

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ GARNIER

Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 8^e série, tome 2 (1919), p. 99-200.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1919_8_2_99_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les singularités irrégulières des équations différentielles
linéaires ;*

PAR RENÉ GARNIER.

INTRODUCTION.

« ... On peut souvent passer d'une manière continue
« d'une de ces fonctions à une autre, d'un de ces
« individus mathématiques à un autre qui paraît tout
« différent, comme la théorie de l'évolution permet de
« passer d'une espèce à une espèce voisine, et, de proche
« en proche, à une espèce plus éloignée... »

(JULES TANNERY, *Science et Philosophie.*)

1. Dans la théorie analytique des équations différentielles, les équations linéaires occupent sans contredit une place privilégiée. Actuellement encore, la représentation analytique des intégrales d'une équation de forme quelconque présente les plus grandes difficultés, même dans le cas des équations du premier ordre ; au contraire, qu'on l'envisage au point de vue local ou au point de vue général, la représentation des intégrales d'une équation linéaire obéit à deux propositions fondamentales qui en facilitent singulièrement l'étude : d'une part, en vertu des mémorables travaux de Cauchy, aucune intégrale d'une équation linéaire ne saurait posséder d'autres points singuliers que ceux-là mêmes du coefficient différentiel ; et, d'autre part, il suffit de connaître un système fondamental d'intégrales, ainsi que les substitutions génératrices du groupe de monodromie, pour pouvoir prolonger, le long d'un chemin quelconque, une intégrale arbitraire de

l'équation, et pour faire ainsi d'une suite de discussions locales une description complète de l'intégrale.

En fait, les premiers géomètres (Fuchs, Thomé, Frobenius, ...), qui cherchèrent à approfondir les propriétés analytiques des intégrales des équations linéaires à coefficients rationnels entreprirent d'abord l'étude locale des points singuliers; et, bientôt, ils se trouvèrent conduits à subdiviser ces points en deux classes. Dans la première, leurs nombreux Mémoires enregistrent des succès aussi décisifs que faciles; et, sans doute faut-il attribuer à cette circonstance la dénomination de *régulières* qu'ils attachent aux singularités de cette nature.... Par contre, dans la seconde catégorie, celle des points *irréguliers*, leurs efforts restent impuissants à édifier aucune théorie générale; et, sauf dans des cas exceptionnels, ils ne peuvent réussir à représenter aucune intégrale irrégulière au moyen de développements en séries convergentes. A vrai dire, le point de vue auquel se plaçaient ces géomètres condamnait d'avance leurs tentatives à l'insuccès; c'est ce que nous verrons plus loin (n° 3), lorsque nous aurons fait connaître la méthode qui nous a permis d'approfondir la nature d'un point irrégulier.

2. Une équation différentielle linéaire, d'ordre m , à coefficients rationnels peut toujours être écrite sous la forme

$$(e) \quad [a_0(x)]^m y^{(m)} + [a_0(x)]^{m-1} a_1(x) y^{(m-1)} + \dots + a_0(x) a_{m-1}(x) y' + a_m(x) y = 0,$$

les $a_\nu(x)$ étant des polynômes d'un certain degré μ , premiers entre eux dans leur ensemble. Si ces polynômes ont été pris au hasard, l'équation (e) ne possédera, à distance finie que des singularités régulières ⁽¹⁾; pour qu'elle puisse acquérir des points irréguliers

(1) A ce point de vue, le cas d'une singularité irrégulière doit donc être regardé comme exceptionnel; on peut observer que la conclusion serait opposée si l'on écrivait (e) sous la forme

$$(e') \quad y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_{m-1} y' + p_m y = 0,$$

les p_ν étant des fonctions rationnelles d'ordre μ , décomposées, par exemple, en

guliers, il faut que $a_n(x)$ soit pourvu de racines multiples. Une telle équation peut donc être envisagée comme la limite d'une équation pourvue de points réguliers infiniment voisins; mais la conclusion peut-elle être étendue aux intégrales des deux équations?

Dans le cas le plus simple qu'on puisse envisager, la réponse à une telle question résulte de l'une des propositions les plus anciennement connues de l'Analyse. Considérons, en effet, l'équation du premier ordre

$$(1 + \varepsilon x)y' - y = 0,$$

qui possède deux points singuliers réguliers, $x = -\varepsilon^{-1}$ et $x = \infty$; pour $\varepsilon \neq 0$, son intégrale générale est

$$y = A(1 + \varepsilon x)^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Faisons tendre ε vers 0; l'équation tendra vers celle-ci,

$$\bar{y}' - \bar{y} = 0,$$

qui admet $x = \infty$ comme point irrégulier; et, d'autre part, en vertu de la proposition à laquelle on a fait allusion, y tendra vers la fonction $\bar{y} = Ae^x$ qui, effectivement, est une intégrale de l'équation limite.

Pouvait-on généraliser ce résultat?

La théorie de la série hypergéométrique permettait de prévoir une réponse affirmative. Il est bien connu ⁽¹⁾ que si l'on remplace x par εx , β par ε^{-1} , l'équation de Gauss tend vers la suivante

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0,$$

qui admet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left(\alpha, \frac{1}{\varepsilon}, \gamma, \varepsilon x\right) = 1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

éléments simples. Un tel paradoxe se retrouve, on le sait, dans les questions les plus diverses de géométrie et d'analyse; il s'explique ici par les mêmes raisons. Nous ferons d'ailleurs observer que, pour nous, la forme (e^x) est *artificielle*; nous n'aurons pas à nous en servir.

(1) Cf., par exemple, E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 3^e édition, t. II, 1918, p. 172.

pour intégrale. De même, la transformation

$$\alpha | \varepsilon^{-1}, \quad \beta | \varepsilon^{-1}, \quad x | \varepsilon^2 x$$

change l'équation de Gauss en la suivante

$$xy'' + \gamma y' - y = 0,$$

qui admet pour intégrale la fonction

$$1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} + \dots$$

du type de Bessel; et, dans les deux cas, on a engendré une singularité irrégulière par fusion de deux points singuliers infiniment voisins ⁽¹⁾.

Dès lors, il était tout indiqué d'étendre la conclusion précédente, et de rechercher si, plus généralement, on ne pourrait pas concevoir *une intégrale irrégulière* (de rang quelconque) *d'une équation linéaire* (d'ordre quelconque), *comme la limite d'une intégrale possédant un nombre convenable de points réguliers infiniment voisins, et appartenant, dans leurs domaines, à des exposants infiniment grands*. Tel est, brièvement énoncé, le problème qu'on s'est proposé de traiter dans ce Travail, et qui, nous le verrons, se résout par l'affirmative.

Indiquons maintenant la méthode adoptée pour atteindre ce résultat, ainsi que les principales conséquences qui en découlent, et qui éclairent d'un jour nouveau la structure du point irrégulier.

3. Soit donc

$$(\bar{E}) \quad y^{(m)} + A_1 y^{(m-1)} + \dots + A_{m-1} y' + A_m y = 0$$

l'équation à étudier dans le domaine de $x = \infty$, les quotients $A_\nu : x^{\nu(\nu-1)}$ étant holomorphes à l'extérieur d'un cercle $\Gamma(|x| = r_0)$, en sorte que $x = \infty$ est pour (\bar{E}) un point irrégulier de rang n .

(1) C'est ce que les Anglais appellent la *confluence* des singularités. (Cf. E.-T. WHITTAKER et G.-N. WATSON, *Modern Analysis*, 2^e édition, Cambridge, 1915, p. 331.)

A (\bar{E}) adjoignons l'équation (1)

$$(E) \quad (1 - \varepsilon^n x^n)^m y^{(m)} + (1 - \varepsilon^n x^n)^{m-1} \Lambda_1 y^{(m-1)} + \dots + (1 - \varepsilon^n x^n) \Lambda_{m-1} y' + \Lambda_m y = 0,$$

qui, pour $|\varepsilon|$ assez petit, possède, hors de Γ , $n + 1$ points réguliers,

$$x_h = \varepsilon^{-1/n} e^{2h\pi i/n} \quad (h = 1, \dots, n) \quad \text{et} \quad x_\infty = \infty.$$

Si l'on veut démontrer que, pour ε infiniment petit, une intégrale de (E) tend, dans un certain domaine, vers une intégrale de (\bar{E}), il ne saurait être question de représenter ces intégrales au moyen de développements en séries de Taylor : aussi bien, un tel mode de représentation n'a pu réussir dans les exemples du n° 2 qu'à la faveur de circonstances exceptionnelles qui permettaient le calcul explicite des termes généraux des séries. De plus, la forme immuablement circulaire du domaine de convergence d'une série de Taylor constituerait un cadre trop rigide pour l'étude d'un point irrégulier.

En fait, par la simplicité de son algorithme, par la souplesse de son emploi, par la fécondité des résultats dont la théorie des équations différentielles lui est déjà redevable, une méthode était tout naturellement désignée pour la solution du problème actuel : nous voulons parler de la méthode des approximations successives (2) de M. Émile Picard. Ajoutons d'ailleurs aussitôt que c'est l'illustre géomètre lui-même qui a montré, le premier, comment la méthode permet de calculer les intégrales d'une équation irrégulière (3) le long de l'axe réel (ou dans un argument

(1) L'équation (E) est du type (e) (n° 2) avec $a_0(x) = 1 - \varepsilon^n x^n$. La méthode employée pour (E) s'appliquerait d'ailleurs à toute équation (e) dans laquelle $a_0(x)$ serait une fonction de ε , tendant vers 1 pour ε infiniment petit. Au sujet des raisons qui ont fait adopter ce choix particulier de $a_0(x)$, voir plus loin, n° 4, p. 108.

(2) A propos de la comparaison des méthodes fondées sur la série de Taylor et sur les développements en approximations successives, on pourra consulter un intéressant article de M. J. Pérès (*Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. XXXIX₁, 1915, p. 179).

(3) *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. III, Paris, 1908, p. 412; l'exemple traité par M. E. Picard se rapporte au cas $m = 2$, $n = 1$. Citons encore à ce sujet de

déterminé). Mais, pour notre but actuel, il s'agissait de définir, dans le plan complexe, le domaine le plus étendu possible où l'on fût certain de calculer la même intégrale de l'équation (E) [ou (\bar{E})]; l'emploi exclusif de chemins rectilignes devenait évidemment insuffisant.

Pour aller plus loin, il fallait donc chercher à obtenir les conditions de convergence des approximations successives *sous une forme aussi large que possible*; et, c'est ainsi que nous avons pu établir l'existence d'un ensemble continu, à deux dimensions, de chemins d'intégration, le long desquels la méthode fournit une MÊME intégrale de (E); *par variation continue de ces chemins, on définit ensuite des domaines INDÉPENDANTS de ε , à l'intérieur desquels on peut calculer des intégrales y , canoniques pour (E), et des intégrales \bar{y} satisfaisant à (\bar{E}) ; enfin, on peut montrer que, dans ces domaines, les y tendent uniformément vers les \bar{y} .*

Ce résultat fondamental une fois acquis, il était aisé de retrouver dans les propriétés du point irrégulier les traces des propriétés primitives des points réguliers de l'équation (E).

Précisons et complétons ces généralités en résumant les principaux résultats de ce Mémoire.

4. Soit a_n le coefficient de $x^{n(n-1)}$ dans Λ_n (n^o 5); supposons d'abord que l'équation

$$f(s) \equiv s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m = 0$$

possède m racines distinctes, s_1, \dots, s_m . Nous montrons dans

nombreux et importants Mémoires de M. Horn (*Cf.* notamment *Journ. für r. und angew. Math.*, t. 138, 1910, p. 159; *Math. Ann.*, t. 71, 1912, p. 510). L'auteur y applique la méthode des approximations successives et celle des développements en série de facultés (ainsi que l'intégrale de E. Borel) à la représentation des intégrales des équations différentielles, ou linéaires aux différences finies, dans le voisinage de leurs singularités. Il n'étudie d'ailleurs que les intégrales des équations différentielles-limites (\bar{E}) , et le long de chemins rectilignes; s'il parvient à la notion de secteur (sans en indiquer l'origine), c'est dans un cas particulier ($m = 2 = n$), à l'aide de la méthode des séries de facultés, ce qui nécessite de plus longs calculs.

la première Partie qu'on peut alors calculer m expressions

$$\varpi_k(x, \varepsilon) \equiv \alpha_{n-1}^{(k)}(\varepsilon) x^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(k)}(\varepsilon) + \alpha_{-1}^{(k)}(\varepsilon) x^{-1}$$

(les $\alpha_j^{(k)}$ étant holomorphes pour $\varepsilon = 0$), telles que si l'on pose

$$u_k \equiv e^{\int (1 - \varepsilon^n x^n)^{-1} \varpi_k dx},$$

l'équation (E) admette l'intégrale $y = u_k z(x)$, $z(x)$ étant la fonction-limite vers laquelle tendent les approximations

$$z_0(x) = 1, \\ z_p(x) = 1 + \sum_{k=1}^m \int_{\mathcal{L}_k} R_k(\xi, \varepsilon) \omega_{jk}(x, \xi, \varepsilon) f[z_p(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon] \frac{d\xi}{\xi^2} \quad (p = 1, 2, \dots),$$

où l'on a posé

$$\omega_{jk}(x, \xi, \varepsilon) = \frac{u_k(x, \varepsilon) u_j(\xi, \varepsilon)}{u_j(x, \varepsilon) u_k(\xi, \varepsilon)},$$

et où R désigne une fonction de ξ et ε , holomorphe pour $x^{-1} = 0 = \varepsilon$, f ayant une signification analogue. Ces approximations convergent d'ailleurs régulièrement lorsqu'on prend pour chemin d'intégration l'une, \mathcal{L}_k^h , des m branches de la courbe

$$(\mathcal{L}) \quad \Re [e^{i\delta} \varepsilon^{-n} \text{Log}(1 - \varepsilon^n \xi^n)] = C,$$

où δ et C ont été convenablement choisis. D'une façon plus précise, la notation \mathcal{L}_k^h employée plus haut désigne la branche \mathcal{L}_k^h suivie dans un sens bien déterminé (avec k), et pouvant, d'ailleurs, varier avec k [du moins lorsque l'ordre m de (E) dépasse 2]. Soit r , un nombre positif arbitrairement grand, supérieur à r_0 (n° 5); prenons $|\varepsilon|$ inférieur à r_1^{-1} . Chacune des n branches de \mathcal{L} s'enroule autour de l'un des points x_h et de x_x ; quant à l'arc intermédiaire entre ces deux spires (et situé dans la couronne $s : r_0 < |x| < r_1$), il tend uniformément, pour $|\varepsilon|$ infiniment petit, vers un arc de l'hyperbole

$$(\overline{\mathcal{L}}) \quad r^n \cos(n\theta + \delta) = C.$$

Cela étant, supposons que les racines s_k de $f(s) = 0$ forment un

polygone convexe Π ; nous montrons dans la deuxième Partie qu'on peut adopter le même sens de parcours sur ξ^h , pour chacun des chemins ξ_k^h , et les intégrales y définies par le procédé d'approximations successives ne sont autres que des intégrales canoniques pour x_k (ou x_z). La convergence de ces approximations reste d'ailleurs assurée si, C croissant indéfiniment à partir d'une certaine valeur C_0 , δ varie dans un certain intervalle d'amplitude arbitrairement voisine de $(V_k + 2\pi) : n$ (où V_k désigne l'angle extérieur à Π en s_k). Dans la couronne δ , les branches ξ^h balaient alors un certain secteur ∇ , à l'intérieur duquel on sait calculer une intégrale canonique, ainsi que sa limite \bar{y} qui satisfait à (\bar{E}) (cf. n° 5, ad fin). Or les secteurs ∇ empiètent mutuellement, suivant mn autres secteurs à l'intérieur de chacun desquels on sait calculer $m + 1$ intégrales y (ou \bar{y}); dans chaque secteur d'empiètement, ces $m + 1$ intégrales \bar{y} (par exemple) sont donc liées par une relation que nous écrirons ici ⁽¹⁾ sous la forme

$$\bar{y}_j^h = \beta_{jh} \bar{y}_1^{n+1} + \dots + \beta_{jh}^m \bar{y}_m^{n+1};$$

il existera donc mn relations telles que la précédente; nous les appellerons les RELATIONS DE STRUCTURE ⁽²⁾ du point irrégulier; leur étude forme l'objet de la troisième Partie de ce Mémoire.

Dans la description de la singularité irrégulière, l'existence de ces relations a une importance capitale. A leur propos, observons d'abord, fait quasi évident, que parmi les $m + 1$ intégrales qui figurent dans l'une quelconque de ces relations, il en est toujours deux qui ont la même représentation asymptotique ⁽³⁾; c'est dire que la méthode des séries asymptotiques ⁽⁴⁾ de Π . Poincaré, si précieuse pour les calculs numériques, aurait été impuis-

(1) Pour plus de précisions dans les notations, voir n° 25.

(2) Dans nos Notes antérieures (*Comptes rendus*, t. 166, p. 103, 602) ces relations portaient le nom de *relations caractéristiques*.

(3) Ce sont des traces d'intégrales canoniques provenant de deux points réguliers différents.

(4) Et, a fortiori, celle des séries de puissances.

sante à déceler ces relations; elle ne saurait donc en revendiquer les conséquences. A vrai dire, l'application à l'équation limite (\bar{E}) de la méthode des approximations successives (sous la forme développée ici) suffisait à démontrer l'existence de ces relations; mais leur signification ne pouvait être révélée qu'à la faveur du passage à la limite qui transforme (E) en (\bar{E}).

Pour faire entrevoir cette signification, considérons le sous-groupe de monodromie G , de (E), correspondant aux substitutions relatives aux x_h et à x_z ; il dépend de $(m^2 - 1)(n - 1)$ invariants au sens de H. Poincaré (ces invariants étant définis à une transformation ponctuelle près). Or, dans la dégénérescence de (E) en (\bar{E}), $n(m - 1)$ de ces invariants tendent vers des limites déterminées: ce sont, par exemple, les $\alpha_h^{i,k}$ ($k = 1, \dots, m - 1, h = 1, \dots, n$), combinaisons symétriques des racines des équations fondamentales déterminantes; quant aux invariants restants, au nombre de $N = (m - 1)(mn - m - 1)$, ils peuvent être choisis de façon à avoir pour limites les quotients

$$\frac{\beta_{jh}^k}{\beta_{jh}^k}, \frac{\beta_{j'h'}^k}{\beta_{j'h'}^k},$$

formés au moyen des coefficients des relations de structure, et que nous appellerons les INVARIANTS du point irrégulier ⁽¹⁾.

La considération des relations de structure permet évidemment de poursuivre le long d'un chemin quelconque (convergeant vers le point irrégulier) toute intégrale dont on aura obtenu préalablement la représentation en fonction des intégrales normales, à l'intérieur d'un secteur déterminé; à ce titre, elle épuise donc l'étude locale d'une singularité irrégulière. Elle permet encore de définir d'une façon précise n lignes illimitées de zéros pour l'intégrale générale; c'est l'extension d'une proposition analogue établie pour l'équation de Bessel par M. Pierre Boutroux, à l'aide d'une méthode féconde, indépendante de la théorie des équations linéaires.

⁽¹⁾ L'étude de ces invariants considérés comme fonctions des coefficients de (\bar{E}) n'entre pas dans le cadre de ce Mémoire.

Lorsque le polygone Π n'est plus convexe ⁽¹⁾, les résultats précédents doivent être modifiés, car les intégrales canoniques de (E) , correspondant à ceux des s_j qui sont intérieurs au polygone de sustentation de tous ces points, ne peuvent plus être calculées par l'algorithme d'approximations successives que nous avons indiqué. Toutefois, on peut encore définir des relations de structure, et calculer les limites de N invariants de G , en introduisant comme on le verra (nos 13 et 26) la notion d'*intégrale paracanonique*.

Dans la quatrième Partie, nous exposons diverses généralisations ou applications des résultats précédents. Observons d'abord que le choix du binôme $1 - \varepsilon^n x^n$ pour le coefficient $a_n(x)$ du n° 2 n'a d'autre raison d'être que d'attribuer aux n racines de $a_n(x)$, la même disposition régulière qu'aux n secteurs ∇ , qui, à la limite, correspondent à un même point s_j ; la forme des chemins ζ^h , leur construction et leur discussion deviennent dès lors particulièrement simples. Mais, bien entendu, la même théorie s'appliquerait, aux complications de calcul près, quelle que soit la forme du coefficient $a_n(x)$ (tendant vers 1 pour ε infiniment petit). En particulier, on peut agréger successivement un point régulier à un point irrégulier de rang $n - 1$, de façon à engendrer un point de rang n : il suffit, pour cela, de prendre $a_n = 1 - \varepsilon x$; c'est la voie que j'avais suivie au début de mes recherches. Les chemins à adopter pour les approximations sont alors des *loxodromies du facteur primaire de Weierstrass*; leur construction fait l'objet du n° 30.

L'hypothèse où l'équation $f(s) = 0$ a des racines égales est abordée au n° 31; en général, l'équation (\bar{E}) correspondante, soit (\bar{E}') , possède des intégrales d'ordre fractionnaire. Il est encore possible de définir pour le point irrégulier des relations de structure et des invariants; mais une remarque s'impose. On peut envisager l'équation (\bar{E}') comme limite d'une équation régulière (E') , pour laquelle la relation $f(s) = 0$ aurait ses m racines

(1) Il en est ainsi, notamment, lorsque les s_j sont réels et que l'ordre m est supérieur à 2.

distinctes. Or, parmi les m secteurs ∇ attachés à (E') , il en est qui, pour ε infiniment petit, *sortent de la région s et s'éloignent à l'infini*. A la limite, les intégrales correspondantes ne peuvent plus être calculées, en un point x indépendant de ε , par la méthode d'approximations successives résumée plus haut; il en résulte *un abaissement dans le nombre des relations de structure et des invariants* qu'on peut définir par cette méthode.

Une fois étendue au cas où la relation $f(s) = 0$ possède des racines de multiplicités quelconques, la notion d'invariant permet de *généraliser le problème de Riemann*, pour une équation linéaire quelconque, sous la forme que voici :

Déterminer une équation linéaire possédant des singularités régulières, ou irrégulières de rangs donnés, et telle que les invariants de son groupe de monodromie (au sens classique) et les invariants de ses points irréguliers aient des valeurs données.

D'après ce qui précède, ce problème n'est qu'un cas limite du problème classique.

Si l'on cherche à le résoudre pour une équation du second ordre, ne possédant qu'un point irrégulier (de rang 3), on retombe immédiatement sur les équations (I) et (II) de M. Painlevé. D'ailleurs, ceci s'accorde bien avec le fait connu que (I) et (II) sont des dégénérescences de l'équation (VI) que l'on rencontre en cherchant à résoudre le problème de Riemann pour une équation du second ordre à quatre points singuliers réguliers. Mais on peut ajouter que les considérations précédentes libèrent, en quelque sorte, les équations (I) et (II) de cette tutelle; elles leur assignent un caractère, une individualité propres et consacrent à nouveau leur droit de cité en Analyse.

§. En définitive, *les résultats établis dans ce Mémoire permettent donc de regarder tout point irrégulier d'une équation linéaire comme identique à un ensemble de points réguliers infiniment voisins*; c'est là un point de vue complètement analogue à celui des géomètres de l'École italienne qui, depuis longtemps, assimilent

une singularité quelconque d'une courbe algébrique à un ensemble de nœuds infiniment voisins ⁽¹⁾.

Ceci nous permet d'expliquer, comme nous l'avons annoncé, les raisons de l'insuccès de Fuchs et de ses contemporains; tous leurs efforts se bornaient à obtenir pour une intégrale particulière un développement de la forme

$$\bar{y} = x^p e^{Q(x)} \mathfrak{F}\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $Q(x)$ est un polynome en x , $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série de puissances en x , convergente dans le domaine de x_∞ par exemple. Or, considérons une équation linéaire admettant x_1, \dots, x_n et x_∞ comme points réguliers; si le groupe de l'équation n'est pas de forme spéciale, il sera impossible d'exprimer aucune intégrale de l'équation par une formule telle que

$$y = x^p \prod (x - x_n)^{r_n} \mathfrak{F}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

où \mathfrak{F}_1 est holomorphe lorsque x appartient à un domaine extérieur à une certaine circonférence, et contenant x_1, \dots, x_n . Dès lors, d'après les résultats que nous avons établis, l'existence d'une intégrale telle que \bar{y} est impossible lorsque les invariants du point irrégulier ont des valeurs quelconques.

Concluons donc que l'étude locale d'une intégrale autour d'une singularité irrégulière est aussi difficile que l'étude générale d'une intégrale d'une équation n'ayant que des points réguliers. L'étude d'un point irrégulier doit comporter deux phases bien distinctes: représentation d'intégrales particulières de l'équation dans des secteurs déterminés (problème local); calcul des coefficients des relations de structure (problème général). En fait, les perfectionnements qu'on peut apporter à la description d'un point irrégulier sont donc subordonnés aux progrès qu'on peut effectuer dans le calcul du groupe de monodromie d'une équation régulière;

(1) L'application d'une telle conception à l'étude des singularités fixes des équations différentielles nous paraît appelée à rendre de précieux services, même dans le cas où les équations ne sont pas linéaires.

c'est dire que les deux propriétés fondamentales que nous avons rappelées au début apparaissent ici comme plus solidaires que jamais.

PREMIÈRE PARTIE.

LES CHEMINS D'INTÉGRATION ζ^h .

6. LES ÉQUATIONS (\bar{E}) ET (E) . — Considérons l'équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y^{(m)} + \Lambda_1 y^{(m-1)} + \dots + \Lambda_{n-1} y^{(m-n+1)} + \dots + \Lambda_m y = 0,$$

où les Λ_ν sont des fonctions analytiques de x , développables dans le domaine de $x = \infty$ sous la forme

$$\Lambda_\nu = a_{\nu(n-1)}^{(\nu)} x^{\nu(n-1)} + a_{\nu(n-1)}^{(\nu-1)} x^{\nu(n-1)-1} + \dots,$$

les séries précédentes étant convergentes à l'extérieur du cercle Γ , d'équation $|x| = r_0$. Pour l'équation (\bar{E}) , le point à l'infini est donc une singularité irrégulière de rang n . A cette équation, nous adjoindrons, comme nous l'avons dit plus haut (n° 3), l'équation suivante

$$(E) \quad y^{(m)} + \frac{\Lambda_1}{1 - \varepsilon^n x^n} y^{(m-1)} + \dots \\ + \frac{\Lambda_\nu}{(1 - \varepsilon^n x^n)^\nu} y^{(m-\nu)} + \dots + \frac{\Lambda_m}{(1 - \varepsilon^n x^n)^m} y = 0,$$

qui dépend d'un paramètre variable ε , et tend vers (\bar{E}) lorsque ε tend vers zéro ⁽¹⁾. Pour $|\varepsilon|$ assez petit, (E) possède, hors de Γ , $n + 1$ points singuliers *réguliers*

$$x_h = \varepsilon^{-1} e^{\frac{2h\pi i}{n}} \quad (h = 1, \dots, n) \quad \text{et} \quad x_\infty = \infty;$$

nous allons montrer que la méthode des approximations succes-

(1) En fait, rien ne serait changé aux raisonnements qui vont suivre, si l'on supposait que les coefficients Λ_ν de (E) sont des fonctions de x et de ε , soit $\Lambda_\nu(x, \varepsilon)$, holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et satisfaisant à la condition $\Lambda_\nu(x, 0) \equiv \Lambda_\nu(x)$. Mais nous n'aurons pas besoin de cette généralisation facile.

sives permet de définir pour (E) des intégrales, régulières hors de Γ , et qui, dans des conditions que nous préciserons, tendent vers des intégrales de l'équation (\bar{E}).

7. TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION (E). — Nous commencerons par mettre l'équation (E) sous une forme qui permette la pratique des approximations successives, et, pour cela, nous montrerons, qu'en général (1), on peut construire m expressions

$$\varpi_k(x, \varepsilon) \equiv \alpha_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(k)} + \frac{\alpha_{-1}^{(k)}}{x} \quad (k = 1, \dots, m),$$

où les α sont des fonctions de ε , holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et telles que les exponentielles

$$u_k \equiv e^{\int \frac{\varpi_k dx}{1 - \varepsilon^n x^n}}$$

satisfassent à une équation linéaire admettant autour de chaque point régulier x_h (et x_∞) les mêmes équations fondamentales déterminantes que (E).

