JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. ZAREMBA

La Théorie de la Relativité et les faits observés

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 105-139.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__105_0>

La Théorie de la Relativité et les faits observés;

Par S. ZAREMBA.

1. La Théorie de la Relativité (T. R.), imaginée par M. Einstein [1], exerce une séduction considérable par l'ampleur presque illimitée des espérances qu'elle semble autoriser. Mais, il faut bien l'avouer, elle promet trop pour ne pas inspirer quelque défiance, défiance accrue par l'immensité des sacrifices qu'il faudrait consentir pour l'adopter.

Il est donc indiqué d'examiner avec soin si les propositions, confirmées par les observations et présentées par les relativistes comme des conséquences logiques des hypothèses de leur théorie, dérivent réellement de ces hypothèses.

Tel sera précisément l'objet de ce travail.

Notre but n'est donc pas, comme il arrive souvent dans les recherches créatrices relatives à la Physique, de découvrir des propositions assez vraisemblables pour mériter une étude ultérieure approfondie. Nous avons au contraire à résoudre une question qui ressort essentiellement de la logique et qui consiste simplement à vérifier si un certain système donné d'hypothèses entraîne bien certaines propositions données. Donc, sous peine de manquer notre but, nous devons nous efforcer d'atteindre le maximum de précision dans les énoncés et de rigueur dans les démonstrations.

Nous constaterons que, dans tous les cas où les relativistes ont cru avoir démontré qu'une proposition, confirmée par des obser-

[1] *Voir* en particulier la série d'articles publiés par M. Einstein dans les *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, depuis 1914.

vations, est une conséquence des hypothèses de la T. R., ils ont appuyé leur thèse par des considérations basées non seulement sur les hypothèses de la T. R., mais encore sur quelque affirmation absolument gratuite ou sur des hypothèses logiquement incompatibles avec celles de la T. R.

On s'assurera en outre que les hypothèses de la T. R. sont insuffisantes pour établir une correspondance entre des opérations de mesure et les valeurs numériques des symboles entrant dans les formules de la théorie. Donc, avant de pouvoir parler de l'accord ou du désaccord de la T. R. avec les faits observés, il faudrait la compléter au moyen d'hypothèses additionnelles. J'ose croire qu'après avoir pris la peine de lire ce travail, on conviendra avec moi qu'un tel perfectionnement de la T. R. est bien loin d'être chose aisée.

Bien entendu, les résultats précédents ne constituent cependant pas une réfutation de la T. R., car nous n'avons nullement prouvé l'impossibilité de compléter les hypothèses de la T. R. de façon à la transformer en une théorie s'accordant réellement avec les données dues à l'observation. Y arrivera-t-on jamais ? Dans l'état actuel des choses, chacun est libre de répondre à cette question selon la nature de sa propre mentalité (1). Quel que doive être d'ailleurs le sort ultime de la T. R., elle aura dans tous les cas rendu service à la Science, car elle semble avoir fait prévoir l'existence de phénomènes nouveaux et elle a provoqué quelques excellents travaux relatifs à la Géométrie générale, tels que, par exemple, le beau Mémoire de M. Levi-Civita (2) sur la notion de parallélisme.

2. Quels sont les fondements de la T. R.? Telle est la première question à laquelle nous avons à répondre. Elle est quelque peu embarrassante, parce que tous les auteurs n'adoptent pas un même

(1) Lire dans le numéro d'octobre 1921 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, les deux Notes suivantes : Paul PAINLEVÉ, *La Mécanique classique et la théorie de la relativité*, p. 677. — Émile PICARD, *Quelques remarques sur la théorie de la relativité*, p. 680.

(2) *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, fasc. II et III, p. 173.

système d'hypothèses et surtout parce que, trop souvent, les adeptes de la T. R. dédaignent *de propos délibéré* de présenter des énoncés précis et des démonstrations rigoureuses, ainsi que cela résulte en particulier du passage suivant de la conversation entre « un Physicien expérimental, un Mathématicien et un Relativiste, défenseur des plus nouvelles conceptions du temps et de l'espace » imaginée par M. Eddington (¹).

« *Le Physicien.* — ...Mais vous-même êtes-vous bien sûr de la définition logique de tous les termes que vous employez ?

» *Le Relativiste.* — Le ciel m'en préserve ! Je ne suis pas naturellement porté à être exigeant sur ce point !... »

Dans ces conditions, il est naturellement souvent bien malaisé de découvrir quelle est au juste la pensée de l'auteur.

Toutefois, comme nous n'avons pas à nous occuper des dernières généralisations de la T. R., proposées successivement par M. Weyl (²) et M. Eddington (³), parce que l'on n'a pas encore essayé de contrôler ces généralisations par l'observation, et comme d'autre part les postulats de la T. R. adoptés par M. Hilbert (⁴) et clairement formulés par ce distingué mathématicien, interviennent seuls dans les applications que nous avons à discuter, nous nous bornerons à énoncer les fondements de la T. R. d'après M. Hilbert, en nous permettant cependant de préciser bien des choses que M. Hilbert ne fait que sous-entendre dans divers passages de ses deux Mémoires.

Dans la T. R., comme dans toute théorie déductive, il est impossible de se passer d'un certain nombre de termes regardés comme intelligibles sans aucune définition; nous les appellerons *termes*

(¹) EDDINGTON, *Espace, Temps et Gravitation*, p. 5 (Paris, 1921, chez Hermann). Traduit de l'anglais par M. J. Rossignol.

(²) Hermann WEYL, *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Julius Springer, 1921.

(³) *Voir*, dans l'Ouvrage de M. Eddington, cité plus haut, le paragraphe 50 de la partie théorique, p. 124 et suiv.

(⁴) D. HILBERT, *Die Grundlagen der Physik*, erste Mitteilung (*Göttinger Nachrichten*, 1915, Heft 3, p. 395) ainsi que zweite Mitteilung (même journal, 1917, Helft 1, p. 53).

primitifs [1] de la théorie et nous dirons que les notions correspondantes en sont les *notions primitives*. Il va sans dire que, pour exposer une théorie avec rigueur, on est tenu à en énumérer les termes primitifs. Observons encore que, s'il est impossible de définir les termes primitifs, il est au contraire possible et même indispensable, quand on tient à la rigueur, de fixer, dans une certaine mesure, le caractère des notions primitives en énonçant toutes celles des propositions supposées être vérifiées par ces termes, sur lesquelles on compte faire reposer la théorie que l'on se propose de développer; les propositions dont il vient d'être question constituent évidemment les hypothèses de la théorie.

En formulant les fondements de la T. R., nous admettrons naturellement en bloc la Logique et l'Analyse mathématique, puisque, en ce qui concerne ces Sciences, il y a accord complet entre relativistes et non relativistes. Nous nous bornerons donc à énumérer les termes primitifs et les hypothèses que l'on ne considère ni en Logique ni dans l'Analyse mathématique.

J'ajoute que nous ne sommes nullement tenus à énumérer *tous* les termes primitifs et à énoncer *toutes* les hypothèses de la T. R.; nous pourrons nous borner aux termes primitifs dont nous aurons à nous servir et aux hypothèses sur lesquelles nous comptons nous appuyer.

On sera sans doute frappé du caractère abstrait et essentiellement mathématique des hypothèses de la T. R. Ce caractère des postulats de la T. R. tient à la structure inusitée de cette théorie. Au lieu de commencer, comme dans les autres théories de la

---

(1) Dans les questions ressortant de la logique et qui seront les seules dont nous aurons à nous occuper, l'expression de *terme primitif* n'implique nullement l'idée qu'au point de vue de la Psychologie, les notions correspondantes soient des notions premières, apparaissant dans l'esprit avant toutes les autres. En réalité, c'est même le contraire qui est ordinairement vrai. Ainsi, par exemple, les géomètres considèrent volontiers le terme de *point* comme terme primitif et, pourtant, on peut affirmer hardiment que la notion correspondante n'apparaît que dans une phase relativement avancée du développement de l'intelligence. Le choix des termes primitifs d'une théorie déductive n'est dicté que par des considérations de clarté et de simplicité relatives à la structure de la théorie.

