// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 1 (1918), p. 47-245.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1918_8_1__47_0>

Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles [1];

PAR GASTON JULIA.

INTRODUCTION.

Le Mémoire que je soumets au jugement de l'Académie est consacré à l'étude de l'itération d'une fraction rationnelle, $z_1 = \varphi(z)$, dans tout le plan des z. Il n'y avait sur ce sujet, hors l'étude locale, que deux Notes de M. Fatou aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 15 octobre 1906 et du 21 mai 1917. Les résultats qu'il donne, fort intéressants, ne sont que des exemples qui utilisent des propriétés *particulières* de la fonction à étudier. On verra que ces exemples étaient les plus simples qu'on pût imaginer. J'ai tâché, dans ce Mémoire, prenant une fraction $\varphi(z)$ quelconque, de donner des propriétés qui fussent indépendantes de telle ou telle de ses particularités. J'ai voulu descendre du général au particulier, et je n'ai donné des exemples que pour montrer la *réalisation* des possibilités qu'une analyse, stricte et avare d'hypothèses *a priori*, me révélait. L'Académie estimera si j'ai réussi.

De mon point de vue, c'est une étude plus qualitative en quelque sorte que j'entreprenais. Je cherchais à discerner quelles pourraient être toutes les circonstances susceptibles de surgir. On verra, dans la suite, qu'un grand nombre étaient ignorées jusqu'à ce jour. Je n'ai pas la certitude de les avoir toutes épuisées, faute de temps et aussi de connaissances. Avant tout, il fallait montrer, par des exemples, que les possibilités révélées par l'analyse étaient effectives. Les exemples que j'ai donnés, nullements artificiels et toujours choisis pour éclairer une idée, j'ai voulu aussi les étudier à fond. Cette étude n'a pas été infructueuse, comme le montreront, je l'espére, les exemples des deuxième, troisième et quatrième Parties de ce Mémoire. Mais elle a été longue,

[1] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris : Grand Prix des Sciences mathématiques, 1918.

et mon temps était court. Il reste des questions à traiter. Je les indiquerai chaque fois que je le pourrai, sans être trop long.

La question qui domine cette étude est la suivante : *un point z étant donné dont les conséquents $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ forment un ensemble e, quelles sont les propriétés de l'ensemble e', dérivé de l'ensemble e.* L'étude locale avait abordé des cas où e' se composait d'un point ou d'un nombre fini de points (point limite à convergence régulière, et groupe circulaire limite). Plus généralement, ζ étant un point de e', un point limite de points de e, j'ai cherché dans quel domaine z pouvait varier de façon que ζ restât *fonction analytique de z*, sans singularités essentielles. Les exemples connus montraient que ζ pouvait être une constante dans une région du plan des z et une constante différente dans d'autres régions. Il fallait voir quels étaient les ensembles séparateurs, c'est-à-dire *l'ensemble de points tels que, z franchissant un tel ensemble, ζ cessât d'être fonction analytique de z.* Il fallait chercher les *singularités essentielles* de ζ considéré comme fonction de z. C'est l'objet de la première Partie de ce Mémoire.

M. Fatou avait montré sur des exemples (15 octobre 1906) que cet ensemble des singularités pouvait être parfait discontinu, ou continu linéaire. *Dans tous les cas, il contenait tous les points $z = \varphi_p(z)$* où $|\varphi'_p(z)| > 1$.

Je résolus d'étudier *a priori*, dans le cas général, l'ensemble E des points $z = \varphi_p(z)$ ($p = 1, 2, \ldots, \infty$) pour lesquels $|\varphi'_p(z)| > 1$. C'était un ensemble dénombrable. Les travaux de M. Montel sur les suites normales donnaient immédiatement des propriétés simples pour tout point P de E. *Dans tout cercle de centre* P, *les fonctions $\varphi(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ [itérées indéfinies de $\varphi(z)$] prennent à partir d'un certain rang toutes les valeurs complexes, sauf deux au plus et les cas où les valeurs exceptionnelles sont une ou deux sont définis nettement.* La comparaison de ce résultat avec le théorème classique de M. Picard sur les points singuliers essentiels me conduisait à penser que l'ensemble E, avec, naturellement, son dérivé E', constituait l'ensemble des singularités que je cherchais. Je reconnus que E' *contenait* E *et que* E' *était parfait :* tout point de E' possède d'ailleurs la propriété que nous venons de reconnaître aux points de E, et cette propriété *caractérise* les points de E', J'étudiai *la structure de* E' *sans aucune* hypothèse restrictive *à priori.* E' pouvait être discontinu, ou continu linéaire, ou continu superficiel. Je montrai facilement les deux premières possibilités sur des exemples, et pour la troisième, je montrai que E′ ne pouvait contenir une aire plane à deux dimensions sans contenir tout le plan. Par comparaison des éléments communs à la question présente et à celle qui vise la discontinuité propre ou impropre des *groupes automorphes* dans le plan, je fus conduit à penser que cette dernière éventualité pouvait se présenter, mais je n'ai pas réussi à la réaliser dans un exemple; les analogies sur lesquelles j'ai insisté prouvent, à tout le moins, qu'on ne pourra rejeter la possibilité pour E′ de recouvrir tout le plan que par une démonstration rigoureuse. Je n'ai pas réussi à la donner. En sorte que, sur ce point, je reste dans le doute. J'ai donné des critériums qui permettent, en pratique, de reconnaître les cas usuels où E′ n'est pas linéaire ou discontinu, et j'ai montré comment *la structure de E′ est la même dans toutes ses parties.* J'ai montré aussi, en particulier, sur les exemples de M. Fatou, comment la connaissance de propriétés particulières de $\varphi(z)$ pouvait être utilisée à étudier la structure E′.

Passant ensuite au cas où E′ ne contient pas tout le plan, je montrai, et c'est fondamental, que, dans toute région D ne contenant aucun point de E′, la suite des $\varphi_i(z)$ est normale, et par suite *tout point limite ζ de conséquents de z est fonction analytique de z dans* D. Le résultat cherché était donc acquis.

Tout point limite ζ de conséquents de z est fonction analytique de z tant que z ne rencontre aucun point de l'ensemble E′. *L'ensemble* E′ *constitue donc bien l'ensemble des singularités essentielles pour toute fonction limite de fonctions extraites de la suite de $\varphi_i(z)$.* Cette remarque rapproche du théorème de M. Picard le théorème que j'ai démontré sur les valeurs exceptionnelles de la suite des $\varphi_i(z)$ autour de tout point de E′. La question posée se trouvait donc théoriquement résolue : si l'on considère les diverses régions que E′ délimite dans le plan (il n'y en a qu'une si E′ est partout discontinu) et si l'on connaît l'allure de la suite des $\varphi_i(z)$ dans une *partie arbitrairement petite* de chacune de ces régions, on connaîtra cette allure dans chacune des régions *considérée dans toute son étendue ;* le problème revient à celui du prolongement analytique, toute fonction limite de fonctions $\varphi_i(z)$ étant analytique dans toute l'étendue de la région considérée. J'ai dit tout l'essentiel de la première Partie de mon Mémoire. Elle est d'ordre tout à fait général, comme on l'a vu.

Mais c'est là une solution *théorique* et l'on sait que ces solutions ne satisfont jamais pleinement. Poincaré disait avec beaucoup de finesse : « Il n'y a plus de problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus, etc. »

Cet ensemble E′ qui, théoriquement, est bien défini, à l'aide de E dont la construction point par point exige déjà la résolution d'une infinité dénombrable d'équations algébriques, il fallait voir d'une façon nette ses propriétés géométriques. Cela n'est possible tout à fait que dans des cas extrêmement particuliers comme celui des fractions à *cercle fondamental*. Dans la plupart des cas, il faut se résigner à moins de précision. Il en est de même pour l'étude de *toutes les fonctions limites* de la suite des $\varphi_i(z)$ dans une des régions de plan que délimite E′. Je n'ai pu la faire qu'à partir de l'étude locale entamée par mes prédécesseurs, mais au prix d'hypothèses supplémentaires. J'ai en effet appliqué, dans la deuxième Partie de ce Mémoire, les résultats généraux obtenus dans la première, à l'étude de la *convergence régulière ou périodique vers un point ou un groupe circulaire limite* [c'est-à-dire les points $\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$ ou les groupes $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$, définis par $\zeta = \varphi_p(\zeta), \zeta_i = \varphi(\zeta_{i-1})$, $|\varphi'_p(\zeta)| < 1$]. Supposer l'existence d'un tel point ou d'un tel groupe, est une hypothèse supplémentaire, car on peut facilement construire des fractions $\varphi(z)$ pour lesquelles toute racine de $z = \varphi(z)$ rend $|\varphi'(z)| > 1$. Je n'ai cependant réussi, ni à construire une fraction pour laquelle toute racine de $z = \varphi_p(z)$ rend $|\varphi'_p(z)| > 1$, quel que soit p, ni à montrer que pour toute fraction $\varphi(z)$ il y a nécessairement un nombre p et une racine de l'équation $z = \varphi_p(z)$ qui rende $|\varphi'_p(z)| < 1$. Il est facile, en prenant une fraction SINGULIÈRE à cercle fondamental par exemple, fraction pour laquelle le point-limite unique pour tout le plan, sauf E′ est un point de E′, de vérifier qu'on peut avoir, pour toute racine de $z = \varphi_p(z)$, $|\varphi'_p(z)| \geqq 1$ quel que soit p (mais, dans le cas cité, il y en a une pour laquelle $\varphi'(z) = 1$).

Mais, en admettant l'existence d'un point-limite ou d'un groupe circulaire limite (ce qu'il est facile de reconnaître dans chaque cas particulier), on peut rechercher quel est le domaine de convergence vers ce point ou vers ce groupe, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les conséquents tendent régulièrement vers le point-limite ou, périodiquement, vers les points du groupe circulaire limite. On montre que tout point limite, ou tout point d'un groupe circulaire limite est intérieur à une région R d'un seul tenant limitée par l'ensemble E′ [1] (je veux dire que tous ses points frontières sont points de E′) dont tout point intérieur a des conséquents qui tendent régulièrement vers le point-limite ou, périodiquement, vers les points du groupe circulaire limite.

---

[1] Ici E′ ne peut être que continu linéaire, ou discontinu.

R sera le *domaine immédiat de convergence vers le point-limite;* pour les groupes limites, l'ensemble des p domaines R relatifs aux p points du groupe sera le *domaine immédiat de convergence vers le groupe.*

C'est un résultat capital que tout domaine immédiat de convergence vers un point ou un groupe limite *contient un point critique de la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$*, point qui est conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$ également contenu dans le domaine immédiat considéré. D'où la *limitation du nombre des points et des groupes circulaires limites pour une fraction quelconque.*

Mais le *domaine total de convergence*, vers un point ou un groupe limite, peut être plus étendu que le domaine immédiat; il se compose alors d'une *infinité de régions séparées, sans connexion entre elles, séparées par E', toutes limitées par des points de E'*. Toutes ces régions sont antécédentes successives du domaine immédiat et le *domaine total* de convergence vers un point ou un groupe limite *a pour frontière tout l'ensemble E'.*

Il est facile, en étudiant la connexion d'un domaine immédiat, de prouver qu'il est simplement connexe ou d'un ordre de connexion infini. On en déduit, entre autres conséquences, que, *dès que le nombre des points limites dépasse* 2 (chaque point d'un groupe circulaire limite comptant pour un dans ce nombre), *un de ces points au plus aura un domaine total, d'un seul tenant, confondu avec son domaine immédiat, tous les autres ayant un domaine total formé d'une infinité d'aires.* La considération de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ de $\psi(z)$ est ici fort utile. Elle permet de se rendre compte des raisons naturelles de toutes ces particularités. Elle explique aussi la simplicité des résultats fournis par M. Faton dans ses deux Notes de 1906 et du 21 mai 1917. On traite aussi des exemples simples et déjà très généraux, assez variés. Puis on donne des exemples de circonstances nouvelles :

A. Domaine total à une infinité de pièces : 1° $z_1 = \dfrac{-z^3+3z}{2}$ pour lequel on étudie à fond le groupement de ces domaines et la distribution de E' dans le plan; 2° Exemples tirés de la règle de Newton.