Tout d'abord, écrivons que la condition précédente est vérifiée au voisinage du point x_h ; posons $\tilde{\lambda}_h = e^{-\frac{2h\pi j}{n}}$, et

$$(1) \quad \begin{cases} \varpi_{k,h} \equiv \alpha_{n-1}^{(k)} + \alpha_{n-2}^{(k)} \varepsilon \tilde{\lambda}_h + \dots + \alpha_0^{(k)} (\varepsilon \tilde{\lambda}_h)^{n-1} + \alpha_{-1}^{(k)} \varepsilon^n, \\ \Lambda_{\nu,h} \equiv \alpha_{\nu(n-1)}^{(\nu)} + \alpha_{\nu(n-1)-1}^{(\nu)} \varepsilon \tilde{\lambda}_h + \dots \end{cases}$$

Il viendra aussitôt

$$\varpi_k(x_h, \varepsilon) = \frac{\varpi_{k,h}}{(\varepsilon \tilde{\lambda}_h)^{n-1}},$$

$$\Lambda_\nu(x_h) = \frac{\Lambda_{\nu,h}}{(\varepsilon \tilde{\lambda}_h)^{\nu(n-1)}},$$

et la condition en question s'écrira

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^m \Lambda_{\nu,h} \varpi_{k,h} (\varpi_{k,h} + n \varepsilon^n) \dots [\varpi_{k,h} + (m - \nu - 1) n \varepsilon^n] = 0.$$

(1) C'est-à-dire, lorsque l'équation caractéristique (3) possède des racines distinctes.

lions (4) en même temps que la condition que nous nous sommes imposée relativement à x_n . Or, dans le domaine de ce point, u_k appartient à l'exposant $\frac{\alpha_{n-1}^{(k)}}{\varepsilon^n}$; on doit donc avoir

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^m \alpha_{\nu(n-1)}^{(\nu)} \alpha_{n-1}^{(k)} [\alpha_{n-1}^{(k)} + \varepsilon^n] \dots [\alpha_{n-1}^{(k)} + (m - \nu - 1)\varepsilon^n] = 0,$$

ce qui donne pour $\alpha_{n-1}^{(k)}$ une expression de la forme

$$(6) \quad \alpha_{n-1}^{(k)} = \sum_{\mu=0}^{+\infty} \alpha_{k,\mu} \varepsilon^{\mu n}.$$

Mais $\alpha_{k,0}$ est évidemment racine de (3); il suffit alors de prendre

$$\alpha_{k,0} = s_k \quad (= s_{k,0})$$

et de rapprocher (6) du premier des développements (4) pour voir aussitôt que $\alpha_{n-1}^{(k)}$, lui aussi, est une fonction de ε^n , holomorphe pour $\varepsilon = 0$. C. Q. F. D.

Ceci fait, pour obtenir la transformation que nous avons en vue, il nous suffira de résoudre la question suivante :

Déterminer la plus générale, soit (F), des équations du même type que (E), et qui conduisent aux mêmes expressions pour les u_k .

Tout d'abord, les relations (2) attachées à (E) et à (F) doivent être identiques, quel que soit h ; si donc $B_\nu (1 - \varepsilon^n x^n)^{-\nu}$ désigne le coefficient de $y^{(m-\nu)}$ dans (F); on devra avoir

$$B_\nu(x_h) = A_\nu(x_h) \quad (\nu = 1, \dots, m; h = 1, \dots, n);$$

d'où

$$B_\nu(x) = A_\nu(x) + (1 - \varepsilon^n x^n) C'_\nu,$$

$C'_\nu(x, \varepsilon)$ étant holomorphe autour de $\varepsilon = 0$, ainsi qu'en tout point x , à distance finie, extérieur à Γ . Comme d'ailleurs les relations (5) doivent être les mêmes, pour (E) et pour (F), C'_ν doit présenter $x = \infty$ comme pôle d'ordre au plus $\nu(n-1) - n - 1$. Et les conditions obtenues sont évidemment suffisantes.

En particulier, l'équation linéaire d'ordre m , qui admet u_1, \dots, u_m comme système fondamental d'intégrales, est évidemment une

équation (F); soit

$$F(u) \equiv u^{(m)} + \frac{B_1}{1 - \varepsilon^n x^n} u^{(m-1)} + \dots \\ + \frac{B_\nu}{(1 - \varepsilon^n x^n)^\nu} u^{(m-\nu)} + \dots + \frac{B_m}{(1 - \varepsilon^n x^n)^m} u = 0$$

cette équation. En vertu de ce qui précède, l'équation (E) pourra donc s'écrire

$$(E_1) \quad F(y) \equiv \frac{1}{x^2} \left[C_1 y^{(m-1)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{C_\nu}{(1 - \varepsilon^n x^n)^\nu} y^{(m-\nu)} + \dots + \frac{C_m}{(1 - \varepsilon^n x^n)^m} y \right],$$

les quotients $C_\nu : x^{(\nu-1)(n-1)}$ étant holomorphes pour ε voisin de 0 et x extérieur à Γ . C'est précisément à l'équation (E), écrite sous la forme (E₁), que nous allons appliquer la méthode d'approximations successives.

8. ÉTABLISSEMENT D'UN ALGORITHME D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES. — À cet effet, nous poserons

$$y = u_j z,$$

z satisfera à une équation de même forme que (E₁), et dont le premier membre, $G_j(z)$, sera dépourvu de terme en z ; soit

$$(E_2) \quad G_j(z) \equiv \frac{1}{x^2} \left[D_1 z^{(m-1)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{D_\nu x^{(\nu-1)(n-1)}}{(1 - \varepsilon^n x^n)^{\nu-1}} z^{(m-\nu)} + \dots + \frac{D_m x^{(m-1)(n-1)}}{(1 - \varepsilon^n x^n)^{m-1}} z \right]$$

cette équation, les D_ν étant holomorphes pour ε infiniment petit et x extérieur à Γ , et l'équation $G_j(z) = 0$ admettant pour intégrales les rapports

$$z_{j,k} \equiv \frac{u_k}{u_j} = e^{\int \frac{\bar{\sigma}_k - \bar{\sigma}_j}{1 - \varepsilon^n x^n} dx} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Avant d'aller plus loin, présentons d'abord les deux remarques suivantes. Tout d'abord, il résulte de notre hypothèse sur les racines de l'équation (3) que, pour $|\varepsilon|$ assez petit, le coefficient

de x^{n-1} dans $\varpi_k - \varpi_j$ est sûrement différent de zéro; cela étant, on établit facilement par récurrence la formule

$$(7) \quad \frac{u_j}{u_k} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\frac{u_k}{u_j} \right) = \left(\frac{\varpi_k - \varpi_j}{1 - \varepsilon^n x^n} \right)^\nu \left[1 + \frac{\beta_\nu + \varepsilon^n \gamma_\nu}{(\varpi_k - \varpi_j)^\nu} \right],$$

β_ν et γ_ν étant holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et pour $x = \infty$ d'ordres au plus égaux à $\nu n - n - \nu$ et à $\nu(n-1)$ respectivement; et la quantité entre crochets est donc une fonction $1 + \varepsilon_{j,\nu}$ de x et ε , holomorphe dans le voisinage du couple de valeurs $x^{-1} = 0 = \varepsilon$, pour lequel elle se réduit à 1.

En second lieu, considérons un système de N^2 quantités variables a_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$); de déterminant Δ , et représentons par $\bar{\Delta}$ la somme (arithmétique) des modules des $N!$ termes qui constituent le développement de Δ .

Si les ε_{ij} sont des quantités de modules arbitrairement petits (soit $|\varepsilon_{ij}| < \eta < 1$), et si $\bar{\Delta} : |\Delta|$ reste borné, on peut écrire

$$|a_{ij}(1 + \varepsilon_{ij})| = \Delta(1 + \varepsilon).$$

$|\varepsilon|$ étant arbitrairement petit, au même titre que les $|\varepsilon_{ij}|$.

[On trouve, en effet, par récurrence,

$$|\varepsilon| < (2^N - 1) \frac{\bar{\Delta}}{|\Delta|} \eta.]$$

Considérons alors l'équation auxiliaire

$$(\varphi) \quad G_j(z) = \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée de x ; son intégrale est de la forme

$$z = \sum_{k=1}^m K_k z_{j,k},$$

les produits $K'_k z_{j,k}$ étant donnés, conformément à la méthode de la variation des constantes par un système d'équations linéaires dont les coefficients sont de la forme $z_{j,k}^{\nu}$; mais il suffit d'appliquer successivement les deux remarques qui précèdent pour obtenir aussitôt la solution de ce système sous la

forme

$$K'_k z_{j,k} = \frac{(1 - \varepsilon^n x^n)^{m-1} [1 + \bar{\varepsilon}_k(x, \varepsilon)]}{(\varpi_k - \varpi_1) \dots (\varpi_k - \varpi_{j-1}) (\varpi_k - \varpi_{j+1}) \dots (\varpi_k - \varpi_m)} \varphi(x) \quad (k \neq j),$$

où $\bar{\varepsilon}_k$ est une fonction de x et ε , holomorphe et nulle pour $x^{-1} = 0 = \varepsilon$; il suit de là que (φ) admet la solution formelle

$$z = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m \int \frac{(1 - \varepsilon^n \zeta^n)^{m-1} [1 + \bar{\varepsilon}_k(\zeta, \varepsilon)]}{(\varpi_k - \varpi_1) \dots (\varpi_k - \varpi_{j-1}) (\varpi_k - \varpi_{j+1}) \dots (\varpi_k - \varpi_m)} \\ \times \left[e^{\int_{\xi}^x \frac{\varpi_k(v) - \varpi_j(v)}{1 - \varepsilon^n v^n} dv} - 1 \right] \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Pour abrégér l'écriture, nous poserons

$$(8) \quad e^{\int_{\xi}^x \frac{\varpi_k(v) - \varpi_j(v)}{1 - \varepsilon^n v^n} dv} = \omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon), \\ \frac{1 + \bar{\varepsilon}_k(\zeta, \varepsilon)}{(\varpi_k - \varpi_1) \dots (\varpi_k - \varpi_{j-1}) (\varpi_k - \varpi_{j+1}) \dots (\varpi_k - \varpi_m)} = \frac{R_k(\zeta, \varepsilon)}{\zeta^{(m-1)(n-1)}}, \\ \sum_{k=1}^m R_k(\zeta, \varepsilon) = -R_j(\zeta, \varepsilon) \quad (k \neq j),$$

en sorte que les $R_k(\zeta, \varepsilon)$ seront holomorphes pour $\zeta^{-1} = 0 = \varepsilon$, et la solution que nous venons d'obtenir pour (φ) pourra s'écrire

$$z = 1 + \sum_{k=1}^m \int \left(\frac{1 - \varepsilon^n \zeta^n}{\zeta^{n-1}} \right)^{m-1} R_k(\zeta, \varepsilon) \omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Ces préliminaires établis, revenons à l'équation (E_2) , et posons

$$\left(\frac{1 - \varepsilon^n x^n}{x^{n-1}} \right)^{m-1} D_1(x, \varepsilon) z^{(m-1)} + \dots \\ + \left(\frac{1 - \varepsilon^n x^n}{x^{n-1}} \right)^{m-\nu} D_\nu(x, \varepsilon) z^{(m-\nu)} + \dots + D_m(x, \varepsilon) z = f(z, x, \varepsilon);$$

en vertu des considérations précédentes, toute solution de l'équation intégrale

$$(9) \quad z(x, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^m \int_{(j,k)}^x R_k(\zeta, \varepsilon) \omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon) f[z(\zeta, \varepsilon), \zeta, \varepsilon] \frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

où les chemins d'intégration γ_k sont convenablement choisis, constituera une solution de l'équation (E₂); nous sommes donc conduits à faire les approximations successives que voici :

$$(10) \quad \begin{cases} z_0(x, \varepsilon) = 1, \\ z_{p+1}(x, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^m \int_{(\gamma_k)} R_k(\xi, \varepsilon) \omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon) f[z_p(\xi, \varepsilon), \xi, \varepsilon] \frac{d\xi}{\xi^2} \\ (p = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

9. CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS. — Pour démontrer la convergence des approximations (10), nous admettrons d'abord qu'il existe, extérieurement à Γ un chemin γ^h , présentant comme points-frontières x_h et x_∞ et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Quel que soit le point x pris sur γ^h , on a

$$|\omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon)| < 1$$

pour $|\varepsilon|$ assez petit, et pour tous les points ξ de l'un des deux arcs de γ^h issus de x_h ou de x_∞ , et aboutissant en x ; j'appellerai γ_k^h l'arc précédent; son extrémité (autre que x) pourra d'ailleurs coïncider soit avec x_h , soit avec x_∞ , suivant la valeur de k .

b. Soit τ un nombre positif aussi petit qu'on voudra; on pourra disposer de γ^h de façon à vérifier l'inégalité

$$\int_{(\gamma^h)} \frac{ds}{r^2} < \tau \quad (ds = |d\xi|, r = |\xi|),$$

l'intégrale étant étendue à *tout* le chemin γ^h .

Ceci posé, puisque γ^h est extérieur à Γ , et puisque, pour $|\varepsilon|$ assez petit, les R_k et les D_v sont holomorphes extérieurement à Γ , on peut trouver deux nombres positifs R et D , ne dépendant que de (E), et tels qu'on ait, dans ce domaine,

$$|R_k(\xi, \varepsilon)| < R, \quad |D_v(\xi, \varepsilon)| < D,$$

d'où, d'après (10) et en vertu des conditions a et b,

$$|z_1(x, \varepsilon) - z_0(x, \varepsilon)| < mRD \int_{(\gamma_k^h)} \frac{ds}{r^2} < H\tau,$$

en posant

$$H = mRD,$$

de sorte que H ne dépend que des coefficients de (E) . De plus, en vertu même des identités sur lesquelles repose la méthode de la variation des constantes, on aura, si r_0^{-1} et $|\varepsilon|$ sont assez petits pour que $\left| \frac{\beta_1 + \varepsilon^n \gamma_1}{\sigma_k - \sigma_j} \right|$ (n° 8) soit < 1 :

$$|z'_1(x, \varepsilon)| < \left| 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k(x, \varepsilon) - \sigma_j(x, \varepsilon)}{1 - \varepsilon^n x^n} \int_{(\mathcal{J}_k^h)} R_k(\zeta, \varepsilon) \omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon) D_m(\zeta, \varepsilon) \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right|$$

et

$$\left| \frac{1 - \varepsilon^n x^n}{x^{n-1}} z'_1(x, \varepsilon) \right| < 2mH\tau \left| \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_k(x, \varepsilon) - \sigma_j(x, \varepsilon)}{x^{n-1}} \right| < H\mu\tau,$$

μ étant indépendant, également, de ε et du rayon r_0 de Γ . Plus généralement, il suffit de s'appuyer sur la formule (7) pour apercevoir que μ peut être choisi (indépendamment de r_0 et ε) de telle façon que l'on ait encore les inégalités suivantes

$$\left| \left(\frac{1 - \varepsilon^n \zeta^n}{\zeta^{n-1}} \right)^\nu z_1^{\nu'}(\zeta, \varepsilon) \right| < H\mu^\nu \tau,$$

et cela, pour ζ appartenant à \mathcal{J}_k^h , quelque petit que soit d'ailleurs $|\varepsilon|$. Or ces inégalités entraînent évidemment la suivante

$$\begin{aligned} & |z_2(x, \varepsilon) - z_1(x, \varepsilon)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{(\mathcal{J}_k^h)} R_k(\zeta, \varepsilon) \omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon) \right. \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1 - \varepsilon^n \zeta^n}{\zeta^{n-1}} \right)^{m-1} D_1(\zeta, \varepsilon) z_1^{(m-1)}(\zeta, \varepsilon) + \dots + D_m(\zeta, \varepsilon) (z_1 - 1) \right] \frac{d\zeta}{\zeta^2} \Big| \\ &\qquad < mRD(\mu^{m-1} + \dots + \mu + 1)H\tau^2 = \lambda H^2 \tau^2, \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda = \frac{\mu^m - 1}{\mu - 1};$$

et l'on trouverait de même

$$\left| \left(\frac{1 - \varepsilon^n \zeta^n}{\zeta^{n-1}} \right)^\nu [z_2^{\nu'}(\zeta, \varepsilon) - z_1^{\nu'}(\zeta, \varepsilon)] \right| < \lambda \mu^\nu H^2 \tau^2.$$

La loi est générale, et l'on démontrerait sans peine qu'on a, pour toutes les valeurs de ν et de p ,

$$\left| \left(\frac{1 - \varepsilon^n \zeta^n}{\zeta^{n-1}} \right)^\nu [z_{p+1}^{(\nu)}(\zeta, \varepsilon) - z_p^{(\nu)}(\zeta, \varepsilon)] \right| < \lambda^\nu \mu^\nu (\Pi \tau)^{\nu+1}.$$

En conséquence, si ζ^h a été pris de manière à vérifier la condition b , avec $\tau < (\lambda \Pi)^{-1}$ (où le second membre ne dépend que des coefficients de l'équation différentielle), les fonctions z_p (et $z_p^{(\nu)}$), définies par (10), convergeront en tout point x de ζ^h vers des limites respectives z (et $z^{(\nu)}$); et, en vertu d'un raisonnement classique, ces limites vérifieront l'équation intégrale (9) et, par suite, l'équation (E_2).

En définitive, pour achever notre démonstration de convergence, il ne nous reste plus qu'à montrer comment on peut définir des chemins ζ^h satisfaisant aux conditions a et b .

10. LA CONDITION a . — En premier lieu, pour que la condition a soit vérifiée relativement à la $k^{\text{ième}}$ quadrature de (10) [$k \neq j$] (¹), il suffira (²) qu'on puisse choisir sur ζ^h un sens de parcours (variable a priori avec k), et tel que l'arc s de ζ^h étant compté positivement dans ce sens, de x vers ζ , on ait, quels que soient x et ζ ,

$$\frac{d}{ds} |\omega_{j,k}(x, \zeta, \varepsilon)| \leq 0,$$

c'est-à-dire, d'après (8),

$$\Re \left[\frac{\varpi_k(\zeta, \varepsilon) - \varpi_j(\zeta, \varepsilon)}{1 - \varepsilon^n \zeta^n} \frac{d\zeta}{ds} \right] \geq 0;$$

mais cette dernière condition peut encore s'écrire

$$(11) \quad \Re \left[\frac{\alpha_{n-1}^{(k)} - \alpha_{n-1}^{(j)}}{1 - \varepsilon^n \zeta^n} (1 + \lambda_1 e^{i\theta_2}) \zeta^{n-1} \frac{d\zeta}{ds} \right] \geq 0,$$

où, si petit que soit $|\varepsilon|$, λ_1 est arbitrairement petit pour $|\zeta|$ suffisam-

(¹) La condition est évidemment remplie pour $k = j$.

(²) Puisque $\omega_{jk}(x, x, \varepsilon) = 1$.

ment grand. Or, posons

$$(12) \quad \arg. \left[\frac{\alpha_{n-1}^{(k_1)} - \alpha_{n-1}^{(j_1)} \zeta^{n-1}}{1 - \varepsilon^n \zeta^n} \frac{d\zeta}{ds} \right] = \beta;$$

L'inégalité (11) s'écrira

$$\left[1 + \frac{\lambda_1 \cos(\beta + \lambda_2)}{\cos \beta} \right] \Re \left[\frac{\alpha_{n-1}^{(k_1)} - \alpha_{n-1}^{(j_1)} \zeta^{n-1}}{1 - \varepsilon^n \zeta^n} \frac{d\zeta}{ds} \right] \geq 0;$$

pour qu'elle soit satisfaite, il suffira d'astreindre β à vérifier la double condition

$$(13) \quad -\frac{\pi}{2} + \eta \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \eta,$$

dans laquelle η désigne un nombre positif arbitrairement petit, qu'on choisira une fois pour toutes : en effet, η ayant été ainsi fixé, le rayon r_0 du cercle Γ pourra toujours être pris assez grand pour que $\lambda_1 \sec \beta$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, par exemple, et la condition (11) deviendra une simple conséquence de (13).

Tout revient donc à vérifier cette dernière condition. Pour cela, il nous suffira de choisir le chemin ζ^h , de façon que β conserve le long de ζ^h une valeur constante [satisfaisant à (13)]. Or, l'intégrale de l'équation

$$\arg. \left[f'(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} \right] = \text{const.}$$

est évidemment de la forme

$$\Re [e^{i\delta} f(\zeta)] = C,$$

où δ et C désignent deux constantes; le chemin ζ^h devra donc vérifier une relation de la forme

$$(1') \quad -\Re \left[\frac{e^{i\delta}}{\varepsilon^n} \text{Log}(1 - \varepsilon^n \zeta^n) \right] = C;$$

en d'autres termes, la transformation

$$(14) \quad \zeta^n = X$$

devra changer ζ^h en la spirale logarithmique Σ , d'équation

$$(2) \quad -\Re \left[\frac{e^{i\delta}}{\varepsilon^n} \text{Log}(1 - \varepsilon^n X) \right] = C,$$

que nous étudierons bientôt. Mais auparavant, déterminons la valeur constante que prendra β sur ζ^h . Or, si l'on pose

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_1 e^{i\varphi}, \\ 1 - \varepsilon^n \zeta^n &= \rho e^{i\omega},\end{aligned}$$

l'équation de Σ deviendra

$$\cos(\delta - n\varphi) \log \rho - \omega \sin(\delta - n\varphi) = -C\varepsilon_1^2;$$

on aura donc sur ζ^h

$$(15) \quad -\frac{n\varepsilon^n \zeta^{n-1} d\zeta}{1 - \varepsilon^n \zeta^n} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} [1 + i \cot(\delta - n\varphi)] = \frac{i e^{-i(\delta - n\varphi)}}{\sin(\delta - n\varphi)} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds},$$

en supposant, bien entendu,

$$(16) \quad \sin(\delta - n\varphi) \neq 0.$$

Posons enfin

$$\alpha_{n-1}^k - \alpha_{n-1}^j = \beta_{j,k}^n e^{i\beta_{j,k}},$$

et la relation (15) donnera

$$(17) \quad \beta = -\frac{\pi}{2} + \beta_{j,k} - \delta + \arg. \left[\sin(\delta - n\varphi) \frac{d\rho}{ds} \right],$$

formule qui a bien un sens, en vertu de (16).

11. LA SPIRALE Σ . — Revenons maintenant à la spirale Σ ; elle présente comme pôle le point $X = \varepsilon^{-n}$, et sa tangente menée dans le sens des ω croissants coupe le rayon vecteur sous un angle V tel que $\text{tang} V = \cot(\delta - n\varphi)$; en particulier, pour $\cos(\delta - n\varphi) = 0$, cette spirale se réduira à une droite; mais, en vertu de (16), elle ne pourra jamais dégénérer en un cercle. Elle présentera donc deux groupes de spires (exceptionnellement rectilignes) qui convergeront, l'un vers le pôle $X = \varepsilon^{-n}$, l'autre vers le point $X = \infty$; ces groupes seront reliés par un arc (exceptionnellement rectiligne), que nous appellerons *arc normal*, et dont tous les points resteront à distance bornée de 0, quelque petit que soit $|\varepsilon|$, si toutefois δ et C ont été choisis comme on va l'expliquer.

Tout d'abord, η ayant été pris arbitrairement petit, et r_0 en fonction de η comme il a été dit au n° 10, nous nous donnerons

encore un nombre positif r_1 , indépendant de ε , et tel que le rapport $r_1 : r_0$ soit arbitrairement grand (par exemple, égal à η^{-1}). Soit Γ_1 le cercle du plan (ξ) concentrique à Γ et de rayon r_1 ; Γ et Γ_1 délimiteront une couronne circulaire (s) que nous appellerons *région normale*; d'ailleurs, nous pourrions toujours supposer que $|\varepsilon|$ a été pris inférieur à r_1^{-1} , en sorte que (s) ne contiendra aucun point x_h ; nous choisirons enfin pour C une valeur positive fixe, comprise entre r_0'' et r_1'' .

Cela étant, à l'intérieur de la couronne (s') qui est limitée dans le plan (X) par les cercles Γ' et Γ_1' , images de Γ_1 et Γ , le premier membre de (Σ) pourra être développé suivant les puissances croissantes de ε'' (1); effectivement, si l'on pose

$$X \equiv R e^{i(\theta)},$$

on obtient la relation

$$R \cos(\Theta + \delta) - C + \frac{\varepsilon''}{2} R^2 \cos(2\Theta + \delta + n\varphi) + \dots = 0;$$

par suite, de la manière dont on a choisi C , Σ présentera un arc σ intérieur à (s') et dont tous les points tendront, pour ε infiniment petit, vers les points du segment déterminé par Γ_1' sur la droite

$$(\overline{\Sigma}) \quad R \cos(\Theta + \delta) - C = 0.$$

C'est cet arc que nous appellerons l'*arc normal* de Σ .

Assujettissons maintenant δ à vérifier non seulement la condition (16), mais encore l'inégalité

$$(18) \quad |\sin(\delta - n\varphi)| > \sin \eta$$

que nous serons d'ailleurs amenés à introduire au n° 14 pour vérifier la condition b ; nous allons voir que, pour $|\varepsilon|$ inférieur à une limite ne dépendant que de r_1 et η , Σ ne possédera sûrement dans (s') aucun autre point que ceux de σ .

En effet, supposons, par exemple, $\tan(\delta - n\varphi) > 0$, de sorte que, sur Σ , on s'éloignera du pôle en tournant dans le sens direct (par rapport au pôle). La condition en question sera sûrement réa-

(1) La détermination du Log est celle qui se réduit à 1 quand ε tend vers zéro.

lisée si le cercle osculateur à Σ , au point $\omega = -\pi$, est extérieur à Γ'_1 , le cercle osculateur au point $\omega = \pi$ comprenant, en outre, Γ'_1 à son intérieur. Expriment cette double condition, on obtient aisément les inégalités

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon_1^{2n} r_1^{2n} - 2\varepsilon_1^n r_1^n \rho_1 \sec(\delta - n\varphi) - \rho_1^2 &> 0, \\ 1 - \varepsilon_1^{2n} r_1^{2n} + 2\varepsilon_1^n r_1^n \rho_2 \sec(\delta - n\varphi) - \rho_2^2 &< 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \log \rho_1 &\equiv -C\varepsilon_1^n \sec(\delta - n\varphi) - \pi \tan(\delta - n\varphi), \\ \log \rho_2 &\equiv -C\varepsilon_1^n \sec(\delta - n\varphi) + \pi \tan(\delta - n\varphi). \end{aligned}$$

Or, d'après (18), $\tan(\delta - n\varphi)$ est bornée inférieurement en fonction de η ; dès lors, les inégalités précédentes entraînent aussitôt le résultat que nous avons annoncé.

Il n'y a donc que deux points de Σ , soient M_1 et M_2 sur la circonférence Γ'_1 . Appelons M_1 le premier de ces deux points que l'on rencontre lorsqu'on décrit Σ en s'éloignant du pôle; nous allons calculer les arguments de M_1 et M_2 en convenant d'adopter $-n\varphi$ comme argument du pôle $X = \varepsilon^{-n}$, et d'attribuer à M_1 et M_2 les arguments résultant d'une variation continue le long de Σ .

Or, pour $|\varepsilon|$ très petit, M_1 et M_2 sont très voisins des intersections de la droite $\bar{\Sigma}$ avec Γ'_1 ; l'argument de M_1 , par exemple, aura donc sensiblement pour valeur

$$-\delta - f\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

avec $f^2 = 1$; mais l'argument du pôle étant $-n\varphi$, et M_1 devant en être plus près que M_2 (1), on doit avoir

$$\cos\left(\delta - n\varphi + f\frac{\pi}{2}\right) > \cos\left(\delta - n\varphi - f\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$f \sin(\delta - n\varphi) < 0.$$

Il reste à fixer l'entier k ; or, il est loisible de choisir la détermi-

(1) Il ne peut y avoir ambiguïté, car les points M_1 et M_2 ne pourraient devenir équidistants du pôle que dans le cas où l'on aurait $\sin(\delta - n\varphi) = 0$, ce qui est interdit. D'ailleurs, dans ce cas, Σ dégénérerait en un cercle, et la définition de M_1 et M_2 deviendrait illusoire.

nation de δ de telle sorte que l'on ait $|\delta - n\varphi| < \pi$; ceci posé, quand on va du pôle au point M_1 , on n'a pas encore rencontré le rayon vecteur issu de O dans la direction opposée à $O\varepsilon_1''$; la différence entre l'argument du pôle et celle du point M_1 est donc inférieure à π en valeur absolue, ce qui montre, d'après notre convention, qu'on doit prendre $k = 0$, et l'on est ainsi conduit à la règle que voici :

Le symbole f étant déterminé par les relations

$$(19) \quad f^2 = 1, \quad f \sin(\delta - n\varphi) < 0,$$

les arguments de M_1 et M_2 seront respectivement $-\delta - f\frac{\pi}{2}$ et $-\delta + f\frac{\pi}{2}$ (à une erreur près de l'ordre de $\varepsilon_1'' r_1''$ (1)).

Donnons immédiatement une application qui nous sera bientôt utile. Faisons varier δ de telle sorte que $\delta - n\varphi$ parcoure l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ en respectant la condition (18); nous trouverons aussitôt, pour les arguments de M_1 et M_2 , le Tableau de valeurs ci-dessous :

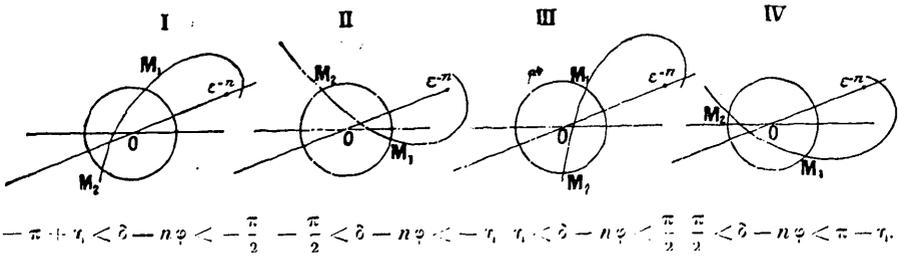
$\delta - n\varphi \dots\dots\dots$	$-\pi + \eta$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\eta$
$M_1 \dots\dots\dots$	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi$	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} + \eta$
$M_2 \dots\dots\dots$	$-n\varphi + \frac{3\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi + \pi$	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} + \eta$
$\delta - n\varphi \dots\dots\dots$	$+\eta$	$+\frac{\pi}{2}$	$\pi - \eta$
$M_1 \dots\dots\dots$	$-n\varphi + \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi$	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} + \eta$
$M_2 \dots\dots\dots$	$-n\varphi - \frac{\pi}{2} - \eta$	$-n\varphi - \pi$	$-n\varphi - \frac{3\pi}{2} + \eta$

On voit que, $\delta - n\varphi$ croissant, les arguments de M_1 et M_2 vont toujours en décroissant; de plus, lorsque $\delta - n\varphi$ traverse la valeur 0, les points M_1 et M_2 se permutent; enfin, l'arc parcouru par les points M_1 et M_2 a une amplitude de $3\pi - 2\eta$, son milieu étant sur le rayon aboutissant au pôle.

