

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

ÉMILE JOUGUET

**Quelques problèmes d'Hydrodynamique générale**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 8<sup>e</sup> série*, tome 3 (1920), p. 1-63.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1920\\_8\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1920_8_3_1_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

**JOURNAL**  
DE  
**MATHÉMATIQUES**  
PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

*Quelques problèmes d'Hydrodynamique générale;*

**PAR ÉMILE JOUGUET.**

---

L'intervention de la Thermodynamique permet d'aborder l'étude de certains mouvements qui, accompagnés de transformations physiques ou chimiques, échappent plus ou moins à la Mécanique rationnelle.

C'est ce qui se présente, par exemple, dans la Mécanique des fluides.

Déjà, pour traiter du mouvement des fluides compressibles ordinaires, il est nécessaire de faire un appel plus ou moins large aux principes de la Thermodynamique. Mais ces principes permettent de ne pas s'arrêter là. Grâce à eux, on peut envisager des fluides qui sont le siège de phénomènes plus complexes que la simple dilatation. Il y a ainsi une hydrodynamique générale, fondée sur la Thermodynamique comme l'hydrodynamique classique est fondée sur la Mécanique rationnelle, qui comprend l'hydrodynamique classique comme cas particulier, mais qui étend beaucoup son champ d'application.

Nous avons réuni dans le présent Mémoire quatre études se rattachant à cette hydrodynamique générale. Chacune de ces études est indépendante des autres et peut être lue séparément. Un lien cependant les unit : toutes concernent des problèmes de propagation d'ondes. Mais les ondes sont envisagées dans des fluides qui sont de plus en plus complexes au point de vue physique, et pour lesquels les principes de la Mécanique rationnelle sont de plus en plus insuffisants.

La première étude a pour objet les fluides incompressibles. En général, la Mécanique rationnelle suffit pour traiter du mouvement des fluides incompressibles. La Thermodynamique cependant n'y est pas sans intérêt. Elle fournit des indications et des rapprochements instructifs, principalement quand la viscosité du fluide n'est pas négligeable. C'est ce que nous essayerons de montrer en présentant quelques observations sur les phénomènes classiques du remous et du ressaut.

Dans la seconde étude, les fluides envisagés sont des fluides compressibles ordinaires. Nous nous proposons de mettre en évidence quelques conséquences de la théorie thermodynamique des ondes de choc dans la question de la résistance des fluides compressibles. Ce Chapitre est le développement d'une Note parue il y a déjà longtemps aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* <sup>(1)</sup>.

Dans le problème de la propagation des flammes dans les mélanges gazeux, le fluide considéré est le siège de réactions chimiques. Nous avons consacré d'assez nombreux travaux à ce problème d'hydrodynamique chimique. La troisième étude du présent Mémoire est relative à un cas particulier nouveau dudit problème, cas qui a été abordé pour la première fois, à notre connaissance, dans la Note que nous avons publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 août 1919 <sup>(2)</sup>.

Enfin, dans la quatrième étude, nous envisageons un fluide dont

---

<sup>(1)</sup> *Sur la résistance de l'air* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 149, 9 septembre 1907).

<sup>(2)</sup> *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Ecoulement d'un mélange gazeux en combustion* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 169, 18 août 1919).

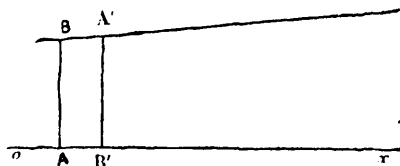
chaque élément a un état physique défini par sa densité et par une variable vectorielle : tel est, par exemple, un fluide affecté de polarisation magnétique ou diélectrique. Nous étudions la propagation d'une onde dans un fluide de cette nature. Mais ici, la Thermodynamique n'est plus suffisante pour traiter entièrement le sujet. Elle n'envisage qu'un côté du problème physique qui se pose et ne saurait être considérée comme en fournissant la solution véritable et entière. Malgré ce caractère incomplet, nous croyons pouvoir faire connaître les calculs auxquels elle conduit : ils présentent au moins l'intérêt de faire soupçonner une influence de la polarisation sur la vitesse de propagation des ondes.

Le présent Mémoire comprend donc une série d'exemples empruntés à tout le champ d'application de l'hydrodynamique générale fondée sur la Thermodynamique, depuis les questions où son intervention n'est pas essentielle (fluides incompressibles) jusqu'à celles où elle n'est pas suffisante (fluides polarisés), en passant par celles qui constituent son domaine propre (fluides compressibles et fluides avec réaction chimique).

#### VEINES GAZEUSES ET EAUX COURANTES.

1. On trouve, dans l'Ouvrage de Stodola sur les turbines à vapeur, le résumé d'études poursuivies par divers auteurs alle-

Fig. 1.



mands (Lorenz, Prandtl, Pröell) sur les veines gazeuses. Un des faits les plus intéressants mis en lumière par ces travaux est l'apparition de discontinuités dans le mouvement rectiligne par tranches parallèles quand la vitesse du gaz atteint la vitesse du son. Stodola, qui insiste sur ce fait, ajoute : « L'analogie du phénomène avec le

ressaut superficiel observé en hydraulique sur les canaux découverts est évidente <sup>(1)</sup> ».

Je me propose de développer ici, d'une manière systématique, l'analogie qui existe en effet entre la théorie des veines gazeuses à section uniforme et celle des eaux courantes, du moins quand on prend celle-ci en toute première approximation.

**Équations du mouvement.** — 2. Soit un cours d'eau dont le fond plan a une pente  $i$  et dont la section est supposée rectangulaire. Prenons un axe  $Ox$  dirigé suivant une ligne de plus grande pente du fond. Dans la première approximation généralement adoptée pour ce problème <sup>(2)</sup>, on suppose un déplacement par tranches normales au fond et l'on admet que, dans une tranche quelconque  $AB$ , les pressions se répartissent suivant la loi hydrostatique. Dans ces conditions, la poussée totale sur une section  $AB$  est égale à la surface de cette section multipliée par la pression au centre de gravité. Soient  $\sigma$  le poids spécifique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $H$  la profondeur de la section qui peut être comptée suivant  $AB$  si l'on suppose — ce que nous ferons — que la pente  $i$  est assez faible pour qu'on puisse négliger  $i^2$ ,  $p_a$  la pression atmosphérique. La pression au centre de gravité est  $p_a + \sigma \frac{H}{2}$  et la poussée totale  $\left(p_a + \sigma \frac{H}{2}\right) H$ , en considérant, pour simplifier l'écriture, que la largeur du lit est égale à l'unité.

Nous désignerons par  $P$  l'expression  $\sigma \frac{H^2}{2}$ , qui représenterait la poussée sur  $AB$  si l'écoulement avait lieu dans le vide.

Envisageons la partie  $dx$  du cours d'eau située entre deux sections  $AB$  et  $A'B'$  infiniment voisines et écrivons, pour cette masse, l'équation du mouvement du centre de gravité en projection sur  $Ox$ .

On peut considérer que la pression atmosphérique s'exerce sur toute la surface de la masse  $ABA'B'$ , à condition de défalquer ensuite cette pression des autres pressions. Or la projection sur  $Ox$

<sup>(1)</sup> СТОДОЛА, *Les turbines à vapeur*, trad. Hahn (chez Dunod et Pinat, 1906).

<sup>(2)</sup> Voir les *Traité d'Hydraulique*, notamment l'*Hydraulique* de Flamant.

de toutes les pressions  $p_u$  s'exerçant sur une surface fermée est nulle. La pression atmosphérique ne donne donc rien dans l'équation que nous avons en vue.

Restent alors les poussées  $P$  sur  $AB$  et  $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$  sur  $A'B'$  qui donnent

$$P - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right),$$

Soit  $\mu$  la masse d'eau  $\frac{\omega}{g} H$  par unité de longueur du canal. Soit encore  $u$  la vitesse moyenne de la tranche : l'accélération du centre de gravité est  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Les forces d'inertie donnent alors sur  $Ox$

$$\mu dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Le frottement sur les parois donne une résistance qui est mesurée sur  $Ox$  par

$$\mu g \frac{\gamma}{\omega} \varphi(u) dx$$

( $\gamma$  périmètre mouillé de la section droite  $\omega$ ) et le poids donne en projection sur  $Ox$

$$\mu g i dx.$$

L'équation cherchée est donc

$$P - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) - \mu g \frac{\gamma}{\omega} \varphi(u) dx + \mu g i dx = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g i - g \frac{\gamma}{\omega} \varphi(u).$$

Nous avons fait, dans tout ce qui précède, l'hypothèse des tranches. Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer, avec M. Bousinesq, qu'en réalité on pourrait faire des hypothèses moins restrictives et supposer seulement que les filets sont animés de vitesses parallèles avec des accélérations égales. Mais nous n'insisterons pas

sur ce point qui n'a pas grande importance pour la question qui nous occupe ici.

D'autre part, l'équation de continuité s'écrira, en exprimant que la masse de l'élément  $dx$  se conserve,

$$dx \mu = dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) \left( \mu + \frac{\partial \mu}{\partial x} u dt + \frac{\partial \mu}{\partial t} dt \right)$$

ou

$$(2) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

Enfin la comparaison des valeurs de  $P$  et de  $\mu$  donne

$$(3) \quad P = \frac{g^2}{2\sigma} \mu^2.$$

3. Les équations (1), (2), (3) sont les équations du mouvement de l'eau dans un canal en première approximation. On voit qu'elles sont identiques à celles du mouvement par tranches parallèles dans un tuyau rectiligne d'un gaz dont la densité serait  $\mu$  et la pression  $P$ , et dont l'équation de compressibilité serait l'équation (3) (où  $\frac{g^2}{2\sigma}$  est une constante) (1).

Il y a toutefois une remarque à faire. Dans le mouvement rectiligne d'un gaz,  $\frac{Z}{\omega}$  serait constant. Au contraire ici  $\frac{Z}{\omega}$  est variable : par exemple si le canal est très large par rapport à sa profondeur,  $\frac{Z}{\omega}$  est égal à  $\frac{1}{H}$  ou  $\frac{\sigma}{g\mu}$ . Pour avoir identité absolue entre les deux problèmes, il faut supposer, pour le gaz, un frottement inversement proportionnel à sa densité.

D'autre part, il est bien certain que le mouvement *par tranches parallèles* d'un gaz, quand on suppose une inclinaison du tuyau par rapport à la verticale et un frottement contre les parois, ne peut être considéré que comme une approximation. Si donc c'est

---

(1) Nous avons déjà employé une méthode analogue pour réduire aux équations des gaz les équations du mouvement de l'eau dans une conduite. Voir *Théorie générale des coups de bélier (Rapports au deuxième Congrès de la Houille blanche, t. II, Lyon, 1914)*.

moyennant une approximation que les équations des eaux courantes se mettent sous la forme (1), (2), (3), c'est aussi moyennant une approximation que les équations (1), (2), (3) représentent le mouvement des veines gazeuses. On pourra remarquer d'ailleurs que ces deux approximations sont d'autant plus voisines de la réalité que les sections droites des courants et des veines sont plus étroites.

Ajoutons enfin que, dans certains problèmes (par exemple celui du ressaut), l'inclinaison et le frottement contre les parois sont sans importance. Dans ces problèmes, l'approximation, en ce qui concerne les veines gazeuses, est rigoureuse; seule subsiste l'approximation en ce qui concerne les eaux courantes.

Nous parvenons donc au résultat suivant. Les mouvements de l'eau dans les canaux sont identiques aux mouvements rectilignes d'un gaz fictif, qu'on peut appeler *gaz hydraulique*, dont le frottement contre les parois suit une loi particulière, et dont l'équation de compressibilité est telle que la pression est proportionnelle au carré de la densité. On sait que, dans les gaz parfaits, la pression est proportionnelle à une certaine puissance de la densité, puissance qui est 1 pour les mouvements isothermes, et comprise entre 1 et 2 pour les mouvements adiabatiques. Pour le gaz hydraulique, la puissance est 2.

4. On peut d'ailleurs pousser encore plus loin le parallélisme que nous venons de mettre en évidence, ne pas le borner aux phénomènes de mouvement, et l'étendre aux phénomènes thermiques accompagnant le mouvement.

Cherchons en effet quelles propriétés thermiques nous devons attribuer à notre gaz hydraulique pour que la chaleur reçue par lui soit exactement celle que reçoit l'eau du courant.

Il suffira évidemment :

1° D'abord que l'entropie du gaz hydraulique soit égale à l'entropie de l'eau, laquelle est une fonction  $S(T)$  de la seule température absolue;

2° Que la viscosité du gaz hydraulique soit la même que celle de l'eau.



Nous déterminerons donc le potentiel interne spécifique du gaz hydraulique  $\mathcal{F}$  par les conditions que la pression soit égale à P et l'entropie à S (T) :

$$\mu^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} = P = \frac{g^2}{2\omega} \mu^2,$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = -S(T);$$

d'où

$$\mathcal{F} = \frac{g^2}{2\omega} \mu - \int S(T) dT;$$

et par suite l'énergie interne  $Y = \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}$  est

$$Y = \frac{g^2}{2\omega} \mu + U,$$

en désignant par U l'énergie interne de l'eau.

Le gaz hydraulique est un de ces corps que Duhem appelle *isothermo-adiabatique* (1).

Pour ce qui est de la viscosité, l'eau présente une certaine viscosité correspondant à la déformation de ses éléments. Cette viscosité est normalement négligeable et, en effet, elle ne figure pas dans les équations (1), (2), (3); mais, en certains points isolés, elle peut donner lieu à des pertes de charge. Le gaz hydraulique devra avoir une viscosité normalement négligeable, mais égale à celle de l'eau là où se produisent des pertes de charge. Il nous sera inutile ici d'approfondir davantage la connaissance de la viscosité.

Indiquons maintenant quelques conséquences du rapprochement entre le problème des veines gazeuses et celui des eaux courantes.

**Célérité des ondes.** — §. En toute rigueur, les équations du mouvement de l'eau dans les canaux étant des équations du mouvement d'un fluide incompressible sont des équations aux dérivées partielles du type elliptique.

---

(1) *Traité d'Énergétique*, t I, p. 319 (Gauthier-Villars, 1911).

Avec l'approximation admise ici, ces équations sont transformées en équations du type hyperbolique, à caractéristiques réelles.

On sait d'ailleurs que Lagrange a ramené le problème des petits mouvements de l'eau, dans un canal de faible profondeur, à l'équation du son <sup>(1)</sup>. Dans la question que nous étudions ici, les hypothèses faites sur le mouvement par tranches ont précisément pour résultat d'assimiler le mouvement dans un canal de profondeur finie au mouvement dans un canal peu profond. Le problème que nous avons en vue ressemble donc beaucoup à celui qui est traité par Lagrange. Mais nous ne supposons pas ici, comme le fait Lagrange, que les vitesses sont petites.

Comme l'apprend l'étude des caractéristiques des équations du mouvement des gaz, la célérité de la propagation des ondes est donnée par

$$\sqrt{\frac{dP}{d\mu}} = \sqrt{gH}.$$

C'est en effet la valeur approchée de la célérité de l'onde solitaire. Pour aller plus loin et obtenir une valeur plus exacte de cette célérité, il ne faut pas se contenter de l'approximation que nous avons admise et il convient de recourir à la théorie beaucoup plus approfondie de M. Boussinesq.

**Remous.** — 6. Cherchons ce qui, dans les veines gazeuses, correspond au phénomène qu'on appelle le *remous* dans le mouvement des eaux courantes.