Physique, par fixer avec netteté le sens physique des symboles mathématiques que l'on se propose d'introduire, M. Einstein et ses disciples adoptent l'ordre inverse : ils construisent leur théorie, sans préciser le sens physique des symboles qu'ils emploient, quitte à en chercher après coup l'interprétation physique précise, laquelle d'ailleurs, comme on s'en convaincra en lisant ce travail, reste encore à trouver. C'est ce qui fait, notons-le en passant, qu'il est impossible de donner une idée adéquate de la T. R. sans faire largement usage de la Mathématique.

Voici les seuls quatre termes primitifs de la T. R. dont nous aurons à nous servir :

Point géométrique; Époque; Point physique, ainsi que le mot *antérieur*, considéré comme le nom d'une relation entre deux époques.

Tous ces termes peuvent être regardés comme des termes primitifs communs à la T. R. et aux autres théories de la Physique; mais, selon le cas, on devra admettre qu'ils vérifient tantôt certaines propositions, tantôt certaines autres.

En passant aux énoncés de celles des hypothèses et définitions de la T. R. sur lesquelles nous aurons à nous appuyer, faisons observer, une fois pour toutes, que nous considérerons *exclusivement* des quantités *réelles*.

Hypothèses et définitions communes [1] *à la T. R. et à toutes les autres théories de la Physique :*

I. *Hypothèse.* — Tout point géométrique peut être considéré à n'importe quelle époque.

II. *Définition.* — L'expression *point-époque* désigne un point géométrique considéré à quelque époque déterminée.

III. *Définition.* — L'ensemble de tous les points-époques s'appellera *hyperespace physique* et l'expression point-époque sera regardée comme équivalente à l'expression *point de l'hyperespace physique.*

---

[1] Je ne crois pas me tromper en affirmant que tous les auteurs adoptent réellement, au fond, toutes ces hypothèses et définitions, bien que, ordinairement, on se borne à les indiquer par de simples allusions plus ou moins claires.

IV. *Hypothèse.* — Il est possible de définir un ensemble (E) de régions de l'hyperespace physique de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Tout point de l'hyperespace physique appartient au moins à l'une des régions de l'ensemble (E).

2° Lorsque deux régions (R) et (R′) appartiennent à l'ensemble (E), elles peuvent toujours être considérées comme les termes extrêmes d'une suite finie de régions appartenant à l'ensemble (E), et telle que deux termes consécutifs de cette suite aient toujours au moins un point commun.

3° Lorsqu'une région (R) de l'hyperespace physique, appartient à l'ensemble (E), on peut toujours établir une correspondance réciproque et biunivoque entre les points de la région (R) et ceux des systèmes de valeurs de quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 qui forment un certain ensemble (X_r) de points dans l'espace arithmétique à quatre dimensions.

V. *Définition.* — Les régions de l'hyperespace physique, faisant partie d'un ensemble possédant les propriétés énumérées dans l'énoncé précédent, s'appelleront *régions élémentaires* et un tel ensemble lui-même, ensemble *complet* de régions élémentaires; lorsque les symboles (R), x_1, x_2, x_3, x_4 et (X_r) auront la signification que nous leur avons donnée plus haut, nous dirons que le système x_1, x_2, x_3, x_4 de quatre variables est un *système de coordonnées* relatif à la région (R), l'ensemble (X_r) étant l'*image arithmétique* correspondante de la région considérée.

VI. *Hypothèse.* — Il est possible de constituer un ensemble complet de régions élémentaires de l'hyperespace physique, de telle sorte que chacune d'elles puisse être rapportée à un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t, vérifiant les conditions suivantes :

1° L'ensemble de toutes les valeurs de t correspondant aux divers points de la région élémentaire considérée (R) constitue un certain intervalle ouvert (I).

2° Il correspond à l'intervalle de variabilité (I) de la variable t un certain ensemble d'époques, tel qu'il subsiste entre les époques de cet ensemble et les valeurs de t, intérieures à l'intervalle (I), une correspondance réciproque et biunivoque.

3° Lorsque deux valeurs inégales t' et t'' de t appartiennent à l'intervalle (I), une *seule* des deux époques correspondantes est, du moins dans le système de coordonnées considéré, *antérieure* à l'autre et c'est celle qui correspond au plus petit des nombres t' et t''.

VII. *Définition.* — Les notations de l'hypothèse précédente étant conservées et t' étant une valeur de t appartenant à l'intervalle (I), nous dirons que l'ensemble des époques qui correspondent aux valeurs de t appartenant à l'intervalle (I) et vérifiant la relation

$$t \geqq t'$$

constitue le temps relatif à la région (R) et au système de coordonnées considéré, défini par la valeur $t = t'$ de la variable t; pour caractériser le rôle de cette variable, nous dirons qu'elle représente le *temps* pour la région (R) et dans le système de coordonnées considéré.

VIII. *Hypothèse.* — Lorsque dans un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t relatif à une région élémentaire (R) de l'hyperespace physique, la variable t représente le temps, tout système de valeurs des trois variables x_1, x_2, x_3, appartenant à l'ensemble de tous ceux des systèmes de valeurs que ces variables peuvent prendre lorsque le point arithmétique (x_1, x_2, x_3, t) ne sort pas de l'image arithmétique de la région (R), définit un point géométrique.

IX. *Définition.* — Les notations de l'hypothèse précédente étant conservées, désignons par t_0 une valeur de t appartenant à l'intervalle de variabilité de cette variable et par (X_{t_0}) l'ensemble de tous ceux des systèmes de valeurs des variables x_1, x_2, x_3 dont chacun définit, conjointement avec la valeur t_0 de t, quelque point de la région (R); nous dirons que l'ensemble de tous les points géométriques correspondant à l'ensemble (X_{t_0}) des systèmes de valeurs des trois variables x_1, x_2, x_3 constitue la région de l'espace relatif au système de coordonnées employé, contenue par la région (R) à l'époque $t = t_0$.

X. *Hypothèse.* — Tout point physique M conserve invariablement son individualité et se trouve à une époque donnée E en un point géométrique déterminé A; pour exprimer la relation précédente entre les éléments M, E et A, nous dirons qu'à l'époque E le point physique M se trouve au point P de l'hyperespace physique, point constitué par le point géométrique A considéré à l'époque E; nous dirons aussi que les coordonnées du point P de l'hyperespace physique sont celles du point physique M à l'époque E.

XI. *Hypothèse.* — Lorsque, à deux époques différentes E_1 et E_2, un *même* point physique se trouve en des points d'une même région élémentaire (R), de la nature considérée dans l'hypothèse VI, une *certaine* des époques E_1 et E_2 est *antérieure* à l'autre dans *n'importe* lequel des systèmes de coordonnées dont l'existence est assurée par l'hypothèse VI.