B. Pour la connexion des domaines immédiats, exemple

$$z_1 = A\left[\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right],$$

où, pour A assez grand, le domaine R_∞ à connexion infinie est limité par une infinité de continus linéaires distincts, deux à deux extérieurs.

C. $z_1 = z^2 - 2$ qui prouve que E′ peut être un continu linéaire non fermé : le segment $(-2+2)$ de l'axe réel, par exemple. Il prouve aussi qu'un point critique de $\psi(z)$ ainsi qu'un point où $\varphi'(z) = 0$ peuvent être des points de E′.

Dans la troisième Partie, qui utilise les résultats de la deuxième, je me suis plus spécialement attaché à éclaircir la nature de E′, lorsqu'on reconnaît qne c'est un continu linéaire. M. Fatou, en 1906, s'aidant de considérations sur les équations fonctionnelles, donnait l'exemple $z_1 = \frac{z+z^2}{2}$ où E′ n'était pas analytique; encore fallait-il en avoir une raison plus géométrique, indépendante des équations fonctionnelles, et voir pourquoi E′ n'était pas analytique.

Je donne des exemples très généraux où, à l'aide d'hypothèses sur $\varphi(z)$ *qui sont des inégalités*, je réussis à montrer directement que E′ est une *courbe continue de Jordan fermée et simple*. Il en est ainsi pour l'exemple $z_1 = \frac{z+z^2}{2}$ en particulier. Sur cette courbe de Jordan, les points de E, partout denses, sont, en général, *des points où la courbe n'a même pas de tangente*. [Il suffit qu'en ce point $z = \varphi_p(z)$, $\varphi'_p(z)$ ne soit pas réel, pour qu'on puisse affirmer l'absence de tangente; c'est bien là le cas général.]

Pour d'autres exemples, $z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}$ en particulier, je montre que E′ est une courbe Γ *continue*, fermée, représentable par

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

f et g étant continus dans $a \leq t \leq b$, mais *ayant des points doubles partout denses sur elle-même*, formée par la réunion d'une infinité de courbes $\mathfrak{C}$ (¹) dont *chacune est une courbe de Jordan simple fermée*, tout point d'une courbe $\mathfrak{C}$ étant point limite de courbes $\mathfrak{C}$ qui sont extérieures à celle que l'on considère, et dont les dimensions tendent vers zéro. Je donne d'ailleurs (2ᵉ Partie) un schéma qui permet de se représenter une telle courbe Γ.

Enfin dans la quatrième Partie, j'ai étudié complètement les convergences singulières vers un point-limite singulier

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta},$$

(¹) Et par les points limites de ces courbes $\mathfrak{C}$.

ou vers un groupe singulier issu de

$$\zeta = \varphi_p(\zeta), \qquad \varphi'_p(\zeta) = e^{i\theta},$$

θ étant réel et commensurable à 2π.

Un tel point ζ est toujours de E′ mais est limite des conséquents des points d'un domaine R, contigu à ζ, limité par E′. R s'appelle *domaine immédiat de convergence* vers ζ (même chose pour un groupe limite singulier). J'étends la notion de *domaine total* et je donne des exemples où ce domaine total compte une *infinité d'aires*, E′ étant courbe continue à points doubles partout denses sur elle-même ($z_1 = z + z^3$) comme dans l'exemple $z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}$. Le domaine immédiat contient toujours, ici encore, un point critique de $\psi(z)$.

J'ai été moins heureux dans l'étude des points

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$$

lorsque θ est incommensurable à 2π, et je n'ai pu que réduire les possibilités à deux qui, pour un exemple donné, s'excluent mutuellement.

1° *Ou bien ζ n'est pas de* E′; alors c'est un *centre*, il est intérieur à une région R (¹) du plan, limitée par E′, sillonnée de courbes analytiques qui entourent ζ, conservées par $z_1 = \varphi(z)$ et sur chacune desquelles les conséquents d'un point de cette courbe sont partout denses. Alors aussi l'équation de Schrœder

$$F[\varphi(z)] = e^{i\theta} F(z)$$

a une solution holomorphe dans tout R. ζ *n'est point limite pour les conséquents d'aucun point du plan.*

2° *Ou bien ζ est de* E′, et l'on peut le reconnaître à ce que c'est un point limite pour les conséquents d'un *point critique* de la branche de $\psi(z)$ qui égale ζ au point ζ.

Je n'ai pu former d'exemple de fonction rationnelle $\varphi(z)$ ni pour 1°, ni pour 2°. Je reste donc ici encore dans le doute. Si la première possibilité pouvait se trouver vérifiée, on aurait un exemple où la suite des $\varphi_i(z)$ admet dans R une fonction limite *non constante;* par

(¹) R, ni aucune des régions antécédentes de R, ne doivent alors contenir de point critique de $\psi(z)$.

exemple, z serait limite de fonctions $\varphi_{n_1}(z)$, $\varphi_{n_2}(z)$, ..., d'indices convenablement choisis, de façon que $e^{n_1 i\theta}$, $e^{n_2 i\theta}$, ... tendent vers 1. Dans R on aurait un développement de z en série de fractions rationnelles qui convergerait uniformément dans toute aire intérieure à R. Ce sont là des résultats connus de la théorie des fonctions, mais intéressants à retrouver ici.

Il reste, on l'a déjà vu, bien des questions à traiter. J'aurais pu aussi appliquer les résultats obtenus ici aux équations fonctionnelles bien connues depuis les travaux de M. Kœnigs et de ses successeurs. Cela sortait de l'objet propre de ce Mémoire qui est l'étude de l'itération elle-même : peut-être reviendrai-je ultérieurement sur les questions ainsi laissées en suspens.

Préliminaires.

J'aurai besoin, dans le Mémoire qu'on va lire, de certains résultats de la théorie des fonctions qui ne sont pas tous classiques et dont la plupart sont, à l'heure actuelle, disséminés dans diverses revues ou publications mathématiques. Je vais donc, dans ces préliminaires, rappeler ces résultats en renvoyant le plus souvent aux Ouvrages originaux pour leur démonstration. J'ajouterai aussi quelquefois et plus particulièrement aux paragraphes 4 et 5 qui traitent de diverses questions de représentation conforme, certaines modifications ou additions aux résultats connus jusqu'ici qui me seront utiles dans la suite. J'ai pensé qu'ainsi se trouverait allégée l'exposition du Mémoire, et plus facile à suivre le développement propre de la question qu'il traite : itération des fractions rationnelles.

1. *Rappel de résultats connus sur l'itération en général* (*Voir* Kœnigs, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1884, Supplément n° 2 et n^{os} 24, 25). — 1° Si $\varphi(z)$ est une fonction analytique de z dans une région R du plan qui contient une racine ζ de l'équation

$$\varphi(\zeta) - \zeta = 0$$

pour laquelle $|\varphi'(\zeta)| < 1$, on peut entourer ζ d'un cercle C_ζ de centre ζ de rayon assez petit ρ tel que, si $|z - \zeta| < \rho$, on ait aussi

$$|\varphi(z) - \zeta| < H\rho,$$

H étant un certain nombre positif compris entre 0 et 1.

ζ est dit point-limite à convergence régulière, car les conséquents z_i d'un point z quelconque intérieur à C

$$[z_1 = \varphi(z), \ldots, z_i = \varphi(z_{i-1}), \ldots]$$

tendent vers ζ et vers ζ seulement.

2° Supposons que dans la région R où $\varphi(z)$ est analytique, on trouve un système de n points distincts $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ qui soit un *groupe circulaire limite*, c'est-à-dire tel que

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \qquad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1) = \varphi_2(\zeta), \qquad \ldots, \qquad \zeta_{n-1} = \varphi(\zeta_{n-2}) = \varphi_{n-1}(\zeta),$$
$$\zeta = \varphi(\zeta_{n-1}) = \varphi_n(\zeta) \qquad \text{avec} \qquad |\varphi'(\zeta).\varphi'(\zeta_1), \ldots, \varphi'(\zeta_{n-1})| < 1 \quad (^1).$$

Les n points sont permutés circulairement par $[z, \varphi(z)]$. On démontre que tout point ζ_i du groupe est le centre d'un cercle C_i à l'intérieur duquel

$$\left|\frac{\varphi_n(z) - \zeta_i}{z - \zeta_i}\right| < H_i < 1,$$

H_i étant entre o et 1.

On peut aussi entourer chacun des ζ_i d'un cercle C'_i, assez petit, intérieur à C_i, tel que si z est intérieur à C'_i, ses conséquents z_1, $z_2, \ldots, z_{n-1}$ soient respectivement à l'intérieur de $C_{i+1}, C_{i+2}, \ldots, C_{i-1}$ pris dans l'ordre circulaire à partir de C_{i+1}. Si alors on part d'un point z intérieur à C'_i, on revient avec z_n dans C_i et à une distance de ζ_i inférieure à celle de z à ζ_i $[|z_n - \zeta_i| < H_i|z - \zeta_i|]$; puis les points $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots$ tomberont comme $z_1, z_2, \ldots$ dans les cercles C_{i+1}, $C_{i+2}, \ldots$ mais plus près de $\zeta_{i+1}, \zeta_{i+2}, \ldots$ que $z_1, z_2, \ldots$. Les points z, $z_n, z_{2n} \ldots$ auront ζ_i et ζ_i seul pour limite; les points $z_1, z_{n+1}, z_{2n+1}, \ldots$ auront ζ_{i+1} pour limite, etc.

La suite $z, z_1, z_2, \ldots$ convergera donc périodiquement vers chacun des points ζ_i du groupe circulaire limite.

2. *Les familles normales de fonctions analytiques.* — Cette notion a été introduite par M. Montel, dans différents Mémoires parmi

---

(1) On pose d'habitude

$$\varphi[\varphi(z)] = \varphi_2(z), \qquad \varphi_2[\varphi(z)] = \varphi[\varphi_2(z)] = \varphi_3(z), \qquad \ldots,$$

et l'on a

$$\varphi'_n(z) = \varphi'(z) \times \varphi'(z_1) \quad \ldots \quad \times \varphi'(z_{n-1});$$

$z_1, \ldots, z_{n-1}$ étant les conséquents d'ordre 1, 2, ..., $(n-1)$ de z.

lesquels je citerai sa thèse, et deux Mémoires parus dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, en 1912 et 1916. Elle s'est montrée féconde dans plusieurs questions de théorie des fonctions traitées par divers auteurs et par M. Montel lui-même dans les Mémoires précédents. On verra dans la première Partie de ce Mémoire que cette notion m'a été très utile.

M. Montel dit qu'une famille de fonctions analytiques est *normale* dans un domaine D, si, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de D.

Il démontre (§ **2** à **6** du Mémoire de 1916) qu'une famille (F) de fonctions $f(z)$ bornées en ce point, possède, si elle est normale, les propriétés suivantes :

1° Les fonctions sont bornées dans l'intérieur de D.

2° Les fonctions sont également continues dans l'intérieur de D.

3° Les fonctions $f(z) - a$ ont, pour chaque valeur de a, un nombre fini de zéros à l'intérieur de D, si a n'est pas une fonction limite.

Les fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine D forment une famille normale. Une famille de fonctions holomorphes dans le cercle de rayon 1, à l'intérieur duquel elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, est une famille normale [§ **10**]. Les valeurs exceptionnelles 0 et 1 peuvent être remplacées par deux autres valeurs finies distinctes quelconques.

Dans le Chapitre IV de son Mémoire de 1916, M. Montel envisage les familles normales de fonctions méromorphes, qui sont pour nous les plus intéressantes. Une famille (F) de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D est dite *normale*, si, de toute suite infinie formée avec les fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément, dans le domaine ouvert D, vers une fonction limite. Cette fonction limite est une fonction méromorphe qui peut, dans certains cas, être une constante finie ou infinie (§ **27** et **28** du Mémoire cité, où la convergence uniforme est bien définie). Au paragraphe **31** on trouve le théorème fondamental : *Les fonctions $f(z)$ méromorphes dans le domaine* D *où elles ne prennent jamais les valeurs distinctes* a, b, c, *forment une famille normale.*

Aux paragraphes **33** et **34** on voit que, si les fonctions méromorphes d'une famille normale sont bornées en un point P du domaine D, il existe un cercle (c) de centre P tel qu'aucune des fonctions de la famille n'ait de pôle à l'intérieur de (c). D'autre part, si D' est un domaine complètement intérieur à D et contenant P, le nombre des pôles de chaque fonction contenus dans D' est inférieur à un nombre fixe.