Pour cela, traitons les équations (1) et (2) en y ajoutant, à la place de (3), l'équation

$$(4) \quad P = k\mu^\gamma.$$

Nous étudions ainsi le mouvement d'une veine gazeuse. Notre calcul s'appliquera à la fois à un gaz réel et au gaz hydraulique. Pour le gaz hydraulique, il faudra faire  $\gamma = 2$ . Pour les gaz réels, si le mouvement est isotherme, on fera  $\gamma = 1$ . Mais les mouvements des gaz réels sont plus voisins, en général, de l'adiabatique que de

<sup>(1)</sup> *Mécanique analytique*, seconde Partie, Section XI, article 37.

l'isotherme. A la vérité, quand on suppose un frottement contre les parois, le mouvement ne saurait être rigoureusement adiabatique, car il y a toujours de la chaleur fournie par le frottement. Mais nous admettrons que le frottement est assez faible pour qu'il y ait adiabaticité presque complète. Alors  $\gamma$  doit être pris égal au rapport des chaleurs spécifiques.

Nous allons donc traiter du même coup et du remous en hydraulique et du phénomène qui lui correspond dans les veines gazeuses. Il faudra toutefois faire attention, quand on appliquera les résultats au gaz hydraulique, que  $\frac{Z}{\rho}$  dépend alors de la densité.

Le problème que nous avons en vue est l'étude du mouvement permanent. Pour le mouvement permanent, (2) s'écrit

$$(5) \quad \mu u = \text{const.} = q,$$

et (1) donne, grâce à (4) et à (5),

$$(6) \quad dx = \frac{\left(u^2 - \frac{dP}{d\mu}\right) du}{g u \left[i - \frac{Z}{\rho} \varphi(u)\right]}.$$

$\frac{dP}{d\mu}$  est fonction de  $\mu$ ;  $\frac{Z}{\rho}$  peut l'être (cas du gaz hydraulique). Mais  $\mu$  s'exprime en fonction de  $u$  par (5). On trouve ainsi

$$\frac{dP}{d\mu} = k\gamma q^{\gamma-1} u^{1-\gamma}.$$

Le problème est donc ramené à la quadrature (6).

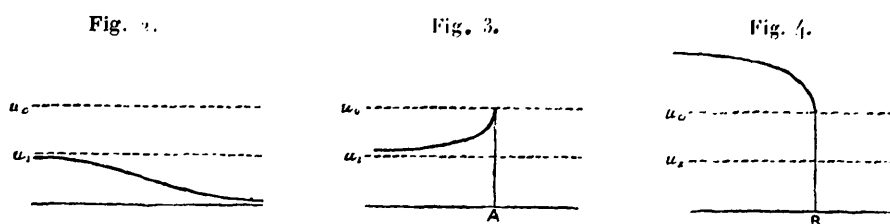
Sans discuter les cas où cette quadrature peut s'effectuer par les fonctions élémentaires, indiquons sommairement l'allure qu'ont les intégrales avec les expressions usuelles de  $\frac{Z}{\rho}$  et de  $\varphi(u)$ .

Le numérateur du deuxième membre de (6) s'annule pour

$$u = \sqrt{\frac{dP}{d\mu}} = \sqrt{k\gamma q^{\gamma-1} u^{1-\gamma}} = (k\gamma)^{\frac{1}{\gamma+1}} q^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = u_0.$$

La vitesse des molécules fluides est alors égale à la célérité des ondes, c'est-à-dire pour les gaz ordinaires à la vitesse du son, pour le gaz hydraulique à la vitesse de l'onde solitaire.

Le dénominateur s'annule pour une certaine valeur  $u_1$  de  $u$ . Supposons, pour fixer les idées,  $u_1 < u_0$ . C'est le cas qui correspond, pour les eaux courantes, aux cours d'eau de faible pente. La courbe représentant  $u$  en fonction de  $x$  a alors une des trois formes suivantes, suivant que l'on part d'un point où  $u$  est inférieur à  $u_1$ , compris entre  $u_1$  et  $u_0$ , supérieur à  $u_0$ .



La représentation de la densité  $\mu$  en fonction de  $x$  s'obtient facilement, en vertu de (5), en prenant l'inverse des courbes ci-dessus : elle a l'avantage, pour le gaz hydraulique, de représenter la profondeur du courant. C'est par la discussion de  $\mu$  (ou de  $H$ ) qu'on procède en effet dans la plupart des traités d'hydraulique. Nous avons préféré discuter directement  $u$  pour mettre mieux en évidence l'égalité existant aux points A et B entre la vitesse des molécules et la célérité des ondes.

Il convient de signaler que, dans le cas de l'hydraulique, où  $\frac{Z}{\rho}$  est proportionnel à  $u$  et où  $\zeta(u)$  est de la forme  $bu^2$ , la courbe de la figure 4 ne se prolonge pas à l'infini vers les  $x$  négatifs : elle a de ce côté une asymptote verticale.

La figure 2 donne le remous d'exhaussement, ou, pour les veines gazeuses, ce qu'on pourrait appeler le *remous de compression*; la figure 3 donne le remous d'abaissement (pour les veines gazeuses, le remous de dilatation); la figure 4 donne le remous d'exhaussement (pour les veines gazeuses, de compression) aboutissant à un ressaut d'exhaussement.

**Ressaut.** — 7. Les tangentes verticales des courbes ci-dessus sont

l'indice que l'écoulement ne peut se poursuivre conformément aux hypothèses admises jusqu'aux points correspondant à ces tangentes verticales. Il se produit une discontinuité, une onde de choc. Et s'il s'agit du gaz hydraulique, l'onde de choc n'est autre chose que le ressaut.

Une onde de choc rigoureuse a une épaisseur nulle. Il est plus exact de dire qu'il se produit une quasi-onde de choc, qui peut être traitée, en première approximation, comme une onde véritable.

Appliquons à l'onde de choc la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot. Nous en avons le droit. L'hypothèse, nécessaire pour la démonstration, de l'adiabaticité du phénomène est acceptable quand l'épaisseur de la quasi-onde est assez faible. Nous pouvons donc écrire, en appelant 1 et 2 les états qui encadrent l'onde de choc,

$$(7) \quad (P_1 + P_2) \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) + 2(\Upsilon_2 - \Upsilon_1) = 0.$$

Dans le cas du gaz hydraulique, on a

$$P = \frac{g^2}{2\omega} \mu^2, \quad \Upsilon = \frac{g^2}{2\omega} \mu + U.$$

L'équation (7) appliquée à ce cas permet alors de calculer  $\frac{U_2 - U_1}{g}$ .

Or on sait que, dans l'écoulement adiabatique d'un liquide,  $\frac{U_2 - U_1}{g}$  (où  $U$  est l'énergie interne de l'eau) n'est autre chose que la *perte de charge*. La loi d'Hugoniot nous donne donc la perte de charge produite par l'onde de choc, c'est-à-dire par le ressaut. Elle conduit à

$$(8) \quad \frac{U_2 - U_1}{g} = \frac{g}{4\omega} \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{(H_2 - H_1)^2}{4H_1 H_2}.$$

C'est bien le résultat classique de Bélanger.

Ainsi donc, la formule de Bélanger pour le ressaut n'est qu'un cas particulier de la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot.

Pour les gaz parfaits, le principe de Carnot permet de démontrer <sup>(1)</sup> :

1<sup>o</sup> Que les seules ondes de choc possibles sont des ondes comprimées;

2<sup>o</sup> Que la célérité des ondes de choc est supérieure à la vitesse du son dans le milieu aval et inférieure à celle du son dans le milieu amont.

La démonstration s'étend au gaz hydraulique et, par conséquent :

1<sup>o</sup> Les seuls ressauts possibles sont les ressauts d'exhaussement. Ce sont les seuls qui donnent une perte de charge positive, comme cela est forcé. Il est vrai que Bazin a pu observer des ressauts d'abaissement, mais en créant une dénivellation brusque du fond du lit. On obtient ainsi un travail de la pesanteur qui vient compenser les pertes de charge. Remarquons en effet que la théorie précédente, notamment la formule (8), suppose le lit rectiligne.

2<sup>o</sup> Le ressaut d'exhaussement se propage, par rapport à l'eau, avec une vitesse supérieure à  $\sqrt{gH}$ , en désignant par H la profondeur en avant. Or si le mouvement est permanent, le ressaut est immobile et sa célérité est égale à la vitesse du courant. Le ressaut d'exhaussement se produit donc en un point où la vitesse de l'eau est supérieure à  $\sqrt{gH}$ . Dans la courbe de la figure 4 on ne va pas jusqu'au point où la tangente est verticale.

Tous ces résultats sont classiques. J'ai voulu simplement ici montrer qu'ils ne sont que des cas particuliers des lois des ondes de choc dans les gaz.

#### SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES COMPRESSIBLES AUX GRANDES VITESSES.

**Remarques générales sur la résistance des fluides. — 1.** Le problème de la résistance des fluides est un des premiers qui se soient

---

<sup>(1)</sup> *Remarques sur la propagation des percussions dans le gaz* (C. R. Acad. Sc., t. 138, 27 juin 1904). — *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6<sup>e</sup> série, t. II, 1906).

posés aux savants qui ont abordé l'étude de l'hydrodynamique. Les recherches qu'il a suscitées n'ont pas peu contribué à la formation et au développement de cette science. Mais sa difficulté est telle qu'il ne peut, même aujourd'hui, être considéré comme entièrement résolu. Des théories diverses se sont constituées, fondées chacune sur des hypothèses spéciales et mettant en lumière chacune une des faces de la question, un cas particulier du problème. Ces théories, malgré les brillants résultats obtenus par quelques-unes d'entre elles, sont sujettes encore à d'importants perfectionnements et appellent de nouvelles recherches pour l'éclaircissement de leurs liens réciproques. Si l'on me permet cette comparaison, la question de la résistance des fluides apparaît comme une mer d'où le lent travail du temps a fait émerger quelques îlots solides. Ces îlots s'accroissent peu à peu, mais ils restent encore isolés les uns des autres et, entre eux, les relations ne sont encore établies que d'une manière sommaire.

2. Il y a résistance aussi bien avec les fluides compressibles qu'avec les fluides incompressibles. Mais si le corps solide contre lequel résiste le fluide se déplace dans celui-ci avec une faible vitesse, les mouvements du fluide sont lents. Or il résulte d'un théorème de Helmholtz convenablement généralisé que, dans les mouvements lents des fluides, la compressibilité joue un rôle faible, la viscosité et la conductibilité un rôle considérable <sup>(1)</sup>. On peut donc étudier la résistance d'un fluide quelconque aux faibles vitesses en le supposant incompressible et visqueux. De là un premier groupe de théories, inaugurées par Stokes <sup>(2)</sup>, continuées par divers auteurs <sup>(3)</sup>, où la résistance, due à la viscosité, est proportionnelle à la vitesse. Ces théories s'appliquent, par exemple, au mouvement des pendules dans l'air.

---

(1) *Sur la similitude dans le mouvement des fluides* (C. R. Acad. Sc., t. 141, 7 août, 1905). — *Sur la résistance de l'air* (Ibid., t. 145, 2 septembre 1907).

(2) *Effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules* (Transactions de Cambridge, t. IX, Part. II, 1851).

(3) Voir la Note de M. Boussinesq, pages 197-264 du Tome II de sa *Théorie analytique de la chaleur* (Gauthier-Villars, 1903).

5. Un second groupe de théories considère les fluides incompressibles avec viscosité assez faible et négligeable.

Dès le xvii<sup>e</sup> siècle, les premiers savants qui se sont occupés de cette question [le Père Pardies, Huygens, Mariotte (1)] ont, par des considérations de similitude, démontré que la résistance dans ce cas devait être proportionnelle à la surface, à la densité du fluide et au carré de la vitesse. Leurs raisonnements ont été modernisés par Reech (2). Mais ces raisonnements ne fournissent pas à proprement parler une théorie de la résistance des fluides : ils ne donnent qu'un cadre pour une telle théorie. Tout ce qu'ils démontrent, c'est que, si la résistance existe, elle doit satisfaire aux lois énoncées. Or le paradoxe de d'Alembert apprend que, si le solide est animé d'un mouvement uniforme, la résistance est nulle dans tout régime permanent dans lequel le fluide est en repos à l'infini (3).

Une théorie de la résistance des fluides incompressibles et non visqueux doit donc fournir un moyen d'échapper au paradoxe de d'Alembert.

Bien entendu, le paradoxe de d'Alembert n'empêche pas la résistance d'exister quand le mouvement du solide n'est pas uniforme. Le calcul de la résistance dans ce cas a été fait pour la première fois par Poisson (4). Mais l'expérience exige qu'on trouve une résistance même quand le mouvement est uniforme. La théorie certainement la plus satisfaisante pour échapper dans ces conditions au paradoxe de d'Alembert est actuellement celle qui est fondée sur les surfaces de glissement de Helmholtz. Inaugurée par Kirchhoff (5), elle a pris dernièrement de grands développements

(1) PARDIES, *Statique des forces mouvantes*, 1671. — DU HAMEL, *Histoire de l'Académie des Sciences de 1666 à 1686* (pour les travaux d'Huygens). — MARIOTTE, *Traité de la percussion des corps* (1679); *Traité du mouvement des eaux* (1686).

(2) *Cours de Mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps* (1852).

(3) Je prends l'énoncé du paradoxe de d'Alembert sous la forme qui lui a été donnée par M. Cisotti (*Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito* (*Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, t. LXIX, 1909, p. 444).

(4) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1832, p. 570.

(5) *Mechanik*, 22<sup>e</sup> Vorlesung (chez Teubner, Leipzig, 1877).



(lord Rayleigh, Levi-Civita, Brillouin, Villat). Elle rejette l'hypothèse du repos à l'infini, et établit en somme une espèce d'assimilation entre le phénomène de la résistance d'un courant fluide et celui du choc d'une veine fluide contre un solide. Elle parvient bien, comme c'était forcé, à une expression proportionnelle à la surface, à la densité et au carré de la vitesse.

Les travaux de Kutta et de Joukowski (1) ont porté également sur les fluides incompressibles non visqueux. Ils ne constituent pas une théorie de la résistance puisqu'ils ne donnent, pour l'action d'un courant fluide sur un solide, aucune composante parallèle au courant. Mais ils fournissent des expressions de ce que les mécaniciens de l'aviation appellent la *poussée* et ces expressions rentrent naturellement dans le cadre de Pardies, Huygens et Mariotte. Cette nouvelle théorie soulève bien quelques difficultés, comme l'existence d'un potentiel des vitesses non uniforme, dont il serait intéressant de montrer comment il s'établit à partir du repos. Mais elle montre qu'il y a peut-être, dans l'action d'un courant d'air sur un solide, des régimes différents donnant des sustentations différentes pour les ailes d'avions. Il est peut-être permis de rapprocher cette remarque des résultats expérimentaux de Rateau et d'Eiffel qui ont mis en évidence, pour les faibles inclinaisons des voilures, des poussées qui ne se raccordent qu'avec une certaine discontinuité aux poussées obtenues dans le cas des fortes inclinaisons.

4. Avant l'existence de la théorie des surfaces de glissement, Poncelet, suivi par Saint-Venant, avait expliqué l'existence de la résistance par les pertes de charge (2). Les pertes de charge sont dues à la viscosité du fluide; mais on peut les estimer grossièrement par les formules de l'hydraulique, si bien que les coefficients de viscosité n'interviennent pas, à proprement parler, dans les calculs

(1) Voir ces travaux résumés dans l'*Aérodynamique* de Joukowski, traduction Drzewiecki (Gauthier-Villars, 1916).

(2) PONCELET, *Introduction à la Mécanique industrielle*. — SAINT-VENANT, *Résistance des fluides* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1887).

de Poncelet et de Saint-Venant. Leur théorie hydraulique est donc une théorie qui s'applique aux fluides incompressibles et qui tient compte de la viscosité, mais qui en tient compte par des moyens sommaires et globaux, rendant inutile la connaissance des coefficients de viscosité eux-mêmes. Cette théorie est loin d'avoir la valeur de la théorie des surfaces de glissement : elle reste néanmoins intéressante parce qu'elle la complète sur un point. Dans la théorie des surfaces de glissement, ces surfaces doivent s'éloigner à l'infini. Or, l'expérience apprend qu'elles ne se comportent certainement pas ainsi. Les considérations de Poncelet et Saint-Venant font comprendre comment il se fait que, derrière l'obstacle, elles puissent se rejoindre sans que pour cela la résistance s'annule.