A ces hypothèses et définitions communes à toutes les conceptions de la Physique, nous adjoindrons l'hypothèse suivante, particulière à la T. R. :

XII. *Hypothèse particulière à la T. R.* (1). — Il est possible de constituer un ensemble complet de régions élémentaires de l'hyperespace physique (énoncé V, p. 110), régions qui s'appelleront *régions élémentaires régulières*, de façon qu'il corresponde à chacune d'elles une classe particulière de systèmes de coordonnées, systèmes que nous appellerons *systèmes réguliers* de coordonnées et qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1° Lorsqu'une région régulière de l'hyperespace physique est rapportée à un système régulier de coordonnées, l'image arithmétique (énoncé V, p. 110) de cette région est constituée par un

(1) L'énoncé qui va suivre contient bien des choses que M. Hilbert ne dit pas d'une façon explicite et que je n'ai pu passer sous silence puisque, ne présentant pas un exposé de la T. R., je n'ai pas eu la ressource de les faire sous-entendre. Toutefois, je ne crois pas m'être écarté de la pensée de M. Hilbert. *Voir* en particulier les passages suivants des deux Mémoires de cet auteur : *Göttinger Nachrichten*, 1915, Heft 3, p. 395, et même journal, 1917, Heft 1, p. 57.

domaine ouvert, simplement connexe, situé dans l'espace arithmétique à quatre dimensions.

2° Il correspond à tout système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 relatif à une région régulière (R) de l'hyperespace physique un système de dix fonctions

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

bien déterminées des variables x_1, x_2, x_3, x_4, définies dans l'image arithmétique (X_r) de la région (R), relative au système de coordonnées considéré; ces fonctions s'appellent, d'après M. Einstein, *potentiels de gravitation* et sont telles que le discriminant de la forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

est négatif.

3° Les potentiels de gravitation g_{ik} admettent des dérivées partielles continues dans tout le domaine (X_r) jusqu'à un certain ordre p inclusivement; nous supposerons $p = 3$, parce que c'est la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p pour légitimer sans peine les calculs que l'on rencontre ordinairement dans la T. R.

4° Pour qu'un système d'équations de la forme

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

où l'ensemble des variables x_1, x_2, x_3, x_4 représente un système régulier de coordonnées relatif à une région élémentaire régulière (R) de l'hyperespace physique, définisse les variables x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 comme un nouveau système régulier de coordonnées relatif à la région (R), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

a. Les fonctions f_i (x_1, x_2, x_3, x_4) sont bien déterminées et possèdent des dérivées partielles continues jusqu'au quatrième ordre inclusivement dans tout le domaine (X_r) qui représente l'image arithmétique (énoncé V, p. 110) de la région (R) relative au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

b. Si l'on désigne par (X'_r) le transformé du domaine (X_r) par la substitution (1), les équations (1) font correspondre à un point de (X'_r) un seul point du domaine (X_r).

c. Dans tout le domaine (X_r), on a

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} \neq 0.$$

5° Lorsque les formules (1) constituent, pour une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique, les formules de passage d'un système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, à un second système régulier x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, ces formules entraînent l'égalité

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{i,k=1}^{4} g'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

où les g_{ik} et les g'_{ik} représentent les potentiels de gravitation relatifs aux systèmes de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.

6° Soient (R) une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique rapportée à un système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, et (X_r) l'image arithmétique (énoncé V) correspondante de cette région. Si l'on désigne alors par (X'_r) un domaine ouvert et simplement connexe contenu dans le domaine (X_r) et par (R′) la portion de (R) que le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 fait correspondre au domaine (X'_r), le système complet $(\mathcal{E})$ de régions élémentaires régulières dont fait partie la région (R) se transformera en un nouveau système complet de régions élémentaires régulières si l'on adjoint la région (R′) à l'ensemble $(\mathcal{E})$.

7° Désignons par (R_1) et (R_2) deux régions élémentaires régulières de l'hyperespace physique et par $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ les systèmes complets dont ces régions font partie. Sans admettre que les systèmes complets $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ soient forcément distincts, supposons que les régions (R_1) et (R_2) aient un point commun A. Il existera alors une région (R_0) de l'hyperespace physique, contenant le point A et contenue dans chacune des régions (R_1) et (R_2), telle que par l'adjonction de cette région à l'un quelconque des systèmes ($\mathcal{E}_1$) et ($\mathcal{E}_2$), l'on obtienne encore un système complet de régions élémentaires régulières de l'hyperespace physique.

8° Lorsque deux régions (R) et (R′) de l'hyperespace physique font partie d'un même système complet de régions élémentaires régulières, lorsqu'en outre la région (R′) est contenue dans la région (R), tout système régulier de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 relatif à la région (R), ainsi que les potentiels de gravitation correspondants, peuvent être regardés comme formant les éléments analogues relatifs à la région (R′), à condition d'assigner pour domaine au point arithmétique (x_1, x_2, x_3, x_4) celui que le système de coordonnées considéré fait correspondre à la portion (R′) de la région (R).

9° L'ensemble des systèmes réguliers de coordonnées, relatifs à une région élémentaire régulière de l'hyperespace physique, contient une classe particulière de systèmes de coordonnées, que nous appellerons systèmes *normaux* de coordonnées et qui sont tels que, sur les quatre variables qui constituent un système de coordonnées de la classe considérée, l'une représente le temps au sens de la définition VII (p. 111).

10° Les systèmes normaux de coordonnées relatifs à une région élémentaire régulière (R) de l'hyperespace physique sont caractérisés [1] par la propriété suivante :

Les notations étant disposées de façon que, sur les quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4, formant ensemble un système normal de coordonnées relatif à la région (R), la variable x_4 représente le temps, les potentiels de gravitation correspondants g_{ik} satisferont aux conditions que voici :

$$g_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad g_{44} < 0.$$

En rapprochant les propriétés attribuées par l'énoncé précédent aux potentiels de gravitation g_{ik} de la géométrie métrique d'un

(1) HILBERT, *Die Grundlagen der Physik*, zweite Mitteilung (*Göttinger Nachrichten*, 1917, Heft 1, p. 57).

espace arithmétique à n dimensions, on sera conduit à donner avec nous le nom de *forme métrique* de la région considérée à la forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Les douze hypothèses et définitions qui viennent d'être énoncées caractérisent la conception relativiste générale de l'hyperespace physique.

En dehors des hypothèses précédentes, nous n'aurons à tenir compte que des deux hypothèses qui seront énoncées plus loin et qui caractérisent le cas particulier de la T. R., appelé la *T. R. restreinte.*

Toutes les autres hypothèses de la T. R. n'étant dans aucun rapport avec les questions que nous aurons à discuter, nous nous dispenserons de les énoncer.

Il est de toute évidence que la possibilité de contrôler la T. R. au moyen des faits observés est subordonnée à l'existence de cas où l'on serait arrivé à déterminer les valeurs numériques des coordonnées de certains points physiques par des mesures effectuées à l'aide d'instruments appropriés. Il nous faut donc examiner si les relativistes ont fait connaître quelque procédé admissible pour établir, dans certains cas, une correspondance entre les valeurs numériques des coordonnées d'un point physique et des opérations de mesure.

5. Avant de passer à l'étude de cette question, il est indispensable d'analyser les bases théoriques des opérations de mesure de coordonnées en Physique non relativiste.

Cette analyse est nécessaire non seulement pour faciliter l'intelligence des considérations ultérieures, mais encore et surtout parce que, comme nous le constaterons plus bas, les relativistes appliquent les méthodes de mesures des non-relativistes.

Nous devons donc commencer par présenter les énoncés qui caractérisent la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Il conviendra évidemment d'adopter, non pas l'ordre d'exposition habituel, mais celui que les relativistes ont choisi pour faire connaître leur façon de concevoir l'hyperespace physique.

Nous avons déjà fait remarquer que les deux conceptions de l'hyperespace physique peuvent être exprimées au moyen des mêmes termes primitifs et que les onze premiers énoncés du numéro précédent sont communs à ces deux conceptions. Il suffira donc de présenter l'énoncé qu'il faut substituer à l'énoncé XII du numéro précédent pour passer de la conception relativiste de l'hyperespace physique à la conception non relativiste.