Je rappelle enfin qu'au Chapitre III du Mémoire de 1912, on trouve quelques intéressantes propositions sur la convergence des séries de fonctions holomorphes, qui sont toutes déduites du théorème fondamental suivant (§ **30**).

Soit une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

holomorphes dans D et appartenant à une famille normale dans ce domaine.

1° Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D [1], elle converge dans tout le domaine;

2° Si la suite converge dans D, la convergence est uniforme dans l'intérieur de D.

5. *Rappel de notions sur les ensembles de points.* — On trouvera ces notions dans l'article de l'*Encyclopédie française des Sciences mathématiques* sur les ensembles de points, rédigé par M. Zoretti (t. II, vol. 1, fasc. 2) sous la rubrique : *Structure des ensembles fermés* (§ **10, 11, 12, 13, 14**).

On y verra ce qu'est un point *intérieur à un ensemble*, ce qu'est un ensemble *bien enchaîné entre deux de ses points*, ou *d'un seul tenant* entre ces points, un domaine ouvert (domaine W), une courbe de Jordan, etc.

Un point intérieur à un ensemble est tel que tous les points d'un cercle de rayon assez petit, ayant le point pour centre, appartiennent à l'ensemble. Les points frontières de l'ensemble ne sont pas intérieurs. Un domaine ouvert (domaine W) est un ensemble tel que :

1° Tout point de l'ensemble est *intérieur à l'ensemble;*

2° Deux points de l'ensemble peuvent toujours être joints par une ligne brisée dont tous les points appartiennent à l'ensemble.

Un ensemble bien enchaîné ou d'un seul tenant entre deux de ses

[1] C'est-à-dire ayant au moins un point limite intérieur à D.

points est tel que, quel que soit ε positif donné, on peut trouver une succession de points de l'ensemble commençant et finissant par les deux points donnés, et tels que la distance de chacun au suivant soit inférieure à ε.

Une ligne de Jordan simple est le lieu des points définis par des équations telles que

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

où l'on n'a jamais simultanément

$$f(a) = f(b), \qquad g(a) = g(b),$$

sauf pour $a = b$.

C'est une ligne continue sans point double.

Elle est *fermée* lorsque les égalités

$$f(a) = f(b), \qquad g(a) = g(b)$$

sont possibles simultanément pour $a = 0$, $b = 1$, et pour ces valeurs seulement.

M. Jordan a démontré ce résultat fondamental qu'une telle ligne fermée C divise le plan en deux régions, une dite *intérieure*, l'autre dite *extérieure* à C, et l'on ne peut tracer une ligne de Jordan simple, unissant un point extérieur à un point intérieur qui ne rencontre la courbe C en un point au moins.

4. *La représentation conforme des domaines simplement connexes sur l'intérieur d'un cercle. Propositions diverses sur la représentation conforme.* — On a souvent à considérer dans la théorie des fonctions des domaines qui se recouvrent eux-mêmes à la façon des surfaces de Riemann.

Dans son Mémoire *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (*Acta*, t. XXXI), Poincaré les définit d'une façon bien précise (*voir* § 2, définition des domaines D) de proche en proche par la méthode du prolongement analytique. Il définit ce qu'on appelle une ligne continue tracée dans un domaine, une ligne fermée, une aire continue dont tous les points font partie du domaine, et la frontière de cette aire. Le domaine est dit *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur ce domaine est la frontière complète d'une aire continue dont tous les points font partie du domaine.

Il établit dans ce Mémoire qu'on peut faire la représentation conforme de l'intérieur du domaine soit sur l'intérieur d'un cercle, soit sur le plan entier moins le point à l'infini, soit sur le plan complété par le point à l'infini (¹). Dans un Mémoire du Tome LXXII des *Math. Annalen*, M. Carathéodory reprend le cas où le domaine se représente conformément sur l'intérieur d'un cercle, Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle C et sur ce cercle, le point $z_1 = f(z)$ décrit, lorsque le point z décrit l'intérieur de C, l'intérieur d'un domaine D simplement connexe limité par un seul contour analytique, et D est de l'espèce indiquée plus haut : il peut se recouvrir lui-même, et il se recouvre lui-même en général. La fonction $z_1 = f(z)$ établit une correspondance conforme entre l'intérieur de C et l'intérieur du domaine D. En particulier, si le domaine D est un domaine borné ne se recouvrant pas, et défini comme la limite pour $i = \infty$ d'une suite de domaines $D_1, D_2, \ldots$, ne se recouvrant pas, limités chacun par une courbe analytique fermée C_i, tels que D_i contient D_{i-1} à son intérieur, si $f_i(z)$ est la fonction qui fait correspondre conformément l'intérieur du cercle $|z| < 1$ à l'intérieur du domaine D_i [avec la condition que $f_1(0) = f_2(0) = \ldots$ et que $f'_i(0)$ est réel], la suite des $f_i(z)$ converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$ dans l'intérieur de $|z| < 1$; $f(z)$ est analytique dans $|z| < 1$ et représente conformément l'intérieur $|z| < 1$ sur l'intérieur de D.

On peut admettre des domaines D contenant le point à l'infini, en admettant pour $f(z)$ des pôles à l'intérieur du cercle de représentation, cela nous arrivera souvent dans la suite, $f(z)$ étant fraction rationnelle. On passera alors, si l'on veut, à la sphère de Riemann pour supporter la variable z et les divers domaines : c'est là une conception familière aux géomètres.

Dans deux remarquables Mémoires du Tome LXXIII des *Math. Annalen*, M. Carathéodory représente uniformément l'intérieur d'un domaine borné G simplement connexe, ne se recouvrant pas lui-même sur l'intérieur du cercle $|z| < 1$ et il étudie la correspondance entre les points frontières de $|z| = 1$ et les points frontière du domaine G. Cette étude a été reprise plus simplement par M. Lindelöf (²).

(¹) Si le domaine a au moins deux points frontières distincts, c'est sur un cercle que se fait la représentation.

(²) LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*. Helsingfors, 1915.

La frontière de G est un continu linéaire [1], c'est-à-dire un ensemble bien enchaîné entre deux quelconques de ses points. Un point P de la frontière de G est dit *accessible* par l'intérieur de G si l'on peut trouver une ligne de Jordan simple, dont tous les points, sauf P, soient intérieurs à G, joignant ce point P à un point intérieur à G; cette ligne peut se composer d'un nombre fini de segments de droites ou d'une infinité de segments ayant P pour seul point limite. Les points accessibles de la frontière sont *partout denses sur cette frontière*.

Un point accessible P de la frontière est dit *simple* sur cette frontière lorsque, quelle que soit la ligne de Jordan simple fermée L issue de P, dont tous les points sont *intérieurs* au domaine G (sauf P), la région *intérieure à* L ne renferme que des points intérieurs à G, et jamais de point frontière de G. Cette définition, moins générale que celle de M. Carathéodory (§ 44 du Tome LXXIII), est ce que devient cette dernière lorsqu'on l'applique aux points *accessibles* (*voir* par exemple Lindelöf, § 14 du Mémoire cité, Helsingfors, 1915).

Une frontière dont tous les points sont accessibles et simples est une *courbe de Jordan simple fermée* (*voir* Carathéodory, § 48 du Tome LXXIII, ou Lindelöf, § 11, 12, 13, 14 du Mémoire de 1915, d'où cela résulte immédiatement).

M. Carathéodory a établi que l'on peut faire la représentation conforme de l'intérieur d'une courbe de Jordan simple fermée sur l'intérieur du cercle $|z| < 1$, et la correspondance ainsi établie entre les points de l'intérieur des deux courbes s'étend aux points frontières; il y a correspondance biunivoque et continue entre les points de la courbe de Jordan et ceux du cercle $|z| = 1$; si un point intérieur au cercle $|z| < 1$ tend continuement vers un point de ce cercle ($|z| = 1$), son image tendra continuement vers un point déterminé de la courbe de Jordan et réciproquement.

On a fait beaucoup de travaux sur les courbes de Jordan fermées. On sait qu'une telle courbe partage le plan en deux régions et que tout point de cette courbe est accessible par la région intérieure comme par la région extérieure. La réciproque a été établie. Tout continu linéaire divisant le plan en deux domaines sans point commun

---

(1) *Voir* par exemple Schönflies, *Die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 2e Partie, p. 115.

intérieur dont il est la frontière commune, et tel que tout point de ce continu soit accessible par l'intérieur de chacun des deux domaines, est une courbe de Jordan simple fermée (*voir* SCHŒNFLIES, *loc. cit.*, § 11 et 12 du Chapitre V).

5. *Quelques lemmes de la théorie des fonctions.* — Soit une aire simple D du plan analytique limitée par une courbe simple C (un cercle, par exemple) et supposons qu'une fonction $f(z)$ soit analytique dans D et sur C. Lorsque z décrit l'aire D, le point $z_1 = f(z)$ décrit une aire D_1 simplement connexe limitée par une courbe analytique fermée C_1 transformée de C. En général D_1 se recouvrira elle-même à la manière déjà indiquée précédemment d'une surface de Riemann [cela arrivera si $f(z)$ prend la même valeur en deux points distincts de l'aire D]. Nous imaginons les feuillets de l'aire D_1 étalés sur le *même plan que* D, et nous nous préoccupons surtout des cas où *l'aire* D *est tout entière intérieure à l'aire* D_1, c'est-à-dire où l'on peut trouver un feuillet de D_1 (1) sur lequel tous les points de D et de son contour soient des points *intérieurs à* D_1; il n'y a aucune équivoque possible là-dessus (et si même on avait pris pour D une aire se recouvrant elle-même, il serait encore possible de reconnaître si D est intérieur à D_1 en procédant, comme Poincaré le fait dans son Mémoire cité plus haut, par prolongement analytique à l'aide d'*éléments*).

Voici des exemples :

Dans les figures 1, 2, 3, D est *intérieur à* D_1; dans la figure 4, D n'est pas intérieur à D_1.

Dans la figure 5, D et D_1 sont des aires se recouvrant elles-mêmes et D est tout entière intérieure à D_1.

Il pourrait arriver que, dans D, la fonction $f(z)$ ait un pôle, alors l'aire D_1 serait une aire contenant le point à l'infini comme point intérieur, il n'y a rien là non plus d'essentiellement délicat. Mais, bien entendu, $f(z)$ n'a pas dans D ni sur C de point singulier essentiel. La relation $z_1 = f(z)$ établit donc une correspondance biunivoque et analytique entre les points intérieurs à D et les points intérieurs à D_1 (D_1, c'est essentiel, étant regardée comme ayant plusieurs feuillets, et deux points de même affixe z_1 situés sur des feuillets différents étant

(1) Le feuillet considéré D_1 n'aura donc pas de point de ramification à l'intérieur de D quand on suppose que D est une aire simple, à un seul feuillet, du plan analytique.

regardés comme deux points distincts de D_1) ainsi qu'entre les points de C et de C_1.

Il nous est loisible maintenant de faire une représentation conforme de l'intérieur de D_1 ([1]), sur l'intérieur du cercle $|Z| \leqq 1$ de façon que les points de C_1 correspondent biunivoquement et analytiquement aux

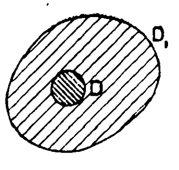

Fig. 1.

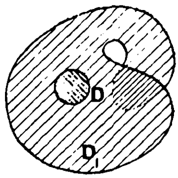

Fig. 2.

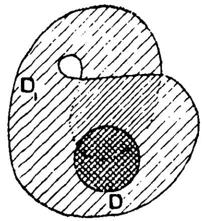

Fig. 3.

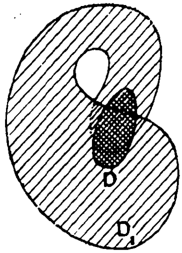

Fig. 4.