§. La résistance des fluides incompressibles a ainsi donné lieu à une série considérable de travaux. Il n'en est pas de même, à ma connaissance, de celle des fluides compressibles <sup>(1)</sup>. Aussi ne sera-t-il sans doute pas inutile d'attirer l'attention sur un résultat important obtenu par Newton dans la Proposition XXXIII du Livre II (7<sup>e</sup> section) de ses *Principes*, touchant la résistance d'un fluide quelconque aux grandes vitesses. L'illustre savant montre que la résistance est, dans ce cas, proportionnelle au carré de la vitesse. Il se sert, il est vrai, pour sa démonstration, d'hypothèses moléculaires. Mais nous allons voir que l'on peut moderniser ses raisonnements en remplaçant ses conceptions moléculaires par les lois des gaz parfaits. Nous rattacherons ainsi son beau théorème aux théories de l'hydrodynamique actuelle <sup>(2)</sup>.

Nous ne nous dissimulons pas que les considérations qui vont

(1) Il convient de signaler toutefois les recherches de MM. Bairstow et Booth en Angleterre et celles de MM. Darrieus, Langevin, Vessiot en France. Voir sur ce sujet une Note parue aux *Comptes rendus* du 12 juillet 1920 et rédigée postérieurement au présent Mémoire.

(2) Ce qui va suivre n'est que le développement d'une Note (*Sur la résistance de l'air*), parue le 9 septembre 1907 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 145). Il nous a paru intéressant d'explicitier cette Note, dont la rédaction est un peu trop condensée, et en même temps d'y ajouter quelques éléments nouveaux.

suivre peuvent parfois laisser quelque peu à désirer au point de vue de la rigueur. Telles qu'elles sont, elles nous paraissent néanmoins mériter de retenir l'attention des physiciens.

**Le théorème de Newton.** — 6. Quand le solide se déplace très vite dans le fluide, les mouvements de celui-ci sont rapides, et il résulte du théorème de Helmholtz généralisé que la compressibilité joue un rôle important, la viscosité et la conductibilité un rôle faible. Nous allons donc considérer un fluide compressible, non visqueux, animé de mouvements adiabatiques. Nous supposerons d'ailleurs que le fluide étudié est un gaz parfait.

Le corps solide se déplaçant très vite, sa vitesse est supérieure à celle du son. Si donc l'ébranlement n'atteint pas immédiatement les points à l'infini en avant, il ne peut avancer que par une onde de choc. L'expérience confirme en effet la formation d'une telle onde : les photographies de projectiles en mouvement la mettent bien en évidence, et les méthodes de repérage par le son sont fondées sur son existence. Une théorie complète devrait évidemment justifier l'existence d'une onde de choc d'une manière plus serrée, et apprendre à en déterminer les éléments. A ma connaissance, une telle théorie n'est pas encore faite : les travaux de M. Charbonnier <sup>(1)</sup>, notamment laissent ce point incomplètement traité. Je me contenterai ici de prendre pour fondement de mes raisonnements le fait, considéré comme probable *a priori* et certain expérimentalement, de l'existence d'une onde de choc.

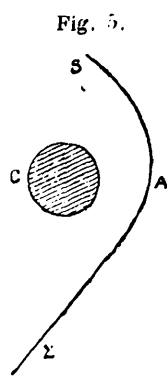
7. Soit C le corps solide, SA $\Sigma$  l'onde de choc. On sait par les travaux expérimentaux des artilleurs (Labouret, Gossot, Charbonnier) que la discontinuité va en s'atténuant au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers S et  $\Sigma$ , si bien qu'à une distance suffisante de A, l'onde cesse d'être pratiquement une onde de choc, pour devenir sensiblement une onde d'accélération. En ces points éloignés  $\Sigma$  et S, la direction de la surface de l'onde fait alors, avec

---

(1) *Le Champ acoustique*, Ann. de Chimie et de Physique, 8<sup>e</sup> série, t. VIII, 1906.

la vitesse du corps C, un angle dont le sinus est égal au rapport de la vitesse du son à la vitesse du corps C.

La surface d'onde de choc sépare la masse fluide, supposée indéfinie, en deux parties. Dans la première, distinguée par l'indice 1, il y a repos; les vitesses sont  $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ ; la densité, la pression, la température sont  $\rho_1, p_1, T_1$  uniformes dans toute la partie 1. La seconde partie, distinguée par l'indice 2, est celle où se trouve le corps C. Vitesses, densité, pression, température, sont repré-



sentées par les fonctions  $u_2, v_2, w_2, \rho_2, p_2, T_2$  *analytiques*, tout au moins, jusqu'à l'apparition (possible) d'une autre onde.

8. Considérons deux expériences faites avec deux corps C et C' géométriquement semblables, la première avec une vitesse V dans un gaz  $\rho_1, p_1, T_1$ , la seconde avec une vitesse V' dans un gaz  $\rho'_1, p'_1, T'_1$ . Du côté 2 de l'onde de choc, les deux gaz sont dans un état de mouvement caractérisé respectivement par

$$u_2, v_2, w_2, \rho_2, p_2, T_2 \quad (\text{mouvement } \mathcal{R})$$

et

$$u'_2, v'_2, w'_2, \rho'_2, p'_2, T'_2 \quad (\text{mouvement } \mathcal{R}').$$

Les deux gaz sont supposés avoir même rapport  $\gamma$  des chaleurs spécifiques.

Désignons par R la constante universelle des gaz parfaits, par  $m$  et  $m'$  les masses moléculaires des deux gaz.

Dans les parties 2, les équations du mouvement sont :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(u, v, w)}{\partial x} u + \frac{\partial(u, v, w)}{\partial y} v + \frac{\partial(u, v, w)}{\partial z} w + \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ p = \frac{R}{m} \rho T \\ \frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{ou simplement} \quad \rho dp - \gamma p d\rho = 0.$$

Ce système est le même pour les deux gaz, avec cette différence que  $m$  doit, pour le second, être changé en  $m'$ . Nous désignerons par (1') le système où a été fait ce changement.

Le mouvement  $\varkappa$  est une solution de (1); le mouvement  $\varkappa'$  une solution de (1'). Mais considérons le mouvement  $\varkappa$ . Multiplions les longueurs par  $\alpha$ , les densités par  $\delta$ , les pressions par  $\sigma$ , les températures par  $\theta$ , les vitesses par  $\varphi$ . Nous obtenons ainsi un mouvement  $\varkappa$  :

$$\varphi u_2, \varphi v_2, \varphi w_2, \delta \rho_2, \sigma p_2, \theta T_2 \quad (\text{mouvement } \varkappa),$$

mouvement semblable à  $\varkappa$ . Je dis que le mouvement  $\varkappa'$  peut être pris sensiblement identique à  $\varkappa$ .

9. En effet, tout d'abord je remarquerai que le mouvement  $\varkappa$  vérifie bien les équations (1') que doit vérifier  $\varkappa'$  dans la partie 2, à condition que l'on ait

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \delta \varphi^2, \\ \sigma = \delta \theta \frac{m}{m'}. \end{array} \right.$$

D'autre part, on satisfait aux conditions aux limites, résultant de la présence du corps  $C'$  dans le gaz, pourvu qu'on prenne  $\alpha$  égal au rapport des dimensions linéaires des corps  $C'$  et  $C$  et  $\varphi$  égal au rapport  $\frac{V'}{V}$  de leurs vitesses.

Reste maintenant à montrer que l'on peut prendre  $\delta$  de manière que le mouvement  $\varkappa$  soit compatible avec la propagation par onde de choc dans l'état du gaz caractérisé par l'indice 1.

Les équations de l'onde de choc sont, en désignant par  $\lambda, \mu, \nu$  les cosinus directeurs de la normale à la surface de l'onde, et par  $\frac{dh_1}{dt}$  la célérité de l'onde par rapport à la matière dans l'état 1 :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{\lambda} \frac{dh_1}{dt} (u_2 - u_1) = \frac{\rho_1}{\mu} \frac{dh_1}{dt} (v_2 - v_1) = \frac{\rho_1}{\nu} \frac{dh_1}{dt} (w_2 - w_1) = p_2 - p_1, \\ \left( \frac{dh_1}{dt} \right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \\ p_2 = p_1 \frac{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2} \quad (\text{loi adiabatique d'Hugoniot}). \end{array} \right.$$

Mais nous supposons C et C' animés d'un mouvement très rapide. Donc, tout au moins dans une zone d'une certaine étendue autour de  $\Lambda$ , on peut négliger  $u_1, v_1, w_1$  devant  $u_2, v_2, w_2$  et  $p_1$  devant  $p_2$ . Les équations (3) deviennent alors

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{\lambda} \frac{dh_1}{dt} u_2 = \frac{\rho_1}{\mu} \frac{dh_1}{dt} v_2 = \frac{\rho_1}{\nu} \frac{dh_1}{dt} w_2 = p_2, \\ \left( \frac{dh_1}{dt} \right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2}{\rho_2 - \rho_1}, \\ (\gamma + 1)\rho_1 = (\gamma - 1)\rho_2. \end{array} \right.$$

Quand on passe du premier gaz au second, la densité dans la partie 1,  $\rho_1$  devient  $\rho'_1$ . On voit qu'il suffit de faire  $\frac{\rho'_2}{\rho_2} = \frac{\rho'_1}{\rho_1}$ , c'est-à-dire  $\delta$  égal au rapport des densités initiales  $\frac{\rho'_1}{\rho_1}$ , sans préjudice, bien entendu des relations (2), pour que les équations (4) soient vérifiées.

Ainsi donc, on prend  $\alpha$  égal au rapport des dimensions linéaires de C' et de C;  $\varphi$  égal au rapport  $\frac{V'}{V}$  de leurs vitesses;  $\delta$  égal au rapport des densités initiales  $\frac{\rho'_1}{\rho_1}$ . Alors  $\theta$  et  $\varpi$  sont déterminés par (2). Le mouvement  $\varkappa$ , dont les éléments sont ceux de  $\varkappa$  respectivement multipliés par les  $\varphi, \delta, \theta, \varpi$  que nous venons de déterminer vérifie les équations du mouvement (1'). Il est en outre compatible approximativement avec la propagation par onde de choc dans l'état initial, tout au moins dans une région d'une certaine étendue autour de  $\Lambda$ , région où les équations (3) peuvent être rem-

placées par (4). Par conséquent, dans cette région, le mouvement  $\varkappa'$  peut être pris approximativement identique à  $\varkappa$ . Mais le corps solide C peut être considéré comme étant tout entier dans cette région ou dans son voisinage. Les pressions sur C sont donc sensiblement celles du mouvement  $\varkappa$ .

Arrêtons-nous un instant pour faire une remarque. Le rapport des densités des deux gaz n'est pas sensiblement modifié par l'onde de choc; le rapport des pressions l'est au contraire et différemment d'une expérience à l'autre. Cela est possible parce que la densité  $\rho_2$  est voisine de la valeur qui donne  $p_2$  infini : une très faible variation de  $\rho_2$  produit une variation très grande de  $p_2$ . Bien entendu, il y a corrélativement une très grande variation de la température.

**10.** Les deux expériences dont nous venons d'analyser les conditions sont approximativement semblables, puisque  $\varkappa'$  est approximativement  $\varkappa$ . Le rapport  $\sigma$  des pressions qui s'exercent sur C' et C est  $\delta z^2$ ; le rapport des forces est  $\alpha^2 \delta z^2$ . On peut énoncer le théorème suivant :

*Considérons deux gaz ayant même rapport des chaleurs spécifiques. Les résistances qu'ils opposent au mouvement de deux corps géométriquement semblables et animés de vitesses très grandes sont dans le rapport des produits de la surface par la densité et par le carré de la vitesse.*

Comme cas particulier, on peut supposer que la seconde expérience est faite dans le même fluide que la première, avec le même corps C, mais à une vitesse  $V'$  différente de  $V$ . Tout ce qui précède est applicable. Il faut seulement faire  $\alpha=1$  et  $\delta=1$ . Quant à  $z$ , il vaut toujours  $\frac{V'^2}{V^2}$ . Donc :

*Dans un gaz, la loi de la résistance aux grandes vitesses s'approche asymptotiquement de la loi du carré de la vitesse.*

Ce résultat a été assez bien vérifié par les expériences des artilleurs.

**Existence de la résistance. — 11.** Les résultats que nous venons d'énoncer ressemblent à ceux que Pardies, Huygens et Mariotte

ont donnés pour les fluides incompressibles. Ils ne constituent pas, à proprement parler, une théorie de la résistance des fluides aux grandes vitesses, car ils ne calculent pas cette résistance et se bornent à énoncer des conditions auxquelles elle doit satisfaire.

Il y a toutefois quelque chose de plus. Les considérations d'Huygens, Mariotte et Pardies n'indiquaient pas le moyen d'échapper au paradoxe de d'Alembert. Ici, on aperçoit le principe d'une telle échappatoire. Il est fourni par l'existence de l'onde de choc. A la vérité, nous ne démontrons pas, en toute rigueur, que l'existence de l'onde de choc entraîne le fait que la résistance n'est pas nulle. Mais il est facile de voir qu'elle rend ce fait possible et même probable.

En effet, Hugoniot a fait le calcul complet dans le cas du mouvement par ondes planes où le fluide, au lieu d'être indéfini, est enfermé dans un cylindre et où le corps solide est un piston se déplaçant dans ce cylindre <sup>(1)</sup>. Il trouve bien une résistance non nulle, satisfaisant aux conditions de la théorie précédente, dont il doit être regardé, par conséquent, comme le véritable promoteur.

Si l'on passe maintenant au cas général, il faut se reporter à la démonstration donnée par Duhem du paradoxe de d'Alembert. Duhem montre que si le fluide est en repos à l'infini, et s'il est en régime permanent par rapport au solide, la résistance est nulle *même si le fluide est le siège de surfaces de discontinuité d'un ordre quelconque*. Mais en même temps, il fait voir que ces hypothèses entraînent la conséquence que les surfaces de discontinuité qui peuvent exister *sont forcément des surfaces de glissement*, séparant toujours les deux mêmes masses du fluide <sup>(2)</sup>. L'existence d'une onde de choc, progressant par rapport à la matière, est donc incompatible avec le repos à l'infini et, par suite, si une telle onde existe, *la résistance peut n'être pas nulle*.

## 12. Maintenant, pourquoi est-il permis de supposer qu'une onde

---

<sup>(1)</sup> *Propagation du mouvement dans les corps* (Journal de l'École Polytechnique, 58<sup>e</sup> cahier, 1889)

<sup>(2)</sup> Pierre DUHEM, *Sur le paradoxe hydrodynamique de d'Alembert* (C. R. Acad. Sc., 19 octobre 1914).



de choc existe ? Duhem a démontré que, dans un fluide visqueux, il ne peut pas exister d'onde de choc rigoureuse, mais seulement des quasi-ondes de choc dont l'épaisseur peut être d'autant plus faible que le coefficient de viscosité est lui-même plus petit <sup>(1)</sup>. Or, nous savons qu'aux très grandes vitesses le gaz se comporte comme si la viscosité était très faible. A la limite, on peut supposer un gaz sans viscosité et une onde de choc rigoureuse, comme nous l'avons fait. Mais, dans ce passage à la limite, le travail non compensé produit par l'onde de choc, qui est la limite du travail de la viscosité dans la quasi-onde, ne devient pas nul. Il subsiste parce que l'onde de choc rigoureuse est un phénomène irréversible, et, au fond, c'est lui qui est la véritable raison physique de la résistance.