(1) Dorénavant, on conviendra de négliger cette erreur.

Suivant les valeurs de $\delta - n\varphi$, la spirale Σ présentera donc par rapport au cercle Γ_1 l'une des dispositions ci-dessous :

Fig. 1.



Dans les cas I et IV [$\cos(\delta - n\varphi) < 0$], l'arc M_1M_2 de Σ tourne sa concavité par rapport à O : nous dirons qu'il est *concave*; de même, dans les cas II et III, l'arc M_1M_2 sera dit *convexe*; ces dénominations n'ont d'ailleurs plus de sens pour $\cos(\delta - n\varphi) = 0$. Observons enfin que si l'on fait croître C (ϵ conservant une valeur fixe), Σ tournera autour du pôle ϵ^{-n} , dans le sens positif ou négatif suivant qu'on a $\sin(\delta - n\varphi) > 0$ ou < 0 . Soit Σ_0 la position initiale de Σ ; dans les deux cas, Σ finira par sortir du cercle Γ_1 après avoir balayé celle des deux régions limitée par Γ_1 et Σ_0 qui ne contient pas l'origine.

12. LA COURBE ϱ . — Et maintenant, il sera facile de discuter l'allure de la courbe ϱ . Puisqu'elle se déduit de Σ par la transformation (14), elle devra comporter n branches ϱ^h , qui se dérouleront respectivement à partir de chacun des points $x_h = \epsilon^{-1} e^{\frac{2h\pi i}{n}}$ transformés de ϵ^{-n} ; il nous suffira d'ailleurs d'étudier l'une de ces branches, ϱ^n par exemple, toutes les autres s'y ramenant par des rotations de $2\pi : n$ autour de l'origine. Or, dans le voisinage du point asymptote $x_n = \epsilon^{-1}$, d'argument $-\varphi$, ϱ^n est assimilable à une spirale logarithmique qui couperait ses rayons vecteurs sous un angle complémentaire de $\delta - n\varphi$. Décrivons ses spires en nous éloignant de x_n ; nous ne pourrions rencontrer la circonférence $\Gamma_1 (r = r_1)$ qu'en deux points, m_1 et m_2 , m_1 étant le point d'entrée dans (s). Pour $|\epsilon|$ très petit, les arguments de m_1 et m_2 seront

respectivement très voisins de

$$-\frac{1}{n}\left(\delta + f\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n}\left(\delta - f\frac{\pi}{2}\right),$$

où f est toujours défini par (19). Quant à l'arc de \mathcal{L}'' compris entre ces deux points (et que nous appellerons encore *arc normal*), il sera très voisin de l'une des branches de la courbe

$$(17) \quad r^n \cos(n\theta + \delta) = C,$$

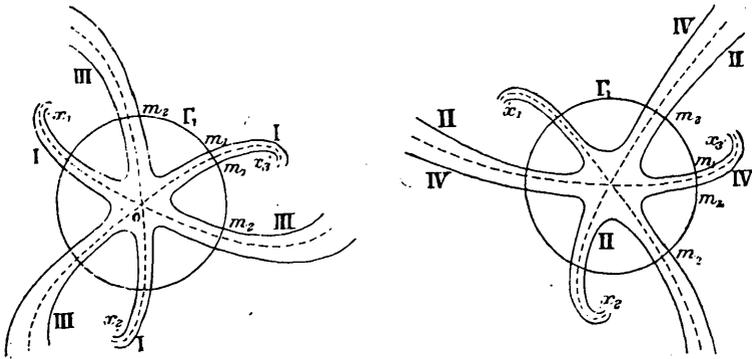
transformée de $\bar{\Sigma}$ par (14). Enfin, passé le point m_2 , la branche \mathcal{L}'' s'éloignera de O pour s'enrouler asymptotiquement autour de x_2 à la manière d'une spirale qui couperait les rayons vecteurs sous un angle complémentaire de $\delta - n\varphi$: c'est là une conséquence immédiate de la relation

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{d\theta} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}$$

qui résulte de (14).

En s'appuyant sur ces données, on construira aisément la courbe \mathcal{L} qui, pour $n = 3$, aura l'aspect ci-dessous :

Fig. 2.



Pour simplifier le tracé, on a figuré simultanément sur un même plan les courbes I et III correspondant à des arguments δ dont la différence est π ; de même pour II et IV ⁽¹⁾. Les courbes I et III, par

(1) Les courbes I et IV [$\cos(\delta - n\varphi) < 0$] seront encore dites *concaves*, et les courbes II et III [$\cos(\delta - n\varphi) > 0$], *convexes*.

exemple, peuvent être considérées comme appartenant à un faisceau d'équation (ϱ) (n° 10), où C ne serait plus obligatoirement positif ⁽¹⁾. Un tel faisceau comprendrait la courbe ϱ' , obtenue pour $C = 0$ et qui a été figurée en pointillé; cette courbe passe par l'origine qui est pour elle un point d'ordre n , les tangentes en ce point ayant pour arguments $\frac{1}{n} \left[(2h+1) \frac{\pi}{2} - \delta \right]$. D'ailleurs, lorsque ε tend vers zéro, les arcs normaux de ϱ' tendent précisément vers les asymptotes de $\bar{\varrho}$.

De plus, du Tableau donné au n° 11, il résulte immédiatement que si $\delta - n\varphi$ (compris entre $-\pi$ et $+\pi$) vérifie toujours l'inégalité (18), les points d'intersection m_1 et m_2 de la branche ϱ^h ne pourront varier qu'à l'intérieur d'un arc d'amplitude $\frac{3\pi}{n}$, et dont le milieu serait sur le segment rectiligne Ox_h . Enfin, de la remarque qui termine le numéro précédent, on peut conclure que, C croissant, chaque branche de ϱ^h se déformera en balayant la région comprise entre la branche ϱ^h initiale et Γ_1 (et ne renfermant pas O), cela, d'ailleurs, sans que deux branches distinctes puissent avoir un point commun ⁽²⁾.

15. LES CHEMINS ϱ_k^h . — Cette discussion achevée, nous pouvons définir des chemins ϱ_k^h qui satisferont à la condition a du n° 9.

Tout d'abord, d'après (18), $\sin(\delta - n\varphi)$ a un signe bien déterminé; prenons

$$\frac{d\varphi}{ds} \sin(\delta - n\varphi) > 0;$$

(1) Ici, C prendrait, tour à tour, des valeurs égales et de signes contraires.

(2) Pour compléter la discussion précédente, on pourra observer que le passage de II à III, ou de IV à I, passage qui s'effectue par la valeur exclue $\sin(\delta - n\varphi) = 0$, fait apparaître comme courbes de transition des courbes algébriques, du type lemniscatique général; tandis que les courbes II-III comprennent alors n branches fermées, entourant chacun des points x_h , les courbes I-IV affectent la forme d'un circuit fermé unique entourant l'ensemble des x_h . C'est le cas critique, où la définition de m_1 et m_2 n'a plus de sens. Enfin, le passage des courbes concaves I, IV aux courbes convexes II, III s'effectue quand $\cos(\delta - n\varphi)$ s'annule: les courbes ϱ sont encore algébriques, de formes analogues à celle de $\bar{\varrho}$, et passent par les x_h .

d'après (13) et (17), on devra avoir

$$\sin(\beta_{j,k} - \delta) \geq \sin \eta;$$

d'ailleurs, si l'on change le sens de l'une des deux inégalités précédentes, il devra en être de même pour l'autre. En définitive, le sens de parcours qu'on doit prendre sur ξ^h à partir du point x , pour en déduire un chemin d'intégration ξ_k^h satisfaisant à la condition a , est défini par la règle suivante :

Choisissons $f_{j,k}$ et $\beta_{j,k}$ au moyen des relations

$$(20) \quad f_{j,k}^2 = 1, \quad f_{j,k} \sin(\beta_{j,k} - \delta) \geq \sin \eta;$$

on doit avoir

$$(21) \quad f_{j,k} \sin(\delta - \eta) \frac{d\varphi}{ds} > 0.$$

Enfin, il résulte de cette règle, et de la discussion du n° **II**, que, sur les arcs normaux de ξ , le sens de parcours, qui vient d'être adopté, satisfait à la condition

$$(22) \quad f_{j,k} \frac{d\varphi}{ds} < 0.$$

En effet, quel que soit le sens suivant lequel on se déplace sur un arc normal, le produit $f \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\varphi}{ds}$ est sûrement positif; et, jointe à (19) et à (21), cette inégalité entraîne aussitôt (22).

14. LA CONDITION b . — Ainsi donc, moyennant l'adoption du sens de parcours (20)-(21) sur les branches ξ^h de ξ , la condition a sera certainement vérifiée; il nous reste à montrer comment on doit choisir les constantes C et δ de (ξ), de façon à satisfaire à la condition b . Pour cela, observons d'abord qu'on a, en vertu de (14),

$$1 = \int_{(\xi^h)} \frac{ds}{r^2} = \int_{(\xi^h)} \left| \frac{dz}{z^2} \right| = \frac{1}{n} \int_{(\Sigma)} \left| \frac{dX}{X^{\frac{1}{n}+1}} \right|,$$

la première intégrale étant étendue à toute la branche ξ^h , et la dernière à toute la spirale Σ . Posons alors $\rho = e^u$; nous aurons,

sur Σ ,

$$\omega = u \cot(\delta - n\varphi) + C\varepsilon_1^n \operatorname{cosec}(\delta - n\varphi),$$

en supposant toujours (16) ou (18) vérifiée; d'ailleurs, dans cette hypothèse, pour décrire toute la spirale, il suffira de faire varier u de $-\infty$ à $+\infty$. Cela étant, on pourra écrire, sur Σ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^n |dX| &= e^u \sqrt{du^2 + d\omega^2} = e^u |\operatorname{cosec}(\delta - n\varphi)| du, \\ \varepsilon_1^{2n} |X|^2 &= 1 - 2e^u \cos[u \cot(\delta - n\varphi) + C\varepsilon_1^n \operatorname{cosec}(\delta - n\varphi)] + e^{2u}; \end{aligned}$$

d'où

$$(23) \quad I = \frac{\varepsilon_1}{n |\sin(\delta - n\varphi)|} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^u du}{|1 - 2e^u \cos[u \cot(\delta - n\varphi) + C\varepsilon_1^n \operatorname{cosec}(\delta - n\varphi)] + e^{2u}|^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}}.$$

Cela étant, je dis d'abord que I ne peut être uniformément bornée (pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^0$) que si $\delta - n\varphi$ vérifie non seulement (16) mais (18). Car divisons l'intervalle d'intégration en trois parties, au moyen des points $\pm 2 \log 2$; pour

$$-\infty < u < -2 \log 2,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} &< 1 - 2e^u \cos[u \cot(\delta - n\varphi) + C\varepsilon_1^n \operatorname{cosec}(\delta - n\varphi)] \\ &+ e^{2u} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\varepsilon_1}{4n |\sin(\delta - n\varphi)|} \left(\frac{4}{5}\right)^{1 + \frac{1}{n}} < I_1 < \frac{\varepsilon_1}{4n |\sin(\delta - n\varphi)|} 2^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})},$$

où I_1 désigne la partie de I provenant de l'intervalle $(-\infty, -2 \log 2)$; or la première inégalité justifie ce que nous avons avancé; la seconde montre que si (18) est réalisée, I_1 sera arbitrairement petite avec ε_1 ; et une conclusion analogue s'appliquerait à l'intervalle $(2 \log 2, +\infty)$.

Reste à étudier l'intervalle $(-2 \log 2 < u < 2 \log 2)$. Or les infinis de la fonction à intégrer sont donnés par la formule

$$u e^{\pm i(\delta - n\varphi)} + C\varepsilon_1^n + 2k\pi \sin(\delta - n\varphi) = 0,$$

où k est un entier quelconque; ceux qui correspondent à $k = 0$ tendent vers 0 avec ε_1 ; les autres restent à une distance de l'axe réel bornée inférieurement si (18) est satisfaite. Dès lors, un calcul facile montre que la fonction figurant sous le signe \int dans (23) peut s'écrire

$$\frac{|\sin(\delta - n\varphi)|^{1 + \frac{1}{n}} F(u, \varepsilon_1)}{[u^2 + 2C\varepsilon_1^n u \cos(\delta - n\varphi) + C^2\varepsilon_1^{2n}]^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}},$$

$F(u, \varepsilon_1)$ étant une fonction de u et ε_1 , qui, pour u et ε_1 voisins de 0, est holomorphe, et tend vers 1. En conséquence, un raisonnement classique montre que la partie de I , relative à l'intervalle $(-2 \log 2, +2 \log 2)$, et par suite I elle-même, d'après ce qui précède, tend, pour ε infiniment petit, vers la quantité

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_1}{n} |\sin(\delta - n\varphi)|^{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[u^2 + 2C\varepsilon_1^n u \cos(\delta - n\varphi) + C^2\varepsilon_1^{2n}]^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}} \\ &= \frac{1}{nC^{\frac{1}{n}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{(v^2 + 1)^{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}}. \end{aligned}$$

En définitive, pour que l'intégrale $I = \int \frac{ds}{r^2}$, étendue à toute la branche \mathcal{L}^k , reste inférieure au nombre τ du n° 9, il suffira de prendre δ , C et ε de façon à vérifier la condition (18) et les suivantes

$$(24) \quad \begin{aligned} |\varepsilon| &\equiv \varepsilon_1 < H_1 \eta \tau, \\ C > C_0 &\equiv \frac{H_2}{\tau^n}, \end{aligned}$$

H_1 et H_2 étant des quantités numériques ne dépendant que de n .

15. EXPRESSION DES INTÉGRALES $y_j(x)$ AU MOYEN DES INTÉGRALES CANONIQUES. INTÉGRALES PARACANONIQUES. — Et maintenant, la démonstration de convergence, que nous avons commencée au n° 9, se trouve complètement achevée : Sur l'une

quelconque des n branches de la courbe ξ , les approximations convergent régulièrement vers une intégrale $Z_j(x)$ de (E_2) qui fournit une intégrale $y_j(x) = u_j(x) Z_j(x)$ de l'équation primitive (E) . On peut observer dès à présent que ces intégrales satisfont sur ξ^h à la relation

$$(25) \quad |Z_j(x) - 1| \leq \frac{H\tau}{1 - \lambda H\tau},$$

qui est une conséquence immédiate des inégalités du n° 9; or λ et H ne dépendent que de l'équation (E) , tandis que τ peut être pris aussi petit qu'on voudra pourvu que C ⁽¹⁾ et $|\varepsilon|^{-1}$ aient été choisis assez grands. Dès maintenant, nous pouvons donc affirmer que la méthode d'approximations successives du n° 8 fournit pour (E) des intégrales y_j , qui, sur les chemins ξ^h , se comportent très sensiblement comme les exponentielles u_j du n° 7.

Mais, sur un chemin ξ^h donné ⁽²⁾, de façon à satisfaire aux conditions a et b , on peut préciser notablement l'allure des intégrales $y_j(x)$; à cet effet, nous allons montrer que ces intégrales peuvent être définies, indépendamment de la méthode des approximations successives, au moyen des intégrales canoniques de (E) relatives aux points x_h et x_z . En effet, les racines de (3) étant supposées distinctes, les m racines de chacune des équations fondamentales déterminantes, relatives aux x_h et à x_z , seront toutes distinctes pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Dans le voisinage de x_h , l'équation (E) possédera donc un système d'intégrales canoniques de la forme

$$y_{1,h} = c \int \frac{\overline{m}_1 dx}{1 - \varepsilon^n x^n} \zeta_{1,h} \equiv u_1 \zeta_{1,h}, \quad \dots, \quad y_{m,h} = u_m \zeta_{m,h}$$

les $\zeta_{j,h}$ holomorphes dans le domaine de x_h se réduisant à l'unité en ce point. De même, autour de x_z , on aura le système canonique suivant :

$$y_{1,z} = u_1 \zeta_{1,z}, \quad \dots, \quad y_{m,z} = u_m \zeta_{m,z}.$$

Ceci posé, notre intégrale $y_j(x)$ satisfait le long de ξ^h à des rela-

(1) Donc, aussi, r_1 (n° 11).

(2) Donc pour C fixe.

tions linéaires, à coefficients constants, de la forme

$$\begin{aligned} y_j(x) &= a_1 y_{1,h} + \dots + a_j y_{j,h} + \dots + a_m y_{m,h} \\ &= b_1 y_{1,\infty} + \dots + c_j y_{j,\infty} + \dots + b_m y_{m,\infty}. \end{aligned}$$

Cherchons à déterminer les a_j ou les b_j . Or, divisons par u_j les deux relations précédentes; il viendra

$$(26) \quad \begin{aligned} Z_j(x) &= a_1 \frac{u_1}{u_j} \zeta_{1,h} + \dots + a_j \zeta_{j,h} + \dots + a_m \frac{u_m}{u_j} \zeta_{m,h} \\ &= b_1 \frac{u_1}{u_j} \zeta_{1,\infty} + \dots + b_j \zeta_{j,\infty} + \dots + b_m \frac{u_m}{u_j} \zeta_{m,\infty}. \end{aligned}$$

Mais il résulte de l'analyse du n^o 13 que, si ξ se déplace vers x_∞ le long du chemin ξ^h ,

$$|\omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon)| = \left| \frac{u_k(x) u_j(\xi)}{u_j(x) u_k(\xi)} \right|$$

sera décroissant (ou croissant) lorsque les inégalités

$$f' \sin(\beta_{j,k} - \delta) > \sin \eta, \quad f' \sin(\delta - \alpha \varphi) > 0$$

seront compatibles (ou non) pour une même racine carrée de l'unité, f' . Dès lors, $u_k(x) : u_j(x)$ tendra vers ∞ (ou 0) quand x s'éloignera indéfiniment sur ξ^h ; il tendra vers 0 (ou ∞) quand x se rapprochera de x_k (sur ξ^h).

Cela étant, plaçons-nous d'abord dans le cas le plus simple, et supposons l'équation (E) telle que, pour toutes les valeurs de k ($\neq j$), $u_k : u_j$ tende vers l'infini avec x (1). S'il en est ainsi, on peut évidemment recommencer la démonstration du n^o 9, en prenant pour τ l'intégrale $\int r^{-2} ds$ étendue, non plus à la branche ξ^h entière, mais à l'arc de ξ^h compris entre x et x_∞ , arc avec lequel coïncident tous les chemins d'intégration. On peut donc substituer à τ une certaine fonction de $|x|$, nulle avec $|x^{-1}|$; dès lors, l'inégalité (25) montre qu'actuellement $|Z_j - 1|$ tend vers 0 pour x infini (sur ξ^h). Il viendra donc, d'après (26),

$$b_j = 1, \quad b_1 = \dots = b_{j-1} = b_{j+1} = \dots = b_m = 0;$$

(1) Nous verrons plus loin (n^o 21) que cette circonstance peut effectivement se réaliser.

l'intégrale $y_j(x)$ qu'on aura calculée sera donc l'une des intégrales canoniques relatives à x_z , et les a_k coïncideront alors avec les coefficients des substitutions de passage relatives au couple (x_h, x_z) . De plus, quand x tend vers x_h , $Z_j \dots a_j \zeta_{j,h}$ tend vers 0; a_j est donc très voisin de 1, si r_j est très grand ⁽¹⁾. Mais $a_j - 1$ est évidemment indépendant de r_j ; effectivement, nous verrons (n° 17) que $a_j - 1$ est une fonction de ε qui tend vers 0 avec cette variable.

On montrerait de même que si tous les $u_k : u_j$ tendent vers ∞ quand x tend vers x_h (sur ζ^h), $y_j(x)$ coïncide avec une des intégrales canoniques relatives à x_h .

Considérons enfin le cas général où pour certaines valeurs de l'indice k ($r_1, \dots, r_p, \neq j$), $u_k : u_j$ tend vers l'infini avec x , tandis que pour les valeurs restantes ($t_1, \dots, t_q, \neq j$; $p + q = m - 1$), $u_k : u_j$ tend vers 0 avec x ¹. Le raisonnement précédent montre qu'on aura

$$\begin{aligned} y_j(x) &= a_j y_{j,h} + a_{r_1} y_{r_1,h} + \dots + a_{r_p} y_{r_p,h} \\ &= b_j y_{j,\infty} + b_{t_1} y_{t_1,\infty} + \dots + b_{t_q} y_{t_q,\infty} \end{aligned}$$

a_j et b_j étant deux fonctions de ε dont on peut montrer qu'elles tendent vers 1 pour ε infiniment petit.

Ainsi donc, dans le voisinage du point régulier x_h , $y_j(x)$ s'exprimera au moyen de $p + 1$ intégrales canoniques déterminées, et, dans le voisinage de x_z , y_j sera une combinaison de

$$q + 1 = m + 1 - (p + 1)$$

intégrales canoniques déterminées; nous dirons que $y_j(x)$ est une *intégrale paracanonique* pour le couple de points singuliers (x_h, x_z) ; nous dirons encore qu'elle est d'indice $p + 1$ pour x_h , et d'indice $q + 1$ pour x_z , ou, plus simplement encore, qu'elle est d'indice $p + 1$, si l'on a $p < q$. Nous reviendrons d'ailleurs sur ces intégrales au n° 26.

(1) Rappelons que $\zeta_{j,h}(x_h) = 1$, et que $Z_j(x_h)$ est très voisin de 1 pour r_j très grand.

DEUXIÈME PARTIE.

LES SECTEURS Δ ET ∇ .

16. LES FAISCEAUX [ζ^h]. — Revenons au calcul effectif des intégrales y_j ; nous ne l'avons effectué jusqu'ici que le long de l'arc de courbe ζ^h : nous nous proposons maintenant de déterminer le *domaine* le plus étendu possible du plan (x) en tout point duquel on puisse calculer cette même intégrale y_j par la méthode d'approximations successives du n^o 8. A cet effet, nous établirons d'abord un lemme préliminaire.

Donnons pour l'instant une valeur fixe à ε ; les courbes ζ dépendent de deux paramètres arbitraires, C et δ ; si le point x appartient à l'une d'elles (C_0, δ_0), il appartiendra encore à une multiplicité α^1 de branches ζ^h de courbes ζ . Considérons alors dans cette multiplicité l'ensemble de toutes les courbes pour lesquelles on a

$$C' < C < C'', \quad \delta' < \delta < \delta'',$$

$C', C'', \delta', \delta''$ étant tels que C et δ variant dans les intervalles précédents : 1^o les conditions (18) et (24) soient constamment réalisées; 2^o les symboles f et $f_{j,k}$ conservent constamment les mêmes valeurs. Il est clair qu'on pourra toujours trouver des quantités C', C'' et δ', δ'' assez voisines de C et δ pour que les hypothèses précédentes soient vérifiées.

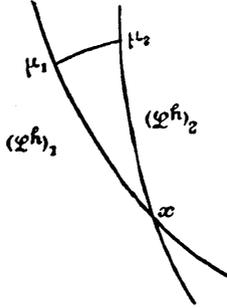
Cela étant, nous dirons de l'ensemble des branches ζ^h , issues d'un même point fixe, correspondant à la même valeur de h , et satisfaisant aux conditions précédentes, qu'il constitue *un faisceau* [ζ^h], et nous établirons le lemme suivant :

LEMME. — *La valeur que les approximations successives fournissent au point x pour l'intégrale $y_j(x)$ est indépendante de la courbe du faisceau sur laquelle on effectue les approximations.*

Soient $(\zeta^h)_1$ et $(\zeta^h)_2$ deux branches s'enroulant autour du même point x_h et appartenant au faisceau; d'après nos hypothèses, le sens de parcours qu'il faudra adopter pour définir les chemins d'inté-

gration $(\varrho_k^h)_1$, et $(\varrho_k^h)_2$ ne pourra varier d'une branche à l'autre. Désignons alors par μ_1 et μ_2 , deux points pris sur $(\varrho_k^h)_1$ et $(\varrho_k^h)_2$, de telle sorte que les arcs $\widehat{x\mu_1}$ et $\widehat{x\mu_2}$ fassent respectivement partie de $(\varrho_k^h)_1$ et $(\varrho_k^h)_2$; on pourra choisir μ_1 et μ_2 aussi loin qu'on voudra

Fig. 3.



(si les ϱ_k^h vont à l'infini), ou aussi près qu'on voudra de x_h (si les ϱ_k^h tendent vers x_h) tout en satisfaisant constamment à la double condition suivante : les points μ_1 et μ_2 devront pouvoir être reliés par un chemin $\widehat{\mu_1\mu_2}$, dont tous les points ξ appartiendront, chacun, à une branche du faisceau $[\varrho_k^h]$, et qui sera tel en outre que a' . Les $|\omega_{j,k}(x, \xi, \varepsilon)|$ calculés au point ξ de $\widehat{\mu_1\mu_2}$ par variation continue à partir de la valeur adoptée en $\xi = \mu_1$ (ou en $\xi = \mu_2$) resteront inférieurs à $1 : b'$. L'intégrale $\int r^{-2} ds$ étendue à $\widehat{\mu_1\mu_2}$ sera infiniment petite.

Il est clair qu'on pourra toujours réaliser la double condition précédente : car, d'abord, tous les points de $\widehat{\mu_1\mu_2}$ appartenant à une branche du faisceau, la fonction $|\omega_{j,k}|$, uniforme dans l'aire $x\mu_1\mu_2$, est nécessairement inférieure à 1 sur $\mu_1\mu_2$. De plus, les points μ_1 et μ_2 pouvant être choisis arbitrairement près de x_k (ou de x_x), l'intégrale $\int r^{-2} ds$ étendue à $\mu_1\mu_2$ peut être rendue arbitrairement petite; il en serait de même, d'ailleurs, si l'on étendait cette intégrale de μ_1 et de μ_2 à x_h (ou à x_x) le long de $(\varrho_k^h)_1$ et de $(\varrho_k^h)_2$.

Il résulte aussitôt de là que la quadrature de rang k figurant dans l'expression (10) de $z_{\mu+1}$ et étendue successivement le long de $\mu_1\mu_2$,

et le long des arcs de $(\zeta_k^h)_1$ et $(\zeta_k^h)_2$, s'éloignant de x à partir de μ_1 et μ_2 respectivement, peut être rendue chaque fois aussi petite qu'on voudra en module, moyennant un choix convenable de μ_1 et μ_2 . Étendue successivement à $(\zeta_k^h)_1$ et $(\zeta_k^h)_2$, la quadrature donnera donc des résultats égaux ⁽¹⁾, et les valeurs obtenues en x pour \mathcal{Z}_{j+1} (donc pour Z_j) sur l'un et l'autre chemin sont nécessairement identiques.

C. Q. F. D.

17. LES SECTEURS Δ . — Ce lemme établi, prenons pour (C', C'') , (δ', δ'') les intervalles les plus étendus qui soient compatibles avec les conditions que nous venons de leur imposer; les branches ζ^h balayeront alors dans la région normale (s) [n° 11] un domaine à deux dimensions, Δ , en tout point duquel les approximations (10) fourniront sans ambiguïté la valeur d'une intégrale bien déterminée de (E) , et cela, d'ailleurs, quelle que soit la branche de ζ^h qu'on aura adoptée. Nous allons définir les frontières de Δ .

Tout d'abord, maintenons δ fixe, et faisons croître C depuis la valeur minimum C_n (24); d'après la remarque qui termine le n° 12, chacun des arcs de la branche ζ^h qui est compris à l'intérieur de (s) balayera la portion de (s) extérieure à o , et comprise entre Γ_1 et la position initiale de ζ^h ; soit Δ' cette région; nous allons étudier les variations de Δ' quand on fait varier δ .

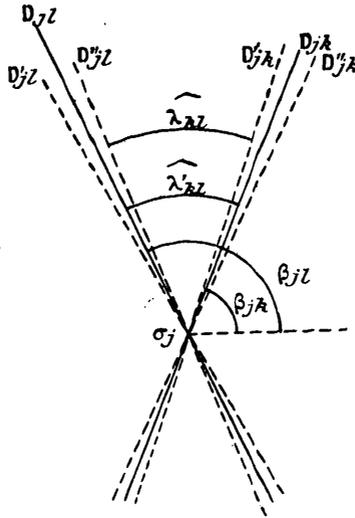
A cet effet, figurons dans un plan (σ) les m racines $\alpha_{n-1}^{h,k}$ de l'équation (5) (fig. 4, p. 138), racines que nous désignerons par σ_k pour abrégé, et qui, nous le savons, tendent vers les s_k . Appelons $D_{j,k}$ la droite qui joint les points σ_j, σ_k et D_j la droite d'argument $n\varphi$ menée par σ_j ; ces droites délimiteront autour de σ_j comme origine $2m$ angles adjacents, deux à deux opposés par le sommet, et, en général, non nuls ⁽²⁾. Menons alors, par σ_j , $2m$ couples de droites $D'_{j,k}, D''_{j,k}; D'_j, D''_j$, telles que les droites de chacun d'eux fassent avec la droite $D_{j,k}$ ou D_j correspondante un angle égal à $\pm \eta$.

(1) On observera que les fonctions à intégrer sont holomorphes dans le triangle curviligne $x\mu_1\mu_2$.

(2) Le cas où il n'en serait pas ainsi n'offre d'ailleurs aucune difficulté (cf. la note suivante).