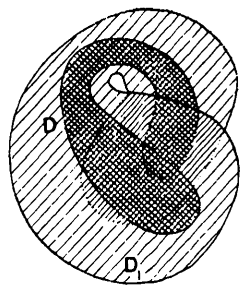

Fig. 5.

points de $|Z| = 1$. Alors D va être représenté conformément sur une aire $\mathcal{D}$ simplement connexe à un feuillet, limitée par une courbe analytique $\mathfrak{C}$ fermée sans point double, toute intérieure au cercle $|Z| = 1$ que j'appelle cercle $\mathfrak{C}_1$; j'appelle aussi ω_1 l'aire intérieure au cercle $|Z| \leqq 1$.

Nous dirons qu'un point Z intérieur à $\mathcal{D}_1$ qui correspond à un point z intérieur à D_1 dans la représentation conforme de D_1 sur ω_1 est son *image*.

Si nous considérons alors deux points z et z_1 respectivement inté-

---

([1]) Si D_1 contenait le point à l'infini, il n'y aurait qu'à envisager l'aire correspondant à D_1 sur la *sphère de Riemann* pour bien se rendre compte de ce qu'est la représentation conforme du point à l'infini et de son voisinage sur le voisinage d'un point intérieur à $\mathcal{D}_1$.

rieurs à D et D_1 et qui se correspondent biunivoquement et analytiquement par la relation $z_1 = f(z)$, leurs images Z et Z_1 seront deux points respectivement intérieurs à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ qui se correspondront aussi biunivoquement et analytiquement par une relation $Z_1 = F(Z)$, qu'on

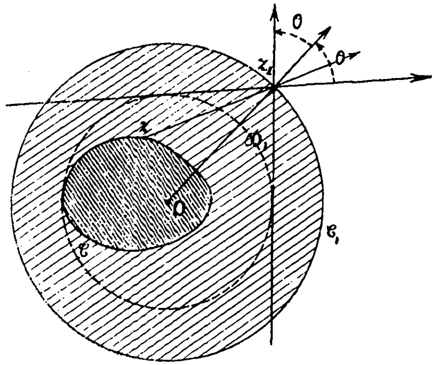

Fig. 6.

pourra appeler *relation transformée de la relation* $z_1 = f(z)$ par la représentation conforme auxiliaire. F(Z) sera analytique et uniforme dans $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{C}$, et sa fonction inverse sera analytique et uniforme dans $\mathcal{D}_1$ et sur $\mathcal{C}_1$. A tout point Z intérieur à $\mathcal{D}$ correspond un point Z_1 et un seul intérieur à $\mathcal{D}_1$ et réciproquement : la correspondance est analytique et s'étend aux frontières $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$.

La transformation conforme auxiliaire a pour but essentiel de ramener les aires D et D_1 à des aires simples à un seul feuillet. Lorsque Z décrit le contour $\mathcal{C}$ dans le sens positif, en ayant l'aire $\mathcal{D}$ à sa gauche, Z_1 décrira le contour $\mathcal{C}_1$ également dans le sens positif en ayant l'aire $\mathcal{D}_1$ à sa gauche. Dans ces conditions, on sait que le nombre des racines de l'équation

$$F(Z) - Z = 0.$$

intérieures au contour $\mathcal{C}$ est égal à la variation totale de l'argument de $F(Z) - Z$ lorsque Z décrit une fois le contour fermé $\mathcal{C}$ dans le sens positif. [Il faut en effet remarquer que $|F(Z)|$ étant $\leqq 1$ dans l'aire $\mathcal{D}$, la fonction $F(Z) - Z$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$, et n'y a aucun pôle.] Il faut donc étudier la variation totale de $\arg(Z_1 - Z)$ quand Z décrit $\mathcal{C}$ dans le sens positif.

Le cercle $\mathcal{C}_1$ a son centre à l'origine, et Z est toujours un point *intérieur au cercle* $\mathcal{C}_1$; donc

$$\arg Z_1 - \theta < \arg(Z_1 - Z) < \arg Z_1 + \theta \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

en définissant convenablement l'argument des nombres complexes précédents dans la position initiale de Z_1, *et en suivant ensuite ces arguments par continuité*. L'angle θ a une limite inférieure bien déterminée par ce fait que l'angle 2θ de bissectrice OZ_1 doit contenir à son intérieur le contour $\mathcal{C}$, quel que soit Z_1 sur $\mathcal{C}_1$. Puisque la variation totale de $\arg Z_1$ est égale à $+2\pi$, lorsque Z décrit $\mathcal{C}$ dans le sens positif, celle de $\arg(Z_1 - Z)$ sera aussi égale à $+2\pi$ dans les mêmes conditions.

Donc $F(Z) - Z = 0$ *a une racine et une seule à l'intérieur de* ω.

En soumettant le plan des Z à une substitution linéaire qui conserve le cercle $\mathcal{C}_1$, on peut supposer que cette racine a été amenée à l'origine, c'est-à-dire $F(0) = 0$.

Alors la fonction $Z_1 = F(Z)$ est telle que $Z = \Phi(Z_1)$, inverse de $F(Z)$, est une fonction holomorphe dans le cercle $\mathcal{C}_1$, $|Z_1| \leq 1$ et sur ce cercle; et l'on a

$$\Phi(0) = 0,$$

$$|\Phi(Z_1)| < 1 \qquad \text{quel que soit} \qquad |Z_1| \leq 1.$$

puisque $Z = \Phi(Z_1)$ est toujours dans ω ou sur $\mathcal{C}$ quand Z_1 est dans ω_1 ou sur $\mathcal{C}_1$. Si l'on développe $\Phi(Z_1)$ autour de l'origine, on a

$$\Phi(Z_1) = Z_1\Phi'(0) + \frac{Z_1^2}{2!}\Phi''(0) + \ldots$$

avec

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_1}\frac{\Phi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2},$$

d'après la formule de Cauchy. Or, sur $\mathcal{C}_1$, on a

$$|Z_1| = 1 \qquad \text{et} \qquad |\Phi(Z_1)| < 1.$$

Donc

$$\left|\int_{\mathcal{C}_1}\frac{\Phi(Z_1)\,dZ_1}{Z_1^2}\right| < \int_{\mathcal{C}_1}|dZ_1| = 2\pi.$$

Donc

$$|\Phi'(0)| < 1,$$

et par suite

$$|F'(0)| = \left|\frac{1}{\Phi'(0)}\right| > 1,$$

en revenant à $F(Z)$.

En résumé, nous avons établi que

$$F(o) = o. \qquad |F'(o)| > 1.$$

Voici une deuxième démonstration de cette dernière inégalité, basée sur un lemme intéressant de représentation conforme.

Le domaine ω contient l'origine. Il est représenté conformément sur le cercle $|Z_1| \leqq 1$ à l'aide de la fonction

$$Z_1 = F(Z).$$

l'origine se correspondant à elle-même.

La fonction $F(Z)$ nulle à l'origine est égale à 1 en module sur $\mathfrak{C}$. Il est bon de remarquer que $F'(o) \neq o$, car l'origine n'est pas point de ramification de ω_1. La fonction $\log\frac{1}{F(Z)}$ devient infinie à l'origine comme $\log\frac{1}{Z}$ et sur $\mathfrak{C}$ sa partie réelle est nulle. Cette partie réelle est $\log\frac{1}{|F(Z)|}$, c'est une fonction harmonique de X, Y ($Z = X + iY$) nulle sur $\mathfrak{C}$, qui devient infinie en O comme $\log\frac{1}{|Z|}$. C'est la fonction de Green du contour $\mathfrak{C}$ relativement à l'origine.

Si l'on développe $F(Z)$ autour de l'origine, on a

$$F(Z) = Z\,F'(o) + \frac{Z^2}{2!}F''(o) + \ldots,$$

$$|F(Z)| = |Z|\left|F'(o) + \frac{Z}{2!}F''(o) + \ldots\right|$$

et

$$\log\frac{1}{|F(Z)|} = \log\frac{1}{|Z|} + \log\frac{1}{\left|F'(o) + \frac{Z}{2}F''(o) + \ldots\right|}$$

$$= \log\frac{1}{|Z|} + \log\frac{1}{|F'(o)|} + \textit{fonction harmonique nulle à l'origine.}$$

Donc $\log\frac{1}{|F'(o)|}$ est le terme constant du développement de la fonction de Green autour de l'origine.

Le contour $\mathfrak{C}$ étant intérieur au cercle $\mathfrak{C}_1$ ($|Z_1| = 1$), on sait, d'après un lemme (¹) de M. Kœbe (*Math. Annalen*, t. LXVII, p. 208) que le

(¹) Ce lemme suppose que le contour $\mathfrak{C}$ ne déborde pas $\mathfrak{C}_1$, mais il est vrai encore quand $\mathfrak{C}$ a des parties communes avec $\mathfrak{C}_1$.

terme constant de la fonction de Green est $< \Gamma$, Γ étant *négatif*, donc $|F'(0)| > 1$.

Revenons maintenant aux domaines D et D_1 qui se correspondent biunivoquement et analytiquement à l'aide de la relation $z_1 = f(z)$. Ce point $Z = 0$ de Δ *qui coïncide avec son correspondant* $Z_1 = F(0) = 0$, est l'image d'un certain point ω de D qui *coïncide avec son correspondant* ω_1 *de* D_1. Cela veut dire que, si z est l'affixe de ce point ω, on a $z_1 = f(z) = z$, et *en plus* que le point ω_1 de D_1 ainsi correspondant au point ω de D est *sur le même feuillet que* D. Autrement dit, la correspondance biunivoque et analytique établie par $z_1 = f(z)$ entre les points extérieurs à D et les points extérieurs à D_1 possède *un point double* ω *et un seulement.*

Je répète que cela ne veut pas dire que l'équation $f(z) = z$ *n'ait qu'une racine dans* D, car il pourrait très bien arriver qu'un point z de D ait pour correspondant dans D_1 un point ayant un *affixe* $z_1 = f(z)$ *égal à* z, mais situé sur *un autre feuillet* de D_1 que celui sur lequel on a supposé que D était tracé. Cela arriverait par exemple si l'on pouvait trouver *plusieurs feuillets distincts de* D_1 recouvrant chacun complètement l'aire D, c'est-à-dire si, sur plusieurs feuillets distincts de D_1, le cylindre projetant la courbe C qui limite D découpait des aires d'un seul tenant simplement connexes projetées sur D *complètement intérieures à* D_1 (*voir* la figure 7).

Il est donc établi que l'équation $f(z) - z = 0$ a une racine ζ au moins dans D. Si de plus on remarque que

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{dz_1}{dZ_1}\,\frac{dZ_1}{dZ}\,\frac{dZ}{dz} \quad (^1),$$

Z_1 étant l'image de z_1 et Z celle de z, on voit que, au point $Z = 0$, image de $z = \zeta = f(\zeta)$, on a

$$\frac{dz_1}{dZ_1} = \frac{dz}{dZ},$$

(1) Il ne peut pas y avoir de difficulté pour les dérivées $\frac{dz_1}{dZ_1}$ et $\frac{dz}{dZ}$, puisque le feuillet de D_1, qui contient D, n'a pas de point de ramification intérieur à D. Une telle difficulté ne serait d'ailleurs pas très gênante, seulement il faudrait alors substituer à l'aire simple D une aire simplement connexe formée de plusieurs feuillets *identiques à* D, superposés, et ramifiés entre eux afin que l'ensemble de ces feuillets fît bien une aire simplement connexe intérieure à D_1.

puisque $Z = Z_1 = 0$, et par suite

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_z = \left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0,$$

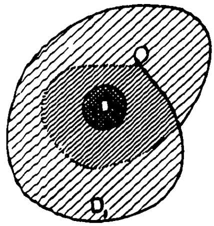

Fig. 7.

et comme

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = F_1(0),$$

on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right|_\zeta = |f'(\zeta)| > 1.$$

Donc l'équation $f(z) - z = 0$ a une racine ζ au moins dans D et l'on a en ζ

$$|f'(\zeta)| > 1.$$

Ce lemme nous sera fort utile dans la suite.