**La démonstration de Newton.** — **15.** Comme nous l'avons dit, les résultats exposés dans ce qui précède, ne sont que la modernisation et la généralisation d'un théorème de Newton. La démonstration de Newton est différente de celle que nous avons donnée, et est fondée sur des hypothèses moléculaires, si bien qu'un observateur superficiel pourrait croire qu'il n'y a, entre son théorème et celui que nous avons démontré, qu'une analogie de forme. En réalité, il y a identité et, pour le faire voir, nous allons suivre pas à pas le raisonnement de Newton en remplaçant simplement les hypothèses moléculaires par les lois des gaz parfaits. Ce nouveau mode de démonstration ne sera pas sans intérêt pour faire pénétrer le sens exact de celui que nous avons développé plus haut. C'est d'ailleurs lui qui s'est présenté le premier à notre esprit, après la lecture des *Principes*.

**14.** Nous nous attacherons simplement à montrer que, dans un fluide donné, la résistance aux grandes vitesses est proportionnelle au carré de la vitesse.

Newton commence par considérer un fluide formé de molécules n'exerçant les unes sur les autres que des actions au

---

<sup>(1)</sup> *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> Parties (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, t. III, IV, V, 1901, 1902, 1903).

contact et il montre que, dans un tel fluide, la loi de la résistance est celle du carré de la vitesse. Nous considérerons ici un gaz parfait au *zéro absolu*. Le déplacement d'un solide y provoque une onde de choc et les équations du mouvement sont (1) et (3). Mais, avant l'onde, on a  $u_1 = v_1 = \omega_1 = p_1 = T_1 = 0$ . Après l'onde, comme  $\frac{dh_1}{dt}$  n'est pas nul, les équations (3) montrent que  $p_2$  et  $T_2$  ne le sont pas non plus. Donc  $\frac{p_2}{\rho_1} = \alpha$  et  $(\gamma - 1) \rho_2 = (\gamma + 1) \rho_1$ . Les équations (3) sont remplacées rigoureusement par (4). A tout système de solutions des équations (1) et (4) correspond un autre système de solutions <sup>(1)</sup> se déduisant du premier en multipliant les longueurs par  $\alpha$ , les densités par  $\hat{\rho}$ , les pressions par  $\sigma$ , les températures par  $\theta$ , les vitesses par  $\varphi$ , avec

$$\begin{aligned} \sigma &= \hat{\rho} \varphi^2, \\ \sigma &= \hat{\rho} \theta. \end{aligned}$$

A ces deux systèmes de solutions on peut faire correspondre deux expériences dans lesquelles on fait déplacer un même corps, avec des vitesses  $V$  et  $V'$  dans un même gaz de même densité pris au zéro absolu. On a alors

$$\alpha = 1, \quad \hat{\rho} = 1, \quad \varphi = \frac{V'}{V}.$$

Et les résistances sont dans le rapport  $\zeta^2 = \frac{V'^2}{V^2}$ .

Ainsi, dans cette masse  $M_0$  d'un gaz au zéro absolu, les résistances  $R_0$  et  $R'_0$  aux vitesses  $V$  et  $V'$  sont telles que

$$\frac{R'_0}{R_0} = \frac{V'^2}{V^2}.$$

Prenons maintenant une masse  $M$  d'un gaz quelconque, ayant la même densité initiale que la masse  $M_0$ , mais dans des conditions ordinaires de température et de pression. Lançons-y le même corps

<sup>(1)</sup> Ici le système (1') est identique à (1) car on conserve le même gaz. Donc  $m' = m$ .

que nous déplaçons tout à l'heure dans la masse  $M_0$  et avec la vitesse  $V$ . Les équations du mouvement sont (1) et (3). A un système de solutions de ces équations, en correspond un autre obtenu en multipliant les longueurs par  $\alpha$ , les densités par  $\delta$ , les pressions par  $\sigma$ , les températures par  $\theta$ , les vitesses par  $\varphi$ , ces rapports étant reliés par (2). Faisons  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\varphi = \frac{V'}{V}$ . Alors

$$\sigma = \frac{V'^2}{V^2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{V'^2}{V^2}.$$

Cela revient à dire que la nouvelle solution correspond à une nouvelle expérience qui serait faite avec le même solide dans une masse  $M'$  du même gaz ayant la même densité que  $M$ , mais porté initialement à une température  $\frac{V'^2}{V^2}$  fois plus forte. Les résistances dans les fluides  $M'$  et  $M$  sont alors  $R'$  et  $R$  telles que

$$\frac{R'}{R} = \frac{V'^2}{V^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{R'}{R} = \frac{R'_0}{R_0} \quad \text{et} \quad R = R_0 \frac{R'}{R'_0}.$$

Laissons maintenant  $V'$  constant et faisons croître  $V$  indéfiniment en conservant le même état pour la masse  $M$ .  $\frac{V'^2}{V^2}$  tend vers zéro; le rapport des températures de  $M'$  et de  $M$  tend vers zéro; donc la masse  $M'$  tend vers la masse  $M_0$  et, par suite,  $\frac{R'}{R'_0}$  tend vers 1. En conséquence,  $R$  tend vers  $R_0$  et comme  $R_0$  est proportionnel au carré de la vitesse,  $R$  tend asymptotiquement vers cette loi.

Nous avons suivi d'aussi près que possible le raisonnement de Newton. Il saute aux yeux que ce mode de démonstration n'est autre chose qu'une manière symbolique de présenter celui que nous avons primitivement donné.

**Gaz non parfaits. Loi des états correspondants. — 15.** Les gaz naturels ne sont pas rigoureusement parfaits. A la vérité, ils sont

assez voisins de l'état parfait pour qu'il soit très suffisamment légitime, dans la théorie de la résistance, de supposer qu'ils le possèdent tout à fait. Nous allons néanmoins nous arrêter quelque temps à l'hypothèse que le potentiel interne est plus compliqué que celui qui résulte des lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Cette recherche, d'un ordre peut-être un peu spéculatif, présentera cependant l'intérêt de mettre en lumière les circonstances auxquelles les gaz parfaits doivent de permettre les raisonnements développés dans ce qui précède.

Les gaz naturels obéissent, du moins si on les range par groupes, à la loi des états correspondants <sup>(1)</sup>. Cette loi comprend un certain nombre de propriétés énoncées successivement par divers auteurs tels que Van der Waals, Young, Mathias, Bakker, Amagat, Leduc. Les travaux d'Amagat ont montré que, parmi ces propriétés, deux sont fondamentales : la première est l'existence d'une équation de compressibilité réduite, découverte initiale de Van der Waals ; la seconde est le fait que, sous faible pression, les gaz tendent vers l'état parfait, fait qui fournit, par combinaison avec les propriétés moléculaires des gaz (Gay-Lussac, Avogadro, Delaroche et Bérard), les lois d'Amagat sur le produit  $\frac{p}{\rho T}$  et de Leduc sur les chaleurs spécifiques. Ces deux propriétés sont fondamentales en ce sens qu'elles ne sont pas réductibles l'une à l'autre, mais que toutes les autres propriétés des états correspondants s'en déduisent. Donnons une démonstration rapide de ces beaux théorèmes d'Amagat.

**16.** Soient  $\Pi$ ,  $P$ ,  $\Theta$  la pression, la densité et la température critiques. Posons

$$(5) \quad x = \frac{\rho}{P}, \quad y = \frac{T}{\Theta}, \quad z = \frac{p}{\Pi}.$$

---

<sup>(1)</sup> Je prends la loi des états correspondants sous sa forme primitive et non sous la forme qui lui a été donnée par divers auteurs. Sur les travaux résumés dans ce qui va suivre, voir AMAGAT et DÉCOMBE, *La Statique des fluides. La liquéfaction des gaz et l'industrie du froid* (chez Béranger, 1917).

La première propriété nous apprend que l'équation de compressibilité est

$$(6) \quad z = f(x, y),$$

la fonction  $f$  étant la même pour tous les corps d'un même groupe.

Or, le potentiel thermodynamique interne  $\mathfrak{F}(\rho, T)$  est tel que

$$(7) \quad \rho^2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \rho} = p.$$

Désignons par  $F(x, y)$  une fonction telle que  $\frac{dF}{dx} = \frac{f(x, y)}{x^2}$ . Elle n'est définie qu'à une fonction de  $y$  près. Nous choisirons une fonction  $F$  bien déterminée et qui soit la même pour tous les corps : il est évident que cela est possible. Dès lors, le potentiel  $\mathfrak{F}$  sera, en vertu de (5), (6), (7),

$$(8) \quad \mathfrak{F}(\rho, T) = \frac{\Pi}{\rho} F(x, y) + h(y).$$

La fonction  $h(y)$  est une fonction jusqu'à présent arbitraire et qui, jusqu'à nouvel ordre, peut être différente suivant les différents corps.

Ainsi l'existence d'une équation de compressibilité réduite entraîne la forme (8) pour le potentiel interne et toutes les propriétés qui peuvent s'en déduire.

17. Mais passons maintenant aux propriétés thermiques. De (8) on tire, pour la chaleur spécifique  $c$  sous volume constant,

$$c = -T \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2} = -\frac{\Pi}{\rho \Theta} y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{\Theta} y h''(y).$$

Or, aux faibles pressions, le gaz tend vers l'état parfait et ce fait a deux conséquences :

1° Combiné avec la loi d'Avogadro, il apprend que  $\frac{\Pi}{\rho \Theta}$  est inversement proportionnel à la masse moléculaire  $m$ , c'est-à-dire

que

$$\frac{\Pi}{P\Theta} = \frac{\lambda}{m} \quad (\text{loi d'Amagat}).$$

En effet, si l'on considère les états où la pression  $p$  est très faible, on a, puisqu'en ces états les gaz suivent les lois des gaz parfaits,  $\frac{m\rho}{\varphi T} = r$ ,  $r$  étant une constante universelle, la même pour tous les gaz. Cette formule d'ailleurs n'est pas illusoire, car l'expérience montre que, lorsque  $p$  tend vers zéro,  $\frac{\rho}{\varphi}$  tend vers une certaine limite.

D'autre part, si nous considérons, dans deux gaz quelconques, des états où  $y = \frac{T}{\Theta}$  et  $z = \frac{\rho}{\Pi}$  sont les mêmes, ces états sont correspondants et, comme conséquence,  $x$  ainsi que  $\frac{z}{xy} = \frac{\rho P \Theta}{\varphi T \Pi}$  y sont les mêmes. Prenons, en particulier, des états où  $y$  est le même et où  $z$  a la même valeur zéro. Ils sont correspondants et  $\frac{\rho P \Theta}{\varphi T \Pi}$  y a la même valeur (remarquer que  $\frac{\rho}{\varphi}$  tend vers une limite bien que  $p$  soit nul). Mais ces états sont des états de pression nulle. Les quantités  $p$ ,  $\varphi$ ,  $T$  vérifient donc la relation  $\frac{m\rho}{\varphi T} = r$ . On déduit de là que  $\frac{\rho P \Theta}{m \Pi}$  a la même valeur pour deux gaz quelconques d'un même groupe. Par conséquent, on a bien

$$\frac{\Pi}{P\Theta} = \frac{\lambda}{m},$$

$\lambda$  étant la même constante pour tous les gaz. C'est la loi d'Amagat.

2° Combiné avec les propriétés des chaleurs spécifiques moléculaires, le fait que les gaz tendent vers l'état parfait pour les faibles pressions a une autre conséquence. Il nous apprend que, aux faibles pressions,  $c$  doit être inversement proportionnel à  $m$ .

Mais nous avons donné l'expression de  $c$  sous forme d'une somme de deux termes. En vertu de la loi d'Amagat, le premier terme est

déjà inversement proportionnel à  $m$  pour des états correspondants ( $x$  et  $y$  donnés). En particulier, il en est ainsi pour les états où les températures sont correspondantes et où la pression est nulle. Il faut donc qu'en de tels états le second terme de  $c$  soit aussi inversement proportionnel à  $m$ . Cela exige que  $\frac{1}{\Theta} y h''(y)$  soit de la forme  $\frac{g(y)}{m}$ , la fonction  $g(y)$  étant la même pour tous les corps.

Observons tout de suite qu'il suit de là que les chaleurs spécifiques moléculaires sont les mêmes pour tous les états correspondants (loi de Leduc). En outre, on a

$$h(y) = \frac{\Theta}{m} \int dy \int \frac{g(y)}{y} dy = \frac{\Theta}{m} H(y),$$

$h(y)$  n'est ainsi défini qu'à une fonction linéaire près de  $y$ . On peut prendre pour  $H(y)$  une fonction qui soit la même pour tous les corps d'un même groupe. Le potentiel interne est alors

$$(9) \quad \mathfrak{A}(\varphi, T) = \frac{H}{P} F(x, y) + \frac{\Theta}{m} H(y) = \frac{\Theta}{m} [\lambda F(x, y) + H(y)].$$

L'expression entre crochets est la même pour tous les corps d'un même groupe.

**18.** Le potentiel interne synthétise toutes les propriétés thermomécaniques des corps. Des formes (8) et (9) on peut déduire, pour les états correspondants, toute une série de propriétés qui sont, on le voit, des conséquences soit de la loi de Van der Waals seule, soit de cette loi combinée avec les lois des gaz parfaits appliquées aux faibles pressions. Il y a donc deux manières de suivre la loi des états correspondants : la manière large, où le potentiel interne a la forme (8) et la manière étroite où il a la forme (9).

**Loi des états correspondants et similitude mécanique. — 19.** Mais nous ne sommes pas sortis jusqu'ici de la statique. Faisons maintenant la dynamique des états correspondants.

Les équations du mouvement d'un fluide sont :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial(x,y,z)} + u \frac{\partial(u,v,w)}{\partial x} + v \frac{\partial(u,v,w)}{\partial y} + w \frac{\partial(u,v,w)}{\partial z} + \frac{\partial(u,v,w)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \\ p = \rho^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho}, \\ \text{et, pour les mouvements isothermes,} \\ T = \text{const.}; \\ \text{pour les mouvements adiabatiques,} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = \text{const.} \end{array} \right.$$

Comparons les mouvements de deux fluides dont les constantes critiques sont  $\Pi, P, \Theta$  et  $\Pi', P', \Theta'$ . Pour le premier fluide, les équations du mouvement sont (10); pour le second elles seront (10') différant de (10) par la substitution de  $\Pi', P', \Theta', m'$  à  $\Pi, P, \Theta, m$  dans l'expression du potentiel interne.

Soit un mouvement du premier fluide. Il vérifie les équations (10).

**Multiplions**

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \text{les longueurs par } z; \\ \text{les densités par } \delta = \frac{P'}{P}; \\ \text{les températures par } \theta = \frac{\Theta'}{\Theta}; \\ \text{les pressions par } \varpi = \frac{\Pi'}{\Pi}; \\ \text{les vitesses par } \varphi, \text{ tel que } \varpi = \delta \varphi^2, \text{ ce qui revient à } \varphi = \sqrt{\frac{\Pi' P}{\Pi P'}}. \end{array} \right.$$

Ce nouveau mouvement qui est semblable au premier sera solution de (10'), et par conséquent appartiendra au second fluide, pourvu que soit remplie la condition suivante :

a. S'il s'agit de mouvements isothermes, la condition en question est que les deux fluides suivent la loi des états correspondants au sens large, c'est-à-dire que le potentiel interne soit de la forme (8).

b. S'il s'agit de mouvements adiabatiques, la condition en ques-



tion est que les deux fluides suivent la loi des états correspondants au sens étroit, c'est-à-dire que le potentiel interne soit de la forme (9).