Pour éviter des complications qui ne contribueraient en rien à éclaircir les questions qui vont nous occuper, nous ne chercherons pas à atteindre le maximum de généralité de la conception non relativiste de l'hyperespace physique et nous supposerons, pour simplifier, que tout l'hyperespace physique peut être regardé comme *une seule région élémentaire* (énoncé V, p. 110).

Toutefois, pour mettre convenablement en évidence les principes sur lesquels reposent les opérations de mesure des coordonnées de points physiques en Physique non relativiste, il sera utile de nous élever au-dessus de la conception courante où l'on admet d'emblée la validité de la Géométrie euclidienne.

En définitive, voici l'énoncé que nous allons adopter :

XII *a*. *Hypothèse spécifique de la conception non relativiste de l'hyperespace physique.* — L'ensemble de tous les systèmes de coordonnées, à chacun desquels l'hyperespace physique peut être rapporté, contient une classe particulière de systèmes de coordonnées, systèmes que nous appellerons systèmes *normaux* de coordonnées et qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1° L'une des quatre variables formant ensemble un système normal (S) de coordonnées, soit t, représente le temps relatif au système (S) au sens de la définition VII (p. 111).

2° Aux trois autres variables x_1, x_2, x_3, du système (S), correspond une forme différentielle quadratique définie, positive,

$$(1) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (h_{ik} = h_{ki}),$$

dont les coefficients h_{ik} sont des fonctions bien déterminées des seules variables x_1, x_2, x_3, admettant des dérivées partielles continues jusqu'à un certain ordre p inclusivement; nous supposerons $p = 3$, parce que c'est la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p pour légitimer aisément les calculs les plus ordinaires dans la théorie qui nous occupe.

3° La forme (1) représente le ds^2 d'un espace arithmétique à courbure constante; nous l'appellerons *forme métrique* relative au système normal de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

4° Les notations précédentes étant conservées, pour que des formules exprimant quatre nouvelles variables x'_1, x'_2, x'_3, t' en fonctions des variables x_1, x_2, x_3 et t puissent être considérées comme les formules de passage du système normal de coordonnées x_1, x_2, x_3, t à un nouveau système normal de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, t', il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

a. Les formules considérées doivent être de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t) & (i = 1, 2, 3), \\ t' = at + b, \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes dont la première est positive, les fonctions $f_i(x_1, x_2, x_3, t)$ étant bien déterminées et admettant des dérivées partielles continues jusqu'au quatrième ordre inclusivement pour tous les systèmes de valeurs des variables x_1, x_2, x_3, t.

b. A tout système de valeurs des variables x'_1, x'_2, x'_3, t', les équations (1) doivent faire correspondre un système unique des valeurs des variables x_1, x_2, x_3, t.

c. On doit toujours avoir

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

d. Le résultat de la transformation de la forme (1) au moyen de la substitution définie par les trois premières équations du système (2), dans le cas où l'on pose

$$dt = 0,$$

doit être une forme différentielle

$$\sum_{i,k=1}^{3} f_{ik}\, dx'_i\, dx'_k, \qquad f_{ik} = f_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

dont les coefficients f_{ik} sont des fonctions des variables x'_1, x'_2, x'_3, *indépendantes* de t.

5° Les conditions précédentes étant remplies, les coefficients de la forme métrique

$$\sum_{i,k=1}^{3} h'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

relative au nouveau système normal de coordonnées, seront définis par les formules

$$h'_{ik} = \lambda f_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

où λ représente un nombre positif (1) dont la valeur peut être fixée arbitrairement et qui, après cette opération, et lorsque les formules (2) sont données, achève de déterminer la nature du système de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3, t'.

L'hypothèse précédente, conjointement avec les onze premiers énoncés du numéro précédent, caractérise la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Les douze énoncés ainsi obtenus ne sont pas logiquement indépendants, mais c'est sans importance pour nous.

4. La conception non relativiste de l'hyperespace physique étant adoptée, examinons dans quelles conditions et de quelle façon des mesures de coordonnées de points physiques pourraient être effectuées.

(1) L'introduction du nombre λ offre cet avantage que, après avoir déterminé complètement la correspondance entre les points de l'hyperespace physique et les systèmes de valeurs des quatre variables qui doivent former un système normal de coordonnées, on peut encore choisir arbitrairement l'élément que nous définirons plus tard comme l'étalon de longueur relatif au système de coordonnées considéré.

On nous accordera sans doute que, à titre d'axiome, on peut admettre la proposition suivante :

(A). *Axiome.* — Quelque conception de l'hyperespace physique que l'on adopte, on ne pourra y effectuer des mesures de coordonnées de points physiques qu'après avoir satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Présenter les définitions théoriques des instruments de mesure dont on compte se servir, c'est-à-dire définir des systèmes de points physiques qui, s'ils existaient, constitueraient, sous forme parfaite, les instruments nécessaires.

2° Faire connaître des systèmes de points physiques existant réellement et que l'on pourra regarder comme représentant les instruments théoriques avec une approximation suffisante, du moins dans certaines conditions et peut-être moyennant certaines corrections des résultats obtenus en s'en servant.

Voyons comment le non-relativiste satisfait à ces conditions. A cet effet supposons que l'hyperespace physique soit rapporté à un système normal de coordonnées (énoncé XII *a*, p. 117) et soit, sur les quatre variables x_1, x_2, x_3, t qui forment le système considéré, t celle qui représente le temps.

En vertu de l'hypothèse VIII (p. 111) l'ensemble des trois variables x_1, x_2, x_3 pourra être considéré comme formant un système de coordonnées auquel l'ensemble de tous les points géométriques, c'est-à-dire (énoncé IX, p. 111) tout l'espace relatif au système de coordonnées considéré, serait rapporté. Il est donc naturel de dire avec nous que, sur les quatre coordonnées d'un point physique, celles qui représentent les valeurs de x_1, x_2, x_3 et qui définissent le point géométrique où se trouve, à l'époque définie par la quatrième coordonnée t, le point physique, constituent les coordonnées *spatiales* du point physique à l'époque considérée. Le point géométrique défini, à une époque donnée, par les coordonnées spatiales du point physique à cette époque, s'appellera *position* du point physique à l'époque considérée.

Nous appellerons *arc géométrique régulier*, un ensemble (α) de points géométriques, tel que, entre les points géométriques de cet ensemble et celles des valeurs d'un paramètre λ qui appartiennent à un certain intervalle fermé (λ_1, λ_2), $(\lambda_1 < \lambda_2)$, l'on puisse établir une correspondance réciproque et biunivoque, définie par des équations de la forme

$$x_i = f_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point appartenant à l'ensemble (α), les $f_i(\lambda)$ étant des fonctions continues, définies dans l'intervalle fermé (λ_1, λ_2) et possédant à l'intérieur de cet intervalle des dérivées bornées et continues ne s'annulant jamais à la fois.

La forme

$$\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

étant la forme métrique relative au système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), nous regarderons comme *longueur* de l'arc (1), estimé dans le système de coordonnées considéré, le nombre s défini par la formule

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, f'_i(\lambda)\, f'_k(\lambda)}\, d\lambda,$$

où l'on doit prendre la détermination positive du radical.

Les conventions usuelles permettent d'exprimer brièvement la définition précédente en disant que l'espace relatif au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t est considéré comme admettant un ds^2 déterminé, défini par la formule

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Les mêmes conventions suggèrent assez clairement ce qu'il convient d'entendre par *géodésiques* de l'espace relatif au système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t, pour qu'une définition explicite soit superflue.