Lemme de Schwarz. — Il se trouve dans les *Œuvres* de Schwarz t. II, p. 109 :

« Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et si, dans tout ce domaine $|z| < 1$, on a

$$|f(z)| \leq 1, \qquad \text{avec} \qquad f(0) = 0,$$

on a pour tout point z, $0 < |z| < 1$, l'inégalité

$$|f(z)| < |z|,$$

sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire $ze^{i\theta}$, auquel cas

$$f(z) = |z|. \text{ »}$$

En effet (¹), par hypothèse, la fonction $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ est régulière

(¹) *Voir* CARATHÉODORY, *Math. Annalen*, t. LXXII, § 4.

pour $|z|<1$; quel que soit ρ positif et <1, le module de $\varphi(z)$ dans le domaine $|z|\leqq\rho$ atteint son maximum pour $|z|=\rho$. On a donc, pour $|z|\leqq\rho$,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqq\frac{1}{\rho},$$

puisque sur $|z|=\rho$, $|f(z)|\leqq 1$. Donc, pour $|z|\leqq\rho$,

$$|f(z)|\leqq\frac{|z|}{\rho},$$

Ceci a lieu quel que soit ρ positif <1. On a donc en tout point intérieur $|z|<1$,

$$|f(z)|\leqq|z|$$

Si $\varphi(z)$ n'est pas constante, on ne peut avoir en un point intérieur $|f(z)|=|z|$, car il y aurait des points intérieurs où $|f(z)|$ serait $>|z|$, ce qui contredit l'inégalité précédente. L'égalité $|f(z)|=|z|$ en un point intérieur n'est possible que si $|\varphi(z)|=1$, $\varphi(z)$ étant constant, c'est-à-dire si $f(z)=ze^{i\theta}$, et alors elle a bien lieu en tout point intérieur au cercle $|z|<1$.

On peut en outre conclure qu'à l'origine on a $|f'(0)|<1$, sauf dans le cas banal où $f(z)=ze^{i\theta}$.

C'est évident si $f'(0)=0$. On peut donc se borner au cas où $f'(0)\neq 0$; alors si l'on envisage un cercle C *assez petit*, de centre O, limitant une aire D, $z_1=f(z)$ décrira, lorsque z décrira D, une aire simple D_1, à un seul feuillet, limitée par une courbe analytique fermée C_1, et contenant l'origine. Et comme $|f(z)|<|z|$, l'aire D_1 sera *toute intérieure à l'aire* D. Le lemme que nous avons précédemment démontré permet donc de conclure qu'à l'origine on a

$$|f'(0)|<1.$$

Il est clair que si l'on part d'un point quelconque z, intérieur au cercle fondamental $|z|<1$, les conséquents successifs $z_1=f(z)$, $z_2=f(z_1)$, ... de z auront O et O seul pour point-limite $[|z_i|<|z_{i-1}|]$, hors le cas banal où $f(z)=ze^{i\theta}$. Ce cas banal est d'ailleurs *le seul cas* où la fonction $f(z)$ établit une correspondance biunivoque et analytique entre les points intérieurs au cercle, l'origine étant conservée par la correspondance; ceci est bien connu depuis Poincaré. Dans tous les autres cas, lorsque z décrit l'intérieur $\mathfrak{D}$ du cercle $|z|<1$,

$z_1 = f(z)$ décrit l'intérieur d'une surface de Riemann ω_1 simplement connexe, contenant l'origine, et dont tous les points intérieurs sont intérieurs au cercle $|z| < 1$. La frontière de ω_1 peut coïncider en tout ou partie avec la frontière de ω.

Bornons-nous maintenant au cas où la frontière de ω_1 serait intérieure à ω, c'est-à-dire où l'on aurait pour $|z| = 1$, $|f(z)| < 1$, en supposant, si l'on veut, $f(z)$ analytique même sur $|z| = 1$. Alors il est clair que la variation de l'argument de $z_1 - z = f(z) - z$, lorsque z décrit le cercle $\mathcal{C}(|z| = 1)$, sera égale à 2π; et $f(z) - z$ aura une racine, et une seule, dans $\mathcal{C}$, qui est zéro. Ceci suggère la généralisation suivante, utile dans bien des questions d'itération, quand on envisage le problème général et non plus seulement le problème local.

Imaginons que z décrivant une aire simple Δ, limitée par une courbe analytique Γ, le point $z_1 = f(z)$, $f(z)$ étant analytique dans Δ et sur $\mathcal{C}$, décrive une surface de Riemann simplement connexe Δ_1 dont tous les points, y compris la frontière Γ_1 qui est une courbe analytique fermée, soient intérieurs à l'aire Δ. Alors la représentation conforme de Δ sur l'aire ω du cercle $|z| < 1$, montre :

1° Que l'équation $z = f(z)$ a une racine et une seule ζ à l'intérieur de Δ;

2° Que l'on a $|f'(\zeta)| < 1$;

3° Que les conséquents successifs $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, d'un point quelconque z pris dans Δ ou sur Γ, tendent régulièrement vers ζ.

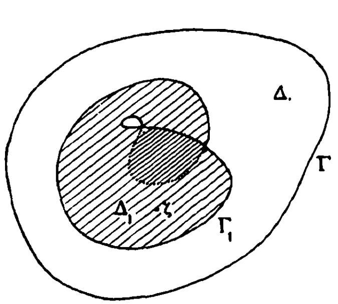

Fig. 8.

Voici des extensions du lemme de Schwarz sur lesquelles il n'est pas nécessaire d'entrer dans beaucoup de détails de démonstration.

Le lemme de Schwarz affirme que, hors le cas banal $f(z) = ze^{i\theta}$, si z décrit l'intérieur du cercle $|z| \leqq \rho < 1$, $z_1 = f(z)$ décrit une surface de Riemann *toute intérieure à ce cercle* : $|f(z)| < \rho$.

Si l'on suppose maintenant que pour $|z| < 1$ on a encore $|f(z)| \leqq 1$, mais que le point ζ invariant $f(\zeta) = \zeta$ n'est plus l'origine, mais un autre point *intérieur* au cercle $|\zeta| < 1$, on verra bien facilement que, si ζ' désigne le point symétrique de ζ par rapport au cercle $|z| = 1$, on aura dans le cercle

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \quad \rho < \rho_0,$$

ρ_0 étant la valeur constante $\left|\dfrac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ pour $|z| = 1$, $\rho_0 = |\zeta|$:

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|,$$

quel que soit $\rho < \rho_0$, sauf dans le cas où

$$\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'} = e^{i\theta}\frac{z-\zeta}{z-\zeta'},$$

c'est-à-dire le cas où $f(z)$ est homographique, auquel cas on a toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|.$$

Cela veut dire que, lorsque z décrit l'intérieur d'un cercle C quelconque du faisceau défini par les deux points-cercles ζ et ζ' (points limites ou points de Poncelet), cercle C intérieur à $|z| < 1$, le point $z_1 = f(z)$ reste *à l'intérieur de ce cercle* C sans jamais venir sur ce cercle, et décrit une surface de Riemann simplement connexe contenant ζ, *toute intérieure à* C [hors le cas où $f(z)$ est linéaire]. S'affranchissant de l'hypothèse qu'il existe un point ζ invariant dans $|z| < 1$, hypothèse qui peut très bien n'être pas vérifiée [*voir* plus loin les fractions $\varphi(z)$ à cercle fondamental $|z| = 1$ pour lesquelles $\varphi(z) = z$ a toutes ses racines sur ce cercle], on envisagera un point quelconque ζ et son symétrique ζ' par rapport au cercle $|z| = 1$. Alors il est clair que, si $\zeta_1 = f(\zeta)$ est la valeur correspondante à ζ et ζ'_1 le symétrique de ζ_1 par rapport au cercle $|z| = 1$ (¹), la fonction

$$\psi(z) = \frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\,\frac{1}{|\zeta_1|}$$

(¹) On suppose bien entendu que ζ_1 n'est pas sur le cercle $|z| = 1$.

est une fonction de la variable $u = \frac{1}{|\zeta|} \frac{z-\zeta}{z-\zeta'}$, qui est nulle pour $u = 0 (z = \zeta)$ et qui, pour $|u| < 1$, est toujours $\leqq 1$. On a donc, dans le cercle,

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leqq \rho < |\zeta|,$$

qui est un cercle quelconque du faisceau (ζ, ζ') intérieur à $|z| < 1$

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{\zeta_1}{\zeta}\right| \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|,$$

sauf le cas où $f(z)$ serait homographique et conserverait l'intérieur du cercle $|z| < 1$, auquel cas le signe $<$ est à remplacer par le signe $=$.

Ce fait s'énonce plus simplement si l'on transforme, par une substitution linéaire convenable, l'intérieur de $|z| < 1$ en l'intérieur du demi-plan analytique supérieur [$\mathfrak{I}(z) =$ partie imaginaire de $z > 0$]. On voit alors immédiatement que, si $z_1 = f(z)$ transforme tout point z de ce demi-plan [$\mathfrak{I}(z) > 0$] en un point z_1 du demi-plan [$\mathfrak{I}(z_1) > 0$], si ζ est un point quelconque du demi-plan [$\mathfrak{I}(\zeta) > 0$] et $\zeta_1 = f(\zeta)$ pour lequel $\mathfrak{I}(\zeta_1) > 0$, en désignant par ζ' et ζ'_1 les valeurs conjuguées de ζ et ζ_1 il est visible qu'on aura

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

tant que

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leqq \rho < 1$$

quel que soit $\rho > 1$, sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire du type $\frac{az+b}{cz+d}$ conservant le demi-plan supérieur

Pour une telle fonction homographique, on aurait toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

et, d'ailleurs,

$$\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1} = \frac{z-\zeta}{z-\zeta'} \cdot e^{i\omega}.$$

Remarque. — Si l'on avait affaire à une fonction $f(z)$ qui conserve à la fois l'intérieur et l'extérieur du cercle C $|z| = 1$, c'est-à-dire telle qu'à tout point z intérieur corresponde $z_1 = f(z)$ intérieur, à z' symétrique de z par rapport à C et extérieur corresponde un point z'_1 symétrique de z_1 par rapport à C, et à tout point du cercle un point du cercle [exemple : les fractions à cercle fondamental de M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917)] et si l'origine et l'infini étaient points doubles de la transformation $z_1 = f(z)$, on aurait, hors le cas banal où $z_1 = z e^{i\Theta}$,

$$|f(z)| < |z| \quad \text{(pour tout point intérieur)}$$

et, évidemment,

$$|f(z)| > |z| \quad \text{(pour tout point extérieur),}$$

le cercle C étant évidemment axe de symétrie pour la transformation.

Extension nouvelle du lemme de Schwarz. — On a analysé précédemment comment se comportait dans le cercle $|z| < 1$ la transformation $z_1 = f(z)$ lorsque cette transformation transforme en lui-même *l'intérieur du cercle* en laissant invariant un point *intérieur*.

Il peut arriver, comme je l'ai dit plus haut, que la transformation ne laisse invariants que des points situés *sur la circonférence* du cercle $|z| = 1$.

Je vais indiquer maintenant comment, ici encore, on peut analyser l'allure de la transformation *dans le cercle*.

Je suppose, d'abord, que ce cercle a été transformé par une substi-

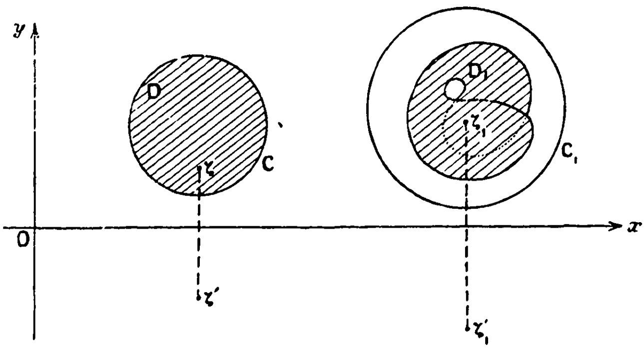

Fig. 9.

tution linéaire auxiliaire dans le demi-plan analytique supérieur $\Im(z) \geqq 0$.

Alors $z_1 = f(z)$ sera supposée une fonction analytique dans le demi-plan supérieur, et nous supposerons qu'elle transforme l'axe réel en lui-même, que tout point z situé au-dessus de l'axe réel se transforme en un point z_1 situé au-dessus de l'axe réel. Nous la supposons donc analytique et réelle sur l'axe réel, donc elle s'étendra au demi-plan analytique inférieur par la méthode des symétries, mais c'est là une question accessoire.