En d'autres termes :

*Deux gaz situés dans des états correspondants constituent des systèmes mécaniquement semblables. Cette similitude se borne aux mouvements isothermes si les gaz suivent la loi des états correspondants au sens large (loi de Van der Waals seule); elle s'étend aux mouvements adiabatiques s'ils suivent la loi des états correspondants au sens étroit (loi de Van der Waals avec les lois d'Amagat et Leduc) (1).*

*Le rapport de similitude des longueurs est arbitraire. Au contraire, ceux des densités, des températures, des pressions, des vitesses sont déterminés. En particulier, le rapport des vitesses correspondantes est  $\sqrt{\frac{\Pi'P}{\Pi P'}}$ .*

Bornons-nous aux gaz qui, suivant la loi des états correspondants au sens étroit, présentent la similitude adiabatique. Alors, en vertu de la loi d'Amagat,  $\sqrt{\frac{\Pi'P}{\Pi P'}}$  est égal à  $\sqrt{\frac{m'\Theta'}{m\Theta}}$ . Donc :

*Pour deux états correspondants, les vitesses du son sont dans le rapport  $\sqrt{\frac{m'\Theta'}{m\Theta}}$ . En particulier, il en est ainsi pour les vitesses du son  $\Sigma'$  et  $\Sigma$  dans l'état critique.*

**20.** La similitude mécanique que nous venons de signaler est-elle troublée si les fluides sont traversés par des ondes de choc ?

Aux équations (10), il faut ajouter les équations des ondes de choc qui sont, avec les notations de l'article 9, et en désignant

(1) Amagat a bien vu que les états correspondants de deux fluides sont statiquement semblables. C'est le fondement de sa méthode des *dimensions* pour traiter des propriétés de ces états. Il ne semble pas avoir songé à appliquer la même remarque aux phénomènes de mouvement. J'ai attiré l'attention sur cette extension dynamique de la loi des états correspondants dans une Note insérée à la fin de mon Mémoire *Sur la résistance de l'air et les expériences sur les modèles réduits* (Revue de Mécanique, janvier 1913).

par U l'énergie interne :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\rho_1}{\lambda} \frac{dh_1}{dt} (u_2 - u_1) &= \frac{\rho_1}{\mu} \frac{dh_1}{dt} (v_2 - v_1) = \frac{\rho_1}{\nu} \frac{dh_1}{dt} (w_2 - w_1) = p_2 - p_1, \\ \left( \frac{dh_1}{dt} \right)^2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}, \\ (p_1 + p_2)(\rho_1 - \rho_2) + 2\rho_1\rho_2(U_2 - U_1) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$U = \mathfrak{F} - T \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T},$$

et, par suite, en tenant compte de (9)

$$U = \frac{\Theta}{m} \left[ \lambda \left( F - y \frac{\partial F}{\partial y} \right) + H - y \frac{\partial H}{\partial y} \right].$$

Pour le premier gaz, les équations des ondes de choc sont (12). Pour le second, elles sont (12') différant de (12) par la substitution de  $\Theta'$  et  $m'$  à  $\Theta$  et à  $m$ . La transformation (11) transforme bien une solution de (12) en une solution de (12') puisque la loi d'Amagat est supposée vraie.

L'existence des ondes de choc ne trouble donc pas la similitude mécanique des états correspondants [nous supposons bien entendu les états correspondant au sens étroit, puisque nous avons fait usage de (9)].

**Résistance des gaz non parfaits. — 21.** Dans les mouvements adiabatiques semblables que nous venons de signaler, le rapport des longueurs  $\alpha$  est indéterminé. On peut donc, dans les états correspondants des deux gaz, déplacer deux corps solides C et C' semblables dont les dimensions linéaires sont dans un rapport quelconque. Que pourra-t-on dire des résistances éprouvées par C et C'?

Ces résistances sont dans le rapport  $\alpha^2 \varpi = \alpha^2 \delta \varphi^2$ , ce qui peut s'énoncer de deux manières.

*Dans les états correspondants de deux fluides, considérons deux corps solides semblables se déplaçant avec des vitesses qui soient dans le*

rapport  $\sqrt{\frac{\Pi'P}{\Pi P'}}$  ou  $\sqrt{\frac{m\Theta'}{m'\Theta}}$ . Les résistances qu'ils éprouvent sont dans le rapport  $\alpha^2 \frac{\Pi'}{\Pi}$ .

Désignons par  $s$  le rapport de la vitesse du solide à la vitesse du son dans le fluide à l'état critique  $\Sigma$ . Pour tous les gaz d'un même groupe, la résistance opposée au mouvement de corps semblables dont le maître couple est  $A$  est de la forme  $K(x, y, s) A \zeta V^2$ .

Ces énoncés supposent, bien entendu, qu'il existe un moyen d'échapper, pour le gaz en question, au paradoxe de d'Alembert. Pour ne pas encourir le reproche d'énoncer des résultats illusoire, nous limiterons nos affirmations au cas où le projectile va plus vite que le son. Il se forme alors une onde de choc qui, comme nous l'avons montré, n'altère pas la similitude, et l'on peut considérer comme certain, bien que cela ne soit pas entièrement démontré, que, dans ces conditions, la résistance n'est pas nulle.

**22.** Il est impossible ici d'aller plus loin et d'étudier, comme on l'a fait pour les gaz parfaits, la loi asymptotique, pour les vitesses infinies, de la résistance d'un fluide donné.

Cherchons à nous rendre compte de ce qui a rendu possible cette recherche pour les gaz parfaits.

La similitude définie par (11) est telle que, deux gaz étant choisis et le premier étant pris dans un état déterminé, l'état dans lequel il faut prendre le second s'ensuit forcément ainsi que tous les rapports de similitude sauf celui des longueurs.

Pour les gaz parfaits, les équations (10) deviennent les équations (1) et la similitude (11) est remplacée par la similitude (2). Ici,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  sont arbitraires. Deux gaz étant choisis, et le premier étant pris dans un état déterminé, on peut prendre, pour état semblable du second, un état quelconque. Donc deux états quelconques de deux gaz parfaits quelconques sont correspondants. Bien entendu, le rapport des vitesses correspondantes est alors déterminé; il est égal au rapport des vitesses du son dans les deux états.

Soient alors deux corps  $C$  et  $C'$  se déplaçant dans le même gaz pris dans le même état. Pour qu'il y ait similitude absolue, il faut

que les vitesses de  $C$  et de  $C'$  soient égales. Mais supposons que  $C$  et  $C'$  se déplacent avec des vitesses inégales  $V$  et  $V'$  mais *très grandes* et d'ailleurs données.

Nous avons, comme on l'a dit, deux mouvements 2 et 2' se propageant par onde de choc dans l'état 1 donné. Faisons abstraction d'abord de la propagation de 2 et de 2' dans 1, et occupons-nous uniquement des équations (1) et (1') que doivent vérifier 2 et 2'.

On peut prendre les mouvements 2 et 2' semblables avec  $\theta = \zeta^2 = \frac{V'^2}{V^2}$  et  $\delta$  arbitraire, par exemple  $\delta = 1$ . Les états du fluide dans les mouvements 2 et 2' sont alors correspondants parce que deux états quelconques d'un même gaz parfait sont correspondants. Il ne reste plus qu'à faire voir que les mouvements 2 et 2' sont compatibles avec la propagation dans le même état 1. C'est ce qui arrive approximativement quand  $V'$  et  $V$  sont très grandes.

Nous venons de reprendre en raccourci la démonstration des articles 8 à 10. Ce résumé, éclairé par la discussion sur la loi des états correspondants, montre bien, croyons-nous, ce qui fait le caractère spécial des gaz parfaits dans la théorie qui nous occupe.

#### ÉCOULEMENT D'UN MÉLANGE GAZEUX COMBUSTIBLE PAR UN ORIFICE.

**Introduction.** — I. L'étude expérimentale de la propagation des explosions dans les gaz a conduit à distinguer deux modes de propagation, l'un très rapide, qui constitue la détonation, et l'autre relativement lent, qui constitue la déflagration. L'hydrodynamique chimique fondée sur la thermodynamique a permis, dans ces dernières années, de faire une théorie satisfaisante de cette distinction en considérant les flammes détonantes comme des ondes de choc et combustion comprimées, et les flammes déflagrantes comme des ondes de choc et combustion dilatées (1).

---

(1) On trouvera la réunion de mes recherches sur ce sujet dans ma *Mécanique des explosifs* (Doin, 1917).

Je me propose ici de développer cette théorie en étudiant un problème de déflagration, l'écoulement d'un mélange gazeux enflammé par un orifice. J'ai déjà étudié un autre cas de déflagration, la propagation d'une flamme en régime uniforme dans un mouvement par ondes planes (1). Ce cas correspond à la méthode expérimentale du tube, employée par Mallard et Le Chatelier dans leurs études sur la combustion des mélanges gazeux. Mais les recherches expérimentales touchant les déflagrations ont aussi employé la méthode de Bunsen où un mélange combustible est enflammé à la sortie d'un orifice. Le nouveau problème que nous allons étudier ici se rattache à cette seconde méthode. Pour en faciliter la solution, nous allons préciser les conditions dans lesquelles nous l'aborderons. Nous nous placerons, on le verra, dans un cas relativement simple. Et néanmoins, nous serons obligés, pour parvenir à la solution, d'avoir recours à certaines hypothèses de l'ordre de celles qu'on fait dans les études élémentaires d'écoulement par les orifices ou les ajutages. Notre étude sera donc plutôt une étude d'hydraulique généralisée que d'hydrodynamique généralisée (2).

**Débit d'un ajutage sous une différence de pression donnée. —**  
**2.** Soit un mélange gazeux combustible enfermé dans un réservoir où règne la pression  $p_0$  et où le poids spécifique est  $\sigma_0$  et la température absolue  $T_0$ . Ce réservoir communique avec l'extérieur, où règne la pression  $p$ , inférieure à  $p_0$ , par un ajutage que nous supposerons parfaitement évasé pour éliminer les pertes de charge.  $\gamma$  étant le rapport des chaleurs spécifiques du mélange non brûlé, nous nous supposerons placés dans le cas où

$$(1) \quad \frac{p}{p_0} > \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

(1) *Sur la propagation des déflagrations dans les mélanges gazeux; Sur la propagation des déflagrations et sur les limites d'inflammabilité* (C. R. Acad. Sc., t. 156, 17 mars et 7 avril 1913). — *Mécanique des explosifs* (Doin, 1917).

(2) Ce qui va suivre est le développement d'une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 18 août 1919 (t. 169) sous le titre : *Sur un problème d'hydraulique généralisée. Écoulement d'un mélange gazeux en combustion*

valeur correspondant au débit limite dans l'écoulement du mélange non enflammé, de sorte que l'ajutage parfaitement évasé se compose d'une partie graduellement convergente prolongée par une partie cylindrique.

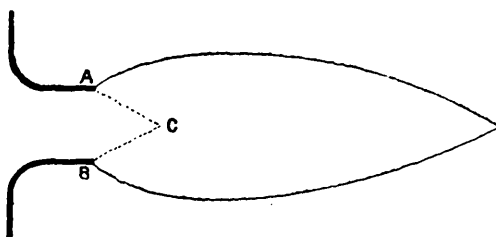
Si le mélange s'écoule *sans être enflammé*, les lois de son écoulement sont les lois classiques de l'écoulement des gaz parfaits. Le débit en masse par unité de temps et par unité de surface de la section terminale de l'ajutage est donné par la formule de Saint-Venant et Wantzel :

$$(2) \quad M = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_0}{\sigma_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Imaginons maintenant qu'on fasse écouler le mélange gazeux *en l'enflammant*. Comment l'écoulement est-il modifié ? quel va être le nouveau débit ?

5. Il se forme (*fig. 6*) un cône ABC ayant pour base la section

Fig. 6.



terminale AB de l'ajutage et séparant, dans la veine fluide, la partie non brûlée de la partie en combustion. Comme l'a indiqué M. Gouy<sup>(1)</sup> le demi-angle au sommet de ce cône a pour sinus le rapport entre la célérité de la flamme par rapport à la matière et la vitesse des molécules fluides. A la vérité, le sommet C n'est pas toujours très pointu. Il l'est quelquefois cependant, surtout, dit M. Gouy, pour les mélanges dans lesquels la flamme a une célérité élevée, comme le mélange théorique d'hydrogène et d'air. Si, souvent, il est arrondi,

(<sup>1</sup>) *Recherches photométriques sur les flammes colorées (Annales de Chimie et de Physique, 5<sup>e</sup> série, t XVIII, 1879)*

cela doit tenir à ce que la célérité de la flamme est plus grande au centre de la veine gazeuse, ce qui augmente le sinus de l'angle d'ouverture, et cette augmentation de célérité de la flamme a très probablement pour cause le fait que, dans la région centrale, le gaz frais, entouré par le cône CAB, peut atteindre, avant d'arriver à la flamme, une température plus élevée que dans le reste de la veine : or on sait que la célérité des flammes déflagrantes augmente avec la température du milieu où elles se propagent. Cette explication est celle que donne M. Gouy, et cet auteur l'a étayée par une expérience. Mettant en suspension du chlorure de cuivre dans la veine gazeuse, il a observé que la dissociation de ce corps donnait naissance, à l'intérieur du cône, à une seconde surface bleue dont la distance au cône variait de zéro à  $0^m,0015$  et augmentait quand l'acuité du cône diminuait. La température nécessaire à la dissociation du chlorure de cuivre était donc atteinte avant le cône et d'autant plus tôt que celui-ci était moins aigu.

Dans l'étude approchée que nous voulons faire ici, nous négligerons l'élévation de température probable des filets centraux et nous supposerons le cône CAB à sommet pointu.

Selon l'interprétation que nous adoptons pour les déflagrations, la surface latérale du cône doit être considérée comme une onde de choc et combustion avec chute de pression. Distinguons par les indices 1 et 2 les états du fluide au voisinage du cône soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de celui-ci. La pression sera alors  $p_2$  à l'extérieur et  $p_1 > p_2$  à l'intérieur du cône.

A la traversée de la flamme, les particules fluides subissent une variation de vitesse normale à la surface de cette flamme. Ce résultat a été obtenu par M. Gouy au moyen d'une démonstration incomplète et assez bien vérifié par lui expérimentalement. La théorie des ondes de choc et combustion en donne une démonstration entièrement satisfaisante <sup>(1)</sup> et les vérifications expérimentales de M. Gouy acquièrent ainsi toute leur portée.

---

<sup>(1)</sup> *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (Chap. III, n° 6). (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6<sup>e</sup> série, t. II, 1906).

Les équations des ondes de choc et combustion nous permettent d'écrire, pour un point quelconque de la surface CAB :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma_1^2} D_1^2 = \frac{p_2 - p_1}{\sigma_1 - \sigma_2}, \\ (p_1 + p_2)(\sigma_2 - \sigma_1) + 2(U_2 - U_1) = 0. \end{array} \right.$$

Dans ces formules,  $D_1$  représente la célérité de la flamme par rapport à la matière prise dans l'état 1;  $p$ ,  $\sigma$ ,  $U$  sont la pression, le volume spécifique et l'énergie interne spécifique du fluide, ces lettres étant affectées de l'indice convenable suivant le point auquel elles se rapportent. Puisqu'il s'agit de mélanges gazeux parfaits, les  $U$  ne dépendent pas de  $\sigma$  et ne sont fonctions que de la température absolue  $T$  et du degré de combustion. Nous supposons d'ailleurs la combustion totale dans l'onde, si bien que le degré de combustion, nul dans l'état 1, est total dans l'état 2. Dans ces conditions,  $U_1$  est une fonction de  $T_1$  seul,  $U_2$  une autre fonction de  $T_2$  seul. D'ailleurs  $T$  est relié à  $p$  et à  $\sigma$  par l'équation de compressibilité; par celle des gaz frais pour les points 1, par celle des gaz brûlés pour les points 2. Finalement donc, on peut considérer les  $U$  comme des fonctions des  $p$  et des  $\sigma$ .