Nous désignerons encore par $\hat{\lambda}'_{kl}$ l'angle formé par D_{jk} et D_{jl} , par $\hat{\lambda}_{kl}$ sa mesure ($< \pi$); par $\hat{\lambda}_{kl}$ l'angle de mesure $\lambda_{kl} \equiv \hat{\lambda}'_{kl} - 2\eta$

Fig. 4.



formé par D''_{jl} et D'_{jk} par exemple; de même, nous représenterons par $\hat{\lambda}'_k, \hat{\lambda}'_k, \hat{\lambda}'_k, \lambda_k$ les éléments analogues relatifs au couple D_{jk}, D_j . Nous aurons donc défini, autour de σ_j , $2m$ angles finis ⁽¹⁾, d'amplitudes λ_{kl} ou λ_k ; ils seront séparés par $2m$ angles d'amplitude arbitrairement petite 2η , que nous désignerons sous le nom d'*échancrures*.

(1) Les σ_j tendant vers les s_j , si trois quelconques des s_j ne sont pas en ligne droite, on peut toujours supposer que les droites D_{jk} sont distinctes; de plus, on peut encore supposer que la loi suivant laquelle ε tend vers 0 est telle qu'aucune des D_j ne coïncide avec aucune des D_{jk} . Dans ces conditions, si $|\varepsilon|$ a été pris assez petit, le nombre η du n° 10 pourra toujours être choisi assez petit [en fonction des constantes de l'équation (\bar{E}) et des limites assignées à φ , par exemple] pour que les $2m$ angles $\hat{\lambda}'_j$ aient, chacun, une amplitude positive. Le cas où cette double hypothèse ne serait pas réalisée n'offrirait d'ailleurs que des longueurs d'écriture. On verra, de plus (n° 20), que les restrictions qu'on a imposées aux variations de φ sont sans influence sur le passage à la limite de (E) à (\bar{E}).

Ces notations présentées, observons que les arguments des directions $D'_j, D''_j, D'_{j,k}, D''_{j,k}$ sont $n\varphi \pm \eta, \beta_{jk} \pm \eta$ (à un multiple près de π); il en résulte aussitôt que les conditions (18) et (20) ne pourront être vérifiées que si le rayon D , d'origine σ_j , et d'argument δ , n'appartient à aucune échancrure; de plus, les symboles f et f_{jk} ne pourront conserver des valeurs fixes que si D reste intérieur à un même angle $\hat{\lambda}_{kl}$ ou $\hat{\lambda}_k$. Le domaine le plus étendu possible où les approximations du n° 8 convergent vers une même intégrale $y_j(x)$ sera donc celui, Δ , qui est balayé par Δ' quand D varie à l'intérieur d'un des angles $\hat{\lambda}_{kl}$ ou $\hat{\lambda}_k$. Nous allons délimiter ce domaine en nous plaçant par exemple dans le premier des deux cas précédents.

Supposons donc que D varie à l'intérieur de $\hat{\lambda}_{jk}$; l'angle $\delta - n\varphi$ pouvant toujours être ramené à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, nous appliquerons les résultats du n° 12 : l'argument du point m_1 , correspondant à g^h variera de (1)

$$-\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - f \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} - f \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n};$$

pour m_2 , les mêmes limites seraient encore valables, à condition de remplacer f par $-f$. Donc, quel que soit le signe de f , les points m_1 et m_2 ne cesseront d'appartenir à un arc dont les extrémités μ' et μ'' auront pour arguments respectifs

$$(27) \quad \begin{cases} \theta' = -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}, \\ \theta'' = -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}; \end{cases}$$

l'amplitude de cet arc est donc

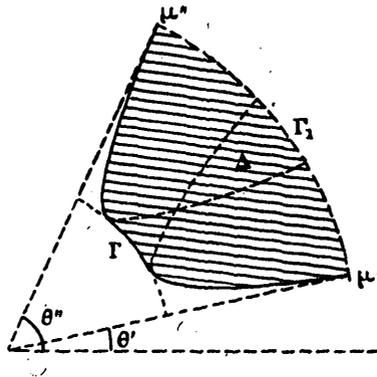
$$\frac{\beta_{jl} - \beta_{jk} - 2\eta}{n} + \frac{\pi}{n} = \frac{\pi + \lambda_{kl} - 2\eta}{n} = \frac{\pi + \lambda_{kl}}{n} \quad (< \pi).$$

Ainsi donc, Δ sera limité, d'une part, par deux arcs normaux

(1) En négligeant des quantités de l'ordre de $\epsilon_1^n r_1^n$ (n° 11). Désormais, ceci restera sous-entendu.

appartenant à deux branches \mathcal{L}^h différentes (mais de même indice h), et aboutissant aux points μ' et μ'' ; d'autre part, par le plus petit des deux arcs $\widehat{\mu' \mu''}$ de Γ_1 , et enfin par un arc de Γ qu'il est inutile de préciser davantage (fig. 5). Nous donnerons désormais aux domaines Δ le nom de *secteurs*; les directions $O\mu'$, $O\mu''$ seront dites *les directions-frontières* du secteur. Le nombre des

Fig. 5.



secteurs correspondant à un même point σ_j est égal à $2mn$; le nombre total des secteurs est donc de $2m^2n$; d'ailleurs, les intégrales définies dans chacun d'eux ne sont pas nécessairement distinctes : nous en donnerons plus loin (n° 21) un exemple important. Observons, enfin, que les $2m^2n$ secteurs Δ se répartissent en $2m^2$ groupes, tels que les n secteurs de chaque groupe correspondent au même choix de valeurs pour β_{j_l} et β_{j_k} , et ne diffèrent que par la valeur de l'entier h dans (27); à ces groupes de secteurs, que l'on déduit de l'un quelconque d'entre eux par des rotations successives de $2\pi : n$ autour de l'origine, nous donnerons le nom de *cycles de secteurs*.

Avant d'aller plus loin, montrons comment l'existence d'un domaine Δ , à l'intérieur duquel on sait calculer une même intégrale $y_j(x)$, nous permet d'établir, comme nous l'avons annoncé (n° 15), que le coefficient a_j de la formule (26) tend vers 1 quand ε tend vers zéro.

Remarquons d'abord qu'on peut substituer à Γ un cercle Γ'' ,

de rayon r_0'' suffisamment grand pour que dans un secteur Δ'' d'une couronne (s'') limitée intérieurement par Γ'' , $y_j(x)$ vérifie une relation (26) avec $|a_j - 1|$ arbitrairement petit : ceci exige d'ailleurs que $|\varepsilon|$ soit suffisamment petit ⁽¹⁾. Mais, si l'on a choisi le rayon extérieur r_1 de la couronne primitive (s) supérieur à r_0'' (ce qui exige encore que $|\varepsilon|$ soit suffisamment petit), Δ'' empiètera sur un secteur Δ de (s); d'après sa nouvelle définition du n° 13, l'intégrale y_j définie dans Δ sera le prolongement de celle qu'on aura définie dans Δ'' : sous une autre forme, c'est dire qu'on peut trouver un nombre ε_1^0 assez petit pour que l'inégalité $|\varepsilon| < \varepsilon_1^0$ étant vérifiée, $|a_j - 1|$ soit arbitrairement petit ⁽²⁾.

18. EXTENSION DE LA THÉORIE A L'ÉQUATION (\bar{E}). — La méthode que nous venons d'employer pour calculer des intégrales de l'équation (E) dans des secteurs déterminés Δ du plan (x) peut être appliquée point par point à l'équation irrégulière (\bar{E}) qui en est la limite. Aussi, nous bornerons-nous à l'énoncé des résultats; nous ferons exception seulement pour la transformation analogue à celle du début (n° 7); il sera entendu d'ailleurs, une fois pour toutes, que l'on surmontera d'un trait tous les symboles qui se rapporteront à l'équation limite.

Nous allons donc montrer que les racines s_j de l'équation caractéristique (3) étant distinctes, conformément à notre hypothèse fondamentale, on peut former m expressions

$$\bar{\omega}_k(x) = \bar{\alpha}_{n-1}^{(k)} x^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_0^{(k)} + \frac{\bar{\alpha}_{-1}^{(k)}}{x},$$

telles que l'équation (\bar{E}) puisse s'écrire

$$(\bar{E}_1) \quad \bar{F}(y) = \frac{1}{x^2} [\bar{C}_1 y^{(m-1)} + \dots + \bar{C}_v y^{(m-v)} + \dots + \bar{C}_m y],$$

⁽¹⁾ Car il résulte du n° 14 que I tend vers 0 avec C^{-1} (done avec r_0^{-1} ; cf. n° 11) et $|\varepsilon|$.

⁽²⁾ Une démonstration analogue s'appliquerait pour le coefficient b_j dans le second cas envisagé, ainsi que pour les coefficients a_j et b_j relatifs à l'intégrale paracanonique considérée en troisième lieu.

l'équation $\bar{F}(u) = 0$ ayant pour intégrales les expressions

$$\bar{u}_k(x) = e^{\int \bar{\omega}_k dx} = x^{\bar{\alpha}^{(k)}} e^{\frac{1}{n} \bar{\alpha}_1^{(k)} x^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_v^{(k)} x},$$

et les C_v admettant $x = \infty$ comme pôle d'ordre $(\nu - 1)(n - 1)$.

Pour le voir, posons $y \equiv z e^{\int \bar{\omega} dx}$, et proposons-nous de prendre pour $\bar{\omega}$ une expression du type donné pour $\bar{\omega}_k$, de telle sorte que le coefficient de z , dans l'équation transformée, présente $x = \infty$ comme pôle d'ordre $m(n - 1) - n - 1$ au plus. Les termes d'ordres supérieurs de ce coefficient ne peuvent provenir que de la somme

$$\bar{\omega}^m + \frac{m(m-1)}{2} \bar{\omega}^{m-2} \bar{\omega}' + \sum_{\nu=1}^m \Lambda_\nu \left[\bar{\omega}^{m-\nu} + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{2} \bar{\omega}^{m-\nu-2} \bar{\omega}' \right];$$

dès lors, si $\Pi_k(x)$ désigne l'une des racines de l'équation

$$(28) \quad \Pi^m + \frac{m(m-1)}{2} n \frac{\Pi^{m-1}}{x} + \sum_{\nu=1}^m \Lambda_\nu \left[\Pi^{m-\nu} + \frac{(m-\nu)(m-\nu-1)}{2} n \frac{\Pi^{m-\nu-1}}{x} \right] = 0,$$

la différence $\bar{\omega}_k - \Pi_k(x)$ s'annulera pour $x = \infty$ comme x^{-2} au moins. L'équation (28) ayant ses m racines méromorphes et du type précité pour $x = \infty$ (en raison de l'hypothèse faite sur les s_j), l'existence des $\bar{\omega}_k(x)$ se trouve établie.

Cherchons alors la forme la plus générale des coefficients Λ_ν , conduisant aux mêmes expressions pour *tous* les $\bar{\omega}_k$; si les systèmes A_ν^1 et A_ν^2 ($\nu = 1, \dots, m$) répondent à la question, les différences

$$A_\nu^2 - A_\nu^1 \equiv a_\nu$$

devront satisfaire à m relations du type

$$a_1 \bar{\omega}_k^{m-1} + \dots + a_\nu \bar{\omega}_k^{m-\nu} + \dots + a_m = P_k,$$

où les P_k sont pour $x = \infty$ d'ordre au plus égal à $m(n - 1) - n - 1$. Or le déterminant des coefficients des a_ν est *exactement* d'ordre $\frac{m(m-1)}{2}(n-1)$, en vertu de notre hypothèse fondamentale; a_ν est

done au plus d'ordre $(\nu - 1)(n - 1) - 2$, et, en raisonnant comme au n^o 7, on en déduit aussitôt la possibilité de la transformation annoncée (1).

Cela étant, pour intégrer (\bar{E}_1) , on posera, par exemple, $y = u_j \bar{Z}_j$; \bar{Z}_j satisfera à une équation (\bar{E}_2) qui admettra comme intégrale la fonction limite $\bar{Z}_j(x)$ des approximations

$$\begin{aligned} \bar{z}_0(x) &= 1, \\ \bar{z}_{p+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^m \int_{(C^k)} \bar{R}_k(\xi) \bar{\omega}_{j,k}(x, \xi) \bar{f}[\bar{z}_p(\xi), \xi] \frac{d\xi}{\bar{z}_p^2} \quad (p = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

où les symboles \bar{R} , $\bar{\omega}$, \bar{f} ont des significations analogues aux R , ω , f du n^o 8 (ils coïncident d'ailleurs avec ces dernières expressions quand on fait dans celles-ci $\varepsilon = 0$). Comme chemins d'intégration, on adoptera, pour la $k^{\text{ième}}$ quadrature, une certaine courbe $\bar{\gamma}^k$, suivie dans un sens qui pourra varier avec k . Pour que, x appartenant à un tel chemin, les approximations convergent régulièrement, il suffit que soient vérifiées deux conditions identiques à celles du n^o 9; la première d'entre elles le sera certainement si l'on prend pour $\bar{\gamma}^k$ l'une des n branches de la courbe $\bar{\gamma}$ (n^o 12). Quant au sens de parcours à adopter pour la $k^{\text{ième}}$ quadrature sur $\bar{\gamma}^k$, un calcul aisé montre qu'il sera défini par les conditions (20) et (22), où l'on aurait remplacé β_{jk} par $\bar{\beta}_{jk}$; il sera donc identique au sens de parcours obtenu pour l'arc normal de γ^k .

Aux intégrales que nous venons de définir pour l'équation (\bar{E}) , nous donnerons le nom d'*intégrales normales*; et, en procédant comme aux n^{os} 16 et 17, on pourrait montrer que chacune d'elles est définie dans un secteur $\bar{\Delta}$. Toutefois, une double observation s'impose ici du fait de la *disparition de ε* :

(1) Il était bien aisé d'établir que les $\omega_k(x, 0)$ (n^o 7) répondent à la question. Pourtant, on a préféré procéder directement, car la méthode actuelle s'applique immédiatement à un cas analogue que nous rencontrerons plus loin (n^o 33) et que, dès lors, nous pourrions nous dispenser de traiter.

1° D'une part, le rayon r_1 de Γ_1 peut être pris actuellement aussi grand qu'on voudra; la couronne (s) sera donc remplacée par la région illimitée extérieure à Γ (1). Actuellement les secteurs $\bar{\Delta}$ sont donc illimités.

2° D'autre part, la condition (18) n'a plus de raison d'être; les droites D_j disparaissent donc, et, en fait, il n'y a plus que $2mn(m-1)$ secteurs $\bar{\Delta}$, occupés par un égal nombre d'intégrales. Nous reviendrons sur cette réduction au n° 20.

19. CONVERGENCE DES INTÉGRALES DE (E) VERS CELLES DE (\bar{E}). SECTEURS ORDINAIRES. — Pour l'instant, nous allons montrer qu'il existe $2mn(m-2)$ secteurs Δ à l'intérieur de chacun desquels l'intégrale correspondante tend vers une intégrale analogue de l'équation (\bar{E}).

Considérons, en effet, les $2mn(m-2)$ secteurs Δ que l'on obtient en faisant varier la droite D (n° 17) à l'intérieur des angles $\hat{\lambda}_{jk}$ (à l'exclusion des $\hat{\lambda}_j$). Ces secteurs, que nous appellerons ordinaires, tendent (2) vers la portion ($\bar{\Delta}$) des secteurs $\bar{\Delta}$ qui est intérieure à (s); et l'on peut toujours supposer que, pour $|\varepsilon|$ assez petit, tout point x de ($\bar{\Delta}$) appartient à un Δ . Ceci posé, la convergence de la suite des $z_p(x, \varepsilon)$ étant uniforme autour de $\varepsilon = 0$, il nous suffira d'établir que $z_0(x, \varepsilon), \dots, z_p(x, \varepsilon), \dots$ tendent respectivement vers $\bar{z}_0(x), \dots, \bar{z}_p(x), \dots$. Or observons qu'on a

$$\bar{z}_0(x) = 1 = z_0(x, \varepsilon),$$

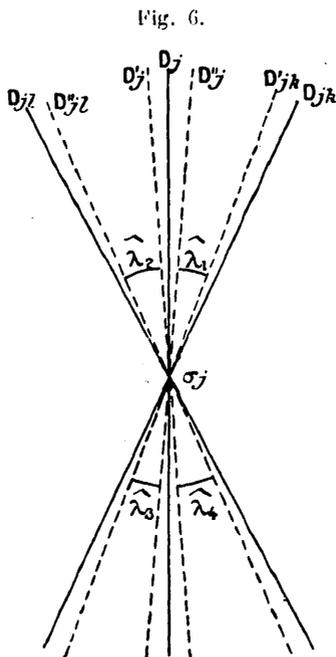
et admettons qu'on ait déjà établi que $z_1(x, \varepsilon), \dots, z_p(x, \varepsilon)$ tendent vers $\bar{z}_1(x), \dots, \bar{z}_p(x)$; il nous suffira de démontrer que $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ tend vers $\bar{z}_{p+1}(x)$. Mais, d'après le n° 14, on pourra toujours prendre $|\varepsilon|$ assez petit; et, en conséquence, le rayon r_1 de Γ_1

(1) On peut évidemment confondre Γ et $\bar{\Gamma}$.

(2) Ceci suppose implicitement que ε tend vers zéro comme il a été expliqué plus haut [note de la page 138]. On verra au numéro suivant que ceci n'implique aucune restriction essentielle, comme il a été déjà dit.

assez grand, pour que l'intégrale $\int r^{-2} ds$, étendue aux portions de ζ^h et $\bar{\zeta}^h$ extérieures à Γ_1 , soit arbitrairement petite. Dès lors, la différence entre les parties des quadratures fournissant $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ et $\bar{z}_{p+1}(x)$ et provenant des arcs des chemins d'intégration extérieurs à Γ_1 sera arbitrairement petite; mais, à l'intérieur de Γ_1 , $z_p(x, \varepsilon)$ et ses dérivées tendent vers $\bar{z}_p(x)$ et ses dérivées respectives; de plus, l'arc normal de ζ^h tend vers $\bar{\zeta}^h$ (n° 12); $z_{p+1}(x, \varepsilon)$ tend donc vers $\bar{z}_{p+1}(x)$. C. Q. F. D.

20. SECTEURS MIXTES. - Le passage à la limite est un peu moins simple dans le cas que nous avons exclu, et que nous allons examiner maintenant, où le secteur Δ provient de la variation de D



à l'intérieur d'un des angles λ_j . Soient donc D_{jk} et D_{jl} les deux droites $D_{j\alpha}$ adjacentes à D_j , de part et d'autre de cette droite; aux droites D_{jk} , D_j et D_{jl} sont associées, comme il a été dit plus

haut (n° 17), des droites de directions arbitrairement voisines, D'_{jk} ; D''_j , D'_j ; et D''_{jl} qui déterminent deux couples d'angles opposés, que nous représenterons par $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_3$ et $\hat{\lambda}_2$, $\hat{\lambda}_4$. A ces quatre angles correspondent quatre cycles (n° 17) de secteurs Δ dans lesquels on sait calculer quatre cycles d'intégrales de l'équation (E) : procédant ainsi pour les m points σ_j , on obtient bien les $4mn$ intégrales que nous avons exclues au numéro précédent. Or, appliquons le même procédé à l'équation-limite (\bar{E}); les droites D_j disparaissant, nous obtiendrons autour de $s_j (= \bar{\sigma}_j)$ un couple *unique* d'angles $\hat{\lambda}$ opposés; et les secteurs correspondant à tous ces couples d'angles sont au nombre de $2mn$. Il nous faut donc expliquer *comment les $4mn$ intégrales en question de (E) peuvent se fondre deux à deux pour constituer un nombre moitié moindre d'intégrales de l'équation-limite (\bar{E})*.

Considérons d'abord les angles $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$; les rayons D , d'arguments δ , intérieurs respectivement à $\hat{\lambda}_1$ ou à $\hat{\lambda}_2$, vérifient l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités

$$(\lambda_1) \quad -\pi + \eta < \beta_{jk} - n\varphi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq -\eta,$$

$$(\lambda_2) \quad \eta \leq \delta - n\varphi \leq \beta_{jl} - n\varphi - \eta < \pi - \eta;$$

pour $\hat{\lambda}_1$, on a donc $f = +1$, et pour $\hat{\lambda}_2$, $f = -1$; et D variant successivement dans $\hat{\lambda}_1$ et dans $\hat{\lambda}_2$, les variations des points m_1 et m_2 seront données par le Tableau

$$\begin{array}{c} \text{---} \overbrace{\hspace{15em}}^{(\hat{\lambda}_1)} \text{---} \\ m_1 \dots \quad -\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \quad \text{---} \quad \frac{\beta_{jk} + \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \\ m_2 \dots \quad -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \quad \text{---} \quad \frac{\beta_{jl} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \\ \text{---} \overbrace{\hspace{15em}}^{(\hat{\lambda}_2)} \text{---} \\ m_1 \dots \quad -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \quad \text{---} \quad \varphi - \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \\ m_2 \dots \quad -\frac{\beta_{jk} - \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \quad \text{---} \quad \varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \end{array}$$

où h_1 et h_2 désignent les numéros d'ordre des deux secteurs, soient Δ_1 et Δ_2 , dans les cycles issus de λ_1 et λ_2 . Or, si h_1 et h_2 sont quelconques, Δ_1 et Δ_2 n'auront aucune région commune; à la limite, ils ne pourront constituer aucun des secteurs $\bar{\Delta}$. Mais, d'après le Tableau précédent, les arguments des directions frontières sont ⁽¹⁾, pour Δ_1 ,

$$\theta'_1 = -\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n} \quad \text{et} \quad \theta''_1 = -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n},$$

et, pour Δ_2 ,

$$\theta'_2 = -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n} \quad \text{et} \quad \theta''_2 = -\varphi - \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n}.$$

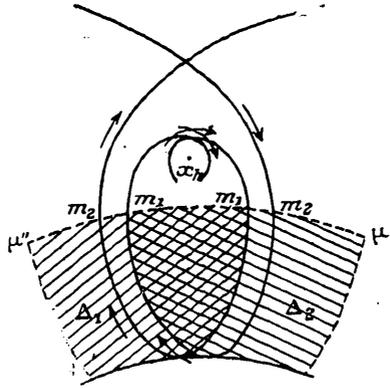
Pour que Δ_1 et Δ_2 empiètent, comme nous le voulons, on devra avoir d'abord $\theta'_1 < \theta''_2$, d'où $h_1 \leq h_2$ et $\theta'_2 < \theta''_1$, d'où $h_2 < h_1 + 1$ (puisque $\beta_{jl} - \beta_{jk} < \pi$). On a donc nécessairement $h_1 = h_2$, ce qui entraîne les inégalités $\theta'_2 < \theta'_1$ et $\theta''_2 < \theta''_1$. En résumé, les secteurs Δ se rapportent à un même point singulier x_h , et leurs directions frontières sont rangées dans l'ordre $\theta'_2 < \theta'_1 < \theta''_2 < \theta''_1$. On voit de plus qu'après la traversée de D_j par le rayon D , les points m_1 et m_2 se seront permutés : le nouvel argument de m_2 (m_1) sera égal à l'ancien argument de m_1 (m_2), diminué de $-\frac{2\eta}{n}$.

D'autre part, observons que les branches ζ^h , correspondant aux rayons D voisins de D_j , seront convexes (n° 12), $\cos(\delta - n\varphi)$ étant alors positif. Les courbes présenteront donc la disposition ci-après (fig. 7, p. 148); on remarquera que les deux secteurs Δ_1 et Δ_2 ont pour somme un secteur $\Delta_1 + \Delta_2$, de directions frontières θ'_2, θ''_1 , que nous désignerons sous le nom de secteur *mixte*, et qui tend vers le secteur limite $\bar{\Delta}$; d'ailleurs, Δ_1 et Δ_2 ont constamment un domaine en commun, soit Δ, Δ_2 dont les directions frontières font entre elles, pour ε infiniment petit, l'angle fini $\frac{\pi - 2\eta}{n}$. En tout point de Δ, Δ_2

(1) Ces formules ne sont d'ailleurs que des variantes de (27); mais nous avons préféré donner le Tableau des arguments de m_1 et de m_2 , afin de mieux mettre en lumière la disposition mutuelle de Δ_1 et Δ_2 .

on peut démontrer, comme au n^o 19, que les intégrales y_1 et y_2 , définies dans Δ_1 et Δ_2 , tendent uniformément vers une même intégrale \bar{y} de (\bar{E}) ; y_1 et y_2 tendent donc uniformément l'une vers l'autre à l'intérieur de Δ_1, Δ_2 . En définitive, l'intégrale \bar{y} , qui occupe

Fig. 7.



le secteur-limite $\bar{\Delta}$, apparaît comme la trace de deux intégrales y_1 et y_2 de l'équation (E) , définies dans des secteurs Δ_1 et Δ_2 dont la somme constitue le secteur mixte $\Delta_1 + \Delta_2$ qui tend vers $\bar{\Delta}$; les secteurs Δ_1 et Δ_2 empiètent d'ailleurs mutuellement suivant un domaine Δ_1, Δ_2 , où y_1 et y_2 tendent uniformément l'une vers l'autre ⁽¹⁾.

Étudions maintenant les angles $\hat{\lambda}_3$ et $\hat{\lambda}_4$; $\delta - n\varphi$ étant toujours ramené à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, afin qu'on puisse appliquer les résultats du n^o 11, ces angles seront définis par les inégalités

$$(\lambda_3) \quad \eta < \beta_{jk} - n\varphi + \pi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq \pi - \eta,$$

$$(\lambda_4) \quad -\pi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq \beta_{jl} - n\varphi - \pi - \eta < -\eta.$$

⁽¹⁾ À titre de vérification, examinons les variations des sens de parcours des courbes \mathcal{L}^h pour les quadratures des approximations (10). Quand δ traverse la valeur $n\varphi$, tous les f_{jk} restent constants; $\frac{dp}{ds}$ change de signe d'après (21), de sorte que, relativement au point x_n , le sens de parcours a brusquement changé, ce qui s'accorde bien avec le fait que $\frac{d\theta}{ds}$ reste le même à l'intérieur de (s) . Cf. la figure 7.

On en déduit pour m_1 et m_2 le Tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{l}
 (\hat{\lambda}_3). \\
 \hline
 m_1 \dots -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \quad -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \\
 m_2 \dots -\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \quad -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n} + \frac{\pi}{n}
 \end{array}$$

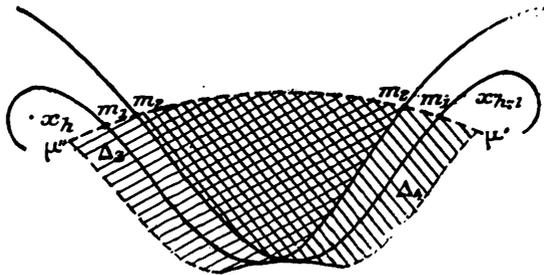
$$\begin{array}{l}
 (\hat{\lambda}_4). \\
 \hline
 m_1 \dots -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \quad -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \\
 m_2 \dots -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \quad -\varphi - \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n} - \frac{\pi}{n}
 \end{array}$$

On obtient cette fois-ci, pour les directions frontières de Δ_3 et Δ_4 ,

$$\begin{array}{ll}
 \theta'_3 = -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n}, & \theta''_3 = -\frac{\beta_{jk} + \eta}{n} + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h_3\pi}{n}, \\
 \theta'_4 = -\frac{\beta_{jl} - \eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n}, & \theta''_4 = -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_4\pi}{n}.
 \end{array}$$

Les conditions d'empiètement s'écrivent alors $\theta'_3 < \theta''_4$, d'où l'on tire $2h_4 > 2h_3 + 1$, et $\theta'_4 < \theta''_3$, d'où $h_4 < h_3 + 2$ (puisque $\beta_{jl} - \beta_{jk} < \pi$). On a donc $h_4 = h_3 + 1$, et l'on en déduit aisément

Fig. 8.



les inégalités $\theta'_4 < \theta'_3 < \theta''_4 < \theta''_3$. On voit qu'actuellement les branches ξ^k seront concaves pour $|\hat{\delta} - n\varphi|$ voisin de π ; celles qui proviennent de rayons D intérieurs à $\hat{\lambda}_3$ s'enrouleront autour du

point x_h , avec $h = h_3 + 1$, car, pour $\delta = n\varphi = \pi - \eta$, l'argument du point m_i relatif à x_h est

$$-\varphi + \frac{\eta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} = -\varphi + \frac{\eta}{n} + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2(h-1)\pi}{n};$$

celles qui proviennent de rayons D intérieurs à λ_4 s'enrouleront autour du point x_{h-1} , car, pour $\delta = n\varphi = -\pi + \eta$, l'argument du point m_i relatif à x_{h-1} est

$$-\varphi - \frac{\eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2(h-1)\pi}{n} = -\varphi - \frac{\eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n},$$

et, en vertu du Tableau précédent, ceci s'accorde bien avec le fait que $h = h_3 + 1 = h_4$. A part ces modifications, les conclusions que nous avons développées précédemment demeureront toujours valables (1).