Nous entendrons par *distance* de deux points géométriques, estimée dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), le minimum de longueur d'un arc géométrique régulier joignant les deux points considérés, en supposant bien entendu que la longueur d'un tel arc soit toujours estimée dans le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

Nous appellerons encore *distance* de deux points physiques P et Q à une époque $t = t_0$, estimée dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t), la distance des points géométriques représentant les positions respectives des points P et Q à l'époque $t = t_0$, cette distance étant, bien entendu, estimée dans le système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t.

Continuons à désigner par P et Q deux points physiques; désignons en outre par (x_1, x_2, x_3, t) et (x'_1, x'_2, x'_3, t') deux systèmes normaux de coordonnées relatifs à l'hyperespace physique, par t_0 une valeur de t et par t'_0 la valeur de t' qui, en vertu des formules de passage de l'un des deux systèmes de coordonnées précédents au second, correspond à la valeur t'_0 de t. Cela posé, l'hypothèse XII a (p. 117) permettra de démontrer sans peine le théorème suivant :

(B). *Théorème.* — Si l'on désigne par s et s' les valeurs respectives de la distance des points physiques P et Q, estimées dans les systèmes de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) et (x'_1, x'_2, x'_3, t') aux époques t_0 et t'_0, on aura

$$s' = \mu s,$$

où μ représente une constante qui ne dépend que de la nature des deux systèmes de coordonnées.

Voici maintenant une définition fondamentale pour ce qui va suivre.

(C). *Définition.* — L'assertion qu'un système (S) de points physiques est un système de points *rigide* ou un corps *rigide*, exprime que la distance mutuelle de deux points appartenant au système (S), estimée dans un système normal de coordonnées arbitrairement choisi, est toujours indépendante de l'époque à laquelle elle se rapporte.

La propriété de rigidité d'un système de points physiques en est évidemment une propriété intrinsèque. Il résulte en outre du théorème (B) que, pour être certain qu'un système de points physiques est un système rigide, il suffit de savoir que la condition de rigidité est remplie, ne fût-ce que par rapport à un seul système normal de coordonnées.

Sans nuire à la clarté, nous croyons pouvoir nous dispenser de définir explicitement les systèmes de points physiques que nous appellerons *arcs réguliers* (1) *rigides*; nous croyons pouvoir de même omettre la définition du nombre qui sera considéré comme la ***longueur*** d'un arc régulier rigide, estimée dans un système normal de coordonnées.

Cela posé, on déduira sans peine de l'hypothèse XII *a* (p. 117) les deux théorèmes suivants :

(D). *Théorème.* — Il correspond à tout ensemble de deux systèmes normaux de coordonnées (S) et (S′) un nombre positif μ [égal à celui que l'on a désigné par la même lettre dans le théorème (B)], tel que si l'on désigne par s et s' les valeurs de la longueur d'un même arc régulier rigide, estimée successivement dans les systèmes (S) et (S′), on ait

$$s' = \mu s.$$

(E). *Théorème.* — Il correspond à tout arc régulier rigide (α) et à un nombre positif s_0, arbitrairement choisi, une classe (C) de systèmes normaux de coordonnées telle que le nombre s_0 représente précisément la longueur de l'arc (α), estimée dans n'importe quel système de coordonnées de la classe (C).

Notons encore qu'en s'appuyant sur la théorie classique des espaces arithmétiques à courbure constante, on peut aisément déduire de l'hypothèse XII *a* le théorème suivant :

(F). *Théorème.* — Le nombre de degrés de liberté d'un corps rigide atteint le maximum compatible avec la définition (C), c'est-à-dire le nombre 6 lorsque les points physiques qui constituent

(1) *Voir* p. 120 et 121.

le corps considéré ne se trouvent à aucune époque sur une même géodésique de l'espace.

Pour pouvoir effectuer des mesures de coordonnées dans l'hyperespace physique tel que le conçoivent les non-relativistes, il suffirait de disposer d'un étalon de longueur, d'un goniomètre et d'une horloge. Pour satisfaire à la condition 1° de l'axiome (A) (p. 120), en ce qui concerne un étalon de longueur, on peut adopter la définition suivante :

(G). *Définition.* — On donne le nom d'*étalon* ou d'*unité de longueur* à un arc régulier rigide u dans les conditions suivantes :

1° Lorsque l'hyperespace physique est rapporté à un système normal de coordonnées, l'ensemble des positions occupées à une même époque par les divers points physiques formant l'arc u constitue un arc de géodésique de l'espace.

2° On est convenu de n'estimer les longueurs d'arcs réguliers géométriques et celles d'arcs réguliers rigides que dans les systèmes de coordonnées normaux, dans lesquels la longueur de l'arc u est représentée par le nombre 1 ; nous dirons que ces systèmes de coordonnées sont ceux qui *correspondent* à l'étalon de longueur considéré.

Notons qu'en vertu du théorème (E), il est permis de choisir arbitrairement pour étalon de longueur n'importe quel arc rigide vérifiant la première condition de la définition précédente.

Pour satisfaire à la deuxième condition de l'axiome (A) (p. 120), les non-relativistes adoptent l'hypothèse suivante :

(H). ***Hypothèse.*** — Les corps communément appelés « corps peu déformables », tels que des pièces d'acier, de bronze, etc., représentent, au moins dans certaines conditions (absence de forces trop grandes et faibles variations de température), des corps rigides avec un degré d'approximation suffisant.

En vertu de l'hypothèse précédente, il sera possible de façonner un corps réel de manière que l'une de ses arêtes puisse être prise pour étalon de longueur. La définition (C) et l'hypothèse (H) permettront, comme on s'en rendra compte sans peine, de satisfaire aux deux conditions de l'axiome (A) (p. 120), aussi en ce qui concerne un goniomètre (à la vérité bien rudimentaire). Pour aller plus loin, il convient de remarquer qu'en s'appuyant sur l'hypothèse XII *a* (p. 117) et sur la définition (C) (p. 122), on peut démontrer le théorème suivant : « Le choix de l'étalon de longueur étant arrêté et un corps rigide (R) étant donné, il sera possible de trouver parmi les systèmes normaux de coordonnées correspondant [*voir* la définition (G)] à l'étalon de longueur adopté, un système de coordonnées x_1, x_2, x_3, t tel que, dans ce système, les coordonnées spatiales des points physiques du corps (R) soient constantes. » Considérons alors un corps réel pouvant être regardé comme un corps rigide donné (R) et, après avoir arrêté le choix de l'étalon de longueur, regardons l'hyperespace physique comme rapporté à un système normal de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) vérifiant les conditions du théorème qui vient d'être énoncé. Après avoir marqué sur le corps (R) un triangle géodésique, on mesurera les côtés et les angles de ce triangle de la façon habituelle au moyen de l'étalon de longueur et du goniomètre. On calculera ensuite, au moyen d'une formule connue, la courbure ρ de l'espace correspondant au système considéré de coordonnées.

Connaissant le nombre ρ, on pourra définir parfaitement au moyen du corps (R) le système de coordonnées x_1, x_2, x_3 auquel on voudra rapporter l'espace relatif à un système normal de coordonnées (x_1, x_2, x_3, t) dans lequel les coordonnées spatiales des points physiques qui composent le corps (R) sont constantes. On pourra alors mesurer de la façon ordinaire les coordonnées spatiales de tout point physique au repos dans le système de coordonnées considéré. Pour résoudre complètement le problème de la mesure des coordonnées d'un point physique, il reste à satisfaire à l'axiome (A) (p. 120), en ce qui se rapporte à une horloge. On reconnaît de suite que de nouvelles hypothèses seraient nécessaires. Sans entrer dans aucun détail à ce sujet, nous croyons en avoir dit assez pour faire comprendre de quelle façon le non-relativiste arrive à satisfaire aux conditions de l'axiome (A) (p. 120) à l'effet de rendre possibles des opérations de mesure des coordonnées de points physiques. Ajoutons seulement que, selon que l'on constaterait des coïncidences ou des divergences entre les résultats des calculs et ceux des mesures effectives, on conclurait que l'expérience confirme ou contredit, *dans leur ensemble* [1], les hypothèses que l'on avait adoptées.