4. Les équations (3) s'appliquent à un point quelconque de la surface CAB du cône et les quantités qui y figurent ( $p_2, p_1, \sigma_2, \sigma_1, D_1$ ) peuvent varier le long de cette surface, car il n'est pas démontré que les états 1 et 2 soient les mêmes en tous les points de l'onde. Il est vrai que la régularité du cône qu'on obtient dans des expériences bien faites (abstraction faite de la partie tout à fait centrale que nous négligeons dans une première approximation) porte à penser qu'il serait assez exact d'admettre la constance des états 1 et 2 et par suite de  $p_1, p_2, \sigma_1, \sigma_2, D_1$ , sur toute la surface CAB. Nous éviterons néanmoins de faire cette hypothèse et il nous suffira d'écrire les équations (3) pour des points particuliers: les points situés sur le parallèle de base AB du cône.

En ces points, la pression  $p_1$  peut être considérée comme égale à la pression qui règne dans toute la section terminale de l'ajutage :



il faut en effet remarquer que la pression est constante dans toute la section terminale de l'ajutage, qui est normale à tous les filets fluides qui la traversent, et cette valeur constante est en particulier celle qui règne au bord de la section, c'est à dire sur le parallèle AB. Quant à  $p_2$ , comme nous sommes ici sur le bord de la veine gazeuse, on peut le prendre approximativement égal à la pression extérieure  $p$ . Dès lors, aux équations (3) on peut adjoindre les suivantes :

$$(4) \quad p_2 = p,$$

et, puisque le gaz s'écoule sans brûler et adiabatiquement entre le réservoir (pression  $p_0$ ) et la section terminale de l'ajutage (pression  $p_1$ ),

$$(5) \quad p_0 \sigma_0^\gamma = p_1 \sigma_1^\gamma.$$

Les équations (3), (4), (5), qui sont au nombre de quatre, déterminent les quatre quantités  $p_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $p_2$ ,  $\sigma_2$ , si l'on suppose  $D_1$  donné ou si on le considère simplement comme une fonction connue de l'état 1, c'est à dire de  $p_1$  et  $\sigma_1$ .

Pour avoir le débit de l'ajutage, il suffit alors de calculer le débit entre les deux pressions  $p_0$  et  $p_1$ , c'est-à-dire de porter la valeur de  $p_1$  à la place de  $p$  dans la formule (2).

Théoriquement donc nous savons calculer le débit du mélange enflammé si  $D_1$  est connu.

5. *Formules approchées.* — Nous terminerons les calculs en tenant compte du fait que la variation de pression

$$\Delta p = p_1 - p_2 = p_1 - p$$

produite par l'onde est faible et en négligeant les quantités de l'ordre de son carré.

Posons d'ailleurs  $\frac{p}{p_0} = \lambda$ . C'est une donnée du problème.

Si le gaz s'écoulait sans brûler de l'enceinte  $p_0$  à l'extérieur  $p$ , sa température deviendrait

$$T = T_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Cette valeur est très voisine de  $T_1$ , lequel vaut  $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$  puisque  $p_1$  est voisin de  $p$ . Calculons la température de combustion  $X$  du mélange à pression constante  $p$ , et à partir de la température  $T$ . Evidemment  $X$  différera de  $T_2$  d'une quantité de l'ordre de  $\Delta p$ . Calculons de même le volume spécifique  $x$  du mélange brûlé à la température  $X$  et à la pression  $p$ ; il différera de  $\sigma_2$  d'une quantité de l'ordre de  $\Delta p$  et l'on peut écrire

$$\sigma_2 = x + h \Delta p.$$

D'autre part, on a

$$\sigma_1 = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{p + \Delta p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\sigma_0}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}} (1 + h \Delta p).$$

Portons ces valeurs dans la première équation (3). Il vient

$$\frac{1}{\sigma_0^2} D_1^2 = \frac{\Delta p (1 + h \Delta p)^2}{x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0 + h \lambda^{\frac{1}{\gamma}} \Delta p - h \sigma_0 \Delta p},$$

ou, avec l'approximation convenue,

$$(6) \quad \Delta p = \frac{1}{\sigma_0^2} \lambda^{\frac{1}{\gamma}} (x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0) D_1^2.$$

Dans la formule (2) nous remplaçons maintenant  $p$  par  $p_1$ , c'est-à-dire par  $p + \Delta p$ , nous aurons, toujours au même degré d'approximation,

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{\gamma p_0} \frac{\lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{2}}{\left(1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \lambda^{\frac{1}{\gamma}}} \Delta p,$$

ou, vu (6),

$$(7) \quad \frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{\gamma p_0 \sigma_0^2} \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2} \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}} (x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0) D_1^2.$$

Cette formule donne la variation de débit qui résulte du fait que le gaz est enflammé à la sortie de l'orifice.

$x$  est très grand par rapport à  $\sigma_0$ ; donc  $x\lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0$  est positif. En outre,  $\lambda$  est inférieur à 1; donc  $1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > 0$ . Enfin  $1 - \frac{\gamma+1}{2} \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < 0$  en vertu de l'hypothèse (1). Par conséquent, le débit subit une *diminution*.

**6. Remarques.** — Nous avons résolu nos équations (3), (4), (5) en supposant  $D_1$  connu. C'est seulement dans ce cas que la formule (7) donne la valeur du débit. Si  $D_1$  était donné en fonction de  $p_1$ ,  $\sigma_1$ , la résolution des équations dépendrait évidemment de son expression.

Mais, en tout état de cause, notre solution suppose  $D_1$  connu, soit en tant que quantité fixe, soit en tant que fonction de  $p_1$  et  $\sigma_1$ . Elle n'est donc pas complète et précisément la solution complète devrait conduire à la détermination de la célérité de la flamme. Nous avons donc bien raison de dire plus haut que nous ne traitons ici qu'un problème d'hydraulique. En somme, nous ébauchons seulement la question et nous sommes obligés de nous contenter de demander la valeur de  $D_1$  à l'expérience.

La flamme se présente ici comme une onde de forme conique. Les expériences sur la propagation des flammes dans les tubes (Mallard et Le Chatelier) ont déterminé la célérité des ondes planes. Rien ne dit que la célérité des ondes coniques soit la même. En adoptant les célérités mesurées dans les tubes pour les introduire dans la formule (7) on se contente donc d'une approximation.

On peut d'ailleurs avoir une idée de la valeur de  $D_1$  par la méthode indiquée par M. Gouy : mesurer l'angle au sommet du cône; calculer, par le débit, les vitesses des molécules fluides, et déduire de là la célérité de la flamme. En se plaçant à ce point de vue, on peut dire que notre formule (7) donne une relation entre le débit de l'ajutage et l'angle au sommet du cône formé par la flamme.

**7. Cas d'une forte différence de pression.** — Nous nous sommes

placés jusqu'ici dans l'hypothèse (1). Imaginons maintenant que l'on ait au contraire

$$(8) \quad \frac{p}{p_0} < \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Dans ce cas, l'ajutage parfaitement évasé qui fait communiquer l'enceinte  $p_0$  et l'extérieur  $p$  a une forme d'abord convergente puis divergente. La vitesse des molécules au col de cet ajutage est égale à la vitesse du son; dans la section terminale, elle est encore plus grande. C'est dire que la veine gazeuse s'échappe avec une très grande vitesse. Il paraît probable qu'il est impossible de l'enflammer alors à la sortie, et que par suite le problème disparaît.

A la vérité, on conçoit théoriquement la possibilité d'avoir, à la sortie, un cône CAB assez aigu pour convenir à une vitesse quelconque des molécules fluides. Mais si la vitesse est très forte, le cône est excessivement allongé. Il devient très hasardeux d'admettre, dans ces conditions, les hypothèses qui ont servi de base à nos raisonnements et nous avons tendance à croire que, comme nous l'avons dit, la flamme ne peut alors se maintenir à l'orifice.

Admettons néanmoins qu'elles'y maintienne. Que nous donneraient nos formules? Il résulte de (8) que (7) indiquerait une *augmentation* de débit quand le gaz est enflammé. Mais il faut bien remarquer ce que suppose l'application de la formule (7). L'ajutage parfaitement évasé conduisant le fluide de  $p_1$  à  $p$  est une tuyère convergente-divergente dans lequel le rapport de la section terminale à la section du col est bien déterminé. Quand on enflamme le gaz, la pression dans la section terminale devient  $p_1 > p$ . Pour que l'ajutage soit encore parfaitement évasé entre  $p_0$  et  $p_1$ , il faut maintenant que la section terminale soit diminuée. Il faudrait donc supposer que la section terminale varie quand la pression passe de  $p$  à  $p_1$ , pour pouvoir appliquer en toute rigueur la formule (7).

Mais n'insistons pas davantage sur ce cas peu intéressant et revenons à celui où l'hypothèse (1) est vérifiée et où la présence de la flamme entraîne une diminution du débit.

**Pression dans le réservoir pour un débit donné. — 8.** Il serait

intéressant de mettre en évidence expérimentalement la diminution de débit résultant de l'inflammation du mélange gazeux. Ce serait en effet une vérification de la théorie des explosions qui comblerait une lacune regrettable. Alors en effet que la théorie des détonations trouve une confirmation remarquable dans l'accord qui existe entre les vitesses calculées et mesurées de l'onde explosive, la théorie des déflagrations n'a guère donné jusqu'ici de résultats *numériques* utilisables.

Mais la variation de débit est très faible avec les mélanges gazeux usuels, comme on pourra le voir par les nombres que nous donnerons plus loin. Les expériences propres à la déceler seront donc difficiles. Il sera certainement plus commode, comme nous l'a indiqué M. Le Chatelier, d'instituer des vérifications équivalentes un peu autrement en réalisant l'expérience suivante.

Le mélange gazeux est supposé chassé du réservoir  $p_0$  par un débit d'eau constant, et il s'écoule à l'atmosphère sans brûler par un ajutage donné. La pression atmosphérique est  $p$ ; la pression dans le réservoir est  $p_0$ . Maintenant, laissant le débit d'eau constant, allumons le mélange à sa sortie de l'ajutage. Le débit de gaz, *mesuré en volume dans le réservoir amont*, est toujours le même. Ni  $p$  ni l'ajutage ne sont changés. Comme la flamme a tendance à diminuer le débit, il faut ici, le débit restant constant, que la pression  $p_0$  dans le réservoir augmente. On pourra mesurer cette augmentation de pression avec un manomètre très sensible.

Nous allons calculer l'augmentation de la pression  $p_0$  qui doit se produire dans l'expérience ainsi conduite.

9. Quand le gaz s'écoule sans être enflammé, la pression et la température dans le réservoir sont  $p_0, T_0$ ; la pression et la température dans la section terminale de l'ajutage sont  $p$ , pression extérieure, et  $T$ . Quand le gaz s'écoule en brûlant, la pression dans le réservoir est  $p'_0 = p_0 + P_0$ , la température y est  $T'_0 = T_0 + \Theta_0$ ; dans la section terminale de l'ajutage, la pression est  $p'_1 = p + P_1$ , et la température  $T'_1$ . D'une manière générale, les lettres se rapportant à l'expérience où le gaz brûle seront affectées d'un accent.

Nous allons calculer  $P_0$  et  $P_1$ . Nous poserons d'ailleurs

$$\frac{p}{\rho_0} = \lambda.$$

10. Considérons d'abord la première équation (3) dans laquelle nous devons supposer que les lettres sont accentuées. Nous écrivons

$$\frac{1}{\sigma_1'^2} D_1^2 = \frac{\rho_1' - \rho_2'}{\sigma_2' - \sigma_1'} = \frac{P_1}{\sigma_2' - \sigma_1'}.$$

Mais on a

$$\sigma_1' = \sigma_0' \left( \frac{\rho_0'}{\rho_1'} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0' \left( \frac{\rho_0 + P_0}{\rho + P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sigma_0' \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{1 + \frac{P_0}{\rho_0}}{1 + \frac{P_1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

$T$  est la température atteinte par le mélange non brûlé quand il se détend de  $p_0$  à  $p$ . La température  $T_1'$  diffère de  $T$  d'une quantité de l'ordre de  $P_1$ . Calculons la température de combustion  $X$  à partir de  $T$  et à pression constante. La température  $T_2'$  diffère évidemment de  $X$  d'une quantité de l'ordre de  $P_0$  ou de  $P_1$ . Calculons de même le volume  $x$  du mélange brûlé à la température  $X$  et à la pression  $p$ . Evidemment  $\sigma_2'$  différera de  $x$  d'une quantité de l'ordre de  $P_1$ . On peut écrire

$$\sigma_2' = x + hP_1.$$

Les valeurs de  $\sigma_1'$  et  $\sigma_2'$  portées dans la première équation (3) donnent

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{\gamma}}}{\sigma_0'^2} \left( \frac{1 + \frac{P_1}{\rho}}{1 + \frac{P_0}{\rho}} \right)^{\frac{2}{\gamma}} D_1^2 = \frac{P_1}{x + hP_1 - \sigma_0' \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{1 + \frac{P_0}{\rho_0}}{1 + \frac{P_1}{\rho}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}},$$

ou, en négligeant  $P_1^2$ ,  $P_1$ ,  $P_0$ ,  $P_0^2$ ,

$$P_1 = \frac{\lambda^{\frac{1}{\gamma}} (x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0') D_1^2}{\sigma_0'^2}.$$

Mais

$$\frac{p'_0 \sigma'_0}{T'_0} = \frac{p_0 \sigma_0}{T_0};$$

d'où, en négligeant les carrés et les produits de  $P_0$  et de  $\Theta_0$ ,

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\Theta_0}{T_0} - \frac{P_0}{p_0} \right).$$

Il suit de là que, avec le même degré d'approximation, on peut écrire

$$(9) \quad P_1 = \frac{\lambda^{\frac{1}{\gamma}} \left( x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0 \right)}{\sigma_0^2} D_1^2.$$

**11.** Il nous reste maintenant à calculer  $P_0$ . Nous le ferons en exprimant que le débit, mesuré en volume dans le réservoir, est le même dans les deux expériences.

Commençons par supposer que, dans les deux expériences, la température est la même dans le réservoir ( $T_0 = T'_0$ ;  $\Theta = 0$ ). L'égalité de débit, en volume, s'exprime par

$$(10) \quad \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 \sigma_0} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p'_0 \sigma'_0} \sqrt{1 - \left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Dans ce cas  $p_0 \sigma_0 = p'_0 \sigma'_0$ . Par conséquent, (10) donne

$$\frac{p'_1}{p'_0} = \frac{p}{p_0} = \lambda,$$

ou, avec l'approximation convenue,

$$P_0 = \frac{P_1}{\lambda},$$

et, par (9),

$$(11) \quad P_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left( x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0 \right) D_1^2.$$

**12.** Nous avons supposé que, quand on allumait le gaz, la température dans le réservoir restait la même qu'au cours de l'écoulement sans combustion. Quand on fait l'expérience, peut-on être

assuré qu'il en est réellement ainsi? L'augmentation de pression se produit brusquement au moment de l'allumage; il se pourrait alors que la température variât dans le réservoir du fait de cette compression. Comme cas limite, supposons un accroissement de pression adiabatique. Evidemment, la réalité sera intermédiaire entre ce cas et celui de la température constante.