21. RETOUR AUX INTÉGRALES CANONIQUES. LE POLYGONE DE SUSTENTATION II. — Et maintenant nous sommes en état de répondre à une question importante que nous avons posée antérieurement (n° 15) : *définir tous les cas où l'intégrale $y_j(x)$ résultant des approximations du n° 8 peut être une intégrale canonique relative à un des points x_k (ou à x_∞); et dans l'affirmative, ajouterons-nous, définir le secteur à l'intérieur duquel on sait la calculer.*

Pour que $y_j(x)$ soit une intégrale canonique, il faut et il suffit, comme nous le savons, que le point σ_j et le rayon D puissent être choisis de telle sorte que tous les f_{jk} aient la même valeur, quel que soit k ($\neq j$); il faut donc (et il suffit) que, quel que soit k ($\neq j$), $\sin(\beta_{jk} - \delta)$ ait un signe invariable : ce qui n'arrivera que si tous les vecteurs $\overrightarrow{\sigma_j \sigma_k}$ sont du même côté de la droite D, quel que soit

(1) On peut se demander s'il ne serait pas possible de passer, par continuité, de l'intégrale y_1 , définie dans Δ_1 , à l'intégrale y_2 , définie dans Δ_2 . Or, dans les deux cas envisagés, lorsque D pénétrera dans l'échancrure pratiquée autour de D_j , les branches γ^h tendront de plus en plus lentement vers x_h (ou x_∞); et la convergence des approximations sera de plus en plus lente; lorsque D sera venue en D_j , ces courbes seront des ovals séparés, ou des courbes étoilées d'un seul tenant (cf. note (2), p. 128), le long desquels les procédés de démonstration que nous avons mis en œuvre tombent en défaut.

$k (\neq j)$. En définitive, pour que y_j soit une intégrale canonique, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :

- 1^o σ_j doit appartenir au polygone de sustentation Π des points σ ;
- 2^o La droite D menée par σ_j doit être extérieure à Π .

Ce point acquis, établissons le résultat suivant : *les deux cycles d'intégrales canoniques y_1 et y_2 définies dans les cycles de secteurs provenant de chacun des angles opposés $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$, extérieurs à Π en σ_j , ne constituent qu'un seul cycle d'intégrales* (1).

En effet, les angles $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ correspondent à des valeurs de δ dont la différence est π . Quand on augmente δ de π , $\sin(\delta - n\varphi)$ et $\sin(\beta_{jk} - \delta)$ changent *simultanément* de signes ; d'après (20) et (21), $\frac{d\varrho}{ds}$ aura donc le même signe dans les deux cas. Considérons alors les deux courbes, soient $(\varrho)_1$ et $(\varrho)_2$, qui correspondent à la même valeur de C et à des valeurs de δ dont la différence est π (2), et soit Δ_1 le secteur balayé par l'une quelconque $(\varrho^{h_1})_1$ des branches de $(\varrho)_1$ quand D varie dans $\hat{\lambda}_1$. Suivant que le signe commun de $\frac{d\varrho}{ds}$ sera positif ou négatif dans les deux cas, c'est-à-dire suivant qu'on devra se rapprocher ou s'éloigner de x_∞ dans les deux suites d'intégrations, nous adjoindrons à $(\varrho^{h_1})_1$ une branche $(\varrho^{h_2})_2$ de $(\varrho)_2$ choisie de telle sorte que les deux branches précédentes présentent soit deux points m_2 , soit deux points m_1 très voisins.

Ceci posé, faisons varier δ et C comme il a été dit aux nos 16 et 17 ; les secteurs Δ_1 et Δ_2 , balayés par $(\varrho^{h_1})_1$ et $(\varrho^{h_2})_2$, empiéteront néces-

(1) *A priori*, on devait s'attendre à une telle réduction dans le nombre des cycles, car il n'existe que n intégrales canoniques appartenant à des exposants ayant $-\frac{\sigma_j}{n \varepsilon^n}$ comme partie principale (chacune étant relative à l'un des x_h). Mais il était indispensable d'approfondir le mécanisme de cette réduction, en vue, surtout, des applications ultérieures. Aussi les considérations développées dans le texte n'ont pas seulement la valeur d'une simple vérification.

(2) Ces courbes ont été représentées plus haut (fig. 2, p. 127).

sairement; je dis que dans l'aire commune Δ_1, Δ_2 les deux intégrales y_1 et y_2 coïncideront.

Pour le voir, on observera d'abord que les deux branches des faisceaux $[\xi^h]_1$, et $[\xi^h]_2$, issues d'un même point x , peuvent être reliées par un arc de courbe μ_1, μ_2 satisfaisant aux conditions a' et b' du n° 16, et qu'on mènera dans le voisinage de x_h ou de x_* , suivant que le signe de $\frac{d\rho}{ds}$ sera négatif ou positif; ceci fait, il n'y aura plus qu'à reproduire la démonstration du lemme (n° 16).

Au numéro suivant, nous fixerons les limites du secteur total où se trouve définie une même intégrale canonique; pour l'instant, insistons sur ce fait que l'identification entre y_1 et y_2 n'a été possible que parce que les deux conditions énoncées plus haut étaient réalisées.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et plaçons-nous d'abord dans le cas où $\frac{d\rho}{ds}$ est négatif; $(\xi^h)_1$ et $(\xi^h)_2$ s'enroulent autour du même point x_h (1); là double hypothèse du début n'étant plus réalisée, il y aura des quadratures que l'on devra effectuer en s'éloignant vers x_* sur ces branches: mais alors, dans le triangle $x\mu_1\mu_2$, où μ_1, μ_2 est pris très loin pour vérifier b' , les fonctions à intégrer ne sont plus uniformes, et la démonstration du n° 16 n'est plus valable. Admettons maintenant que $\frac{d\rho}{ds}$ soit positif; $(\xi^h)_1$ et $(\xi^h)_2$ se déroulent à partir de points x_{h_1} et x_{h_2} différents (1); il y aura des quadratures que l'on devra effectuer en tendant vers l'un et l'autre de ces points (suivant qu'il s'agit de y_1 ou y_2); μ_1 et μ_2 devant être pris très près de x_{h_1} et de x_{h_2} respectivement, la réalisation de b' sera encore impossible (2).

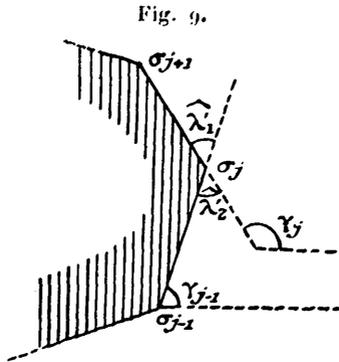
(1) Pour le voir, il suffit de se reporter à la figure 2. Ce point sera d'ailleurs précisé au cours de la discussion du numéro suivant.

(2) Du moins, si l'on ne peut identifier y_1 et y_2 pour ε donné, peut-être pourrait-on penser qu'en un point x appartenant à Δ_1 et Δ_2 , $\frac{y_1}{y_2} - 1$ tend vers 0 avec ε . En fait, il n'en est rien. Car, dans les deux cas que nous venons d'envisager, prenons μ_1 et μ_2 arbitrairement loin, et faisons tendre ε vers 0; dans les deux cas, l'arc $\mu_1\mu_2$ traversera un arc de $(\xi^h)_1$ ou $(\xi^h)_2$ sur lequel $|\omega_{jk}|$ sera très grand.

Nous observerons enfin que la réduction qu'on vient d'établir dans le nombre des cycles, relativement à l'équation (E), se retrouve encore pour l'équation-limite (\bar{E}), lorsque $s_j (= \bar{\sigma}_j)$ est un sommet du polygone de sustentation $\bar{\Pi}$ des s_j , et que \bar{D} a été menée extérieurement à $\bar{\Pi}$.

22. LES SECTEURS CANONIQUES ∇_{jh} . — Revenons maintenant au secteur total $\Delta_1 + \Delta_2$, où nous avons montré qu'on peut définir une même intégrale canonique; nous désignerons un tel secteur sous le nom de *secteur canonique*. Les n secteurs canoniques correspondant au sommet σ_j formeront, par définition, un cycle de secteurs canoniques; nous représenterons par ∇_{jh} le secteur qui occupe le rang h dans un tel cycle, ou, plus simplement, par ∇_j , lorsqu'une telle précision ne sera pas nécessaire. Proposons-nous maintenant de déterminer les directions frontières d'un secteur canonique.

Pour simplifier l'écriture, nous adopterons les notations sui-



vantes : les points σ_j situés sur Π seront numérotés dans l'ordre où on les rencontre en décrivant le contour de Π dans le sens direct. Nous désignerons par γ_j l'argument ⁽¹⁾ de la différence $\sigma_{j+1} - \sigma_j$

(1) Si M est le nombre de sommets de Π , on peut toujours supposer ces arguments rangés dans l'ordre $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_i < \dots < \gamma_M < 2\pi$, quitte à remplacer s'il y a lieu γ_1 par $\gamma_1 + 2\pi$ ou γ_M par $\gamma_M - 2\pi$.

(avec nos notations antérieures, on aurait donc $\gamma_j = \beta_{j,j+1}$); si Π n'a que deux sommets, il en résultera $\gamma_2 = \gamma_1 + \pi$, mais cette circonstance, qui se présentera sûrement pour $m = 2$, ne modifie en rien les développements qui vont suivre. Soit alors $\hat{\lambda}_1$ l'angle formé par $\overrightarrow{\sigma_j \sigma_{j+1}}$ avec $\overrightarrow{\sigma_{j-1} \sigma_j}$, et $\hat{\lambda}'_2$ l'angle opposé; nous supposons d'abord qu'aucun de ces angles ne contient la droite D_j (d'argument $n\varphi$), et, de même qu'aux nos 19 et 20, nous envisagerons successivement deux cas.

Premier cas. — L'angle $\hat{\lambda}_1$ est défini par les relations

$$(\lambda_1) \quad -\pi + \eta < \gamma_{j-1} - n\varphi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq \gamma_j - n\varphi - \eta < -\eta.$$

Dans $\hat{\lambda}_1$, on aura $f_{jk} = +1 = f$ ($j \neq k = 1, \dots, m$); d'où, pour $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}'_2$, $\frac{d\theta}{ds} < 0$, et l'on accouplera les branches $(\zeta^{h_1})_1$ et $(\zeta^{h_2})_2$ de manière que ce soient leurs points m_i qui voisinent. Or, pour $(\zeta^{h_1})_1$, l'argument de m_1 est de la forme

$$-\frac{\delta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n}$$

(n° 12) et, pour $(\zeta^{h_2})_2$, il est égal à

$$-\frac{\delta + \pi}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n};$$

on devra donc prendre $h_2 = h_1$; soit h leur valeur commune. Ce seront alors les m_2 qui donneront les frontières de $\nabla_{j,h}$; or, pour $\hat{\lambda}_1$, l'argument de m_2 varie de

$$-\frac{\gamma_j - \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\gamma_{j-1} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n},$$

et, pour $\hat{\lambda}'_2$, de

$$-\frac{\gamma_j - \eta + \pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} \quad \text{à} \quad -\frac{\gamma_{j-1} + \eta + \pi}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Les directions frontières de ∇_{jh} seront donc

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau'_{jh} = -\frac{\gamma_j - \eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}, \\ \tau''_{jh} = -\frac{\gamma_{j-1} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}. \end{array} \right.$$

L'amplitude du secteur canonique ∇_{jh} sera alors

$$\frac{\gamma_j - \gamma_{j-1} + 2\pi}{n} - \frac{2\eta}{n};$$

elle est arbitrairement voisine de

$$\frac{V_j + 2\pi}{n},$$

V_j désignant l'angle extérieur au polygone Π en σ_j . Remarquons en outre que les deux branches $(\varrho^{h_1})_1$ et $(\varrho^{h_1})_2$ s'enroulent autour du même point singulier x_h , et que l'intégrale que nous savons calculer dans ∇_{jh} est l'intégrale canonique relative au point x_h et à l'exposant caractéristique $-\frac{\sigma_{jh}}{n\varepsilon^n}$.

Deuxième cas. — L'angle $\hat{\lambda}_1$ est défini par les inégalités

$$(\lambda_1) \quad \eta < \gamma_{j-1} - n\varphi + \eta \leq \delta - n\varphi \leq \gamma_j - n\varphi - \eta < \pi - \eta.$$

Dans $\hat{\lambda}_1$, on a $f_{jk} = +1$, $f = -1$; d'où, pour $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$, $\frac{d\rho}{ds} > 0$: cette fois, on associera donc $(\varrho^{h_1})_1$ et $(\varrho^{h_2})_2$ en accolant deux points m_2 ; or, pour $\hat{\lambda}_1$, l'argument de m_2 est

$$-\frac{\delta}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_1\pi}{n},$$

et, pour $\hat{\lambda}_2$, il vaut

$$-\frac{\delta - \pi}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{2h_2\pi}{n};$$

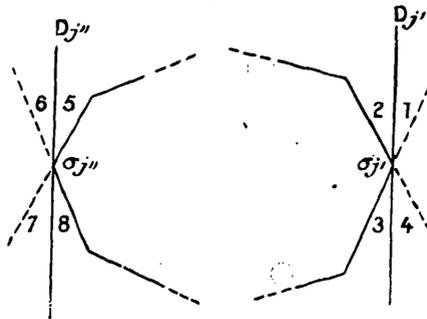
on doit donc prendre $h_2 = h_1 - 1$ (soit $h - 1$), et ce seront les m_1 qui donneront les frontières de ∇ ; dès lors, en opérant comme tout à l'heure, on trouvera que les directions frontières sont encore données par (29). Mais, dans ce cas, les branches ϱ^h et ϱ^{h-1} s'en-

roulent respectivement autour des points x_h et x_{h-1} ; de plus, l'intégrale, qu'on vient de définir dans ∇_{jh} , coïncide dans ce secteur avec la branche d'intégrale canonique, relative au point x_x , appartenant à l'exposant $\varepsilon^{-n}\alpha_{h-1}^{(j)}$ et calculée en x le long d'un chemin qui aboutit directement de x_x au secteur ∇_{jh} , en passant entre les points x_{h-1} et x_h .

Supposons maintenant que le couple d'angles λ'_1, λ'_2 , extérieurs à Π en σ_j , contienne une droite D_j ; ceci arrivera d'ailleurs deux fois, et deux fois seulement : à savoir, lorsque σ_j coïncidera avec l'un des deux sommets $\sigma_j, \sigma_{j'}$, tels que les droites $D_j, D_{j'}$ d'argument $n\varphi$ menées par σ_j et $\sigma_{j'}$ comprennent Π entre elles deux. Il suffit alors de combiner les résultats qu'on vient d'obtenir avec ceux du n° 20 pour constater que les deux cycles de secteurs correspondants seront formés des secteurs canoniques mixtes $\nabla_j, \nabla_{j'}$ dont les directions frontières auront encore la forme (29) : ∇_j , par exemple, sera la somme de deux secteurs d'amplitudes $(V'_j + 2\pi) : n$ et $(V''_j + 2\pi) : n$, (V'_j et V''_j désignant les amplitudes des angles déterminés par D_j avec $\overrightarrow{\sigma_{j-1}\sigma_j}$ et $\overrightarrow{\sigma_j\sigma_{j+1}}$), qui auront en commun un secteur d'amplitude $2\pi : n$.

Pour figurer la disposition des branches ρ^h à l'intérieur des secteurs précédents, il sera commode de dresser le Tableau suivant

Fig. 10.

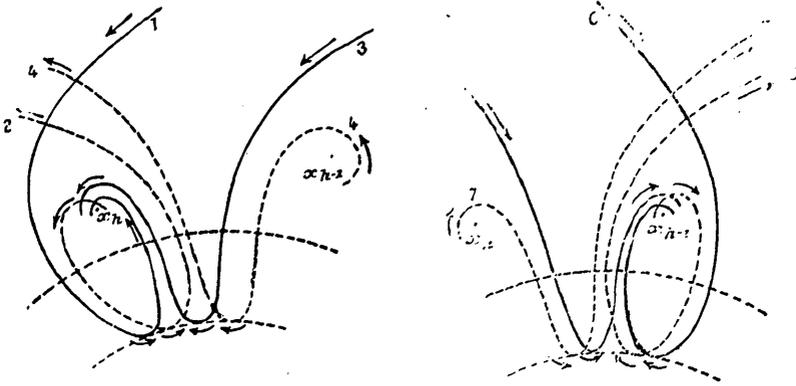


(où l'on a désigné chacun des angles formés par D_j ou $D_{j'}$ avec les côtés de Π par les mêmes lettres que dans la figure 10) :

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
f	+	—	—	+	+	—	—	+
f_{jk}	+	+	—	—	—	—	+	+
$\frac{d\phi}{ds}$	—	+	—	+	+	—	+	—
$\frac{d\theta}{ds}$	—	—	+	+	+	+	—	—

On obtient alors, pour les branches ζ^h associées à chaque angle λ ,

Fig. 11.



la disposition ci-dessus (les courbes sont figurées avec le numéro d'ordre de l'angle auquel elles sont attachées).

25. RECOUVREMENT DE LA RÉGION NORMALE (s) PAR LES SECTEURS CANONIQUEs ∇_{jh} . — Nous pouvons nous rendre compte maintenant d'une manière précise de l'agencement des secteurs canoniques ∇_{jh} correspondant aux différents points x_h et aux différents sommets σ_j de Π , ainsi que la nature des intégrales canoniques qui leur sont affectées. Faisons croître constamment l'angle δ tout en respectant les conditions (18) et (20); le rayon D correspondant tournera dans le sens direct autour de chacun des sommets successifs $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ (M étant le nombre des sommets de Π), tout en restant extérieur aux échancrures que nous avons pratiquées (n° 17). Les points m_1 et m_2 se déplaceront par continuité sur Γ , dans le sens rétrograde; il n'y aura exception que lorsque D tendra

vers D_j ou $D_{j'}$: mais alors, après la traversée de l'échancrure correspondante, nous choisirons le couple (m_1, m_2) , voisin du couple (m_2, m_1) formé par les points primitifs m_1, m_2 , préalablement permutés. Supposons qu'on ait $1 < j' < j'' < M$; pour $1 \leq j \leq j'$, les secteurs ∇_{jh} seront balayés par des couples de chemins γ_{jh}^h convergeant vers x_h , et les intégrales seront canoniques pour x_h . Pour $j' \leq j \leq j''$, les ∇_{jh} seront balayés par des couples de chemins d'intégration convergeant vers x_x , l'un partant de x_h , et l'autre de x_{h-1} ; les intégrales obtenues coïncideront avec les déterminations des intégrales canoniques pour x_x et prolongées le long de chemins passant entre x_h et x_{h-1} . Enfin, pour $j'' \leq j \leq M$, les chemins d'intégration convergeront vers x_{h-1} , et les intégrales seront canoniques pour x_{h-1} (1). En définitive, quand on sera revenu au sommet initial σ_1 , le secteur ∇_{1h} se sera transformé en le secteur (du même cycle) $\nabla_{M+1,h} \equiv \nabla_{1,h-1}$; on voit que, grâce à l'intermédiaire des deux secteurs mixtes, on aura sauté d'un point singulier x_h à son antécédent x_{h-1} . Comme, d'ailleurs, on peut procéder sur $\nabla_{1,h-1}$ de la même façon que sur ∇_{1h} , on voit encore que, lorsque σ_j aura décrit n fois de suite le polygone Π , le secteur ∇_{jh} aura coïncidé successivement avec les nM secteurs canoniques (ordinaires ou mixtes) que l'on a défini antérieurement.

Les résultats précédents entraînent une importante conséquence; considérons, en effet, les secteurs ∇_{jh} et $\nabla_{j,h-1}$; ces deux secteurs d'amplitude voisine de $(V_j + 2\pi) : n$ se déduisent l'un de l'autre par une rotation de $2\pi : n$; ils présentent donc un secteur d'empiètement, commun à chacun d'eux, et dont l'amplitude est voisine de $V_j : n$; nous désignerons ce secteur par la notation $\nabla_j^{h,h-1}$; ses directions frontières sont d'ailleurs, en vertu de (29),

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\gamma_j - \eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}, \\ -\frac{\gamma_{j-1} + \eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n}. \end{array} \right.$$

(1) Dans tous les cas, l'exposant auquel appartiendra l'intégrale sera celui qui a même partie principale que $-\frac{\sigma_j}{n\varepsilon^n}$ (pour x_h) ou que $\frac{\sigma_j}{\varepsilon^n}$ (pour x_x).

C'est dire que, étant donnés un rayon quelconque $\vec{\rho}$ de la couronne (s), et une valeur quelconque de l'indice j ($j = 1, \dots, M$) :

1° On pourra toujours trouver une valeur de h (indépendante de j) pour laquelle ∇_{jh} recouvrira le rayon $\vec{\rho}$;

2° Il existera une valeur de j (et une seule) pour laquelle les DEUX secteurs ∇_{jh} et $\nabla_{j,h-1}$ recouvriront le rayon $\vec{\rho}$; ce couple de valeurs j, h sera celui pour lequel l'intervalle (30) correspondant contiendra l'argument θ du rayon $\vec{\rho}$.

Chaque rayon $\vec{\rho}$ de la couronne (s) se trouve donc recouvert par $M + 1$ secteurs canoniques $\nabla_{1h}, \dots, \nabla_{jh}, \dots, \nabla_{Mh}$ et $\nabla_{j,h-1}$ (1), de sorte qu'en tout point de la région normale (s), on sait calculer $M + 1$ intégrales canoniques de l'équation (E).

En particulier, supposons que tous les points σ_j ($j = 1, \dots, m$) forment les sommets d'un polygone convexe (ce qui aura toujours lieu pour $m = 2$); ceci arrivera sûrement, pour $|\varepsilon|$ assez petit, si les s_j forment eux-mêmes un polygone convexe. Un tel polygone coïncidant alors avec le polygone de sustentation Π des σ_j , le nombre M sera égal à l'ordre m de (E); en tout point de la région normale, on saura donc calculer $m + 1$ intégrales de l'équation (E) (2). D'ailleurs, à l'intérieur de l'un quelconque des secteurs d'empiètement (30), chacune de ces intégrales représentera la même fonction analytique, de sorte qu'à l'intérieur d'un tel secteur, ces $m + 1$ intégrales satisferont à une relation à coefficients constants; et

(1) Exception faite des rayons $\vec{\rho}$ correspondant aux échancrures relatives aux D_{jk} ; ils ne seront recouverts que par m secteurs. Mais cette restriction est sans importance pour notre but actuel.

(2) Pour préciser, il conviendrait d'ajouter que, puisqu'un secteur canonique mixte provient de deux secteurs ayant en commun un secteur d'amplitude $2\pi : n$, on saura définir en tout point de (s), sauf dans les échancrures, un système de $m + 3$ intégrales; mais, de ces intégrales, deux couples sont infiniment voisins pour ε infiniment petit; comme nous n'avons en vue que les propriétés de l'équation limite (\bar{E}), nous pouvons toujours supprimer l'une ou l'autre des intégrales de l'un quelconque de ces couples.

il y aura autant de ces relations que de secteurs d'empiétement, c'est-à-dire actuellement mn .

Nous allons étudier ces relations, qui deviendront, à la limite, les relations de structure du point irrégulier, et dont nous généraliserons d'ailleurs l'existence, lorsque les σ_j formeront une configuration quelconque.

TROISIÈME PARTIE.

LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER.

24. LES INVARIANTS DU GROUPE DE MONODROMIE D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE. — Désignons d'une façon générale par e_1, \dots, e_n, e_{n+1} les points singuliers (réguliers) d'une équation différentielle linéaire (\mathcal{C}), d'ordre m . Soient y_1^h, \dots, y_m^h les m intégrales qui forment le système fondamental canonique relatif à e_h , chacune d'elles n'étant d'ailleurs définie qu'à un facteur constant près; appelons encore S_h la substitution canonique correspondante, et r_1^h, \dots, r_m^h les racines de son équation caractéristique (racines que, pour simplifier l'écriture, nous supposons distinctes); soit enfin Σ_h la substitution de passage qui lie les intégrales y_j^h aux y_j^{h+1} ; on aura ainsi

$$(\Sigma_h) \quad y_j^h = \beta_{j1}^h y_1^{h+1} + \dots + \beta_{jm}^h y_m^{h+1} \quad (j = 1, \dots, m; h = 1, \dots, n).$$

Le groupe de monodromie G de (s) est dérivé des n substitutions $T_h = \Sigma_h^{-1} S_h \Sigma_h$ qui, d'ailleurs, sont liées à S_{n+1} par la relation

$$(31) \quad T_1 \dots T_{n-1} T_n S_{n+1} = 1,$$

de sorte qu'on peut dire encore, si l'on veut, que les substitutions fondamentales de G sont $T_1, \dots, T_{n-1}, S_{n+1}$. Cherchons à définir *explicitement* un système d'invariants pour ce groupe.

Puisqu'on peut multiplier chacune des y_j^h par un facteur constant, on voit (en faisant abstraction du facteur commun par lequel on peut multiplier toutes les y_j^h) qu'il entre dans les (Σ_h)

$$nm^2 - [(n+1)m - 1]$$

paramètres arbitraires. D'autre part, les racines r_j^h doivent être comptées pour $(m - 1)n$ paramètres seulement (puisque la substitution $y | \lambda(x) y$ permet de prendre arbitrairement le produit $r_1^h \dots r_m^h$). Enfin la relation (31), où S_{n+1} est connue dès qu'on s'est donné les S_h , introduit $m^2 - m$ relations non identiques entre les β . On voit donc que G doit dépendre de

$$nm^2 - (n + 1)m + 1 + n(m - 1) - m^2 + m = (n - 1)(m^2 - 1) \equiv \varkappa$$

invariants, ce qui est bien le nombre obtenu par H. Poincaré (1), à la suite d'une énumération un peu différente.

On sait d'ailleurs que le choix effectif d'un système d'invariants comporte toujours une large part d'arbitraire, puisqu'on peut substituer à tout système de \varkappa invariants un système formé par \varkappa fonctions indépendantes (déterminées) de ces quantités (2). Or, actuellement, le procédé d'énumération que nous avons employé va nous permettre de constituer un système très simple d'invariants. En effet, observons que les rapports

$$K_{jh}^i \equiv \frac{\beta_{jh}^i}{\beta_{jh}^1} \cdot \frac{\beta_{11}^i}{\beta_{11}^1}$$

sont indépendants de la dilatation arbitraire qu'on peut faire subir aux intégrales canoniques; mais ces rapports relatifs à $h = 1$ sont au nombre de $(m - 1)^2$; ceux qui ont trait à $h = 2, \dots, n - 1$ [puisque nous pouvons négliger T_n en vertu de (31)] sont au nombre de $(n - 2)m(m - 1)$. L'ensemble de ces rapports, joints aux $n(m - 1)$ racines r_j^h , fournit bien \varkappa invariants, tous distincts, en vertu même de leur mode de formation.

Pour abrégé, nous donnerons aux r_j^h le nom d'*invariants de*

(1) *Actu math.*, t. 4, 1884, p. 205; *Œuvres*, t. II, p. 303. Les calculs précédents supposent d'ailleurs $n \geq 2$, hypothèse que nous avons toujours le droit d'admettre.

(2) Ainsi, un calcul facile montre que les coefficients γ_{ki}^h de la substitution T_h sont de la forme $\frac{\beta_{11}^i}{\beta_{11}^k} f_{ki}(K)$, où les f_{ki} sont des fonctions rationnelles des r_j^h et des rapports K_{jh}^i que nous introduisons ci-après. Les expressions γ_{11}^h et $\gamma_{ki}^h \gamma_{ik}^h$ qui, a priori, devaient être des invariants de G , s'expriment bien au moyen des r_j^h et des K_{jh}^i .

première espèce; les K'_{jh} , au nombre de $(m-1)[m(n-1)-1]$ seront les invariants de seconde espèce de G .

23. LES RELATIONS DE STRUCTURE ET LES INVARIANTS DU POINT IRRÉGULIER DE (\bar{E}) : CAS OU LES s_j FORMENT UN POLYGOÛNE CONVEXE. — Revenons à (E) . Soit encore y_j^h l'intégrale canonique pour x_h , et dont l'exposant admet $-\frac{\sigma_j}{n\varepsilon^n}$ comme partie principale; puisque les σ_j forment un polygone convexe, nous savons calculer cette intégrale par approximations successives, quels que soient j et h . Soit encore z_j^h l'intégrale, canonique pour x_s , d'exposant voisin (relativement) de $\frac{\sigma_j}{\varepsilon^n}$ et prolongée jusqu'au point x le long d'un chemin direct ⁽¹⁾ passant entre x_{h-1} et x_h . Les relations qui existent, entre les $m+1$ intégrales qu'on sait calculer en un point quelconque de (s) , sont de l'une ou de l'autre forme que voici :

$$(32) \begin{cases} y_j^{h-1} = a_{jh}^1 y_1^h + \dots + a_{jh}^{j-1} y_{j-1}^h + a_{jh}^j z_j^h + \dots + a_{jh}^{j''-1} z_{j''-1}^h + a_{jh}^{j''} y_{j''}^{h-1} + \dots + a_{jh}^m y_m^{h-1}; \\ z_j^{h-1} = b_{jh}^1 y_1^h + \dots + b_{jh}^{j-1} y_{j-1}^h + b_{jh}^j z_j^h + \dots + b_{jh}^{j''-1} z_{j''-1}^h + b_{jh}^{j''} y_{j''}^{h-1} + \dots + b_{jh}^m y_m^{h-1}. \end{cases}$$

Il est à noter d'ailleurs que l'écriture de ces relations comporte un certain arbitraire, en vertu de l'existence des deux secteurs mixtes $\nabla_{j'h}$, $\nabla_{j''h}$ (n° 22); aux relations (32) on pourrait en substituer d'autres qui contiendraient y_j^h , z_{j-1}^h , $y_{j''-1}^h$, ou $z_{j''}^h$. Mais, puisque y_j^h et z_j^h , par exemple, tendent l'une vers l'autre dans $\nabla_{j'h}$, comme il a été expliqué (n° 20), les coefficients des relations (32) tendront vers le même système de valeurs-limites, quelle que soit la forme donnée à ces relations, et c'est là, pour nous, la seule chose qui importe.