L'examen précédent confirme ce que l'axiome (A) (p. 120) fait prévoir immédiatement, à savoir ceci : *Aucune des deux conceptions de l'hyperespace physique ne rend possibles, à elle seule, des opérations de mesure de coordonnées de points physiques; dans un cas, comme dans l'autre,* des *hypothèses additionnelles,* relatives aux systèmes de points physiques existant *dans la nature, sont indispensables.*

Nous venons de voir que, pour les non-relativistes, l'hypothèse (H) est une hypothèse de ce genre; à la vérité, seule, elle ne suffit pas à tout, mais elle permet d'atteindre le but au moins en partie.

Voyons comment procèdent les relativistes.

5. Il ne semble pas qu'il existe, ne fût-ce qu'une simple tentative de satisfaire aux deux conditions de l'axiome (A) (p. 120), d'une façon compatible avec la conception relativiste générale de l'hyperespace physique.

A la vérité, M. Hilbert [2] définit bien sous les noms de « ruban métrique » (Massfaden) et d' « horloge à lumière » (Lichtuhr) deux instruments qui, s'ils existaient réellement, seraient propres à effectuer des mesures de coordonnées de points physiques et, par cela même, il satisfait à la première condition de l'axiome (A) (p. 120), mais il ne formule aucune hypothèse concernant les systèmes de points physiques existant dans la nature, propre à permettre de satisfaire à la deuxième condition de notre axiome. Donc, dans l'état actuel des choses, la *T. R. générale n'admet aucune vérification expérimentale.* Les relativistes arrivent cependant à la conclusion opposée en opérant comme il suit : ayant

---

(1) Je ne dis pas « chacune d'elles ».

(2) Hilbert, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung) (*Gottinger Nachrichten*, 1917, Heft. 1, p. 54).

obtenu une formule dont ils veulent tirer un argument en faveur de la T. R., ils admettent, sans tenter aucune justification de leur hypothèse, que, sur les quatre coordonnées du point physique qu'ils envisagent, l'une représente le temps déterminé au moyen d'une horloge ordinaire et les trois autres, suivant le cas, les coordonnées cartésiennes ordinaires ou les coordonnées polaires; s'il arrive alors que la formule considérée s'accorde avec les résultats des mesures effectuées par les méthodes des non-relativistes, ils estiment qu'ils ont constaté un accord de la T. R. avec des faits observés [1]. A moins de considérer cette conclusion comme une assertion absolument gratuite, il faut la regarder comme reposant à la fois sur les hypothèses de la conception relativiste et sur celles de la conception non relativiste de l'hyperespace physique. Mais ces deux systèmes d'hypothèses sont, comme on le sait et comme on le vérifie avec la plus grande facilité, logiquement incompatibles. Leur ensemble permettrait donc de démontrer l'exactitude ou la fausseté de n'importe quelle proposition.

Les vues précédentes sont confirmées d'une façon très intéressante par l'ambiguïté indiquée par M. Painlevé [2] dans la théorie relativiste de Mercure, ainsi que par l'incompatibilité relevée, dans la même théorie par M. Le Roux [3], de l'interprétation physique d'une coordonnée de Mercure avec la signification qu'il faudrait, semble-t-il, attribuer à un autre élément; des ambiguïtés ou contradictions de ce genre eussent été impossibles, si le sens physique des symboles employés avait été bien précisé ou, ce qui revient au même, si la correspondance entre les valeurs numériques des coordonnées d'un point physique et des opérations de mesure avait été correctement établie.

---

(1) Pour ne citer que l'un des travaux les plus récents, j'indiquerai les paragraphes 21-32 de l'Ouvrage suivant : WEYL, *Raum, Zeit, Meterie*. Berlin, 1921, chez Springer.

(2) *Loc. cit.*, n° **1**. Comparer avec HILBERT, *Die Grundlagen der Physik* (zweite Mitteilung) *Göttinger Nachrichten*, 1917, Heft 1, p. 67.

(3) J. LE ROUX, *La loi de gravitation et ses conséquences* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 13 juin 1921, p. 1467).

En définitive, tout ce que nous avons annoncé au n° **1** est complètement établi en ce qui concerne la T. R. générale.

6. L'observation des faits confirme-t-elle du moins réellement, comme beaucoup de personnes le croient, la T. R. restreinte ?

Cette théorie est un cas particulier de la T. R. générale, caractérisé par les deux postulats suivants :

Postulat I. — Tout l'hyperespace physique peut être regardé comme formant une seule région élémentaire régulière [hypothèse XII (p. 112); *voir* en particulier la partie 9° de cette hypothèse] et, pour certains systèmes normaux de coordonnées auxquels elle peut être rapportée, la forme métrique de l'hyperespace physique est de la forme

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2,$$

où t représente le temps; ces systèmes de coordonnées s'appelleront *systèmes d'Einstein.*

Postulat II (1). — Lorsqu'un système d'équations de la forme

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

représente les relations qui subsistent entre les coordonnées d'Einstein d'un point physique déterminé et, plus généralement, lorsque ces équations expriment la loi de propagation de quelque phénomène, on a

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - 1 \leq 0.$$

Commençons par discuter l'application de la T. R. restreinte à un cas particulier, celui-là même qui a fait imaginer cette théorie.

Les célèbres expériences de MM. Michelson et Morley ont fait admettre par des physiciens la proposition suivante :

(1) Il est aisé de prouver que, en réalité, ce postulat est une conséquence de l'hypothèse XI (p. 112).

(M). *Proposition tirée de l'expérience.* — La lumière issue d'une source invariablement liée à la Terre se propage, par rapport à celle-ci, avec une même vitesse dans tous les sens.

L'énoncé précédent nous fait évidemment connaître l'une des conséquences de l'hypothèse où une source de lumière et la Terre constitueraient un système rigide de points physiques, ou, plus simplement, un corps rigide. Or voici ce que dit l'un des plus chaleureux partisans de la T. R. restreinte (1) : L'existence d'un corps rigide est incompatible avec cette théorie. Nous voici bien embarrassés, car, si M. Laue a raison, le phénomène auquel se rapporte la proposition (M) est impossible et ne peut par conséquent pas servir de confirmation à la T. R. restreinte. Toutefois, bien que M. Laue présente une démonstration de son assertion (2), il est permis de se demander si, après avoir substitué à la conception de corps rigide discutée par cet auteur, une conception différente, on ne pourrait pas parvenir à rendre compatible avec la T. R. restreinte, l'existence de corps rigides et même à prouver ensuite que la proposition (M) est bien une conséquence logique des hypothèses de la théorie considérée.

7. Rendons-nous compte d'abord des difficultés du problème auquel nous venons d'être conduits. A cet effet, il conviendra d'étudier une définition de corps rigide que les relativistes adoptent souvent d'une façon implicite et qui vient à l'esprit très naturellement.

Rapportons l'hyperespace physique aux coordonnées d'Einstein et soit

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$$

la forme métrique correspondante. Nous dirons que, sur les quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, t d'un point physique, les trois premières en représentent les coordonnées spatiales et définissent la position du point physique à l'époque à laquelle elles se rapportent.

(1) LAUE, *Das Relativitàts princip*, p. 50. Braunschweig, 1913, chez Fr. Vieveg und Sohn.

(2) *Loc. cit.*, § 27, p. 180.