L'égalité de débit s'exprime toujours par (10), mais on a ici

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \left( \frac{p_0}{p'_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Portons cette expression dans (10), remplaçons  $p'_0$  par  $p_0 + P_0$ ,  $p_1$  par  $p + P_1$  et négligeons les carrés et les produits de  $P_0$  et  $P_1$ . On trouve

$$P_0 = \frac{(\gamma + 1) \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2}{\gamma - 3 + 2\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{1}{\lambda} P_1,$$

ou, vu (9),

$$(12) \quad P_0 = \frac{(\gamma + 1) - 2\lambda^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left( x \lambda^{\frac{1}{\gamma}} - \sigma_0 \right)}{\gamma - 3 + 2\lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} D_1^2.$$

**15.** Pour produire le débit d'eau qui chasse le gaz du réservoir, on pourrait, par exemple, utiliser un vase de Mariotte. Mais alors ce débit ne serait pas rigoureusement constant quand la pression dans le réservoir varie. Le vase de Mariotte donne en effet un débit d'eau qui, mesuré en volume, est  $A \sqrt{H - p_0}$  dans la première expérience,  $A \sqrt{H - p'_0}$  dans la seconde,  $A$  et  $H$  étant des constantes instrumentales. On a donc

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 \sigma_0} \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} = A \sqrt{H - p_0},$$

$$\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p'_0 \sigma'_0} \sqrt{1 - \left( \frac{p'_1}{p'_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \frac{p'_1}{p'_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} = A \sqrt{H - p'_0}.$$

Nous supposons d'ailleurs les températures  $T_0$  et  $T'_0$  égales



dans les deux expériences. Éliminons alors  $A$  entre les deux équations précédentes en remarquant que  $p'_0 \sigma'_0 = p_0 \sigma_0$ . Il vient

$$\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}}{\sqrt{H - p_0}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\frac{p'_1}{p'_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}}{\sqrt{H - p'_0}}.$$

Remplaçons  $\frac{p}{p_0}$  par  $\lambda$ ,  $p'_1$  par  $p + P_1$ ,  $p'_0$  par  $p_0 + P_0$  et faisons toujours la même approximation. On a

$$(13) \quad P_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{\left[ (\gamma + 1) \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] (H - p_0)}{\left[ (\gamma + 1) \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] (H - p_0) + \gamma p_0 \left( 1 - \lambda^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} P_1.$$

14. Ainsi l'augmentation de pression  $P_0$  dans le réservoir est différente dans chacune des trois hypothèses que nous avons examinées. Mais, en général, l'expérience est faite dans des conditions telles que  $\lambda$  est très voisin de 1. Alors la valeur de  $P_0$  est la même dans toutes les hypothèses, et elle est égale à la valeur de  $P_1$ . On a en effet dans ce cas

$$(14) \quad P_0 = P_1 = \frac{x - \sigma_0}{\sigma_0^2} D_1^2.$$

Quand on fait le calcul de cette expression pour les mélanges des gaz combustibles usuels (hydrogène, formène) avec l'air, on trouve des pressions de 05 à 1<sup>mm</sup> d'eau pour des célérités  $D_1$  de 1<sup>m</sup> par seconde.

#### PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN FLUIDE POLARISÉ.

**Nature du problème traité.** — 1. Dans l'hydrodynamique ordinaire, l'état d'un élément fluide dépend exclusivement de sa densité et de sa température.

Le problème de la propagation des réactions chimiques et des flammes dans les gaz fournit un exemple de fluide dont l'état est

défini par la densité, la température et par une troisième variable scalaire, la composition chimique.

On peut aussi concevoir des fluides dont l'état dépendrait de la densité, de la température et d'une variable vectorielle. Nous nous proposons de donner ici un exemple de problème se rapportant à ce cas. Nous allons appliquer les équations de l'hydrodynamique générale à un fluide admettant pour potentiel interne celui qui convient soit à un fluide diélectrique, soit à un fluide aimanté, et nous étudierons, par la méthode d'Hugoniot, la propagation d'une onde dans un tel fluide.

2. Pouvons-nous dire qu'en faisant cette étude, nous traitons le problème physique de la propagation d'une onde, par exemple d'une onde sonore, dans un fluide diélectrique ou aimanté ?

Pour fixer les idées, considérons un fluide parfaitement doux aimanté sous l'action d'aimants permanents. Soient  $\rho$  la densité de l'élément de volume  $d\tau$ ;  $M$  son moment magnétique dont les composantes suivant les trois axes sont  $A, B, C$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  les composantes du champ magnétique;  $T$  la température absolue. Le potentiel thermodynamique est

$$(1) \quad \mathcal{F} = \int \xi(\rho, M, T) \rho d\tau - \frac{1}{2} \int (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\tau.$$

Cette expression est propre à l'étude des phénomènes d'équilibre et des transformations infiniment lentes. Si on lui applique les méthodes de la statique générale, on fait bien la statique des fluides aimantés, et c'est ce qu'ont fait Duhem et M. Liénard dans leurs études sur la pression au sein des fluides polarisés (<sup>1</sup>). Mais si le fluide cesse d'être immobile, l'aimantation s'accompagne de phénomènes électrodynamiques qui compliquent beaucoup

(<sup>1</sup>) Pierre DUHEM, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, t. II, 1892; *Sur la pression dans les milieux diélectriques ou magnétiques* (*American Journal of Mathematics*, vol. XVII, 1895). — LIÉNARD, *Pressions à l'intérieur des aimants et des électriques* (*Lumière électrique*, t. LII, 1894).

les problèmes en introduisant toutes les difficultés de l'Électrodynamique des corps en mouvement. Je vais négliger systématiquement ces phénomènes et me contenter d'appliquer les équations de l'hydrodynamique générale. Je n'étudierai donc pas réellement la propagation d'une onde dans un fluide aimanté. Le problème que je traiterai sera en somme un problème idéal, si l'on veut un simple problème d'ordre mathématique où l'on pourra voir l'application de la méthode d'Hugoniot à un système d'équations relativement compliqué.

Il ne faut donc pas se faire illusion sur la portée physique des résultats que nous allons obtenir. Il me paraît certain toutefois que cette portée, si faible qu'elle soit, n'est pas entièrement nulle. Assurément, la conception d'un fluide aimanté qui ne serait ni conducteur ni diélectrique, — ce serait à un tel fluide seulement que s'appliqueraient rigoureusement nos développements, — est une conception toute théorique. Il me semble cependant que la théorie qui va suivre, si elle ne peut être donnée pour l'étude complète d'un phénomène physique, est tout au moins celle d'un des éléments constitutifs de ce phénomène. Les termes qu'elle nous donnera dans l'expression de la célérité des ondes doivent (cela me paraît du moins très probable) se retrouver, avec peut-être certaines modifications, dans l'expression vraie de la vitesse du son dans un fluide aimanté. Elle nous portera tout au moins à penser que le seul fait de la polarisation peut rendre la vitesse du son variable avec la direction de sa propagation.

Au fond, d'ailleurs, on fait des simplifications analogues quand on étudie les oscillations d'un barreau aimanté dans un champ magnétique sans tenir compte des courants induits.

**Application de la méthode d'Hugoniot. — 3.** Quand on prend le problème de la façon que nous venons de préciser, les équations du mouvement du fluide s'obtiennent en ajoutant simplement les forces d'inertie aux équations d'équilibre (nous négligeons la viscosité). Soient  $u$ ,  $v$ ,  $w$  les composantes de la vitesse;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  celles des accélérations dues aux forces massiques comme la

pesanteur. Les équations du mouvement sont :

$$(2) \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\rho}{M} \frac{\partial \zeta}{\partial M} \times (A, B, C) = F(M, \rho, T) \times (A, B, C),$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d(x, y, z)} \left( \zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial \zeta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial(x, y, z)} \\ = (X, Y, Z) - \frac{\partial(u, v, w)}{\partial t} - u \frac{\partial(u, v, w)}{\partial x} \\ - v \frac{\partial(u, v, w)}{\partial y} - w \frac{\partial(u, v, w)}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

On a posé

$$(5) \quad F = \frac{\rho}{M} \frac{\partial \zeta}{\partial M};$$

F est l'inverse de la *susceptibilité magnétique*. Les équations (2) comme les équations (3) sont au nombre de 3, chacune se déduisant de la précédente par une permutation circulaire indiquée par une notation qui se comprend d'elle-même.

Dans ces équations, on considérera comme fonctions inconnues

$$(6) \quad \rho, T, A, B, C, u, v, w.$$

Les  $\alpha, \beta, \gamma$  s'en déduisent par des formules connues.

4. Soit une surface de discontinuité  $\Omega$  séparant deux régions dans la masse fluide.

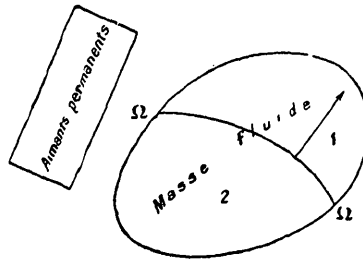
Dans la première région, règnent les intégrales  $\rho_1, T_1, A_1, B_1, C_1, u_1, v_1, w_1$ ; dans la seconde, règnent les intégrales  $\rho_2, T_2, A_2, B_2, C_2, u_2, v_2, w_2$ . La surface  $\Omega$  est supposée une onde d'accélération, c'est-à-dire que les fonctions  $\rho, T, A, B, C, u, v, w$  sont continues à sa traversée et que la discontinuité n'apparaît que dans les dérivées premières. Si l'on pose

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_1 - \rho_2 = R, & A_1 - A_2 = G, & u_1 - u_2 = U, \\ M_1 - M_2 = P, & B_1 - B_2 = H, & v_1 - v_2 = V, \\ T_1 - T_2 = \Theta, & C_1 - C_2 = K, & w_1 - w_2 = W, \end{cases}$$

les quantités  $R, P, \Theta, G, H, K, V, \dot{V}, W$  sont nulles sur  $\Omega$ , mais non leurs dérivées premières.

Soient  $\lambda, \mu, \nu$  les cosinus directeurs de la normale à  $\Omega$  dirigée de

Fig. 7.



2 vers 1. Au bout du temps  $dt$ , la surface  $\Omega$  est venue en  $\Omega'$  dans le champ des variables d'Euler, à une distance  $dn$  de  $\Omega$  mesurée sur la normale  $\lambda, \mu, \nu$ . La célérité de l'onde dans le champ des variables d'Euler est  $\frac{dn}{dt}$ ; la célérité par rapport à la matière est

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w).$$

(Il est indifférent d'affecter les  $u, v, w$  de l'indice 1 ou de l'indice 2 puisque, sur  $\Omega$ , les vitesses sont égales.) La méthode d'Hugoniot va nous permettre de calculer  $\frac{dn}{dt}$ .

3. Les quantités  $R, P, \Theta, G, H, K, U, V, W$  étant nulles sur  $\Omega$ , les raisonnements classiques d'Hugoniot nous apprennent qu'une quelconque d'entre elles, par exemple  $R$ , vérifie, aux points situés sur  $\Omega$ , les équations suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{dR}{dn}, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{dn}{dt} \frac{dR}{dn} = 0. \end{cases}$$

Des équations de cette forme s'appliquent à toutes les grandeurs  $R, P, \Theta, G, H, K, U, V, W$ .

Cherchons maintenant comment se comporte le champ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , à la traversée de  $\Omega$ . Il est évidemment continu. Mais calculons  $\frac{dz_1}{dn} - \frac{dz_2}{dn}$  et les quantités analogues relatives à  $\beta$  et à  $\gamma$ .

On sait que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont les dérivées partielles d'une fonction  $\psi(x, y, z)$  ainsi définie. Appelons  $r$  la distance du point  $x, y, z$  à un autre point  $x', y', z'$ , autour duquel nous considérerons un élément de volume  $d\tau'$  dont le moment magnétique sera  $A', B', C'$ . On a

$$\psi(x, y, z) = \int \left( \frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'} \right) d\tau' + I,$$

$I$  étant une intégrale de surface se rapportant à la surface limitant le fluide.

On peut décomposer en deux parties le champ de l'intégrale triple qui figure dans  $\psi$ , le champ 1 et le champ 2 séparés par la surface  $\Omega$ . Posons

$$\Delta = \frac{\partial A'}{\partial x'} + \frac{\partial B'}{\partial y'} + \frac{\partial C'}{\partial z'} = \text{Divergence } M'.$$

On aura

$$\psi = \int_1 \Delta_1 \frac{d\tau'}{r} + \int_2 \Delta_2 \frac{d\tau'}{r} + I.$$

De là on tire, moyennant une dérivation et des intégrations par parties, en remarquant que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{1}{r} \right)$ ,

$$\alpha = \int_1 \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x'} d\tau' + \int_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x'} d\tau' + \sum_{\Omega} \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{r} \lambda d\omega + \dots$$

Dans  $+\dots$  sont comprises les intégrales relatives à la surface extérieure du fluide qui sont inutiles ici.

$\alpha$  a donc la forme d'un potentiel newtonien produit par des charges massiques et des charges superficielles réparties sur  $\Omega$ . Il suit d'une formule classique que

$$\frac{dz_1}{dn} - \frac{dz_2}{dn} = 4\pi(\Delta_2 - \Delta_1)\lambda.$$

ou, en vertu des définitions (7),

$$\frac{dz_1}{dn} - \frac{dz_2}{dn} = -4\pi\lambda \left( \frac{\partial G}{\partial x'} + \frac{\partial H}{\partial y'} + \frac{\partial K}{\partial z'} \right).$$

Mais, sur  $\Omega$ , les quantités  $G$ ,  $H$ ,  $K$  vérifient les équations (8).  
Donc

$$(9) \quad \frac{dz_1}{dn} - \frac{dz_2}{dn} = -4\pi i \left( i \frac{dG}{dn} + \mu \frac{dH}{dn} + \nu \frac{dK}{dn} \right).$$

6. Ces préliminaires posés, le développement de la méthode d'Hugoniot est classique. Nous le rappellerons brièvement.

Écrivons l'équation (4) pour le mouvement 1, puis pour le mouvement 2, et retranchons les deux équations obtenues l'une de l'autre en remarquant que, si nous nous plaçons sur  $\Omega$ , les quantités (6) sont égales avec les indices 1 ou 2. Il vient, grâce à (8) :

$$(10) \quad \frac{dN}{dt} \frac{dR}{dn} = \rho \left( i \frac{dU}{dn} + \mu \frac{dV}{dn} + \nu \frac{dW}{dn} \right).$$

Traisons les équations (3) comme nous avons traité (4). Chacune donne une équation en  $\frac{dR}{dn}$ ,  $\frac{dG}{dn}$ , .... Ajoutons les trois équations obtenues, respectivement multipliées par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Il vient

$$\begin{aligned} & \left( 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) \frac{dR}{dn} \\ & + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{M}} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial \mathbf{M}} \right) \left( \frac{A}{\mathbf{M}} \frac{dG}{dn} + \frac{B}{\mathbf{M}} \frac{dH}{dn} + \frac{C}{\mathbf{M}} \frac{dK}{dn} \right) + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial \mathbf{T}} \frac{d\Theta}{dn} \\ & = \left( i \frac{dU}{dn} + \mu \frac{dV}{dn} + \nu \frac{dW}{dn} \right) \frac{dN}{dt}. \end{aligned}$$

La définition (5) de  $F$  permet d'écrire autrement les coefficients de  $\frac{dG}{dn}$ ,  $\frac{dH}{dn}$ ,  $\frac{dK}{dn}$ . D'autre part, tenons compte de (10). Il vient définitivement

$$(11) \quad \left[ 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{dN}{dt} \right)^2 \right] \frac{dR}{dn} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \left( A \frac{dG}{dn} + B \frac{dH}{dn} + C \frac{dK}{dn} \right) + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial \mathbf{T}} \frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

✓ Dérivons maintenant la première équation (2) suivant la normale  $n$ . Écrivons l'équation obtenue pour le mouvement 1 et pour

le mouvement 2 et retranchons. Il vient

$$A \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{dR}{dn} + \left( F + \frac{A^2}{M} \frac{\partial F}{\partial M} \right) \frac{dG}{dn} + \frac{AB}{M} \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dH}{dn} + \frac{AC}{M} \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dK}{dn} + A \frac{\partial F}{\partial T} \frac{d\Theta}{dn} = \frac{d\alpha_1}{dn} - \frac{dz_2}{dn},$$

équation qui, grâce à (9), donne la première des équations suivantes. Les deux autres s'obtiennent en partant des deux autres équations (2) :