Or les mn relations (32), quoique de forme légèrement différente des (Σ_h) ⁽²⁾, peuvent être évidemment utilisées de la même

(1) C'est-à-dire, sans tourner autour des autres points x_h .

(2) D'ailleurs, en procédant à partir des relations (32), il serait aisé de former un système de relations du type (Σ_h) . En effet, on joindrait le point x_s aux points x_h par des chemins déterminés (directs, par exemple). Le long de ces chemins, on aurait des relations de la forme (Σ_h) dont l'ensemble comprendrait nm^2 coefficients inconnus. Mais, en exprimant les y et les z qui figurent dans ces relations au moyen de (32), on obtiendrait par identification nm^2 relations linéaires qui fourniraient les coefficients.

manière, et fourniront un système de $(m - 1) [m(n - 1) - 1]$ invariants, pleinement équivalent à celui des K_{jh}^i .

Et maintenant, il est bien facile de déterminer les limites vers lesquelles tendent les invariants du groupe de (E) . En effet, on a vu (nos 19 et 20) que les intégrales canoniques de (E) tendent vers des intégrales normales de (\bar{E}) . Ces dernières sont définies dans des secteurs $\bar{\nabla}_{jh}$ qui ne sont autres que les limites des secteurs canoniques ∇_{jh} et qu'on obtiendrait par un procédé identique appliqué à l'équation-limite (\bar{E}) . En tout point x (suffisamment éloigné), on saura donc calculer $m + 1$ intégrales normales qui seront liées par des relations (32), limites de (32). Nous appellerons ces relations-limites ⁽¹⁾ LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER. Les combinaisons de formes analogues à celle des K_{jh}^i , calculées au moyen des coefficients des relations de structure, seront, par définition, les INVARIANTS du point irrégulier; et nous pouvons ajouter aussitôt que le point irrégulier x_* (de rang n), de l'équation (\bar{E}) (d'ordre m), possède $(m - 1) [m(n - 1) - 1]$ invariants, qui sont les limites des invariants de seconde espèce du groupe G de (\bar{E}) .

Quant aux racines des équations fondamentales déterminantes de (E) , elles tendent vers l'infini. Mais leurs $n(m - 1)$ combinaisons symétriques

$$\sum_{h=1}^n (\varepsilon \lambda_{jh})^{n-\nu} \rho_j^h = - \sum_{h=1}^n (\varepsilon \lambda_{jh})^{n-\nu} \frac{\omega_{jh}}{n \varepsilon^n} = \begin{cases} -\alpha_{n-1-\nu}^{(j)} & (\nu \neq 0), \\ -\alpha_{n-1}^{(j)} - \varepsilon^n \alpha_{-1}^j & (\nu = 0) \end{cases}$$

(1) En apparence, ces mn relations sont à mn inconnues; mais, si l'on pratique une coupure rectiligne le long, par exemple, de la frontière commune de deux secteurs $\bar{\nabla}$ consécutifs, on apercevra aisément que ces relations contiennent en réalité $m(n + 1)$ intégrales \bar{y}_j^h ; à savoir $(n - 1)m$ intégrales dont les secteurs ne contiennent pas la coupure, et m intégrales définies de part et d'autre de la coupure. Pour former les invariants K , on ne tiendra compte que des relations où figurent les m dernières intégrales, définies d'un côté déterminé de la coupure: on obtiendra bien ainsi $(m - 1) [m(n - 1) - 1]$ invariants K . L'utilisation des m équations restantes reviendrait à celle de (31).

($\nu = 0, \dots, n-1$; $j = 1, \dots, m-1$) tendent vers des limites finies, $-\bar{\alpha}_{n-1-\nu}^{(j)}$. En définitive, lorsque les s_j forment un polygone convexe, on peut constituer un système de \varkappa invariants du groupe de monodromie de (E) qui tendent vers des limites finies, calculables sur (\bar{E}).

26. CAS OU LE POLYGONE DES s_j N'EST PAS CONVEXE. — Pour établir les résultats précédents, nous avons dû supposer que les s_j forment un polygone convexe; nous allons montrer maintenant que ces résultats subsistent lors même que cette hypothèse n'est plus réalisée; mais alors la formation des invariants devient d'autant moins simple que le polygone des s_j s'écarte davantage d'une forme convexe.

Lorsque les s_j , ou les σ_j , ne forment pas un polygone convexe, la méthode des approximations successives ne fournit plus directement les mn intégrales canoniques de (E) relatives aux x_h ; mais, du moins, elle permet d'obtenir des intégrales paracanoniques dont l'allure au voisinage de x_h et x_∞ généralise, comme nous avons vu, celle des intégrales canoniques. On conçoit donc que, grâce à l'existence de ces intégrales paracanoniques, il soit encore possible de construire un système d'invariants tendant pour ε infiniment petit vers des limites déterminées. D'ailleurs, un tel système n'est pas défini d'une façon unique; on pourra, par exemple, le choisir de la façon suivante.

Appelons toujours $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ les sommets du polygone de sustentation Π et supposons, ce qui n'introduit pas de restriction essentielle, que trois quelconques des σ_j ne soient pas en ligne droite. Soit alors σ_j un point σ intérieur à Π et $\hat{\lambda}'_1, \hat{\lambda}'_2$ l'un des couples d'angles opposés qu'on a attachés à σ_j (n° 17); à l'intérieur de $\hat{\lambda}'_1, \hat{\lambda}'_2$ on ne rencontre aucun autre point σ : effectivement, tous ces points σ se trouvent répartis en deux groupes de ν'_j et ν''_j points situés, chacun, dans l'un des angles extérieurs à $\hat{\lambda}'_1, \hat{\lambda}'_2$; soit ν'_j (≥ 1) le plus petit des deux entiers précédents. Quand $\hat{\lambda}'_1$ (et $\hat{\lambda}'_2$) varient de toutes les manières possibles (σ_j restant fixe), ν'_j admet un

minimum ν_j (≥ 1) et, en vertu des résultats du n^o 13, on pourra définir, relativement à σ_j , deux cycles de $2n$ intégrales paracanoniques, d'indice $\nu_j + 1$ (1), dont chacune convergera dans un secteur d'amplitude $(\pi + V) : n$ ($V > 0$), de sorte qu'en tout point x (2) de la région normale (s) on pourra calculer l'une ou l'autre de ces intégrales paracanoniques.

Procédant de même pour tous les $m - M$ points σ_j intérieurs à Π , on pourra donc calculer, en tout point x de (s), $m - M$ intégrales paracanoniques déterminées; d'ailleurs, on sait déjà (n^o 23) qu'en un tel point, on peut calculer $M + 1$ intégrales canoniques. En définitive, l'ensemble de toutes les intégrales canoniques ou paracanoniques qu'on aura calculées sera caractérisé par cette propriété de provenir de tous les m points σ_j , la somme des indices des intégrales étant minimum; le nombre des paracanoniques d'indice donné ne dépend d'ailleurs que de la configuration des σ_j (au point de vue de la Géométrie de situation).

Ceci posé, les $m + 1$ intégrales qu'on sait calculer en un point quelconque de (s) sont liées par une relation linéaire, à coefficients indépendants de x ; pour ε infiniment petit, cette relation, et les relations analogues, tendront vers des relations déterminées que nous appellerons encore *les relations de structure du point irrégulier*. Montrons comment on peut déduire des coefficients de ces relations un système complet d'invariants de seconde espèce; pour abrégé l'écriture, nous nous bornerons au cas où l'on a $M = m - 1$, mais le procédé se généraliserait aisément.

Désignons par y_1, \dots, y_m un système de m intégrales canoniques, pour l'un des points singuliers, x_h , par exemple, et par z_1, \dots, z_m un système analogue pour x_∞ . Si, entre ces intégrales, on connaissait des relations de la forme (Σ_h) [n^o 24], soit

$$(33) \quad z_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} y_j,$$

(1) D'une manière plus précise, celle qui correspond à l'angle $\hat{\lambda}_1$ étant d'indice $\nu_j + 1$ pour le point x_h , par exemple, celle qui correspond à l'angle opposé sera d'indice $\nu_j + 1$ pour le point x_∞ .

(2) Dont l'argument ne correspond pas à une échancrure.

on en déduirait immédiatement $(m - 1)^2$ invariants de la forme

$$\gamma_{ij} = \frac{c_{ij}c_{11}}{c_{11}c_{1j}}.$$

Mais, autour de x_h , on ne connaît que y_1, \dots, y_{m-1} , par exemple, et une combinaison de y_{m-1} et y_m qui doit se réduire à une combinaison de z_1, \dots, z_{m-1} seulement (les indices étant convenablement choisis) ⁽¹⁾. Cette combinaison sera donc de la forme

$$(34) \quad y_{m+1} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial c_{mm}} y_{m-1} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial c_{m,m-1}} y_m$$

(où $D = |c_{ij}|$). De même, en x_∞ on ne connaît que z_1, \dots, z_{m-1} et une combinaison de z_{m-1} et z_m qui doit être linéaire en y_1, \dots, y_{m-1} ⁽²⁾ et qui est donc de la forme

$$(35) \quad z_{m+1} = c_{mm} z_{m-1} - c_{m-1,m} z_m.$$

Ainsi donc les relations, soit (33 bis), qu'on sait former entre les $y_1, \dots, y_{m-1}, y_{m+1}, z_1, \dots, z_{m-1}, z_{m+1}$ peuvent être considérées comme déduites de (33) au moyen de (34) et de (35). Appliquons alors à ces relations (33 bis) la méthode donnée au n° 24 pour la construction des invariants de G; il est bien facile de vérifier que les quantités K' , qu'on obtient ainsi comme invariants à partir de (33 bis), ne dépendent, en fait, que des invariants qu'on aurait déduits de (33). En effet, changeons y_j en $\lambda_j y_j$, z_i en $\mu_i z_i$ dans (33); c_{ij} sera remplacé par $\frac{\mu_i}{\lambda_j} c_{ij}$ et D par $\frac{\mu_1 \dots \mu_m}{\lambda_1 \dots \lambda_m} D$; de même, $\frac{\partial D}{\partial c_{mm}}$ et $\frac{\partial D}{\partial c_{m,m-1}}$ seront multipliés respectivement par $\frac{\mu_1 \dots \mu_{m-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$ et $\frac{\mu_1 \dots \mu_{m-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_{m-2} \lambda_m}$. Cette transformation reviendra donc à multiplier y_{m+1} par $\frac{\lambda_m \lambda_{m-1}}{\mu_m}$ et, de même, z_{m+1} par $\frac{\mu_m \mu_{m-1}}{\lambda_m}$; elle n'altérera donc pas les K' ; en

(1) Ceci suppose implicitement $m > 2$, conformément d'ailleurs à une remarque que nous avons déjà faite (n° 23).

(2) Les deux intégrales paracañoniques précédentes proviennent d'un couple d'angles opposés $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ (le nombre ν_j étant égal à 1).

d'autres termes, les K' ne dépendent que des K : c'est ce que vérifie le calcul direct que nous omettons (1).

27. LES INTÉGRALES NORMALES DE (\bar{E}) ASYMPTOTIQUEMENT ÉQUIVALENTES. LEUR ORIGINE. — Revenons maintenant aux relations de structure du point irrégulier pour en faire de nouvelles applications. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où les σ_j forment un polygone convexe; bien entendu, les résultats que nous obtiendrons pourraient être étendus au cas général moyennant des complications de détail, analogues à celles du n° 26. De plus, en raison de notre but actuel, nous n'établirons aucune distinction entre les secteurs ordinaires et les secteurs mixtes; nous n'aurons donc pas à distinguer l'une de l'autre les deux intégrales canoniques d'un secteur mixte.

Nous avons déjà observé qu'à l'intérieur d'un secteur d'empiètement $\nabla_j^{h,h-1}$ on peut calculer $m + 1$ intégrales; d'après notre convention, nous pourrions les désigner par (2)

$$y_1^{h-1}, \dots, y_{j-1}^{h-1}, y_j^{h-1}, y_j^h, y_{j+1}^h, \dots, y_m^h.$$

Cela étant, je dis d'abord qu'à l'intérieur de $\nabla_j^{h,h-1}$, les rapports

$$|y_k^{h'} : y_j^{h-1}|, |y_k^{h'} : y_j^h|$$

sont très petits ($k \neq j$; $h' = h$ ou $h - 1$).

En effet, d'après le n° 13, il suffit évidemment de prouver que les rapports $|u_k : u_j|$ ($k \neq j$) sont très petits à l'intérieur de $\nabla_j^{h,h-1}$. Mais, pour ε infiniment petit, ces rapports tendent dans (s) vers $e^{\bar{m}_k - \bar{m}_j}$; pour légitimer notre assertion, il nous suffira donc d'établir

(1) A la vérité, le procédé précédent ne fournira pas $(m - 1)^2$ invariants indépendants [on observera, par exemple, que dans les relations (33 bis) le coefficient $\frac{\partial z_{m+1}}{\partial y_{m+1}}$ est toujours nul]. Mais il sera toujours loisible d'obtenir des paracanoniques distinctes des précédentes en opérant, par exemple, sur l'un des sommets σ_j ($j < M$) de Π , ce qui permettra de compléter le système d'invariants requis.

(2) Actuellement y_k^h peut désigner une intégrale canonique pour x_h ou x_z .

qu'on a

$$(36) \quad \cos(\beta_{jk} + n\theta) < 0$$

à l'intérieur de $\nabla_j^{h,h-1}$. Or on a, quel que soit k ,

$$(37) \quad \gamma_j - \eta < \beta_{jk} < \pi + \gamma_{j-1} + \eta,$$

et, d'ailleurs, à l'intérieur de $\nabla_j^{h,h-1}$, on peut écrire [cf. (30)] :

$$\beta_{jk} - \gamma_{j-1} - \eta - \frac{3\pi}{2} + 2h\pi < \beta_{jk} + n\theta < \beta_{jk} - \gamma_{j-1} - \eta - \frac{3\pi}{2} + 2h\pi,$$

inégalités qui, jointes à (37), entraînent (36).

C. Q. F. D.

Comme, d'ailleurs, les expressions

$$|z_j - 1| = \left| \frac{y_j^h}{u_j} - 1 \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{y_j^{h-1}}{u_j} - 1 \right|$$

sont très petites en même temps que r_i^{-1} (n° 15), c'est-à-dire en même temps que $|\varepsilon|$ (n° 17), la relation de structure relative à $\nabla_j^{h,h-1}$ sera de la forme

$$(32 \text{ bis}) \quad y_j^h - a_j^h y_j^{h-1} = a_1^{h-1} y_1^{h-1} + \dots + a_{j-1}^{h-1} y_{j-1}^{h-1} + a_{j+1}^h y_{j+1}^h + \dots + a_m^h y_m^h,$$

où $|a_j^h - 1|$ est infiniment petit avec $|\varepsilon|$. Faisons tendre ε vers 0; à la limite, la relation (32 bis) deviendra

$$(32 \text{ bis}) \quad \bar{y}_j^h - \bar{y}_j^{h-1} = \bar{a}_1^{h-1} \bar{y}_1^{h-1} + \dots + \bar{a}_{j-1}^{h-1} \bar{y}_{j-1}^{h-1} + \bar{a}_{j+1}^h \bar{y}_{j+1}^h + \dots + \bar{a}_m^h \bar{y}_m^h,$$

et, de plus, les rapports $\left| \frac{\bar{y}_k^h}{\bar{y}_j^{h-1}} \right|$, $\left| \frac{\bar{y}_k^h}{\bar{y}_j^h} \right|$ seront très petits dans $\nabla_j^{h,h-1}$.

Mais alors, il suit aussitôt de (32 bis) que non seulement \bar{y}_j^{h-1} et \bar{y}_j^h auront dans $\nabla_j^{h,h-1}$ un ordre de grandeur prépondérant, mais encore qu'elles admettront même représentation asymptotique dans ce secteur (illimité — cf. n° 18) (1); par rapport à la méthode des séries asymptotiques, elles ne font qu'une seule et même intégrale.

(1) Ceci s'accorde bien avec la remarque classique que les fonctions $f(x)$ et $f(x) + e^{-x}$ de la variable positive x sont asymptotiquement indiscernables. Observons aussi que l'on pouvait prévoir a priori l'existence de deux intégrales figurant dans une relation de structure et ayant même développement asymptotique; mais cette remarque n'aurait pas suffi à déceler l'origine de ces intégrales.

Au contraire, la méthode des approximations successives nous a permis, non seulement d'individualiser ces deux intégrales sur l'équation-limite (\bar{E}), mais encore d'assigner à chacune *une origine propre* : \bar{y}_j^{h-1} et \bar{y}_j^h sont, ou bien, des traces d'intégrales canoniques relatives à x_h et x_{h-1} , (les exposants caractéristiques ayant même partie principale); ou bien, ce sont les valeurs prises en x par une intégrale, canonique pour x_* et calculée le long de deux chemins comprenant entre eux le point x_h (cf. n° 22).

28. LES LIGNES DE ZÉROS DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE DE (\bar{E}) (1). — Complétons les résultats que nous venons d'obtenir sur les ordres de grandeurs relatives des intégrales \bar{y} , afin d'en déduire la configuration des lignes de zéros de l'intégrale générale de (\bar{E}) (au voisinage de x_*). A cet effet, nous nous appuyerons sur la remarque suivante, conséquence immédiate de ce qui précède. Si, au lieu de rester à l'intérieur de $\bar{V}_j^{h,h-1}$, on pénètre dans une des échan-crures qui bordent ce secteur, pour s'éloigner par exemple suivant l'argument (2)

$$\hat{z} = -\frac{\bar{\gamma}_j}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n},$$

chacun des rapports $\bar{y}_k^{h-1} : \bar{y}_j^{h-1}$ ($k = 1, \dots, j-1$) et $\bar{y}_k^h : \bar{y}_j^h$ ($k = j+2, \dots, m$) tendra vers zéro.

Cela étant, une intégrale *quelconque* \bar{y} de (\bar{E}) peut être représentée dans la direction \hat{z} sous la forme

$$\bar{y} = A_1 \bar{y}_j^{h-1} + B_1 \bar{y}_{j+1}^h + C_1 \bar{y}_1^{h-1} + \dots + C_{j-1} \bar{y}_{j-1}^{h-1} + C_{j+2} \bar{y}_{j+2}^h + \dots + C_m \bar{y}_m^h,$$

où A, B et les C sont des constantes arbitraires. Dès lors, en vertu de la remarque qu'on vient de faire, \bar{y} possédera dans la direction \hat{z}

(1) Les résultats de ce numéro s'appliqueraient aussi à (E) (intérieurement à la région normale); la transcription des énoncés ne nécessiterait que quelques longueurs, sans intérêt d'ailleurs.

(2) Cet argument appartient à $\bar{V}_{j,h-1}$, à $\bar{V}_{j+1,h}$, aux $\bar{V}_{k,h-1}$ ($k = 1, \dots, j-1$), et aux $\bar{V}_{k,h}$ ($k = j+2, \dots, m$), mais non à $\bar{V}_{j,h}$; cf. (29), p. 155.

des zéros très voisins de ceux de la combinaison $A\bar{y}_j^{h-1} + B\bar{y}_{j+1}^h$, ou, si l'on veut, très voisins de ceux de $A_j\bar{u}_j + B_j\bar{u}_{j+1}$. Pour $|x|$ très grand, ces zéros seront donc sensiblement donnés par la relation

$$(38) \quad (\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^j) x^n + n \log A_1 B_1^{-1} = 0.$$

Soit $|\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^j| = a_j$; ces zéros s'échelonnent sur la demi-branche infinie, d'argument $\bar{\zeta}$, de la courbe

$$(39) \quad a_j r^n \cos(n\theta + \bar{\gamma}_j) + n \log |A_1 B_1^{-1}| = 0,$$

du type $(\bar{\zeta})$. Si $\log |AB_1^{-1}|$ est suffisamment grand en valeur absolue et positif par exemple, cette demi-branche appartiendra à une branche de (39), doublement infinie dans deux directions, qui restera extérieure à $\bar{\Gamma}$ et sera d'abord intérieure au secteur

$$(40) \quad -\frac{\gamma_{j+1} - \eta}{n} - \frac{3\pi}{2n} + \frac{2h\pi}{n} < \theta < -\frac{\gamma_{j-1} + \eta}{n} + \frac{\pi}{2n} + \frac{(2h-2)\pi}{n},$$

où sont définies simultanément \bar{y}_j^{h-1} et \bar{y}_{j+1}^h ; extérieurement à ce secteur, l'arc précédent se terminera par une demi-branche d'argument $\bar{\zeta}' \equiv \bar{\zeta} + \frac{\pi}{n}$.

Appelons ξ_ρ les zéros de (38); ils s'espaceront dans la direction $\bar{\zeta}$, avec des différences mutuelles de $2\pi i (\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^j)^{-1} \xi_\rho^{1-n}$, et l'on pourra entourer chacun d'eux d'un cercle Λ_ρ de rayon $\mu |\xi_\rho|^{-n+1}$, où μ est très petit avec $|\xi_\rho^{-1}|$, de telle sorte que chacun d'eux ne contienne qu'un zéro de l'intégrale \bar{y} . Les zéros ainsi obtenus formeront une demi-ligne indéfinie, qu'on pourra suivre sans obstacle, et qu'on pourrait aussi remonter en sens inverse, à condition de ne pas sortir de (40). Nous ne sommes donc pas sûrs encore que \bar{y} possède des zéros voisins des ξ_ρ sur la demi-branche de (39) d'argument $\bar{\zeta}'$. Mais l'existence de la relation de structure $(\bar{32} \text{ bis})$ va nous permettre de sortir de cette difficulté.

En effet, grâce à cette relation, on pourra remplacer ⁽¹⁾ l'inté-

(1) Il pourra être nécessaire de faire une substitution analogue sur quelques-uns

grale \bar{y}_j^{h-1} qui figure dans l'expression de \bar{y} par l'intégrale \bar{y}_j^h que l'on sait calculer pour $\theta = \bar{z}'$. En définitive, on aura donc obtenu pour l'intégrale générale \bar{y} une ligne *doublement illimitée* de zéros, dont chacun est enfermé à l'intérieur d'un cercle Λ_ρ de rayon très petit, décrit autour d'un point ξ_ρ d'une branche de la courbe (3g). Ces zéros se succèdent avec des différences mutuelles voisines de $2\pi i (\bar{\alpha}_{n-1}^{j+1} - \bar{\alpha}_{n-1}^j)^{-1} \xi_\rho^{1-n}$, et sans qu'il y ait de lacune entre les deux extrémités de la ligne, à condition d'ailleurs que $\log|A_1 B_1^{-1}|$ soit suffisamment grand en valeur absolue (1); enfin, il est clair que, pour $\bar{z} < 0 < \bar{z}'$, l'intégrale \bar{y} ne pourra posséder (extérieurement à Γ) aucun autre zéro que ceux qu'on vient de définir.

Il est d'ailleurs bien évident qu'en s'appuyant sur l'ensemble des relations de structure (*32 bis*) on pourrait construire des lignes de zéros analogues le long des $n - 1$ autres branches de la courbe (3g); c'est la généralisation d'un fait analogue établi par M. Pierre Boutroux à l'aide d'une autre méthode (2).

des y_j^h figurant dans l'expression de \bar{y} . Mais, si $\log|A_1 B_1^{-1}|$ est suffisamment grand en valeur absolue par rapport aux coefficients des relations de structure, c'est-à-dire par rapport à une quantité ne dépendant que des coefficients de (\bar{E}) , la modification qui pourrait en résulter pour $\log|A_1 B_1^{-1}|$ sera très petite, et les zéros de \bar{y} resteront intérieurs aux cercles Λ_ρ .

(1) Sinon, on ne pourrait définir que $2n$ lignes de zéros dont chacune serait illimitée dans une seule direction. De plus, si $|\log|A_1 B_1^{-1}||$ n'est pas assez grand, les cercles Λ_ρ ne seraient pas nécessairement enfilés le long des $2n$ demi-branches infinies de la même courbe (3g).

(2) *Ann. sc. École Normale supérieure*, 3^e série, t. 30, 1913, p. 281. On peut d'ailleurs retrouver le résultat de M. P. Boutroux en posant $y = zx^{-p} \cos(x - C)$ dans l'équation de Bessel $xy'' + 2py' + xy = 0$; z est une solution de l'équation intégrale

$$z(x) = 1 - p(p-1) \int_x^{+\infty} \sin(x - \xi) \frac{\cos(\xi - C)}{\cos(x - C)} \frac{z(\xi)}{\xi^2} d\xi,$$

où le chemin d'intégration se fixe aisément [on peut le prendre parallèle à l'axe réel pour $\Re\left(\frac{x - C}{i}\right) \neq 0$].

Ici, comme au n° 27, on observera que si un résultat a pu être obtenu, c'est grâce à la méthode des approximations successives : c'est elle qui nous a permis d'individualiser deux intégrales \bar{y}_j^{h-1} , \bar{y}_j^h , qui dans $\bar{V}_j^{h,h-1}$ n'en auraient constitué qu'une pour la théorie des séries asymptotiques.

QUATRIÈME PARTIE.

GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS.

29. GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME PRIMITIF. — En définitive, nous aboutissons à la conclusion suivante : *toute singularité irrégulière de rang n d'une équation linéaire (satisfaisant à l'hypothèse fondamentale du n° 7) peut être envisagée comme provenant de la fusion de $n + 1$ singularités régulières infiniment voisines.* A vrai dire, une telle assertion peut paraître énoncée sous une forme trop générale, puisque les n points réguliers à distance finie x_h dont la fusion avec x_∞ engendre le point irrégulier ont été assujettis à la condition de constituer les sommets d'un polygone régulier. Mais, en fait, la configuration spéciale des points x_h n'a joué par elle-même aucun rôle essentiel; elle n'est intervenue que pour simplifier l'écriture, et l'on peut montrer que la conclusion précédente subsiste *quelle que soit la configuration des x_h , pourvu que leurs inverses x_h^{-1} soient des fonctions de ε , holomorphes et nulles pour $\varepsilon = 0$.*

Supposons donc que les x_h soient racines actuellement de l'équation

$$\varphi(x) \equiv \prod_{h=1}^n (1 - \varepsilon \lambda_h x) = 0,$$

où, cette fois, les λ_h n'ont plus la même signification qu'au n° 7, mais satisfont à l'équation

$$(41) \quad \Phi(\lambda) \equiv \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0,$$

dont les coefficients p_j sont des fonctions de ε , holomorphes

pour $\varepsilon = 0$. Associons à (\bar{E}) l'équation

$$(E_\varphi) \quad y^{(m)} + \frac{\Lambda_1}{\varphi(x)} y^{(m-1)} + \dots + \frac{\Lambda_\nu}{[\varphi(x)]^\nu} y^{(m-\nu)} + \dots + \frac{\Lambda_m}{[\varphi(x)]^m} y = 0,$$

qui coïncide avec (\bar{E}) pour $\varepsilon = 0$, et reproduit d'ailleurs (E) si l'on prend $\Phi(\lambda) = \lambda^n - 1$. Si les racines de l'équation caractéristique (3) sont distinctes, *hypothèse qui est indépendante du choix de $\varphi(x)$ et ne concerne que (\bar{E})* , on pourra répéter sur (E_φ) les mêmes raisonnements que sur (E), moyennant quelques modifications faciles. Ainsi, à $\varpi_k(1 - \varepsilon^n x^n)^{-1}$, on substituera $\frac{\varpi_k}{\varphi(x)}$; en vertu de notre hypothèse fondamentale, les coefficients $\alpha^{(k)}$ de la nouvelle fonction ϖ_k satisferont à des relations de la forme

$$\alpha_{n-1}^{(k)} + \alpha_{n-2}^{(k)} \varepsilon \lambda_h + \dots + \alpha_{-1}^{(k)} \varepsilon^n \lambda_h^n = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{\infty} s_{k,\mu}^{(l)} \varepsilon^l \lambda_h^\mu$$

($h = 1, \dots, n$; $s_{k,0}^{(0)} = s_k$; $s_{k,l}^{(l)} = 0$, pour $n > l \neq g$),

ou, en vertu de (41),

$$(42) \quad \alpha_{n-1}^{(k)} + \alpha_{n-2}^{(k)} \varepsilon \lambda_h + \dots + \alpha_0^{(k)} \varepsilon^{n-1} \lambda_h^{n-1} = \alpha_{-1}^{(k)} \varepsilon^n (p_1 \lambda_h^{n-1} + \dots + p_n)$$

$$= \varphi_0 + \varphi_1 \varepsilon \lambda_h + \dots + \varphi_{n-1} \varepsilon^{n-1} \lambda_h^{n-1},$$

les φ_j étant holomorphes en ε , et $\varphi_0 = s_{k,0}^{(0)}$ étant de l'ordre de ε^n ; de plus, $\alpha_{n-1}^{(k)}$ sera toujours défini par l'équation (6), et l'on aura toujours $\alpha_{k,0} = s_{k,0}^{(0)} = s_k$. Égalons alors les coefficients des puissances croissantes de λ_h dans (42) : on voit successivement que $\alpha_{-1}^{(k)}, \alpha_{n-2}^{(k)}, \dots, \alpha_0^{(k)}$ seront des fonctions de ε , holomorphes pour $\varepsilon = 0$, et l'on établirait de même les autres points de la démonstration des nos 7-9. Quant au chemin d'intégration, ce sera une des branches de la courbe

$$\Re \left[e^{i\theta} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{\varphi(\xi)} d\xi \right] = C,$$

suivie dans un sens qui pourra varier avec k .

D'ailleurs, dans l'Analyse précédente, rien n'oblige essentiellement à supposer que l'équation (41) ait ses racines distinctes ou finies.