Appelons encore distance de deux points physiques A et B à une époque $t = t_0$, estimée dans le système de coordonnées d'Einstein considéré, le nombre r défini par les relations

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (a_i - b_i)^2 \qquad (r \geqq 0),$$

où a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 représentent les coordonnées spatiales respectives des points physiques A et B à l'époque $t = t_0$. Cela posé, voici la définition de corps rigide que nous avions en vue.

(R). *Définition.* — L'assertion qu'un système (C) de points physiques est un corps rigide exprime que les distances mutuelles des points physiques du système (C), estimées dans un système de coordonnées d'Einstein arbitrairement choisi, sont indépendantes de l'époque à laquelle on les considère.

(T). *Théorème.* — Étant donné un corps rigide (C), ne se réduisant pas à un point physique unique, ainsi qu'un système de coordonnées d'Einstein, le corps (C) sera ou bien éternellement au repos par rapport au système de référence considéré, ou bien il sera éternellement animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à ce système de référence.

En effet, supposons que deux points physiques distincts A et B forment un système rigide, désignons par x_1, x_2, x_3, t un système de coordonnées d'Einstein et par $x_1^{(A)}$, $x_2^{(A)}$, $x_3^{(A)}$ et $x_1^{(B)}$, $x_2^{(B)}$, $x_3^{(B)}$ les coordonnées spatiales respectives des points A et B à une même époque t. Nous aurons

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x_i^{(A)} = \varphi_i(t) \\ x_i^{(B)} = \psi_i(t) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En vertu de la définition (R), on aura

$$\text{(2)} \qquad \sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t) - \psi_i(t)]^2 = \text{const.} > 0.$$

Considérons maintenant un second système de coordonnées d'Einstein, y_1, y_2, y_3, s. Les formules de passage du premier système de coordonnées au second seront de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} y_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k + a_{i4} t + a_i & (i = 1, 2, 3), \\ s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} x_k + a_{44} t + a_4 & (\text{avec } a_{44} > 0), \end{cases}$$

où les a_{ik} et les a_i sont des constantes telles que les équations (3) entraînent l'égalité

$$(3\ bis)\qquad \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 - dt^2 = \sum_{i=1}^{3} dy_i^2 - ds^2.$$

Sans écrire toutes les relations que vérifient les a_{ik}, notons seulement que, pour qu'il corresponde à un système donné de valeurs des constantes

$$a_{41}, \quad a_{42}, \quad a_{43}, \quad a_{44},$$

un système de valeurs des autres constantes a_{ik} et a_i, tel que les formules (3) entraînent l'égalité (3 *bis*), il faut et il suffit que l'on ait

$$(4)\qquad -a_{41}^2 - a_{42}^2 - a_{43}^2 + a_{44}^2 = 1, \quad \text{et} \quad a_{44} > 0.$$

Aux coordonnées

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t), \quad t$$

du point physique A dans le premier système de référence, les formules (3) feront correspondre certaines valeurs

$$y_1^{(A)}, \quad y_2^{(A)}, \quad y_3^{(A)}, \quad s$$

du même point dans le nouveau système de coordonnées; on aura, en particulier,

$$(5)\qquad s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} \varphi_k(t) + a_{44} t + a_4.$$

Considérons maintenant les coordonnées

$$(6)\qquad y_1^{(B)}, \quad y_2^{(B)}, \quad y_3^{(B)}, \quad s$$

du point B dans le second système de coordonnées à l'époque s, définie dans ce système par la formule (5). Aux coordonnées (6) du point B dans le second système, les formules (3) feront correspondre un certain système de valeurs des coordonnées du même point dans le premier système de référence. Eu égard au second système d'équations (1), on reconnaît que les valeurs en question pourront être représentées par

$$\psi_1(t+h), \quad \psi_2(t+h), \quad \psi_3(t+h), \quad t+h,$$

où h représente une certaine fonction de t; on aura en même temps

$$s = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\psi_k(t+h) + a_{44}(t+h) + a_4. \tag{7}$$

Il résulte de (5) et de (7) que la fonction h de t sera déterminée par l'équation

$$\sum_{k=1}^{3} a_{4k}[\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] + a_{44}h = 0. \tag{8}$$

D'autre part, il résulte de la définition (R) que l'on a

$$\sum_{k=1}^{3} [y_k^{(B)} - y_k^{(A)}]^2 = \text{const.} > 0.$$

En portant dans cette relation les valeurs des $y_i^{(A)}$ et $y_i^{(B)}$ exprimées au moyen des formules (3) en fonction des coordonnées des points physiques A et B dans le premier système, aux époques t et $t+h$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)]^2 - h^2 = \text{const.} > 0. \tag{9}$$

Il est aisé de conclure de ce qui précède que, étant donné un système de valeurs des constantes a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} vérifiant la condition (4), l'équation (8) doit entraîner la constance du premier membre de (9) pour toutes les valeurs de t. En posant

$$u_k = \frac{a_{4i}}{a_{44}},$$

on s'assure que la proposition précédente équivaut à la suivante : pourvu que l'on choisisse trois constantes u_1, u_2, u_3 de façon à avoir

$$(10) \qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1,$$

l'équation

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{3} u_k[\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] + h = 0$$

entraînera la constance du premier membre de (9) ou, ce qui revient au même, l'équation

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t+h) - \varphi_k(t)] \left[\psi'_k(t+h)\left(1 + \frac{dh}{dt}\right) - \varphi'_k(t)\right] - h\frac{dh}{dt} = 0.$$

L'équation (11) donne

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{3} u_k \left[\psi'_k(t+h)\left(1 + \frac{dh}{dt}\right) - \varphi'_k(t)\right] + \frac{dh}{dt} = 0.$$

Supposons que l'on ait attribué aux u_k un système de valeurs admissible et soit t_0 une valeur particulière de t. Posons

$$(h)_{t=t_0} = l, \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t=t_0} = l'.$$

Il est aisé de déduire des équations (11) et (13) que, à moins d'avoir

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \psi'_k(t_0 + l)(t + l') - \varphi'_k(t_0) = \lambda[\psi_k(t_0 + l) - \varphi_k(t_0)] \qquad (k = 1, 2, 3), \\ \qquad\qquad l' = \lambda l, \end{array} \right.$$

où λ représente un coefficient de proportionnalité, on pourra trouver un nombre positif δ tel que, à tout système de deux nombres η et η' vérifiant les inégalités

$$(15)\qquad |\eta - l| < \delta, \qquad |\eta' - l'| < \delta,$$

on puisse faire correspondre une modification telle des valeurs d'abord attribuées aux constantes u_k que, pour les nouvelles valeurs, l'on ait

$$(16)\qquad (h)_{t=t_0} = \eta, \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{t=t_0} = \eta'.$$

Supposons en premier lieu que les relations (14) soient vérifiées. En substituant dans (12), après y avoir posé $t = t_0$, aux premiers membres des égalités (14), les seconds membres de ces égalités et en ayant égard à (9), on trouvera

$$\lambda = 0$$

et les équations (14) nous donneront

$$l' = 0,$$

ainsi que

$$(17)\qquad \psi'_k(t_0 + l) - \varphi'_k(t_0) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Supposons maintenant que pour δ assez petit, mais positif, l'on puisse faire correspondre à tout système de valeurs de η et η' vérifiant (15) un système de valeurs des u_i tel que l'on ait les égalités (16). Comme les équations (11) et (13) entraînent dans tous les cas (12), on aura

$$(18)\qquad \sum_{k=1}^{3}[\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)][\psi'_k(t_0 + \eta)(1 + \eta') - \varphi'_k(t_0)] - \eta\eta' = 0,$$

pour tous les systèmes de valeurs de η et η' vérifiant (15). L'équation (18) étant linéaire en η', il résulte de là que l'on aura à la fois

$$\sum_{k=1}^{3}[\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)][\psi'_k(t_0 + \eta) - \varphi'_k(t_0)] = 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{3}[\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)]\,\psi'_k(t_0 + \eta) - \eta = 0,$$

pourvu que l'on ait

$$|\eta - l| < \delta. \tag{19}$$

Donc, l'inégalité précédente entraînera aussi la relation

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi_k(t_0 + \eta) - \varphi_k(t_0)]\, \varphi'_k(t_0) - \eta = 0$$

et, par suite, encore la suivante :

$$\sum_{k=1}^{3} \psi'_k(t_0 + \eta)\, \varphi'_k(t_0) - 1 = 0.$$

Donc, en particulier, on aura

$$\sum_{k=1}^{3} \psi'_k(t_0 + l)\, \varphi'_k(l) - 1 = 0. \tag{20}$$

Mais (postulat II, p. 128), on a

$$\sum_{k=1}^{3} [\psi'_k(t_0 + l)]^2 \leqq 1; \qquad \sum_{k=1}^{3} [\varphi'_k(t_0)]^2 = 1. \tag{21}$$