Nous avons vu que, si ζ est un point du demi-plan supérieur et ζ_1 son correspondant $\zeta_1 = f(\zeta)$, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle C, $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \rho < 1$ (1), on a

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|,$$

hormis le cas banal où $f(z)$ est homographique (ζ' et ζ'_1 sont conjugués de ζ et ζ_1). Cela veut dire que si z est intérieur à C ou sur sa circonférence, $z_1 = f(z)$ est *intérieur* au cercle C_1 défini par

$$\left|\frac{z_1-\zeta_1}{z_1-\zeta'_1}\right| = \rho.$$

Les deux cercles C et C_1 sont homothétiques par rapport à un point de l'axe réel et dans cette homothétie ζ et ζ_1 se correspondent. *Le rapport des rayons de C et C_1 est égal au rapport des ordonnées de ζ et ζ_1.*

Imaginons que ζ *tende vers un point τ de l'axe réel*, le cercle C conservant un rayon fini R; alors ζ_1 tendra vers un point τ_1 de l'axe réel (2) [$\tau_1 = f(\tau)$]. Il est visible que, sur l'axe réel, $f'(z)$ est réelle et positive (3); donc ζ et ζ_1 tendant vers τ et τ_1 on conclut que le rapport

$$\frac{\text{ordonnée de } \zeta_1}{\text{ordonnée de } \zeta}$$

tend vers une limite bien déterminée qui est égale à $f'(\tau)$.

Il n'est pas difficile de conclure dans ces conditions que, C tendant vers une position limite Γ qui est un cercle de rayon R tangent en τ à l'axe réel, C_1 tendra vers une position limite Γ_1 qui est un cercle de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à l'axe réel. Et il est encore facile de voir

---

(1) ρ est un nombre quelconque < 1.

(2) On peut toujours supposer τ et τ_1 à distance finie.

(3) Sans être nulle.

que lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ, $z_1 = f(z)$ décrira un domaine Δ_1 qui *n'aura aucun point extérieur à* Γ_1, mais qui *a priori* pourrait très bien avoir des points sur Γ_1. L'hypothèse contraire : celle où Δ_1 aurait des points extérieurs à Γ_1 conduirait à une contradiction; envisageant en effet un cercle $\mathcal{C}$ infiniment voisin de Γ et situé au-dessus de Ox, auquel correspondrait un cercle $\mathcal{C}_1$ infiniment voisin de Γ_1, $\mathcal{C}_1$ devrait toujours contenir z_1 lorsque z est dans $\mathcal{C}$; et ceci ne serait pas vrai lorsque z_1 serait voisin d'un point de Δ_1 extérieur à Γ_1 donc extérieur à $\mathcal{C}_1$.

On peut cependant affirmer que, lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ, z_1 décrit un domaine qui n'a, en commun avec Γ_1 que le point τ_1, lorsque $f(z)$ n'est pas homographique.

On vient de voir en effet que, lorsque z décrit l'intérieur de la circonférence du cercle Γ de rayon R qui, évidemment, est un cercle *quelconque* tangent en τ à l'axe réel), z_1 décrit un domaine dont tous les points sont à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ_1, circonférence de rayon $R_1 = Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à OX. Cela veut dire que la partie imaginaire de la fonction $\frac{1}{f(z)-\tau_1}$ est, à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ, $\leqq$ à une certaine limite négative qui est

$$-\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{Rf'(\tau)},$$

$$\mathfrak{J}\left(\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right) \leqq -\frac{1}{Rf'(\tau)} \quad (^1).$$

Or lorsque z décrit l'intérieur de Γ, on a

$$\mathfrak{J}\left(\frac{1}{z-\tau}\right) < -\frac{1}{R},$$

le signe $<$ étant remplacé par $=$ quand z vient sur Γ.

Donc *lorsque z décrit la circonférence* Γ, on aura

$$\mathfrak{J}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right] \leqq 0.$$

(¹) Car, évidemment, le point $\frac{1}{z_1-\tau_1}$, lorsque z_1 est dans Γ_1 est dans le demi-plan

$$\mathfrak{J}\left(\frac{1}{z_1-\tau_1}\right) \leqq -\frac{1}{R_1}.$$

La fonction

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est une fonction harmonique et régulière en tout point intérieur à Γ, et en tout point de Γ, sauf peut-être au point $z=\tau$.

Or, en ce point, on a

$$\begin{aligned} f(z)-\tau_1 = f(z)-f(\tau) &= (z-\tau)f'(\tau)+\frac{(z-\tau)^2}{2!}f''(\tau)+\ldots \\ &= (z-\tau)f'(\tau)[1+\lambda(z-\tau)+\ldots]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)-\tau_1} &= \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\,\frac{1}{1+\lambda(z-\tau)+\ldots} \\ &= \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}[1-\lambda(z-\tau)+\ldots], \end{aligned}$$

la quantité entre parenthèses étant régulière autour de $z=\tau$.

Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}=-\frac{\lambda}{f'(\tau)}+\ldots,$$

le second membre étant régulier autour de $z=\tau$.

Donc

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est harmonique régulière autour de $z=\tau$.

Cette fonction, si elle n'est pas constamment $=0$ sur Γ, sera donc <0 à l'intérieur de Γ puisque, sur Γ, elle est $\leqq 0$.

On aura donc, *en tout point intérieur à* Γ,

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<\mathcal{R}\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$

Cette inégalité ne peut devenir une égalité que si

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$$

est $=0$ sur tout Γ, alors ladite quantité est nulle dans tout Γ et évidemment $f(z)$ est une fonction homographique :

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1} = \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)} + k,$$

k étant une constante réelle quelconque

Donc, *hormis le cas où $f(z)$ est homographique*, on a, en tout point intérieur à Γ,

$$\mathfrak{I}\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right] < \mathfrak{I}\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$

Cette inégalité est donc valable *en tout point situé au-dessus de Ox*, car on peut trouver un cercle Γ tangent en τ à Ox et contenant ce point z.

Et elle prouve, ce qu'il fallait démontrer, que le domaine Δ, décrit par z_1 quand z décrit l'intérieur de la circonférence d'un cercle Γ tan-

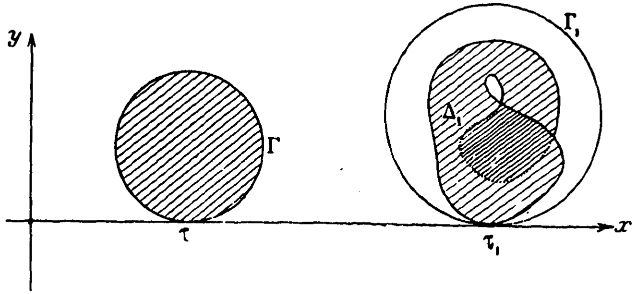

Fig. 10.

gent en τ à Ox, de rayon R quelconque est *intérieur* au cercle Γ_1 de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à Ox, sans avoir avec la circonférence de Γ_1 d'autre point commun que τ_1 lui-même.

Application. — Voici une application de cette proposition à la question de l'itération : $f(z)$, satisfaisant aux hypothèses précédentes, sera une fonction rationnelle ou une fonction entière conservant chacun des demi-plans analytiques $\mathfrak{I}(z) > 0$ et $\mathfrak{I}(z) < 0$.

Si τ est un point double de la transformation $z_1 = f(z)$ situé sur Ox, on aura

$$\tau_1 = f(\tau) = \tau.$$

Si, en outre, on a $0 < f'(\tau) \leqq 1$, il est clair que tout cercle Γ tangent en τ à Ox *deviendra un domaine* Δ_1, *intérieur à* Γ, *n'ayant avec* Γ *que* τ *comme point commun*. Tout point z de Γ, distinct de τ, devient un point de z_1 *intérieur à* Γ; z_1 donnera un point $z_2 = f(z_1)$ intérieur au cercle mené par z_1 et τ tangent en τ à Ox, ... On voit *que la suite* $z, z_1, z_2, \ldots$ *tend régulièrement vers le point* τ *pour lequel* $\tau = f(\tau)$, $0 < f'(\tau) \leqq 1$, quel que soit le point z initial pris dans le demi-plan supérieur (non sur Ox).

Ceci démontre très simplement les résultats énoncés par M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917) pour les fractions $\varphi(z)$ à cercle fondamental pour lesquelles, *sur le cercle*, se trouve un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ tel que $|\varphi'(\zeta)| \leqq 1$: tout point intérieur ou tout point extérieur au cercle a des conséquents successifs qui *tendent régulièrement vers* ζ. On verra plus loin que les deux cas $|\varphi'(\zeta)| < 1$ et $|\varphi'(\zeta)| = 1$ se distinguent l'un de l'autre profondément.

Remarque. — Toutes les hypothèses faites plus haut sur la fonction $f(z)$ ne sont pas également indispensables : voici des hypothèses plus générales qu'on peut faire pour donner au lemme de Schwarz l'extension qui nous a servi dans l'application précédente; ces hypothèses sont d'un ordre aussi général que celles qu'on fait dans le lemme de Schwarz lui-même :

Soit $f(z)$ une fonction analytique *à l'intérieur* d'un cercle C du plan des z qu'on peut toujours supposer être le demi-plan $\mathfrak{I}(z) > 0$; supposons en outre :

1° Que tout point z intérieur à C soit transformé en un point $z_1 = f(z)$ *intérieur à* C *ou situé sur* C

$$\mathfrak{I}[f(z)] \geqq 0 \qquad \text{en tout point} \qquad \mathfrak{I}(z) > 0.$$

2° Qu'un point O du cercle C reste invariant, par exemple l'origine

$$f(0) = 0.$$

3° Que $f(z)$ soit holomorphe dans une petite région autour de ce point [1]. (On ne suppose rien d'autre sur C ailleurs qu'en O.)

---

[1] Il suffit même de supposer que $f(z)$, holomorphe dans C, admet quand z tend vers O *dans* C une dérivée première et une dérivée seconde finies et continues de façon qu'on puisse écrire

$$z_1 = z f'(0) + z^2 \frac{f''(0)}{2} + z^2 \varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ étant *holomorphe dans* C et tendant vers zéro lorsque z tend vers O dans C.

Alors il faut nécessairement que $f'(0)$ soit *réelle et positive* pour que la condition (1°) soit vérifiée autour de l'origine.

On se rend compte immédiatement que tous les raisonnements faits pour la démonstration du lemme étendu que nous avons donné plus haut, valent ici encore, c'est-à-dire qu'en tout point intérieur à C, $\mathfrak{I}(z) > 0$, on a

$$\mathfrak{I}\left(\frac{1}{f(z)}\right) < \mathfrak{I}\left(\frac{1}{zf'(0)}\right),$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $f(z)$ *est homographique.*

Donc, *lorsque* z *décrit l'intérieur et le contour d'un cercle quelconque* T *de rayon* R *intérieur à* C, *tangent en* O *à* C, z_1 *décrit un domaine* Δ_1 *dont tous les points, y compris les points frontières* (*sauf* O) *sont intérieurs à un cercle* T_1, *tangent en* O *à* C, *et de rayon* $R_1 = Rf'(0)$. Δ_1 est tangent en O à C.

En particulier, si $f'(0) = 1$, Δ_1 est tout entier intérieur à Γ, sauf en O où Δ_1 touche Γ.

Ainsi énoncé, le lemme nous sera fort utile plus loin.

6. *Rappel de notions sur les fonctions algébriques.* — Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque; $\psi(z)$ la fonction algébrique inverse de $\varphi(z)$. Posant $\varphi(z) = z_1$, on a $z = \psi(z_1)$. Envisageons la surface de Riemann $\mathcal{R}$ étalée sur le plan des z_1 relative à $\psi(z)$; φ étant de degré k, $\mathcal{R}$ a k feuillets, et $z = \psi(z_1)$ est une fonction uniforme sur $\mathcal{R}$ prenant toujours des valeurs *distinctes* en deux points *distincts* de $\mathcal{R}$, quand bien même ces points auraient même affixe z_1.