On pourra donc prendre

$$\Phi(\lambda) \equiv \lambda^{n-n_1-\dots-n_p} (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{n_p},$$

avec $n_1 \geq 1, \dots, n_p \geq 1, n_1 + \dots + n_p \leq n - 1$: à cet égard, tout point irrégulier x_∞ , de rang n , peut donc être envisagé comme provenant de la fusion de $p + 1$ points irréguliers $x_1, \dots, x_p, x_\infty$, de rangs $n_1 - 1, \dots, n_p - 1, n - n_1 - \dots - n_p$. En particulier, prenons

$$\Phi(\lambda) \equiv \lambda^{n-1} (\lambda - 1),$$

d'où

$$\varphi(x) \equiv 1 - \varepsilon x,$$

et l'équation (E_p) s'écrit alors

$$(E_p) \quad y^{(m)} + \frac{A_1}{1 - \varepsilon x} y^{(m-1)} + \dots + \frac{A_p}{(1 - \varepsilon x)^p} y^{(m-p)} + \dots + \frac{A_m}{(1 - \varepsilon x)^m} y = 0;$$

tout point irrégulier de rang n apparaît donc comme provenant d'une singularité de rang $n - 1$ à laquelle s'est agrégé un point régulier.

D'ailleurs, il serait aisé d'étudier directement l'équation (E_p) en procédant comme aux nos 7-9; mais nous laissons ce soin au lecteur, nous bornant à montrer comment on construira les chemins d'intégration.

30. LES LOXODROMIES DES FACTEURS PRIMAIRES DE WEIERSTRASS. — Actuellement ces chemins sont définis par l'équation

$$(L) \quad \Re \left[e^{i\delta} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{1 - \varepsilon \xi} d\xi \right] = C.$$

qui peut s'écrire encore

$$(43) \quad \cos \delta \log X - Y \sin \delta = -C \varepsilon^n,$$

en posant

$$(44) \quad \varepsilon x \equiv z$$

et

$$(1 - z) e^{\frac{z}{1-z} + \dots + \frac{z^{n-1}}{n-1}} \equiv X.$$

Les chemins d'intégration L sont donc des loxodromies du facteur primaire de Weierstrass (de genre $n-1$). Indiquons rapidement la construction de ces courbes, ou, plutôt, des branches de ces courbes qui peuvent être utilisées comme chemins d'intégration.

Considérons d'abord dans le plan $z = re^{i\theta}$ la courbe L correspondant à $C = 0$; elle possède un point d'ordre n , l'origine, les tangentes en ce point étant définies par $\cos(n\theta + \delta) = 0$, et les cercles osculateurs en ce point passant par le point $\theta = 0, r = n + 1$. La courbe possède en outre $n-1$ branches infinies, asymptotes à des droites issues du point $\theta = 0, r = -(n-2)^{-1}$ (pour $n > 2$), dans les directions $\cos[(n-1)\theta + \delta] = 0$; enfin, le point A ($\theta = 0, r = 1$) est un foyer de L (au sens de H. Poincaré). Il s'agit de montrer que les arcs issus de O se relient à des arcs infinis ou tendant vers A .

A cet effet, remarquons que (L) entraîne (quel que soit C) :

$$r \frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos(n\theta + \delta) - r \cos[(n-1)\theta + \delta]}{\sin(n\theta + \delta) - r \sin[(n-1)\theta + \delta]}$$

considérons, par exemple, les courbes L' , d'équation

$$(L') \quad r = \frac{\cos(n\theta + \delta)}{\cos[(n-1)\theta + \delta]}$$

Ce sont des strophoïdes d'ordre $n+1$, présentant l'origine comme point d'ordre n ; les tangentes en ce point sont données par $\cos(n\theta + \delta) = 0$, et les cercles osculateurs en ce point passent par $\theta = 0, r = n$. L' possède en outre une boucle passant par A , et les $2n-2$ arcs de L' , issus de O et étrangers à cette boucle, s'éloignent à l'infini, asymptotiquement à $(n-1)$ droites, issues de $\theta = 0, r = -(n-1)^{-1}$, dans les directions $\cos[(n-1)\theta + \delta] = 0$. Bien entendu, les courbes L'' , d'équation

$$(L'') \quad r = \frac{\sin(n\theta + \delta)}{\sin[(n-1)\theta + \delta]}$$

jouissent de propriétés identiques; d'ailleurs, L' et L'' ne peuvent se couper à distance finie qu'aux points O et A .

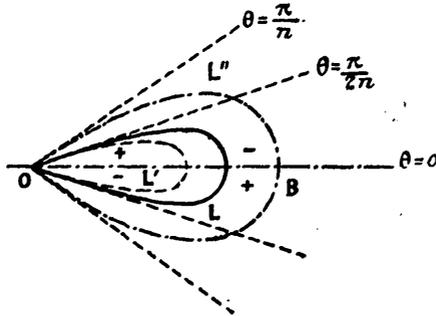
Ceci posé, la construction des arcs de courbes L , issus de O , repose tout entière sur la remarque que voici : les courbes L'

et L'' divisent le plan en régions à l'intérieur de chacune desquelles $r \frac{d\theta}{dr}$ garde un signe constant.

Ainsi, considérons d'abord le cas où $\delta = 0$; L' est alors symétrique par rapport à OA , et L'' est dégénérée en deux courbes, dont l'une coïncide avec l'axe réel OA , et dont l'autre forme une boucle passant par le point B ($\theta = 0, r = \frac{n}{n-1}$).

Dans la région comprise à l'intérieur des boucles de L' et L'' , $\text{tang} V = r \frac{d\theta}{dr}$ présente les signes figurés ci-dessous (fig. 12). Cela étant,

Fig. 12.



faisons croître θ à partir de $-\frac{\pi}{2n}$; d'après la valeur de son rayon de courbure en O (1), L pénétrera dans la région comprise entre L' et L'' ; r croîtra donc, sans que L puisse atteindre d'ailleurs la courbe L'' (2). L rencontrera donc AB à angle droit, et l'arc ainsi obtenu se prolongera jusqu'en O par un arc symétrique relativement à AB .

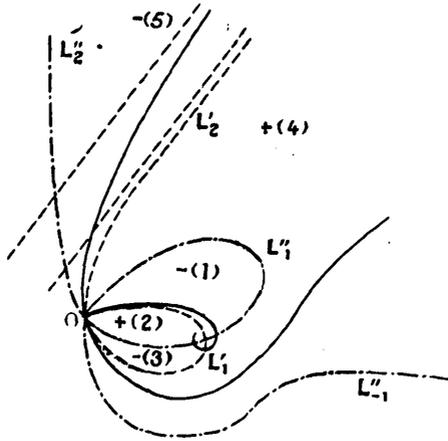
Supposons maintenant δ non nul, mais compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour fixer les idées; figurons les boucles L'_1, L'_2 , des courbes L' et L'' et les branches adjacentes L''_1, L''_2, L''_3 . L'_1 et L'_2 comprennent

(1) D'ailleurs, il est facile de voir directement que L ne peut pénétrer à l'intérieur de la boucle de L' .

(2) Car la normale à L passerait par O . A moins que L ne rencontre L'' en B , il faudrait donc que L pénétrât dans l'intérieur de la boucle de L'' en venant de l'extérieur, ce qui est absurde. On peut d'ailleurs établir par des considérations arithmétiques (ou autres) que L ne passe pas par B .

entre elles trois régions (1), (2), (3) où $\text{tang} V$ prend les signes $-$, $+$, $-$. L'un des arcs de L , issu de O dans la direction $\frac{\pi}{2n} - \frac{\delta}{4n}$, reste d'abord intérieur à (1); θ décroissant, r croît, et l'arc sortira

Fig. 13.



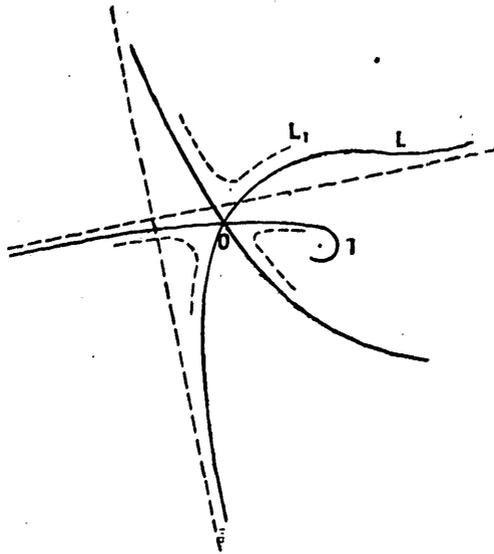
de (1) en coupant L'_1 pour se rapprocher de O ; il ne peut d'ailleurs revenir en O ⁽¹⁾; il s'enroulera donc asymptotiquement autour de A . Un second arc de L , issu de O dans la direction $-\frac{\pi}{2n} - \frac{\delta}{n}$, pénètre dans la région (4) limitée par L'_1, L''_1, L'_2, L''_2 ; sur cet arc, r sera une fonction croissante de θ ; comme d'ailleurs l'arc ne peut pénétrer dans (1), [soit pour y rester, soit pour pénétrer dans (2)]; il s'éloignera indéfiniment de O [et cela, quand bien même il sortirait de (4) pour pénétrer dans (5)].

Considérons maintenant les régions du plan (z) telles que (5), limitées par des arcs de L' ou L'' distincts de L'_1 et L''_1 . Faisons varier θ à partir de $\frac{3\pi}{2n} - \frac{\delta}{n}$; la courbure de L étant inférieure à celle de L'_2 , L pénétrera dans (5); r croissant, θ décroîtra, et L ne pourra d'ailleurs pénétrer dans (4), car L'_2 ne possède aucune tangente issue de O ; dès lors, θ décroît constamment, et L se rapproche d'une asymptote parallèle à celle de L_2 .

⁽¹⁾ Sinon, il serait nécessairement coupé par l'arc asymptote à A , ce qui est absurde.

Les remarques précédentes permettent de construire aisément l'ensemble des arcs de L issus de O , et d'en déduire l'allure des courbes L pour $C \neq 0$. Sur la figure ci-dessous, on a pris $n=3$, et

Fig. 14.



l'on a représenté aussi, en traits mixtes, des arcs d'une courbe L_1 , correspondant à la même valeur de δ , mais à une constante $C \neq 0$; d'ailleurs, observons à ce sujet qu'on pourra toujours s'arranger pour que : 1° C soit assez grand, en sorte que, dans le plan (x) , la transformation (44) rejette L extérieurement à l' , et pour que, 2° $C\varepsilon^n$ soit très petit, en sorte que L_1 soit très voisin de L dans le plan (z) , d'après (43).

En définitive, il serait aisé d'établir que, ε tendant vers 0, les courbes L se comportent dans la région normale s comme les courbes ξ , et qu'à la limite, elles tendent vers $\bar{\xi}$, à l'intérieur de (s) . Par contre, elles se comportent à l'infini comme des courbes $\bar{\xi}$ correspondant à la valeur $n-1$ de l'indice. Ces courbes permettraient donc d'établir une théorie analogue à celle que nous avons développée antérieurement. En fait, une telle méthode ne comporterait pas d'obstacle réel pour $m=2$; elle permettrait d'établir dans ce

cas l'identité des intégrales normales de (\bar{E}) avec les limites des intégrales canoniques correspondant aux différents points réguliers qu'on aurait introduits successivement; mais, pour $m > 2$, la méthode paraît peu appropriée pour établir l'identité des intégrales normales avec les limites des intégrales paracanoniques relatives à deux points réguliers agrégés à deux étapes différentes. Aussi, malgré l'intérêt que présente ce mode de génération de la singularité, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

31. CAS OU L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE POSSÈDE DES RACINES ÉGALES : LES ÉQUATIONS (\bar{E}') ET (E') . — Occupons-nous maintenant du cas où notre hypothèse fondamentale du n° 7 n'est plus réalisée; l'équation caractéristique (3) possédant des racines égales, les racines ϖ_{hk} de (2), où h a reçu une valeur fixe, sont en général des fonctions algébroides (non uniformes) de ε ; il sera impossible de réaliser la transformation du n° 7 avec des fonctions ϖ_k rationnelles en x , et pareille conclusion s'appliquera encore à l'équation (28) et à l'expression $\bar{\varpi}$ du n° 18; dans ce cas, l'équation (\bar{E}) possédera, en général, des intégrales d'ordre fractionnaire. Nous nous proposons de montrer que ces intégrales, que nous apprendrons d'ailleurs à calculer, peuvent être considérées, elles aussi, comme des limites d'intégrales régulières d'une équation (E') , qui dépend d'un paramètre variable infiniment petit.

Imitant la méthode adoptée au début, nous remplacerons les coefficients $a^{(j)}$ qui figurent dans (\bar{E}) par des fonctions de ε , se réduisant pour $\varepsilon = 0$ à leurs valeurs primitives, et telles que, pour $\varepsilon \neq 0$, l'équation (3) possède ses m racines distinctes; et, à l'équation ainsi obtenue, nous associerons une équation à $n + 1$ points réguliers infiniment voisins, comme au n° 6. Un tel procédé est évidemment applicable quels que soient les groupes de racines égales que possède l'équation caractéristique de (\bar{E}) ; mais comme nous avons surtout en vue de décrire le mécanisme qui permet de passer d'une intégrale régulière à une intégrale d'ordre fractionnaire, nous pourrons, pour plus de simplicité, développer les calculs

sur les équations linéaires d'ordre *minimum* qui possèdent des intégrales d'ordre fractionnaire donné, soit $n - \frac{l}{m}$; en d'autres termes, nous nous limiterons aux équations (\bar{E}) du type

$$(\bar{E}') \quad y^{(m)} + \dots + \Lambda_\nu y^{(m-\nu)} + \dots + \Lambda_m y = 0,$$

où Λ_m admet x_∞ comme pôle d'ordre $m(n-1) - l$ (l étant premier avec m), tandis que Λ_ν ($\nu \neq m$) est pour $x = \infty$ d'ordre N_ν avec $N_\nu < \nu(n-1) - \frac{l\nu}{m}$. La construction du diagramme de V. Puiseux montre alors que l'équation (2) correspondant à (\bar{E}') possède dans le domaine de $\varepsilon = 0$ un cycle de m racines, se comportant comme $\varepsilon^{\frac{l}{m}}$. Procédant alors comme nous avons dit, nous adjoindrons d'abord à (\bar{E}') l'équation

$$(\bar{E}'') \quad y^{(m)} + \dots + \Lambda_\nu y^{(m-\nu)} + \dots + [-\varepsilon_1^m x^{m(n-1)} + \Lambda_m] y = 0,$$

qui, pour $\varepsilon_1 \neq 0$, vérifie l'hypothèse fondamentale du n° 7; et à (\bar{E}'') nous associerons enfin l'équation régulière

$$(E') \quad y^{(m)} + \dots + \frac{\Lambda_\nu}{(1 - \varepsilon_1^n x^n)^\nu} y^{(m-\nu)} + \dots + \frac{-\varepsilon_1^m x^{m(n-1)} + \Lambda_m}{(1 - \varepsilon_1^n x^n)^m} y = 0;$$

d'ailleurs, nous choisirons la fonction $\varepsilon_1(\varepsilon)$ de telle sorte que $\frac{l}{\varepsilon_1^m}$ tende vers zéro avec ε : nous pourrions prendre, par exemple, $\varepsilon_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2m}}$; en définitive, (E') tendra vers (\bar{E}') quand ε tendra vers zéro.

Ces préliminaires établis, posons (1)

$$X^m \equiv \varepsilon_1^m x^{m(n-1)} - \Lambda_m \equiv \varepsilon_1^m x^{m(n-1)} - x^{m(n-1)-l} - a_{m(n-1)-l-1}^{(m)} x^{m(n-1)-l-1} - \dots;$$

nous allons montrer qu'on peut former une expression $\varpi(x)$, rationnelle en x et X , soit

$$\varpi(x) \equiv X \left[\pi_0 + \frac{\pi_1}{X} + \dots + \frac{\pi_{m-1}}{X^{m-1}} \right].$$

(1) On peut toujours supposer $a_{m(n-1)-l-1}^{(m)} = 1$ moyennant une transformation $x|\lambda x$.

avec

$$\begin{aligned} \pi_0 &\equiv q_0^0 + \frac{q_1^0}{x} + \dots + \frac{q_{n-1}^0}{x^{n-1}} + \frac{q_n^0}{x^n}, \\ \pi_g &\equiv x^{N_g} \left[q_0^{(g)} + \frac{q_1^{(g)}}{x} + \dots + \frac{q_{n-1}^{(g)}}{x^{n-1}} \right] \quad (g \neq 0), \end{aligned}$$

et telle que chacune des exponentielles $e^{\int \frac{\pi dx}{1 - \varepsilon^n x^n}}$, où X a été pris successivement avec chacune de ses déterminations, appartienne aux mêmes exposants que l'intégrale y de (E') dans le voisinage des points x_h et x_∞ .

En effet, observons d'abord que les m racines de l'équation (2), écrite pour (E'), peuvent se développer actuellement sous la forme

$$\varpi_{hh} = \zeta \left[p_0 + \frac{p_1}{\zeta} + \dots + \frac{p_{m-1}}{\zeta^{m-1}} \right],$$

où ζ désigne l'une des m déterminations du radical

$$\left[\varepsilon^m - (\varepsilon \lambda_h)^l - \alpha_{m(m-1-l-1)}^{(m)} (\varepsilon \lambda_h)^{l+1} - \dots \right]^{\frac{1}{m}},$$

et où p_0, p_1, \dots, p_{m-1} sont des fonctions holomorphes de $\varepsilon \lambda_h$, dont les coefficients contiennent, d'ailleurs, des puissances négatives de ε_l , et qui satisfont aux conditions suivantes :

- 1° $p_g : \varepsilon^{g(n-1)-N_g}$ est holomorphe en ε ;
- 2° ε tendant vers 0, et $\varepsilon_l(\varepsilon)$ ayant été choisi comme il a été dit, p_0 tend vers 1 et p_1, \dots, p_{m-1} , vers 0.

Or, reportons-nous à la signification de l'équation (2); si nous voulons que ϖ remplisse les conditions requises, relativement aux points x_h , il nous suffira de choisir les q^0 et les $q^{(g)}$ de façon à satisfaire aux égalités

$$(45) \quad \begin{cases} q_0^0 + q_1^0 \varepsilon \lambda_h + \dots + q_{n-1}^0 (\varepsilon \lambda_h)^{n-1} + q_n^0 \varepsilon^n = p_0, \\ q_0^{(g)} + q_1^{(g)} \varepsilon \lambda_h + \dots + q_{n-1}^{(g)} (\varepsilon \lambda_h)^{n-1} = \frac{p_g}{(\varepsilon \lambda_h)^{g(n-1)-N_g}}. \end{cases}$$

Mais l'un quelconque des p_g peut s'écrire sous la forme

$$p_g = p_g^0(\varepsilon^n) + \varepsilon \lambda_h p_g^1(\varepsilon^n) + \dots + (\varepsilon \lambda_h)^{n-1} p_g^{(n-1)}(\varepsilon^n),$$

les p_g^s étant holomorphes en ε^n ; substituons ces valeurs dans les

seconds membres des équations (45), et identifions de part et d'autre les coefficients des puissances de λ_n : l'équation (2) sera ainsi vérifiée quel que soit h , et nous obtiendrons pour les $q^{(n)}$ et les $q^{(s)}$ des fonctions déterminées de ε^n , exception faite pourtant de q_0^n et q_n^n ; mais $q_0^n + q_n^n \varepsilon^n$ sera, aussi, holomorphe en ε^n (et se réduira d'ailleurs à 1 pour $\varepsilon = 0$); et, en explicitant la condition, de forme (5), que doit remplir $\varpi(x)$ relativement à x_n , on verrait comme plus haut (n° 7) que q_0^n et q_n^n sont aussi holomorphes en ε^n (1).

L'expression $\varpi(x)$ une fois obtenue, il est aisé de former l'équation linéaire $F(u) = 0$ (rationnelle en x), qui admet pour intégrales les m déterminations de l'exponentielle $e^{\int \frac{m dx}{1 - \varepsilon^n x^m}}$, ce qui permet d'écrire (E') sous une forme (E') analogue à celle de (E,) (n° 7); et, en procédant comme au n° 8, on en déduit aisément la possibilité d'intégrer (E') par approximations successives.

32. LES CHEMINS D'INTÉGRATION \mathcal{L}' . — Pour le passage à la limite que nous avons en vue, la construction des chemins d'intégration \mathcal{L}' va jouer un rôle essentiel. Or, en opérant comme au n° 10, on trouvera sans peine que ces chemins ont actuellement pour équation

$$\Re \left[e^{i\delta} \int_0^x \frac{X(\xi)}{1 - \varepsilon^n \xi^n} d\xi \right] = C;$$

d'ailleurs, il sera loisible de transformer cette relation de la même façon que (11); on pourra donc la remplacer par la suivante :

$$(12) \quad \Re \left[e^{i\delta} \int_0^x \frac{[\varepsilon_1^n \xi^{m(n-1)} - \xi^{m(n-1)-l}]^{\frac{1}{m}}}{1 - \varepsilon^n \xi^n} d\xi \right] = C.$$

Pour construire les courbes \mathcal{L}' , posons d'abord

$$\xi \equiv \varepsilon_1^{-\frac{m}{l}} y;$$

(1) q_0^n est une fonction de ε^n , holomorphe et se réduisant à 1 pour $\varepsilon = 0$ (ε_1 restant fixe). A vrai dire, ε_1 figure au dénominateur dans les coefficients de cette fonction; mais, d'après le choix de ε_1 , q_0^n tend encore vers 1 quand on fait tendre ε et $\varepsilon_1(\varepsilon)$ vers zéro.

l'équation (ξ') s'écrira

$$(46) \quad \Re \left[e^{i\delta} \int_0^y \frac{y^{m(n-1)} - y^{m(n-1)-l} y^{\frac{1}{m}}}{1 - \varepsilon^n \varepsilon_1^{-\frac{mn}{l}} y^n} dy \right] = \varepsilon_1^{\frac{mn-l}{l}} C;$$

or, en vertu de la condition que nous avons imposée à ε_1 (n° 31), $\varepsilon^n \varepsilon_1^{-\frac{mn}{l}}$ est infiniment petit avec ε , et, pour

$$|y| < \left| \varepsilon_1^{\frac{m}{2l}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right|$$

(quantité indéfiniment croissante), la courbe (46) s'écartera relativement très peu de la courbe

$$(\xi'') \quad \Re \left\{ e^{i\delta} \int_0^y [y^{m(n-1)} - y^{m(n-1)-l}]^{\frac{1}{m}} dy \right\} = \varepsilon^{\frac{mn-l}{l}} C.$$

Il s'agit d'abord de discuter l'allure des courbes ξ'' , ou, du moins, des branches de ces courbes qui nous intéressent. Pour cela, nous procéderons comme au n° 30 : quel que soit C, les courbes ξ'' satisfont à l'équation différentielle

$$\operatorname{tang}(mV) + \frac{r' \sin(mn\theta + \delta') - \sin[(mn-l)\theta + \delta']}{r' \cos(mn\theta + \delta') - \cos[(mn-l)\theta + \delta']} = 0,$$

où l'on a toujours $\operatorname{tang} V = \frac{rd\theta}{dr}$, et où δ' désigne un nouvel argument constant. Or les courbes

$$(47) \quad r' = \frac{\sin[(mn-l)\theta + \delta']}{\sin(mn\theta + \delta')}$$

sont aisées à construire : elles possèdent mn branches infinies, dont $mn - l$ passent par l'origine, et l passent respectivement par les points A_1, \dots, A_l d'affixes

$$y_1 = e^{\frac{2\pi i}{l}}, \quad \dots, \quad y_{l-1} = e^{\frac{2(l-1)\pi i}{l}}, \quad y_l = 1;$$

ce sont d'ailleurs les seuls points-base à distance finie du faisceau de courbes (47), où δ' est variable. En tout point du plan (r, θ) distinct de A_1, \dots, A_l , $\operatorname{tang} V$ est susceptible de m valeurs bien

déterminées, qui sont autant de branches d'une même fonction algébrique de r et $\cos \theta$ (par exemple); ces branches ne peuvent d'ailleurs se permuter dans aucun domaine du plan (r, θ) . Enfin, on aurait des résultats identiques pour les courbes

$$(48) \quad r' = \frac{\cos[(mn - l)\theta + \delta']}{\cos(mn\theta + \delta')}.$$

Cela étant, proposons-nous de construire la courbe \mathcal{C}'' pour laquelle on a $C = 0$; et, à cet effet, considérons d'abord la région du plan (r, θ) comprise entre deux branches de courbes (47) et (48), issues de l'origine, et ne comprenant entre elles aucune autre branche de ces courbes, ni aucun des points $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$. Dans cette région, les m déterminations de $\text{tang} V$ seront bien déterminées : en particulier, l'une d'elles s'annule pour $r = 0$, et

$$\text{tang}[(mn - l)\theta + \delta'] = 0.$$

Appliqué à cette détermination, un procédé analogue à celui du n° 30 permet de construire un arc de courbe \mathcal{C}'_0 , tangent à l'origine à une branche de (47), suivant l'une des $(mn - l)$ directions précédentes, et s'éloignant indéfiniment dans la même direction que cette branche; nous obtenons donc ainsi une première catégorie de $mn - l$ branches de \mathcal{C}'_0 issues de 0.

D'autre part, nous sommes sûrs de l'existence d'une seconde catégorie de $2l$ arcs infinis de \mathcal{C}'_0 , ne passant pas par l'origine, et s'éloignant suivant l directions bien déterminées, données par

$$\text{tang}(mn\theta + \delta') = 0.$$

Pour voir comment les branches de cette catégorie sont situées par rapport aux premières, faisons varier C par continuité, depuis 0 jusqu'à la plus petite, en valeur absolue, des quantités C_h telles que

$$\Re \left\{ e^{i\delta} \int_0^{y_h} [y^{m(n-1)} - y^{m(n-1)-l}]^{\frac{1}{m}} dy \right\} = \varepsilon_1 \frac{l}{l'} C_h.$$

Pour $|C|$ petit, partiront du voisinage de l'origine m systèmes d'arcs différents, composés chacun de $mn - l$ branches de la première catégorie de la courbe \mathcal{C}''_C ; choisissons arbitrairement un de ces

systemes, et suivons-le par continuité. Pour $C = C_h$, une branche de ce système passera par A_h , où elle coupera une branche (au moins) de la seconde catégorie; une branche de la courbe ξ''_{C_h} possédera A_h (1) comme point multiple d'ordre $m + 1$ et séparera deux branches de l'une et l'autre catégorie de courbes ξ''_C voisines de ξ''_{C_h} ($|C| < |C_h|$). Et, en faisant toujours varier C par continuité, à partir de C_h (ou de 0) on obtiendrait des conclusions analogues relatives aux autres points A_h .

Cela étant, il nous sera facile de terminer la construction des courbes (46) : aussi bien, pour

$$|y| > \left| \varepsilon_1^{\frac{m}{2l}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right|,$$

et $|\varepsilon|$ suffisamment petit, on peut remplacer l'équation (46) par la suivante :

$$\Re \left[e^{i\delta} \int_0^y \frac{y^{n-1} dy}{1 - \varepsilon^n \varepsilon_1^{-\frac{mn}{l}} y^n} \right] = \varepsilon_1^{\frac{mn-l}{l}} C,$$

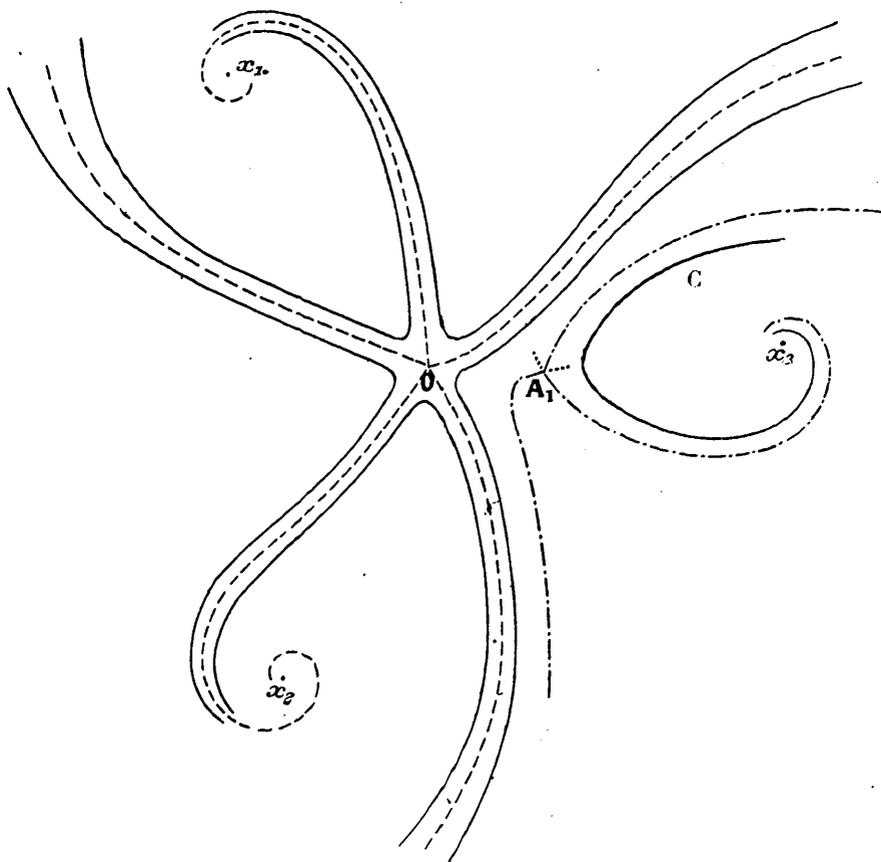
tout en ne commettant d'ailleurs qu'une erreur relative très petite; or cette dernière équation est du type étudié aux nos 11-12. Revenant alors à la variable x , on obtiendra, pour la courbe ξ' , un tracé tel que le suivant (fig. 15, p. 186; ce tracé se rapporte au cas de $m = 2, n = 3, l = 1$ qu'on rencontrera plus loin, n° 35). On a figuré en traits ponctués (---) la courbe ξ'_0 , en traits mixtes (-·-·-) la courbe ξ'_{C_h} passant par A_h (ici $h = 1$); en traits pleins (—) une courbe ξ'_C où C est quelconque; du reste, on s'est borné aux portions de ces courbes que nous aurons à utiliser (et, pour ξ'_{C_h} , au voisinage du point A_h).