En s'appuyant sur (20) et (21), ainsi que sur une identité bien connue de Lagrange, on trouve finalement que dans le cas actuel encore les égalités (17) seront vérifiées. Il est donc démontré que l'égalité

$$(h)_{t=t_0} = l \tag{22}$$

entraîne, dans tous les cas, les égalités (17).

Or il suffit de jeter un coup d'œil sur (11) et de considérer que, à cause de (2), les trois différences

$$\psi_i(t) - \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ne peuvent jamais s'annuler à la fois, pour s'assurer que, étant donné arbitrairement une valeur t_0 de t, il sera possible de déterminer un nombre positif ρ tel, qu'à tout nombre l vérifiant l'inégalité

$$|l| < \rho, \tag{23}$$

on puisse faire correspondre un système de valeurs des constantes u_i choisi de façon à réaliser l'égalité (22). Donc, pour une valeur assez petite, mais positive de ρ, l'inégalité (23) entraîne les égalités (17), d'où

$$\psi'_k(t_0) = \varphi'_k(t_0),$$
$$\psi''_k(t_0) = 0.$$

Le nombre t_0 étant tout à fait quelconque, on reconnaît de suite que les relations précédentes entraînent l'exactitude du théorème (T).

Il résulte du théorème (T) que des corps rigides au sens de la définition (R) seraient absolument impropres à la construction de n'importe quel instrument de mesure. On voit en même temps qu'il ne serait nullement aisé de substituer à la définition (R) une autre définition de corps rigide, telle que les corps rigides puissent jouer dans la T. R. restreinte un rôle analogue à celui des corps rigides considérés dans la théorie non relativiste de l'hyperespace physique.

8. Il nous suffira d'examiner la dernière tentative, due à M. Weyl, d'introduire la notion de corps rigide dans la T. R. restreinte, car toutes les autres tentatives faites dans ce sens ont déjà été condamnées par les relativistes eux-mêmes.

M. Weyl ne propose à la vérité *aucune* définition de corps rigide, il *admet* seulement qu'il serait possible d'en imaginer une qui conférerait aux corps rigides la propriété suivante [1] : Lorsqu'un corps rigide se déplace par rapport à un système de coordonnées d'Einstein de façon que les accélérations des divers points physiques qui le composent restent en valeur absolue inférieures

---

[1] Hermann WEYL, *Raum, Zeit, Meterie*, p. 159. Berlin, 1921, chez Julius Springer.

à une certaine limite, dans ce cas, toutes les fois qu'il existerait un système de coordonnées d'Einstein par rapport auquel les coordonnées spatiales des divers points du corps considéré conserveraient des valeurs constantes pendant un certain intervalle de temps, les distances mutuelles des points du corps rigide, estimées dans ce système de coordonnées, reprendraient toujours les mêmes valeurs.

Un corps rigide de ce genre pourra-t-il servir d'étalon de longueur? Selon M. Weyl il en serait bien ainsi; je crois au contraire que, sans préciser davantage la nature des corps rigides, il est impossible de répondre à la question posée. En effet, en Physique non relativiste, l'usage d'un étalon de longueur repose essentiellement sur la propriété suivante des corps rigides: Pour amener un corps rigide au repos, il suffit d'amener au repos un point A de ce corps, ainsi que les tangentes en A à deux arêtes non tangentes entre elles en ce point. Or les corps rigides de M. Weyl ne jouiraient certainement pas de cette propriété, car, si cela arrivait, leur existence donnerait lieu aux objections soulevées par M. Laue (1) contre l'existence des corps rigides dans la T. R. restreinte.

La notion de corps rigide envisagée par M. Weyl est donc beaucoup trop incomplète pour fonder sur elle des procédés de mesure de longueurs dans la T. R. restreinte.

D'ailleurs, la fin du paragraphe où M. Weyl présente sa conception de corps rigide prouve que lui-même est conscient de la nécessité de la compléter. J'ose croire d'ailleurs que l'on jugera avec moi que le problème n'est rien moins que facile.

En définitive, la proposition (M) (p. 129), tirée des expériences de MM. Michelson et Morley, loin de pouvoir être déduite des hypothèses de la T. R. restreinte, ne peut même pas être formulée dans le langage de cette théorie parce que l'on ne sait pas ce que signifient les mots « invariablement liée » au point de vue de cette théorie.

---

(1) Laue, *Das Relativitats princip*, § 27, p. 180. Braunschweig, 1913, chez Fr. Vieveg und Sohn.

9. La notion de corps rigide étant impliquée par toutes les autres propositions tirées de l'observation et susceptibles, selon les relativistes, d'être déduites de la T. R. restreinte, nous arrivons forcément à la conclusion que la T. R. restreinte ne donne pas plus lieu à quelque vérification expérimentale que la T. R. générale.

Bien entendu, il n'en est pas moins vrai que les coïncidences constatées par les relativistes, quand on interprète d'une certaine façon (illicite d'après ce qui précède) les symboles qui entrent dans quelques-unes de leurs formules, méritent de fixer l'attention des physiciens, et cela d'autant plus que la raison de ces coïncidences nous échappe actuellement, surtout dans certains cas très remarquables comme celui de l'entraînement partiel des ondes lumineuses par un courant d'eau.

Pour terminer, je voudrais brièvement indiquer pourquoi les objections adressées à la conception non relativiste de la Physique ne me semblent pas fondées.

Selon l'une d'elles, cette conception serait incompatible avec les faits et, selon la seconde, elle impliquerait une notion insoutenable d'absolu.

La première objection est tirée de l'échec de toutes les expériences qui avaient pour but de déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. J'ose croire que ces expériences réfutent seulement l'hypothèse selon laquelle les ondes électromagnétiques auraient pour véhicule un milieu non affecté par le mouvement des corps pondérables qui s'y déplacent.

D'après la seconde objection, l'existence des axes de coordonnées appelés communément (mais d'ailleurs improprement) « axes fixes », admise par la Mécanique classique, impliquerait une notion insoutenable d'absolu. Il me semblerait que, admettre l'existence de cette classe particulière de systèmes de référence, n'est qu'une manière de tenir compte de l'influence de l'ensemble de l'Univers sur ce qui se passe dans la région accessible à nos observations. Ce qui confirme cette façon de voir, c'est que, dans la pratique, les « axes fixes » sont ceux par rapport auxquels le mouvement de l'ensemble des étoiles se réduit sensiblement à un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

D'ailleurs, comme l'a très justement fait observer M. Painlevé [1], les relativistes n'échappent pas plus que les non-relativistes à la nécessité d'introduire des systèmes de référence « privilégiés ».

---

[1] *Voir* la Note de M. Painlevé, citée au n° **1**.