A une valeur de z_1 correspondent k valeurs de z, distinctes ou confondues, ses k antécédents.

I. Imaginons que z_1 décrive l'intérieur d'*une aire* Δ_1 *du plan analytique* Δ_1 étant d'un seul tenant, et limitée par un ou plusieurs contours analytiques. Pour voir quelles sont les aires décrites par l'ensemble des antécédents de z, il suffit d'étudier les points de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ qui se projettent sur le plan analytique en un point intérieur à l'aire Δ_1. Plusieurs cas sont possibles.

1° Il peut arriver que ces points forment sur $\mathcal{R}$, k aires δ_1 d'un seul tenant, distinctes, superposées, chacune ayant un seul feuillet, étant identique à Δ_1. Ceci arrivera si et seulement si, partant d'un point quelconque z_1 intérieur à Δ_1 avec une détermination quelconque de

$\psi(z_1)$ et y revenant par un chemin quelconque intérieur à Δ_1, on retrouve en z_1 la même détermination de $\psi(z_1)$. Alors *aucun point de ramification de $\psi(z)$ ne peut être intérieur à Δ_1*, mais cette condition n'est sûrement suffisante que si Δ_1 est limitée par un seul contour.

Alors chacun des k antécédents de z_1 représente une fonction holomorphe de z_1 dans Δ_1 et décrit une aire simple Δ, limitée par des contours analytiques, aire à un seul feuillet. Les k aires Δ ainsi obtenues sont *deux à deux extérieures*, elles ne peuvent avoir en commun que des points frontières, et *ceci n'arrive que si la frontière de Δ_1 contient un point de ramification de $\psi(z)$*. L'intérieur de chacune des k aires s_1 de $\mathcal{R}$ se trouve représenté conformément sur l'intérieur d'une Δ_1 par la fonction $\psi(z)$.

2° Il peut arriver que ces points forment sur $\mathcal{R}$ moins de k aires distinctes chacune d'un seul tenant, à cause de ce fait que l'une de ces aires peut être à plus d'un feuillet. Ceci se produira quand, partant d'un point z_1 intérieur à Δ_1 avec une certaine détermination de $\psi(z_1)$ on pourra décrire un *chemin intérieur à Δ_1 qui ramène en z_1 une autre détermination de $\psi(z_1)$ que la détermination initiale*. Cela voudra dire que l'on pourra passer d'un point P de $\mathcal{R}$, projeté à l'intérieur de Δ_1, à un point P' superposé à P, situé sur un autre feuillet de $\mathcal{R}$ que P, par un chemin continu tracé sur $\mathcal{R}$ dont tous les points se projettent à l'intérieur de Δ_1. P et P' appartiendront donc à une aire située sur $\mathcal{R}$, d'un seul tenant, comptant au moins deux feuillets dont les points se projettent à l'intérieur de Δ_1.

Ce fait se produira certainement quand l'aire Δ_1 contiendra au moins un point de ramification de $\psi(z)$. Mais cela n'est pas nécessaire. Si l'on envisage en effet une fonction $\varphi(z)$ du deuxième degré, relativement à laquelle $\psi(z)$ compte deux points critiques ζ_1, ζ_2 et si l'on considère deux courbes fermées C_1 et C_2 dont chacune sépare ζ_1 et ζ_2, courbes qui ne se coupent pas, elles délimitent un anneau $(C_1 C_2)$ qui constitue une aire Δ_1 doublement connexe. Il est visible que les points de $\mathcal{R}$ projetés à l'intérieur de Δ_1 forment une seule et unique aire, d'un seul tenant, à deux feuillets superposés, et limitée par chacune des courbes C_1 et C_2.

Quoi qu'il en soit, si l'on envisage p aires s_1 $(p < k)$ ainsi découpées dans la surface de Riemann de $\psi(z)$ il est visible que l'ensemble des k antécédents de z_1 décrira, lorsque z_1 décrira l'intérieur de Δ_1, un ensemble de p aires Δ, chacune étant d'un seul tenant, à un seul feuillet, et fournissant une représentation conforme d'une des aires s_1

sur le plan z. Ces p aires Δ sont deux à deux extérieures, elles ne peuvent avoir en commun que des points frontières, et seulement dans le cas où la fontière de Δ_1 passe par un point de ramification de $\psi(z)$.

Il pourra arriver en particulier que, partant d'un point z_1, intérieur à Δ_1 avec une détermination quelconque de $\psi(z_1)$, on puisse tracer un chemin intérieur à Δ_1 qui ramène en z_1 *toute autre détermination de* $\psi(z_1)$. Alors l'ensemble des points de $\mathcal{R}$, projetés à l'intérieur de Δ_1 formera *une seule aire* s_1, d'un seul tenant, à k feuillets superposés (ici $p = 1$). Partant d'un point P de $\mathcal{R}$ projeté dans Δ_1, on pourra parvenir en chacun des $k - 1$ points de $\mathcal{R}$ superposés à P, en décrivant un chemin continu tracé sur $\mathcal{R}$ dont les points se projettent dans l'aire Δ_1. Il est clair alors que, lorsque z_1 décrira l'intérieur de Δ_1, l'ensemble de ses k antécédents décrira une seule aire Δ du plan des z (aire à un seul feuillet) qui sera une représentation conforme de l'aire s_1 à k feuillets.

En résumé, lorsque z_1 décrira l'aire Δ_1, l'ensemble de ces k antécédents décrira p ($p \leqq k$, p pouvant être $= 1$) aires distinctes Δ du plan des z, chacune à un seul feuillet d'un seul tenant, limitée par des contours analytiques [avec peut-être des points anguleux quand la frontière de Δ_1 passera par des points critiques de $\psi(z)$]. Ces p aires sont deux à deux extérieures; elle ne peuvent avoir en commun que des points frontières en nombre fini et seulement quand la frontière de Δ_1 passe par un point critique de $\psi(z)$.

II. Considérons deux aires Δ_1 et Δ'_1 du plan analytique, Δ_1 *étant intérieure à* Δ'_1. z_1 décrivant Δ_1 l'ensemble de ses k antécédents décrira p aires distinctes Δ du plan $z (1 \leqq p \leqq k)$, et il est clair que lorsque z_1 décrira l'aire Δ'_1, l'ensemble de ses k antécédents décrira p' aires distinctes Δ' du plan z, p' étant $\leqq p$. De plus chaque aire Δ sera intérieure à une aire Δ'. Il pourra arriver que p' soit $< p$, et que deux aires Δ distinctes soient intérieures à une même aire Δ'.

III. Si l'on considère maintenant deux aires Δ_1 et Δ'_1 du plan analytique *extérieures l'une à l'autre*, l'ensemble des k antécédents d'un point z_1 qui décrit Δ_1 décrira p aires distinctes Δ du plan z, et lorsque z_1 décrira Δ'_1, cet ensemble d'antécédents décrira p' aires distinctes Δ' du plan z. Il est bien certain que *chacune des* Δ *est extérieure à chacune des* Δ', et si Δ_1 et Δ'_1 n'ont pas de point frontière commun, aucune des Δ ne pourra même avoir de point frontière commun avec une Δ'. Nous utiliserons ce résultat plus tard, dans la formation des domaines de convergence vers les points limites à convergence régulière [$\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$. Nous verrons immédiatement que les domaines relatifs à deux tels points limites distincts *ne peuvent avoir aucun point intérieur commun.*

PREMIÈRE PARTIE.

Étude générale de l'itération d'une substitution rationnelle. Ensemble des points singuliers de l'itération.

7. Dans tout le cours du Mémoire, nous désignerons par $\varphi(z)$ la fraction rationnelle dont il s'agit d'étudier l'itération; nous poserons

$$z_1 = \varphi(z),$$

$$z_2 = \varphi[\varphi(z)] = \varphi_2(z), \quad \ldots \quad z_n = \varphi(z_{n-1}) = \varphi[\varphi_{n-1}(z)]$$

Les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ s'appellent les *conséquents* d'ordre 1, 2, ..., n, ... de z. Inversement, z est *antécédent* d'ordre 1 de z_1, et antécédent d'ordre n de z_n. Un point quelconque admet k antécédents si φ est une fraction de degré k. Les fonctions rationnelles $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ seront dites les *itérées* *de* $\varphi(z)$.

Le problème de l'itération consiste à étudier la suite $z, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ et principalement à étudier l'*ensemble dérivé* de l'ensemble dénombrable précédent, et *comment cet ensemble dérivé dépend du choix de z, élément initial.*

Ce problème n'a été étudié jusqu'ici qu'au point de vue local; logiquement, cette restriction s'explique par la façon dont une fonction analytique $\varphi(z)$ est définie en général: par une série de puissances convergeant au voisinage d'un certain point; si l'on veut que les conséquents successifs d'un point z puissent se définir de proche en proche, il faut que les valeurs z_1 que prend $f(z)$ dans le domaine où elle est définie ne sortent pas de ce domaine : d'où, avec presque tous les auteurs qui se sont occupés jusqu'ici de la question, la préocupation d'étudier les conséquents au voisinage seul des points ζ racines de $z = f(z)$ pour lesquels $|f'(z)| < 1$ par exemple; c'est qu'alors les valeurs de $|z_1 - \zeta|$ sont $< |z - \zeta|$, pourvu que $|z - \zeta|$ soit assez petit et par suite les conséquents successifs restent dans la région voisine de ζ où $f(z)$ est définie (¹).

Pour étudier l'itération de z quel que soit z dans le plan analytique, il faut que $f(z)$ et toutes ses itérées soient parfaitement définies pour tout point du plan. Il faut pour cela que seul le point à l'infini puisse être un point essentiel de $f(z)$. Et ceci conduit à supposer que f est une *fonction rationnelle* ou une *transcendante entière*. Dans ces deux cas seulement, quelque soit z à distance finie il a des conséquents bien définis, et le problème a un sens.

Nous supposerons donc pour l'étude générale en vue, que la fonction à itérer est *rationnelle* $z_1 = \varphi(z)$. On verra de soi-même quelles seront celles de nos conclusions qui s'étendront à l'itération des transcendantes entières. φ étant rationnel, *le point à l'infini sera assimilé à un point ordinaire quelconque*, c'est-à-dire que l'on considérera le *plan complet* (²).

Une première remarque à faire est la suivante : toutes les itérées $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ sont rationnelles, et si l'on suppose (en laissant de côté le cas où φ est du premier degré, cas bien facile et bien connu) que φ est d'un degré $k > 1$, leurs degrés respectifs sont $k^2, k^3, \ldots, k^n, \ldots$. *Aucune n'est identique à* z. Cela se voit tout simplement en remarquant qu'un point *arbitraire* du plan aura k antécédents d'ordre 1, k^2 antécédents d'ordre 2, ..., k^n antécédents d'ordre n, ...

Les études locales ont montré l'importance des groupes circulaires de points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ racines des équations $z = \varphi_n(z)$ lorsque pour un de ces groupes on a

$$|\varphi'_n(\zeta)| = |\varphi'_n(\zeta_1)| = \ldots = |\varphi'_n(\zeta_{n-1})| = |\varphi'(\zeta)\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{n-1})| < 1.$$

Un tel groupe est appelé *groupe circulaire limite*. On a

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \qquad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \qquad \ldots, \qquad \zeta = \varphi(\zeta_{n-1}).$$

Mais on ne trouve rien dans la littérature du sujet qui se réfère, par exemple, à une racine de $z = \varphi(z)$ lorsque $|\varphi'(\zeta)| > 1$. Les auteurs qui ont traité le point de vue local passent tout de suite, dans ce cas,

---

(¹) Ces points $z = f(z)$ où $|f'(z)| < 1$ sont dits points limites à convergence régulière.

(²) Quelquefois on préfère alors prendre la sphère de Riemann comme support de la variable z.

à la fonction inverse $z=\psi(z_1)$ pour laquelle $z=\psi(\zeta)$ et $|\psi'(\zeta)|<1$, ce qui ramène tout de suite au cas précédent (point limite ou groupe limite), mais *pour* $\psi(z)$ et *non pour* $\varphi(z)$; on a ainsi des indications sur certains *antécédents* d'un point z voisin de ζ, non sur ses *conséquents*. La suite va pourtant nous révéler des propriétés profondes et extrêmement intéressantes de pareils points.