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & A \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{dR}{dn} + \left( F + \frac{A^2}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\lambda^2 \right) \frac{dG}{dn} + \left( \frac{AB}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\lambda\mu \right) \frac{dH}{dn} \\ & \quad + \left( \frac{AC}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\lambda\nu \right) \frac{dK}{dn} + A \frac{\partial F}{\partial T} \frac{d\Theta}{dn} = 0, \\ & B \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{dR}{dn} + \left( \frac{AB}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\lambda\mu \right) \frac{dG}{dn} + \left( F + \frac{B^2}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\mu^2 \right) \frac{dH}{dn} \\ & \quad + \left( \frac{BC}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\mu\nu \right) \frac{dK}{dn} + B \frac{\partial F}{\partial T} \frac{d\Theta}{dn} = 0, \\ & C \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{dR}{dn} + \left( \frac{AC}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\lambda\nu \right) \frac{dG}{dn} + \left( \frac{BC}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\mu\nu \right) \frac{dH}{dn} \\ & \quad + \left( F + \frac{C^2}{M} \frac{\partial F}{\partial M} + 4\pi\nu^2 \right) \frac{dK}{dn} + C \frac{\partial F}{\partial T} \frac{d\Theta}{dn} = 0. \end{aligned} \right.$$

Il faut enfin faire une hypothèse sur la relation supplémentaire. Cette hypothèse peut être assez générale sans que la méthode d'Hugoniot cesse d'être applicable (1). Nous nous contenterons ici d'admettre que l'entropie  $-\frac{\partial \zeta}{\partial T}$  d'un élément est une fonction  $\zeta(T)$  de la température. La fonction  $\zeta$  peut d'ailleurs varier d'une particule à l'autre. Considérons la fonction  $\sigma = -\frac{\partial \zeta}{\partial T} - \zeta(T)$ . C'est une fonction de  $\rho$ ,  $M$ ,  $T$  et de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  coordonnées *initiales* d'une particule. La relation supplémentaire est, dans notre hypothèse,

$$\sigma(\rho, M, T, a, b, c) = 0.$$

Elle comprend comme cas particulier celui des mouvements adia-

(1) Voir sur ce sujet mon *Mémoire sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6<sup>e</sup> série, t. I, 1905, p. 387.



batiques, où  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}$  est constant : il suffit de faire  $\varphi = \text{const.}$  Si, dans cette relation, nous considérons  $\rho$ ,  $M$ ,  $T$  comme fonctions des variables d'Euler  $x, y, z, t$ , nous aurons évidemment en dérivant en suivant une particule :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial M} \left( \frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial x} + v \frac{\partial M}{\partial y} + w \frac{\partial M}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0.$$

Écrivons cette équation pour le mouvement 1, puis pour le mouvement 2 et retranchons. On obtient

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \frac{dR}{dn} + \frac{\partial \sigma}{\partial M} \left( A \frac{dG}{dn} + B \frac{dH}{dn} + C \frac{dK}{dn} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

Il est facile de voir que cela peut s'écrire, en multipliant d'ailleurs par  $\varphi$  dans un but de symétrie qui sera visible ultérieurement :

$$(13) \quad \varphi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial T} \frac{dR}{dn} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \left( A \frac{dG}{dn} + B \frac{dH}{dn} + C \frac{dK}{dn} \right) + \varphi \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} + \varphi'(T) \right] \frac{d\Theta}{dn} = 0.$$

Les équations (11), (12), (13) sont cinq équations linéaires et homogènes en

$$\frac{dR}{dn}, \quad \frac{dG}{dn}, \quad \frac{dH}{dn}, \quad \frac{dK}{dn}, \quad \frac{d\Theta}{dn}.$$

Ces cinq quantités ne sont d'ailleurs pas toutes nulles, sinon la discontinuité supposée sur la surface  $\Omega$  n'existerait pas. Donc le déterminant de leurs coefficients est nul et l'on a, en désignant par  $f, f', f'', g, g', g''$ , pour simplifier l'écriture, les coefficients de  $\frac{dG}{dn}, \dots$ ,

$$(14) \quad \left| \begin{array}{cccccc} \varphi^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \varphi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\varphi} \left( \frac{dN}{dt} \right)^2 & A \frac{\partial F}{\partial \varphi} & B \frac{\partial F}{\partial \varphi} & C \frac{\partial F}{\partial \varphi} & \varphi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial T} \\ A \frac{\partial F}{\partial \varphi} & f(\lambda^2) & g''(\lambda\mu) & g'(\lambda\nu) & A \frac{\partial F}{\partial T} \\ B \frac{\partial F}{\partial \varphi} & g''(\lambda\mu) & f'(\mu^2) & g(\mu\nu) & B \frac{\partial F}{\partial T} \\ C \frac{\partial F}{\partial \varphi} & g'(\lambda\nu) & g(\mu\nu) & f''(\nu^2) & C \frac{\partial F}{\partial T} \\ \varphi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi \partial T} & A \frac{\partial F}{\partial T} & B \frac{\partial F}{\partial T} & C \frac{\partial F}{\partial T} & \varphi \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} + \varphi'(T) \right] \end{array} \right| = 0.$$

L'équation (14), dont le premier nombre est un déterminant symétrique, détermine la célérité  $\frac{dN}{dt}$ . On voit que  $\frac{dN}{dt}$  dépend de  $\lambda, \mu, \nu$  et par conséquent de l'orientation de l'onde par rapport à la polarisation.

Toutefois, si l'on change  $\lambda; \mu, \nu$  en  $-\lambda, -\mu, -\nu$ , l'équation (14) ne change pas. Par conséquent, la célérité dans une direction est la même que dans la direction opposée.

**Interprétation de la formule de la célérité. — 7.** On peut donner l'interprétation suivante de la formule de la célérité.

Soit le vecteur  $4\pi M$  porté par le vecteur aimantation. Projetons ce vecteur  $4\pi M$  sur la normale  $\lambda, \mu, \nu$ . On obtient un second vecteur  $4\pi(\lambda A + \mu B + \nu C)$  dirigé suivant la normale  $\lambda, \mu, \nu$ . Soit aussi le vecteur  $H$  représentant le champ et porté dans la direction de l'aimantation. Considérons finalement le vecteur  $J$ , résultante de  $H$  et de  $4\pi(\lambda A + \mu B + \nu C)$ . Ses projections sur les trois axes sont

$$\begin{aligned} AF + 4\pi\lambda(\lambda A + \mu B + \nu C), & \quad BF + 4\pi\mu(\lambda A + \mu B + \nu C), \\ & \quad CF + 4\pi\nu(\lambda A + \mu B + \nu C). \end{aligned}$$

Envisageons maintenant la fonction

$$h = \zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \int \varphi(T) dT.$$

Imposons au fluide une modification virtuelle assujettie aux conditions de laisser

$$\sigma = -\frac{\partial \zeta}{\partial T} - \varphi(T)$$

constamment nul et de conserver le vecteur  $J$  en grandeur et en direction. Les équations qui lient  $\partial h, \partial \gamma, \partial A, \partial B, \partial C, \partial T$  dans cette modification virtuelle sont précisément les équations (11), (12), (13), où

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{dN}{dt} \right)^2 \frac{dR}{dn}$$

est remplacé par  $\delta h$  et où

$$\frac{dR}{dn}, \quad \frac{dG}{dn}, \quad \frac{dH}{dn}, \quad \frac{dK}{dn}, \quad \frac{d\Theta}{dn}$$

sont remplacés par

$$\delta\varrho, \quad \delta A, \quad \delta B, \quad \delta C, \quad \delta T.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = \rho \frac{\delta h}{\delta\varrho}.$$

**Propriétés de la célérité.** — **B.** Pour étudier la valeur de la célérité donnée par (14), nous poserons

$$D = \begin{vmatrix} f & g'' & g' \\ g'' & f' & g \\ g' & g & f'' \end{vmatrix}.$$

Développant alors le déterminant (14), nous aurons

$$(15) \quad \left[ 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dN}{dt}\right)^2 \right] \rho \left[ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} + \varphi'(T) \right] D - \rho^2 \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varrho \partial T} \right)^2 D + \bar{\varepsilon} = 0,$$

en groupant sous la dénomination  $\bar{\varepsilon}$  des termes qui tous contiennent en facteur les carrés ou les doubles produits de  $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$  et de  $\frac{\partial F}{\partial T}$  et les carrés ou les doubles produits de A, B, C.

De là les conclusions suivantes :

Si  $\frac{\partial F}{\partial \varrho}$  et  $\frac{\partial F}{\partial T}$  sont nuls (susceptibilité magnétique indépendante de la densité et de la température),  $\bar{\varepsilon}$  est nul, D est en facteur dans (15) et, par suite, la célérité est indépendante de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , c'est-à-dire de la direction de la propagation,

Bien plus, je dis que, dans cette hypothèse ( $\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{\partial F}{\partial T} = 0$ ), la célérité est la même que si le fluide n'était pas aimanté.

En effet, F est alors fonction de M seul et la définition (5) de F donne alors

$$\zeta = \frac{1}{\rho} \int_0^M M F(M) dM + \psi(\varrho, T);$$

$\psi(\varrho, T)$  est le potentiel de l'unité de masse quand l'aimantation est

nulle. Dès lors, on calcule facilement que

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}, \end{aligned}$$

et par suite (15) donne pour  $\frac{dN}{dt}$  la même valeur que si le potentiel était  $\psi$  au lieu d'être  $\zeta$ .

9. Supposons maintenant  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$  et  $\frac{\partial F}{\partial T}$  non pas nuls, mais assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés et les doubles produits.

Dès lors,  $\bar{c}$ , est négligeable et (15) donne encore une célérité indépendante de la direction de la propagation. Mais cette célérité est différente de ce qu'elle serait en l'absence de toute aimantation. Calculons-la. On a

$$\zeta = \int_0^M \frac{M F(M, \rho, T)}{\rho} dM + \psi(\rho, T),$$

d'où

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} &= \int_0^M M \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} dM + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} &= \frac{1}{\rho} \int_0^M M \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} dM + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} &= \frac{1}{\rho} \int_0^M \left( M \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial T} - \frac{M}{\rho} \frac{\partial F}{\partial T} \right) dM + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}. \end{aligned}$$

On substituera ces valeurs dans (15) pour avoir  $\frac{dN}{dt}$ . Contentons-nous ici de nous rendre compte de l'ordre de grandeur du terme supplémentaire qu'introduit l'aimantation. Supposons pour simplifier  $\frac{\partial F}{\partial \rho}$  nul et  $\frac{\partial F}{\partial T}$  constant. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho^2} &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} &= - \frac{M^2}{2\rho^2} \frac{\partial F}{\partial T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}, \end{aligned}$$

et (15) donne, en négligeant  $\varepsilon$  :

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \rho^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}\right)^2 \left[1 - \frac{M^2 \frac{\partial F}{\partial T}}{2\rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}}\right]}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \varphi'}$$

Ne conservons pas les termes en  $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)^2$  puisque nous avons déjà supposé  $\varepsilon$  négligeable. Prenons d'autre part le cas particulier des mouvements adiabatiques ( $\varphi' = 0$ ). Nous aurons

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \rho^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}} + M^2 \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}} \frac{\partial F}{\partial T}$$

Les trois premiers termes de cette expression donnent la valeur de  $\left(\frac{dN}{dt}\right)^2$  quand il n'y a pas d'aimantation. L'aimantation introduit le terme

$$M^2 \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}} \frac{\partial F}{\partial T}$$

Ce terme est en général petit, car  $M$  est généralement faible dans les gaz naturels. Il n'est pas sans intérêt d'observer que  $\varepsilon$ , qui a été négligé, contient, lui aussi, en facteur  $M^2$ .

**10.** Voyons l'ordre de grandeur de ce terme complémentaire pour l'oxygène qui est le gaz le plus magnétique.

Soient  $c$ ,  $C$  les chaleurs spécifiques du gaz,  $p = (C - c)\rho T$  la pression.  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}$  c'est  $-\frac{c}{T}$ ;  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}$  c'est  $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T}$ . Le terme correctif est donc

$$-\frac{TM^2}{c\rho^2} \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial F}{\partial T} \quad \text{ou} \quad -\left(\frac{C}{c} - 1\right) \frac{TM^2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial T},$$

ou, en désignant le champ par  $\mathcal{H}$ ,

$$-\left(\frac{C}{c} - 1\right) \frac{T}{\rho} \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial T} \mathcal{H}^2.$$

Pour l'oxygène, en unités électromagnétiques C. G. S.,

$$F = \frac{10^6}{0,18} \text{ à } 273^0,$$

$$F = \frac{10^6}{0,15} \text{ à } 293^0,$$

$$\rho = 0,001429,$$

$$\frac{C}{c} = 1,41.$$

Le terme complémentaire est donc

$$- \frac{1,43}{10^3} \mathcal{H}^2.$$

Mais la valeur de  $\left(\frac{dN}{dt}\right)^2$ , quand l'aimantation est nulle, est de l'ordre de  $10^9$ . Pour que l'aimantation introduise une variation de  $\frac{1}{100}$  dans la valeur de  $\frac{dN}{dt}$ , il faudrait que

$$\frac{1,43}{10^3} \mathcal{H}^2 = \frac{1}{50} 10^9,$$

$$\mathcal{H} = 10^3 \times 3,7.$$

Il faudrait donc se placer dans un champ considérable.

Remarquons toutefois que la théorie qui précède serait directement applicable à la propagation dans un solide élastique dans le cas *des ondes planes*. On pourrait donc l'appliquer à la propagation des ondes planes dans du fer par exemple, sous réserve bien entendu des observations faites au début sur les phénomènes électrodynamiques induits. La susceptibilité magnétique serait alors beaucoup plus grande et l'influence de l'aimantation beaucoup plus sensible.

**II.** Essayons enfin de nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'influence de la polarisation dans le cas d'un fluide diélectrique.

Admettons la loi de Mossotti et Clausius qui peut s'exprimer

par  $F = \frac{a}{\rho}$  ( $a$  est une constante). Donc

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial T} = 0, \\ \zeta = \frac{a M^2}{2 \rho^2} + \psi(\rho, T), \end{cases}$$

Bornons-nous à appliquer (16) aux deux cas suivants :

1° Propagation d'une onde dans le sens de la polarisation,

$$\begin{aligned} A = M, & \quad B = 0, & \quad C = 0, \\ \lambda = 1, & \quad \mu = 0, & \quad \nu = 0. \end{aligned}$$

La formule (14) donne

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \rho^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}} + \frac{M^2}{\rho} \frac{4\pi}{1 + \frac{4\pi}{F}}.$$

2° Propagation dans un sens perpendiculaire à la polarisation,

$$\begin{aligned} A = M, & \quad B = 0, & \quad C = 0, \\ \lambda = 0, & \quad \mu = 1, & \quad \nu = 0. \end{aligned}$$

La formule (14) donne

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \rho^2 \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}}.$$

Dans le second cas, la célérité est la même que si la polarisation était nulle. Dans le premier, on a un terme complémentaire :

$$\frac{M^2}{\rho} \frac{4\pi}{1 + \frac{4\pi}{F}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho F^2} \frac{4\pi}{1 + \frac{4\pi}{F}} \pi e^2.$$

Pour l'air à 20 atmosphères, on a, en unités électrostatiques C. G. S.,

$$\frac{4\pi}{F} = 0,01,$$

$$\rho = \frac{26}{10^3}.$$

Le terme complémentaire est donc

$$\frac{1}{3266} \mathcal{E}^2.$$

Pour avoir, sur  $\frac{dN}{dt}$ , une variation de 1 pour 100, il faudrait que  $\mathcal{E}$  fût de l'ordre de  $2,5 \times 10^5$  (en unités électrostatiques), valeur très considérable.