Il serait d'ailleurs aisé de multiplier les figures telles que la précédente; quelles que soient leurs particularités, le point important que nous voulons faire ressortir sur chacune d'elles, c'est l'existence de l'arcs de la seconde catégorie (tels que C sur la figure) qui sont à une distance de l'origine de l'ordre de $\left| \varepsilon_1^{-\frac{m}{l}} \right|$ au moins. Il en

(1) A_h est d'ailleurs un foyer pour $m - 1$ autres branches de ξ''_{C_h} ,

résulte que, lorsque ε n'est pas très petit, la figure jouit de propriétés analogues à celles des nos 12, 16, 18, et l'on pourra utiliser les courbes \mathcal{L}' pour diviser la région normale en mn secteurs canoniques ∇ , exactement analogues à ceux qu'on a introduits

Fig. 15.



plus haut (no 22). Mais, lorsque ε tend vers 0, les arcs de la seconde catégorie finissent par sortir de la région normale pour s'éloigner indéfiniment; nous appellerons *intégrales évanouissantes* les intégrales canoniques correspondantes. Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, la région normale ne peut donc plus être balayée que par $mn - l$ arcs \mathcal{L}' (de la première catégorie); et l'on ne pourra calculer par

approximations successives ⁽¹⁾ que $mn - l$ intégrales, en tout, à l'intérieur de la région normale; chacune d'elles, d'ailleurs, sera canonique pour l'un des x_h ou x_∞ , et sera définie dans un secteur ∇' déterminé de (s).

Effectivement, nous allons montrer qu'à la limite, le procédé des approximations successives ne fournit plus que $mn - l$ intégrales pour l'équation-limite (\bar{E}'); on vérifierait d'ailleurs sans difficulté que, dans (s), les intégrales de (E') convergent uniformément vers celles de (\bar{E}'), et que, de même, les secteurs ∇' convergent vers les secteurs $\bar{\nabla}'$ qui jouent un rôle analogue pour (\bar{E}').

35. L'ÉQUATION-LIMITE (\bar{E}'). — Pour intégrer l'équation (\bar{E}'), nous opérerons comme au n° 18, pour (\bar{E}). Écrite actuellement pour (\bar{E}'), l'équation (28) du n° 18 possède m racines Π_1, \dots, Π_m dont le développement dans le voisinage de x_∞ procède suivant les puissances décroissantes de $x^{\frac{l}{m}}$ (c'est-à-dire de $x^{\frac{1}{m}}$); et ces racines forment un seul système circulaire. Arrêtons chacun de ces développements aux termes en x^{-1} (inclus) et appelons $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_m$ les m développements ainsi limités (rationnels en x et $x^{\frac{1}{m}}$). Un raisonnement identique à celui du n° 18 montre que (\bar{E}') pourra s'écrire

$$(\bar{E}') \quad \bar{F}(y) = \frac{1}{x^2} [\bar{C}_1 y^{(m-1)} + \dots + \bar{C}_m y],$$

l'équation $\bar{F}(y) = 0$, à coefficients rationnels en x , admettant pour intégrales les expressions $e^{\int \bar{\sigma}_i dx}$, et les \bar{C}_v , rationnels en x , étant, pour $x = \infty$, d'ordre inférieur à $(v-1) \left(n-1 - \frac{l}{m} \right) + 1$. On pourra donc intégrer (\bar{E}') par l'algorithme d'approximations successives du n° 18, à condition d'adopter comme chemin

(1) En écartant les paracanoniques. On observera, d'ailleurs, que les σ_j forment un polygone convexe.

d'intégration l'une des branches de la courbe

$$(\overline{\mathcal{C}}') \quad r^{n-\frac{l}{m}} \cos \left[\left(n - \frac{l}{m} \right) \theta + \delta_1 \right] = C_1,$$

qui, pour δ_1 , et C_1 , convenablement choisis, est la limite des courbes \mathcal{C}' dans la région (s). Or la courbe $\overline{\mathcal{C}}'$ se compose de $mn-l$ branches égales et qui (sauf pour $n=1$) admettent pour asymptotes $mn-l$ droites, issues de l'origine, et faisant entre elles des angles égaux à $\pi : n'$, en posant

$$n' \equiv n - \frac{l}{m}.$$

Quant au sens de parcours à adapter sur la branche envisagée, il sera encore donné par les inégalités (20), (22) dans lesquelles β_{jk} désigne actuellement l'argument du vecteur $\overrightarrow{s'_j s'_k}$, s'_j étant (comme σ_j pour ω_j , ou s_j pour l'expression $\overline{\omega}_j$ du n° 18) le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\overline{\omega}_j$, c'est-à-dire $e^{\frac{2j\pi i}{m}}$, d'après notre convention sur $a_{m(n-1-j)}^{(m)}$. Les s'_j formeront donc *un polygone convexe*; on pourra donc toujours choisir δ_1 , et C_1 , de telle sorte que sur la branche adoptée de $\overline{\mathcal{C}}'$, les quadratures figurant dans les approximations successives soient effectuées *toutes dans le même sens*. Les intégrales ainsi obtenues constitueront évidemment les limites des intégrales canoniques du n° 52.

Il est aisé de déterminer les frontières du secteur canonique-limite $\overline{\nabla}'$ dans lequel chacune de ces intégrales peut être calculée : en effet, on a actuellement (cf. n° 22)

$$\gamma_j = \frac{\pi}{2} + \frac{(2j+1)\pi}{m},$$

et, d'après (29), le secteur ∇' sera défini par les inégalités

$$-\frac{(2j+1)\pi}{mn'} + \frac{\eta}{n'} + \frac{2(h-1)\pi}{n'} < \theta < -\frac{(2j-1)\pi}{mn'} - \frac{\eta}{n'} + \frac{2h\pi}{n'}.$$

En définitive, on saura donc calculer ⁽¹⁾ $mn-l$ intégrales de

(1) En partant d'un même point s'_j et en donnant successivement à h les valeurs 1, ..., $mn-l$, on obtiendra $mn-l$ intégrales et $mn-l$ secteurs du type

(\bar{E}'), qui convergeront, chacune, dans un secteur d'amplitude voisine de $\frac{2(m+1)\pi}{mn-l}$, et, par suite, en tout point x , suffisamment éloigné (et n'appartenant pas à des échancrures analogues à celles du n° 17), on connaîtra $m+1$ intégrales liées par une relation linéaire à coefficients constants. Leur ensemble constituera un système (\bar{S}') de $mn-l$ relations, de forme analogue à ($\overline{32\ bis}$), et que nous appellerons encore les relations de structure du point irrégulier (que nous dirons encore de rang n); nous allons montrer comment on peut utiliser ces relations dans la recherche des valeurs-limites des invariants de seconde espèce du groupe de monodromie de (E').

54. LIMITES DES INVARIANTS DU GROUPE DE MONODROMIE DE (E'). — Soit (S) le système des mn relations à coefficients constants qu'on a appris à calculer pour (E') au n° 25. Moyennant une transformation linéaire ⁽¹⁾ sur les équations de (S), on peut toujours supposer qu'il se décompose en deux groupes de relations : l'un, (S_1), formé de $mn-l$ relations qui, à la limite,

précédent. Il pourrait donc sembler que, en procédant de même avec chaque point s_j , on devrait obtenir en tout $m(mn-l)$ intégrales et $m(mn-l)$ secteurs. Mais il faut remarquer que l'ensemble d'intégrales (et de secteurs) qu'on aura ainsi formé sera le même quel que soit le point s_j d'où l'on sera parti. En effet, m et l étant premiers entre eux, l'ensemble des entiers $2hm-2j$, où j est fixe, tandis que h varie de 1 à $mn-l$ forme un système complet par rapport au module $mn-l (= mn')$; les frontières des secteurs \bar{V} sont donc indépendantes de la valeur attribuée à j . Supposons alors que les deux couples (h_1, j_1) , (h_2, j_2) conduisent au même arc \bar{X}' et au même secteur \bar{V}' . En tout point de \bar{X}' , les arguments de $x^n = x^{\frac{n-l}{m}}$ différeront de $2(h_2-h_1)\pi - \frac{2(j_2-j_1)\pi}{m}$; la racine $e^{\frac{2j_1\pi i}{m}} x^n$, introduite par $\bar{\omega}$ et figurant au premier calcul, aura bien même argument que la racine analogue $e^{\frac{2j_2\pi i}{m}} x^n$ du second calcul. Les deux intégrales, provenant de quadratures successives étendues au même arc, et portant sur des fonctions identiques, seront donc identiques sur cet arc, et, par suite, sur le secteur qu'il balaie.

(1) Cf. la transformation analogue du n° 25 (note (2) de la p. 162).

tendent vers les $mn - l$ relations de $(\overline{S'})$; l'autre, (S_2) , composé de l relations dont chacune contient une des l intégrales évanouissantes. Calculons alors pour les équations de (S_1) toutes les combinaisons K_{μ}^i (n° 24) qui sont distinctes les unes des autres lorsqu'on ne tient pas compte de la relation (31); ces combinaisons sont au nombre de $(m-1)(mn-l-1)$. Considérées comme des invariants du groupe (G) de (E') , elles ne seront d'ailleurs pas toutes distinctes; mais leurs valeurs-limites, pour $\varepsilon = 0$, se retrouveront dans les combinaisons analogues qu'on obtiendrait au moyen des équations de $(\overline{S'})$; enfin, appliqué à (S_2) , le même procédé fournirait encore un système de $(m-1)l$ combinaisons analogues aux K_{μ}^i .

Mais nous n'avons pas encore tenu compte de la relation (31). Or, en un point quelconque x , de (s) , choisissons, d'une façon quelconque, m intégrales parmi les $m+1$ qu'on sait y calculer; puis décrivons, à partir de x , un circuit fermé quelconque, intérieur à (s) , et entourant le point O , de façon à traverser tous les secteurs ∇ . Lorsqu'on sera revenu en x , après avoir décrit le circuit, les m déterminations primitives de ces intégrales auront été remplacées par m déterminations nouvelles qu'on peut calculer en fonction des premières, soit au moyen du système (S_1) , soit au moyen de la relation (31). Comme au n° 24, cela nous fournira $m(m-1)$ relations entre les invariants provenant de (S_1) , et, pour $\varepsilon = 0$, ces relations tendront vers des limites bien déterminées. Nous obtiendrons donc ainsi pour l'équation (E') $(m-1)[m(n-1)-l-1]$ invariants de seconde espèce tendant vers des limites bien déterminées, qu'on calculera d'ailleurs par l'application d'un procédé analogue aux relations $(\overline{S'})$ de $(\overline{E'})$. Enfin, joints aux précédents, les $l(m-1)$ invariants provenant de (S_2) viendront compléter le système des $(m-1)[m(n-1)-l-1]$ invariants de deuxième espèce qui ont été définis au n° 24.

Ces invariants proviennent de relations entre des intégrales évanouissantes de (E') ; pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, ils ne pourront plus être évalués au moyen d'un calcul par applications successives effectué à l'intérieur de la région normale (S) .

En résumé, lorsque (E') tend vers (\bar{E}') , il n'existe que $(m-1)[m(n-1)-l-1]$ invariants de deuxième espèce ⁽¹⁾ de (E') dont on puisse évaluer les limites par des calculs analogues, effectués sur les relations de structure du point irrégulier de l'équation-limite, (\bar{E}') ⁽²⁾.

33. LE PROBLÈME DE RIEMANN GÉNÉRALISÉ. RETOUR AUX ÉQUATIONS NOUVELLES DE M. PAINLEVÉ. — Les considérations que nous avons développées aux nos **23** et **34** nous conduisent, tout naturellement, à généraliser le problème de Riemann pour une équation linéaire quelconque.

Nous l'énoncerons de la façon suivante :

Soit

$$(C) \quad A_0 y^{(m)} + A_1 y^{(m-1)} + \dots + A_m y = 0$$

une équation linéaire dont les coefficients sont des polynomes de formes données, et qui possède, par conséquent, des singularités (régulières ou IRRÉGULIÈRES) de nature donnée. Peut-on choisir les coefficients de ces polynomes de telle sorte que les invariants du groupe de monodromie de (C) et de ses points irréguliers aient des valeurs données ?

Les résultats que nous avons obtenus montrent que le problème de Riemann généralisé n'est, au fond, qu'un cas-limite du problème primitif; il n'existe entre ces deux problèmes aucune différence spécifique : on peut donc regarder comme extrêmement probable que la solution du problème classique de Riemann

⁽¹⁾ Au sujet des invariants de première espèce, on se reportera aux remarques du n^o **25**.

⁽²⁾ On étendrait aisément au cas actuel les résultats des nos **27** et **28**. Ajoutons encore qu'on pouvait envisager (\bar{E}') comme la limite de (\bar{E}'') (n^o **31**); pour cette dernière équation, l'hypothèse fondamentale est réalisée. On aurait traité le passage à la limite en introduisant comme chemins d'intégration les courbes \mathcal{L}'' du n^o **32**. Mais l'interprétation des résultats aurait été moins simple par cette voie que par celle que nous avons suivie.

entraînera comme conséquence naturelle celle du problème généralisé.

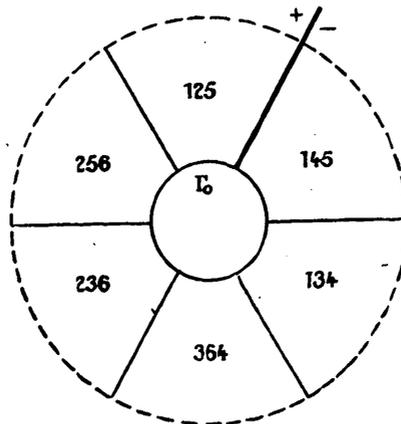
Bien entendu, il ne saurait être question, ici, d'aborder la solution de ces problèmes. Je voudrais seulement montrer comment, en cherchant à résoudre dans un cas particulier le problème de Riemann généralisé, on se trouve ramené, presque aussitôt, aux équations nouvelles de M. Painlevé.

Considérons donc une équation linéaire (\bar{E}), d'ordre $m = 2$, possédant un seul point effectivement singulier, soit $x = x_*$, de rang $n = 3$; l'hypothèse fondamentale du n° 7 étant d'abord supposée réalisée, il existera actuellement six intégrales normales \bar{y}^i (cf. n° 27); pour abrégier l'écriture, posons

$$\bar{y}_1^1 \equiv y_1, \quad \bar{y}_1^2 \equiv y_2, \quad \bar{y}_1^3 \equiv y_3, \quad \bar{y}_2^1 \equiv y_4, \quad \bar{y}_2^2 \equiv y_5, \quad \bar{y}_2^3 \equiv y_6.$$

La région illimitée (\bar{s}) sera divisée en six secteurs à l'intérieur de chacun desquels on connaîtra trois intégrales y_i dont les indices

Fig. 16.



sont donnés par le schéma ci-dessus ⁽¹⁾. En se reportant aux remarques du n° 27, on pourra donc écrire les relations de struc-

(1) Pour simplifier, on a supprimé les échancrures.

ture du point irrégulier sous la forme suivante (1) :

$$(49) \quad \begin{cases} y_2 - y_1 = a_3 y_5, & y_6 - y_5 = a_2 y_2, \\ y_3 - y_2 = a_6 y_6, & y_4 - y_6 = a_3 y_3, \\ y_1 - y_3 = a_4 y_4, & y_5 - y_4 = a_1 y_1. \end{cases}$$

Quant aux invariants indépendants du point irrégulier, ils sont au nombre de $(m-1)[m(n-1)-1] = 3$; pour ces invariants, on pourra adopter les valeurs des produits

$$a_2 a_3, \quad a_2 a_6, \quad a_3 a_6.$$

Cela étant, posons-nous la question suivante : *Peut-on choisir pour les coefficients $a^1, a^{(2)}$, figurant dans (\bar{E}) (n° 6), des fonctions d'un paramètre t telles que, quelle que soit la valeur attribuée à t , les invariants du point irrégulier aient des valeurs fixes, données une fois pour toutes ?*

Or, moyennant la substitution $y_i | \lambda_i y_i$ effectuée sur les

$$y_i \quad (i = 4, 5, 6),$$

on peut toujours supposer que a_5, a_6, a_4 sont indépendants de t ; a_1, a_2, a_3 devront donc être, aussi, indépendants de t . Déterminons alors deux fonctions de x , $A(x)$ et $B(x)$ par les relations

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} = A y_1 + B \frac{\partial y_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} = A y_2 + B \frac{\partial y_2}{\partial x}. \end{cases}$$

Le point x_∞ étant la seule singularité effective de (\bar{E}) , les seuls points singuliers que $A(x)$ et $B(x)$ peuvent admettre à distance finie sont des pôles [à savoir : les points apparemment singuliers de (\bar{E})]. De plus, les relations (50) montrent que, x s'éloignant à

(1) Si l'on trace une coupure entre les secteurs (145) et (125) (fig. 16), les symboles y_1 et y_5 figurant dans la première (dernière) ligne de (49) représenteront les valeurs de ces intégrales sur le bord positif (négatif) de la coupure. On sait d'ailleurs qu'on n'a pas à faire état des relations de la dernière ligne (par exemple pour le calcul des invariants du point irrégulier. (cf. n° 25, note de la p. 163).

l'infini en restant dans les secteurs (125), (256), $A(x)$ et $B(x)$ se comportent comme des polynômes. Cela ne suffirait pas d'ailleurs pour qu'on puisse affirmer que $A(x)$ et $B(x)$ sont rationnelles; mais en vertu des équations (49), où LES PRODUITS $a_i a_j$ SONT INDÉPENDANTS DE t ($i \leq 3, j \geq 4$), l'assertion relative à (125) et (256) s'étend de proche en proche à tous les secteurs : $A(x)$ et $B(x)$ sont donc bien des fonctions rationnelles de x .

Nous sommes alors ramenés au problème suivant, résolu dans ma Thèse (1), sous des hypothèses plus générales :

Étant donnée une équation linéaire du second ordre

$$(51) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p(x)y,$$

possédant un seul point effectivement singulier, $x = x_0$, choisir pour les coefficients de la fonction rationnelle $p(x)$ des fonctions d'un paramètre t telles qu'on puisse adjoindre à (51) une relation linéaire

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A y + B \frac{\partial y}{\partial x}$$

formant avec elle un système complètement intégrable.

Il suffit de se reporter aux résultats que j'ai obtenus (*loc. cit.*) pour aboutir à la conclusion suivante : Si l'équation (\bar{E}) ne possède aucun point apparemment singulier, le problème est impossible [car les invariants ne pourront être indépendants du paramètre t que si celui-ci ne figure pas dans la fonction $p(x)$]. Supposons donc qu'il y ait un point apparemment singulier, $x = \lambda$; on trouve alors

$$A(x) = \frac{1}{4(x-\lambda)^2}, \quad B(x) = \frac{1}{2(x-\lambda)},$$

et $B(x)$ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^3 B}{\partial x^3} - 4p \frac{\partial B}{\partial x} - 2 \frac{\partial p}{\partial x} B + 2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

On en déduit aisément que, moyennant des transformations

(1) *Ann. sc. École Normale supérieure*, 3^e série, t. XXIX, 1912, p. 39.

simples sur x, y, λ , et un changement de variable sur t , on peut écrire

$$p(x) \equiv p_{II}(x) = x^3 - \lambda^3 + t(x^2 - \lambda^2) + 2c(x - \lambda) + \frac{3}{4(x - \lambda)^2} - \frac{\lambda'}{x - \lambda} + \lambda^{1/2},$$

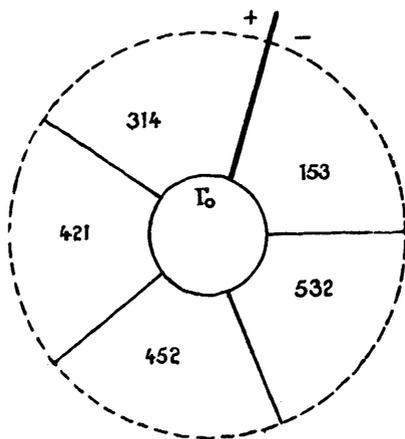
avec $\lambda' \equiv \frac{d\lambda}{dt}$, et λ étant une intégrale de l'équation

$$\lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + c,$$

qui n'est autre que l'équation (II) de M. Painlevé. On voit ainsi que l'équation (\bar{E}), que nous appellerons (E_{II}), dépend de trois constantes : c , et les deux constantes arbitraires qui figurent dans l'expression de l'intégrale générale de (II). Résoudre le problème généralisé de Riemann pour l'équation (E_{II}) reviendrait à établir qu'on peut toujours disposer de c et des constantes d'intégration de (II) de telle sorte que les invariants du point x_0 aient des valeurs données.

On aboutit à des résultats entièrement analogues lorsque l'hypothèse fondamentale du n° 7 n'est plus réalisée : on est alors

Fig. 17.



dans le cas du n° 31, avec $m = 2, n = 3, l = 1$. Bornons-nous à l'énoncé des résultats.

La région (\bar{s}) est alors divisée en cinq secteurs, et l'on connaît cinq intégrales canoniques y_i . Le schéma ci-dessus montre qu'à l'intérieur de l'un de ces secteurs on peut calculer trois intégrales;

l'ensemble des relations de structure qui lient ces intégrales trois à trois peut s'écrire

$$y_2 - y_1 = a'_4 y_3,$$

$$y_3 - y_2 = a'_5 y_5,$$

$$y_4 - y_3 = a'_1 y_1,$$

$$y_5 - y_4 = a'_2 y_2,$$

$$y_1 - y_5 = a'_3 y_3,$$

et, actuellement, il n'y a plus que deux invariants (n° 34), $a'_1 a'_4$ et $a'_2 a'_5$, par exemple. Cherchons maintenant à résoudre pour l'équation linéaire correspondante le problème analogue à celui que nous avons traité pour l'équation précédente; $A(x)$ et $B(x)$ conservent leurs expressions antérieures, mais on a cette fois, moyennant un choix convenable des variables,

$$p(x) \equiv p_1(x) = 4(x^3 - \lambda^3) + 2t(x - \lambda) + \frac{3}{4(x - \lambda)^2} - \frac{\lambda'}{x - \lambda} + \lambda'^2,$$

λ satisfaisant à l'équation

$$\lambda'' = 6\lambda^2 + t,$$

qui est l'équation (I) de M. Painlevé. Pour résoudre le problème de Riemann pour l'équation (\bar{E}') correspondante, que nous appellerons (E_1), il faudrait donc montrer qu'on peut choisir une intégrale de (I) telle que $a'_1 a'_4$ et $a'_2 a'_5$ (par exemple) aient des valeurs arbitrairement données (1).

Inversement, si l'on quitte le domaine des équations linéaires

(1) On peut d'ailleurs déduire les résultats relatifs à E_1 de ceux qu'on a établis pour E_{II} . Effectivement, faisons dans E_{II} la substitution

$$t \left| - \frac{6}{\varepsilon^{10}} + \varepsilon^2 t, \quad \lambda \left| \frac{1}{\varepsilon^5} + \varepsilon \lambda, \quad x \left| \frac{1}{\varepsilon^3} + \varepsilon x, \quad c \left| \frac{4}{\varepsilon^{15}} + c \varepsilon^2,$$

E_{II} deviendra

$$\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon^6 [x^4 - \lambda^4 + t(x^2 - \lambda^2) + 2c(x - \lambda)] + p_1(x),$$

et, pour $\varepsilon = 0$, tendra vers E_1 . C'est précisément le passage à la limite de (\bar{E}'') à (\bar{E}') (n° 31).

pour celui des équations de M. Painlevé, les résultats précédents peuvent être interprétés de la façon suivante :

Les coefficients de p_{II} étant des fonctions de λ', λ, t , on peut dire que l'équation (II) admet les deux intégrales premières $a_2 a_3 = \text{const.}$, $a_2 a_6 = \text{const.}$ (où les premiers membres sont des fonctions de λ', λ, t); de même, (I) admet les deux intégrales premières

$$a'_1 a'_4 = \text{const.}, \quad a'_2 a'_5 = \text{const.}$$

Si l'on préfère, on peut encore énoncer les résultats précédents sous une forme un peu différente. Posons

$$\Omega_i = \frac{1}{y_i} \frac{dy_i}{dx}$$

(la notation s'appliquant à E_I et E_{II}); le rapport anharmonique

$$z \equiv (\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \Omega_{i_3}, \Omega_{i_4})$$

est indépendant de x ; les relations de structure permettent évidemment de l'exprimer au moyen des a_i (ou des a'_i); mais, comme z ne change pas quand on multiplie les y_i par des facteurs quelconques (indépendants de x), il ne peut dépendre que des invariants du point irrégulier : c'est d'ailleurs ce que vérifie aisément un calcul direct. On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'équation (II) (ou I) admet pour intégrales premières deux des rapports anharmoniques formés au moyen des dérivées logarithmiques des intégrales normales y_i (calculées d'ailleurs en un point quelconque).

Observons enfin que l'application des remarques du n° 29 nous ramènerait aussitôt aux quatre autres équations nouvelles de M. Painlevé. En effet, on peut envisager l'équation linéaire (E_{II}) comme une forme dégénérée d'une équation linéaire pourvue :

- 1° De quatre singularités régulières;
- 2° Ou, de deux singularités régulières, et d'une, irrégulière, de rang 1;
- 3° Ou, d'une singularité régulière, et d'une, irrégulière, de rang 2;

4° Ou, de deux singularités irrégulières de rang 1,

et, en outre, dans chaque cas, d'un point apparemment singulier. Effectivement, les quatre équations linéaires que j'ai données dans ma Thèse (p. 51-52) répondent, chacune, à l'une des quatre conditions précédentes; à chacune d'elles correspond l'une des équations irréductibles dues à M. Painlevé et à M. Gambier; à savoir: les équations (VI), (V), (IV) et (III) en conservant l'ordre adopté tout à l'heure. Chacune de ces équations irréductibles joue pour un problème de Riemann (classique ou généralisé) le même rôle que l'équation (II) (ou I) pour les problèmes généralisés que nous avons posés plus haut, et les résultats acquis pour ces deux dernières équations s'étendent aisément aux quatre autres. Ainsi, on peut dire que :

Chacune des six équations irréductibles de M. Painlevé admet comme intégrale première tout invariant du groupe de monodromie ou d'un point irrégulier de l'équation linéaire associée; ou encore, si l'on préfère: l'équation irréductible admet comme intégrale première tout rapport anharmonique formé au moyen des dérivées logarithmiques de quatre intégrales (canoniques ou normales) de l'équation linéaire associée.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
1 à 5. INTRODUCTION.....	99

PREMIÈRE PARTIE.

LES CHEMINS D'INTÉGRATION \mathcal{L}_k^h .

6. Les équations (\bar{E}) et (E)	111
7. Transformation de l'équation (E)	112
8. Établissement d'un algorithme d'approximations successives.....	115
9. Convergence des approximations.....	118
10. La condition a	120
11. La spirale Σ	122
12. La courbe \mathcal{L}	126
13. Les chemins \mathcal{L}_k^h	128
14. La condition b	129
15. Expression des intégrales $y_j(x)$ au moyen des intégrales canoniques. Intégrales paracanoniques.....	131

DEUXIÈME PARTIE.

LES SECTEURS Δ ET ∇ .

16. Les faisceaux $[\mathcal{L}^h]$	135
17. Les secteurs Δ	137
18. Extension de la théorie à l'équation (\bar{E})	141
19. Convergence des intégrales de (E) vers celles de (\bar{E}) . Secteurs ordinaires....	144
20. Secteurs mixtes.....	145
21. Retour aux intégrales canoniques. Le polygone de sustentation Π	150
22. Les secteurs canoniques ∇_{jh}	153
23. Recouvrement de la région normale (δ) par les secteurs canoniques ∇_{jh}	157

TROISIÈME PARTIE.

LES RELATIONS DE STRUCTURE DU POINT IRRÉGULIER.

	Pages.
24. Les invariants du groupe de monodromie d'une équation linéaire.....	160
25. Les relations de structure et les invariants du point irrégulier de (\bar{E}) : cas où les s_j forment un polygone convexe.....	162
26. Cas où le polygone des s_j n'est pas convexe.....	164
27. Les intégrales normales asymptotiquement équivalentes de (\bar{E}) . Leur origine.	167
28. Les lignes de zéros de l'intégrale générale de (\bar{E})	169

QUATRIÈME PARTIE.

GÉNÉRALISATIONS ET APPLICATIONS.

29. Généralisation du problème primitif.....	172
30. Les loxodromies des facteurs primaires de Weierstrass.....	174
31. Cas où l'équation caractéristique a des racines égales : les équations (\bar{E}') et (E') .	179
32. Les chemins d'intégration \mathcal{L}'	182
33. L'équation-limite (\bar{E}')	187
34. Limites des invariants du groupe de monodromie de (E')	189
35. Le problème de Riemann généralisé. Retour aux équations nouvelles de M. Painlevé.....	190

