour cela de remarquer que la forme

$$\varepsilon_1 \xi_1 \omega_1 + \varepsilon_2 \xi_2 \omega_2 + \varepsilon_3 \xi_3 \omega_3 + \varepsilon_4 \xi_4 \omega_4$$

est un covariant absolu de $\Sigma \varepsilon_i \omega_i^2$, que par suite les quatre expressions

$$[\omega_2 \omega_3 \omega_4], \quad [\omega_3 \omega_1 \omega_4], \quad [\omega_1 \omega_2 \omega_4], \quad -[\omega_1 \omega_2 \omega_3]$$

sont respectivement covariantes à

$$\varepsilon_1\omega_1, \quad \varepsilon_2\omega_2, \quad \varepsilon_3\omega_3, \quad \varepsilon_4\omega_4.$$

Le tenseur Ω est donc associé à une forme bilinéaire en ξ et ω, et par suite, *si cette forme bilinéaire est symétrique*, à une forme quadratique en ω_i. Le tenseur

$$\Omega = \xi_1[\omega_2\omega_3\omega_4] + \xi_2[\omega_3\omega_1\omega_4] + \xi_3[\omega_1\omega_2\omega_4] - \xi_4[\omega_1\omega_2\omega_3]$$

est ainsi associé à la forme bilinéaire $\Sigma\varepsilon_i\xi_i\omega_i$, et aussi à la forme fondamentale $\Sigma\varepsilon_i\omega_i^2$.

La condition de symétrie d'un tenseur est d'après cela facile à exprimer; le calcul facile donne tout simplement

$$\varepsilon_i[\omega_i \Pi_j] = \varepsilon_j[\omega_j \Pi_i].$$

58. D'après ce qui précède et en nous aidant de l'invariant absolu

$$A = \sum_{i,j}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij},$$

il nous est bien facile de former un tenseur symétrique qui soit un covariant absolu. Partons en effet de la forme covariante

$$\begin{aligned}
\Pi = A[\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4] &= \sum_{i,j}^{1,\ldots,4} \varepsilon_i\varepsilon_j A_{ij}^{ij}[\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l] \\
&= \sum \varepsilon_i\varepsilon_j[\Omega_{ij}\omega_k\omega_l] \\
&= \varepsilon_2\varepsilon_3[\Omega_{23}\omega_1\omega_4] + \varepsilon_3\varepsilon_1[\Omega_{31}\omega_2\omega_4] + \varepsilon_1\varepsilon_2[\Omega_{12}\omega_3\omega_4] \\
&\quad + \varepsilon_1\varepsilon_4[\Omega_{14}\omega_2\omega_3] + \varepsilon_2\varepsilon_4[\Omega_{24}\omega_3\omega_1] + \varepsilon_3\varepsilon_4[\Omega_{34}\omega_1\omega_2].
\end{aligned}$$

Nous obtenons un tenseur covariant absolu en remplaçant dans Π les expressions $[\omega_i\omega_j]$ par les valeurs $\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{34}] + \varepsilon_4\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{42}] + \varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_4\Omega_{23}], \\
\Pi_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{14}] + \varepsilon_4\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{43}] + \varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_4\Omega_{31}], \\
\Pi_3 &= \varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{24}] + \varepsilon_4\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{41}] + \varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_4\Omega_{12}], \\
\Pi_4 &= -\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{23}] - \varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{31}] - \varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{12}].
\end{aligned}$$

Ce tenseur est symétrique, car si l'on forme $\varepsilon_1[\omega_1 \Pi_2] - \varepsilon_2[\omega_2 \Pi_1]$, on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_1[\omega_1 \Pi_2] - \varepsilon_2[\omega_2 \Pi_1] &= \varepsilon_3[\omega_4(\omega_1 \Omega_{13} + \omega_2 \Omega_{23})] - \varepsilon_4[\omega_3(\omega_1 \Omega_{14} + \omega_2 \Omega_{24})] \\ &= \varepsilon_3[\omega_4 \Sigma \omega_i \Omega_{i3}] - \varepsilon_4[\omega_3 \Sigma \omega_i \Omega_{i4}]\end{aligned}$$

et les deux termes du second membre sont nuls en vertu des relations (12).

Ce tenseur satisfait à la loi de conservation. La vérification par le calcul est facile en se servant des formules (10) et (13).

On remarquera que les composantes du tenseur précédent sont obtenues sans faire intervenir, au moins formellement, les quantités A_{ij}^{kl}; la quantité A elle-même pourrait être laissée de côté dans la formation de l'invariant Π en remarquant que les quantités $\varepsilon_i \varepsilon_j \Omega_{ij}$ se comportent comme les coordonnées plückériennes d'une droite, au même titre que les quantités $[\omega_i \omega_j]$; l'expression Π représente alors le moment mutuel de ces deux droites.

39. La forme quadratique associée au tenseur qui vient d'être considéré doit nécessairement rentrer dans la formule (48). Un calcul facile donne par exemple

$$\begin{aligned}\Pi_1 = \quad &(\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{23}^{23} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{24}^{24} + \varepsilon_3\varepsilon_4 A_{34}^{34})[\omega_2\omega_3\omega_4] \\ &- (\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{31}^{32} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{41}^{42})[\omega_3\omega_1\omega_4] \\ &- (\varepsilon_3\varepsilon_4 A_{43}^{41} + \varepsilon_3\varepsilon_2 A_{23}^{21})[\omega_1\omega_2\omega_4] \\ &+ (\varepsilon_4\varepsilon_2 A_{21}^{24} + \varepsilon_4\varepsilon_3 A_{31}^{34})[\omega_1\omega_2\omega_3].\end{aligned}$$

La forme quadratique cherchée est donc

$$\Phi = \varepsilon_1(\varepsilon_2\varepsilon_3 A_{23}^{23} + \varepsilon_2\varepsilon_4 A_{24}^{24} + \varepsilon_3\varepsilon_4 A_{34}^{34})\omega_1^2 + \ldots - 2(\varepsilon_3 A_{31}^{32} + \varepsilon_4 A_{41}^{42})\omega_1\omega_2 + \ldots.$$

Elle se déduit de l'expression (48) en prenant

$$\lambda = -1, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

40. Si nous voulons maintenant déterminer toutes les formes quadratiques rentrant dans la formule (48) et qui satisfont à la loi de conservation, nous remarquons d'abord que le coefficient β peut être quelconque; la loi de conservation est vérifiée si $\alpha + \lambda$ est nul. *Elle ne peut l'être dans aucun autre cas.* Sinon, en effet, elle serait vérifiée pour $\lambda = \beta = 0$, $\alpha = 1$, c'est-à-dire pour le tenseur

$$\xi_1 A[\omega_2\omega_3\omega_4] + \xi_2 A[\omega_3\omega_1\omega_4] + \xi_3 A[\omega_1\omega_2\omega_4] - \xi_4 A[\omega_1\omega_2\omega_3].$$

On aurait donc

$$[A\omega_2\omega_3\omega_4]' = \varepsilon_2 A[\omega_3\omega_1\omega_4\omega_{21}] + \varepsilon_3 A[\omega_1\omega_2\omega_4\omega_{31}] - \varepsilon_4 A[\omega_1\omega_2\omega_3\omega_{41}].$$

Cette relation est vérifiée si A est constant; il en résulte donc qu'on devrait avoir

$$[dA\,\omega_2\omega_3\omega_4] = [dA\,\omega_3\omega_1\omega_4] = [dA\,\omega_1\omega_2\omega_4] = [dA\,\omega_1\omega_2\omega_3] = 0.$$

L'invariant A *serait donc une constante*, ce qui n'a pas lieu en général.

Les seuls tenseurs gravitationnels possibles qui satisfassent à la loi de conservation sont donc donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \lambda\varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{34}] + \lambda\varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{42}] + \lambda\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_4\Omega_{23}] + \mu[\omega_2\omega_3\omega_4],\\
\Pi_2 &= \lambda\varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_3\Omega_{14}] + \lambda\varepsilon_3\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{43}] + \lambda\varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_4\Omega_{31}] + \mu[\omega_3\omega_1\omega_4],\\
\Pi_3 &= \lambda\varepsilon_2\varepsilon_4[\omega_1\Omega_{24}] + \lambda\varepsilon_1\varepsilon_4[\omega_2\Omega_{41}] + \lambda\varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_4\Omega_{12}] + \mu[\omega_1\omega_2\omega_4],\\
\Pi_4 &= -\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3[\omega_1\Omega_{23}] - \lambda\varepsilon_3\varepsilon_1[\omega_2\Omega_{31}] - \lambda\varepsilon_1\varepsilon_2[\omega_3\Omega_{12}] - \mu[\omega_1\omega_2\omega_3],
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la forme quadratique

$$\sum G_{ik}\,dx_i\,dx_k = -\lambda\sum_{i,j,k}\varepsilon_i A_{ij}^{ik}\,\omega_j\omega_k + (\lambda A + \mu)\sum_{i=1}^{i=4}\varepsilon_i\omega_i^2,$$

avec deux constantes arbitraires λ, μ.

On peut remarquer que, dans la théorie d'Einstein, la forme Π représente l'*élément de matière*, ou plutôt l'élément d'*action* (à quatre dimensions).