Envisageons l'ensemble des équations

$$z=\varphi(z),\qquad z=\varphi_2(z),\qquad \ldots,\qquad z=\varphi_n(z),\qquad \ldots;$$

aucune d'elles n'est identité. Chacune a un nombre fini de racines et M. Kœnigs a défini ce qu'il fallait entendre par racine primitive ζ (¹) d'une équation

$$z=\varphi_n(z)$$

ainsi que par groupe circulaire de racines attaché à ζ. Nous appellerons $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ les n racines d'un tel groupe. Elles sont distinctes et l'on a

$$\zeta_1=\varphi(\zeta),\qquad \zeta_2=\varphi(\zeta_1),\qquad \ldots,\qquad \zeta_{n-1}=\varphi(\zeta_{n-2}),\qquad \zeta=\varphi(\zeta_{n-1}).$$
$$\varphi'_n(\zeta)=\varphi'_n(\zeta_1)=\ldots=\varphi'_n(\zeta_{n-1})=\varphi'(\zeta)\,\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{n-1}).$$

La substitution $|z, \varphi(z)|$ permute circulairement les racines d'un groupe.

8. *L'ensemble* E. — Appelons E *l'ensemble dénombrable* formé des racines primitives ζ de toutes les équations

$$z=\varphi_n(z)\ (^2)\quad (n=1, 2, \ldots \infty)\qquad [\varphi_1(z)=\varphi(z)]$$

pour lesquelles on aura

$$|\varphi'_n(\zeta)|>1.$$

(¹) M. Kœnigs dit quelquefois qu'une telle racine « appartient à l'indice n », car elle n'est racine d'aucune équation $z=\varphi_p(z)$ pour un indice $p<n$.

(²) Si au lieu de partir de la substitution $z_1=\varphi(z)$ pour définir l'ensemble E des $z=\varphi_p(z)$ où $|\varphi'_p(z)|>1$, on partait de la substitution

$$z_n=\Phi(z)=\varphi_n(z)$$

pour former l'ensemble $\mathcal{E}$ des $z=\Phi_p(z)$ où $|\Phi'_p(z)|>1$, les deux ensembles E

9. 1° *Existence*. — Pour ne pas raisonner dans le vide, il importe d'abord de prouver que E contient toujours des points.

Prenons donc $z = \varphi(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, P et Q étant deux polynomes de degré k [1]. Ses racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k+1}$ sont celles de l'équation

$$P - zQ = 0.$$

Si $Q = a_0 z^k + \ldots$, on a

$$R = P - zQ = -a_0 z^{k+1} + \ldots.$$

Or,

$$\varphi'(\zeta_i) = \left(\frac{P}{Q}\right)'_{\zeta_i} = 1 + \left(\frac{R}{Q}\right)'_{\zeta_i}.$$

Et les ζ_i étant racines de $R(z) = 0$, on a

$$\left(\frac{R}{Q}\right)'_{\zeta_i} = \frac{R'(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}.$$

Donc,

$$\varphi'(\zeta_i) = 1 + \frac{R'(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}. \tag{1}$$

Rappelons-nous, d'autre part, qu'à cause de

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \frac{a_0 z^k + \ldots}{-a_0 z^{k+1} + \ldots},$$

on obtient, en décomposant $\frac{Q}{R}$ en fractions simples, la relation bien connue

$$\boxed{\sum \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1}. \tag{2}$$

---

et $\mathcal{E}$ sont identiques car toute racine de $z = \varphi_p(z)$ où $|\varphi'_p(z)| > 1$ satisfait à

$$z = \varphi_{np}(z) = \Phi_p(z),$$

et l'on a

$$\Phi'_p(z) = [\varphi'_p(z)]^n.$$

Donc $|\Phi'_p(z)| > 1$ pour cette racine; de plus, toute équation $z = \Phi_p(z)$ est une $z = \varphi_k(z)$ $(k = np)$ et $|\Phi'_p(z)| = |\varphi'_{np}(z)|$.

[1] On peut toujours, en faisant au besoin sur z et z_1 une même substitution homographique, supposer que $P(z)$ et $Q(z)$ sont du même degré k, degré de la fraction rationnelle.

A un point M_i d'affixe $\varphi'(\zeta_i)$, pour lequel $|\varphi'(\zeta_i)| < 1$ correspond par (1) un point N_i d'affixe $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$ situé dans le demi-plan,

$$\mathcal{R}(z) = \text{partie réelle de } z < -\frac{1}{2};$$

si $|\varphi'(\zeta_i)| > 1$, N_i est dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, et réciproquement.

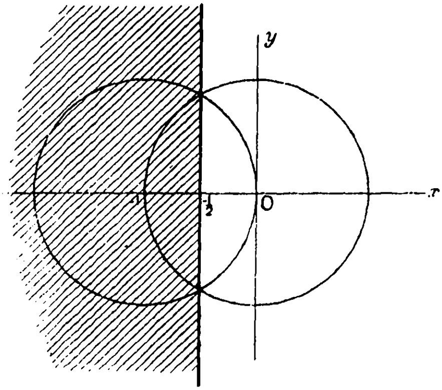

Fig. 11.

La relation (2) prouve que les $k+1$ points $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$ ont pour centre de gravité le point d'affixe $-\frac{1}{k+1}$ qui est dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, donc, un au moins des points N_i est dans ce demi-plan, et non sur sa frontière [1].

Il y a donc une au moins des valeurs $\varphi'(\zeta_i)$ qui est en module > 1, E contient donc sûrement des points [2].

Remarque. — Lorsque P et Q sont de même degré k, comme on peut toujours le supposer, le point à l'infini ne peut être racine de

$$z = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

---

(1) La même relation montre que tous les N_i peuvent être dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire *qu'il peut n'y avoir aucun point limite à convergence régulière*.

(2) *Voir* la note additionnelle à la fin du Mémoire.

On peut même, l'ensemble des racines des équations $z = \varphi_n(z)$ étant dénombrable, supposer que le point à l'infini du plan n'appartient pas à cet ensemble : il suffit pour cela d'envoyer à l'infini, par une même substitution homographique convenable sur z et z_1, un point n'appartenant pas à l'ensemble précédent.

Ceci n'a rien d'essentiel d'ailleurs, puisque, dans notre étude, le point à l'infini ne se distingue en rien de tout autre point du plan (lorsque φ est rationnel); l'avantage formel qu'on peut retirer de l'hypothèse précédente est de pouvoir parler, sans ambiguïté possible, de la valeur de $\varphi'_n(\zeta)$ en tout point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$; si ζ pouvait être le point à l'infini, il faudrait quelques précautions de langage, et par exemple, on conviendrait que $\varphi'_n(\zeta)$ en ce point a même valeur qu'en tous les points du groupe circulaire $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ auquel appartient le point à l'infini ζ. Cette convention est naturelle : si l'on soumet le plan z à une transformation homographique quelconque

$$(S) \qquad z = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}, \qquad z_1 = \frac{\alpha Z_1 + \beta}{\gamma Z_1 + \delta},$$

la nouvelle forme de la substitution à itérer se déduira facilement de $z_1 = \varphi(z)$; ce sera $Z_1 = \Phi(Z)$; les groupes circulaires fournis par $\varphi(z)$ deviennent par la transformation (S) les groupes que fournit $\Phi(Z)$, et la valeur de $\varphi'_n(\zeta)$ pour un groupe $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ est *égale à celle de* $\Phi'_n(Z)$, pour le groupe $Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ correspondant au précédent.

Tout ceci résulte immédiatement de la formule classique

$$(3) \qquad \frac{dZ_1}{dZ} = \frac{dZ_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dz}\frac{dz}{dZ},$$

sans qu'il soit utile d'insister.

Avec ces éclaircissements la convention qui définit $\varphi'_n(\zeta)$ au point à l'infini ζ dans le cas où ce point est racine de

$$z = \varphi_n(z)$$

est toute naturelle. On voit aussi comment on peut, pour étudier l'itération de $\varphi(z)$, soumettre le plan z à telle substitution homographique (S) qu'on voudra de façon à avoir une *transformée de* *la substitution* $|z, \varphi(z)|$ *par* S (¹) qui soit plus commode à étudier que $\varphi(z)$.

Dans la suite, il nous arrivera souvent d'user de ces transformations homographiques. Nous étudierons l'itération dans le *plan complet* ou, si l'on préfère, sur la sphère de Riemann, support de la variable z.

10. 2° *Propriétés des points de* E. — Il y a toujours un point de E satisfaisant à

$$z = \varphi(z), \qquad |\varphi'(z)| > 1.$$

Une transformation homographique convenable permet de supposer que ce point est l'origine $z = 0$. Nous allons étudier l'itération d'un petit domaine entourant O, et tout ce que nous dirons pourra s'appliquer à l'itération de la substitution $z_n = \varphi_n(z)$ autour d'un point ζ satisfaisant à

$$\zeta = \varphi_n(\zeta), \qquad |\varphi'_n(\zeta)| > 1;$$

les itérées de φ_n font partie de celle de φ et l'on connaîtra bien l'itération d'un petit domaine entourant ζ par φ, si l'on connaît l'itération de ce domaine par φ_n.

D'après l'hypothèse, $\varphi(z)$ se développe autour de l'origine en une série de Taylor

$$(4) \qquad z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad \text{avec} \qquad |a_1| = |\varphi'(0)| > 1.$$

Remarquons d'abord que, parmi tous les antécédents d'ordre 1 de o, il y en a *un* et *un seul* confondu avec o à cause de $\varphi'(0) \neq 0$. Lorsque z_1 varie autour de l'origine, cet antécédent z qui est bien déterminé varie autour de l'origine et l'on a un développement de Taylor pour z en fonction de z_1 tiré de (4),

$$(5) \qquad z = \frac{1}{a_1} z_1 + \alpha_2 z_1^2 + \ldots.$$

Les résultats obtenus par M. Kœnigs prouvent que, si z_1 décrit un cercle C_1 de rayon assez petit, autour de l'origine, z défini par (5) décrira une courbe C *toute intérieure à ce cercle*; c'est-à-dire que,

---

(¹) Si l'on désigne par Σ l'opération qui fait passer de z à $\varphi(z)$, celle qui fait passer de Z à $\Phi(Z)$, sera $S^{-1}\Sigma S$, comme il est bien connu en théorie des groupes.

si $|z_1| < \delta$, δ étant assez petit, on a aussi

$$|z| < k|z_1| \quad \text{avec} \quad k < 1,$$

et si z_1 décrit l'aire D_1 limitée par C_1, z décrira l'aire D limitée par C. On peut dire aussi bien : si z décrit une aire D limitée par un cercle C (je dis : *cercle* pour fixer les idées) de centre O, de rayon *assez petit*, z_1 décrira une aire D_1 limitée par une courbe C_1 transformée de C, et D_1 *contiendra* D *à son intérieur.*

D_1 est la première itérée de l'aire D ; prenons les itérées successives de D. z_1 décrivant D_1, z_2 décrira une *aire* D_2 *qui contiendra* D_1 *tout entière à son intérieur;* D_2 se recouvrira elle-même si, pour deux valeurs distinctes de z dans D_1, φ reprend la même valeur : on envisagera alors que D_2 se compose de deux ou plusieurs feuillets superposés, à la façon d'une surface de Riemann; z décrivant D_2 (tous les feuillets de D_2), $\varphi(z)$ décrira une certaine aire D_3 itérée de D_2, qui contiendra D_2 à son intérieur, et pourra être comme D_2 une surface de Riemann à plusieurs feuillets. Il est juste de remarquer que toutes les D_i successives sont simplement connexes, comme l'aire D initiale. Chacune des aires D_i est tout entière contenue dans la suivante D_{i+1}, c'est clair si D_i et D_{i+1} n'ont qu'un feuillet; si elles ont plusieurs feuillets, tout feuillet de D_i fait partie d'un feuillet de D_{i-1} et *sur ce feuillet tout point de* D_i *ou de la frontière de* D_i *est intérieur à* D_{i+1}. La question qui se pose immédiatement est la suivante : tout point du plan est-il intérieur à une D_i d'indice assez grand (¹), ou bien y a-t-il des points du plan qui ne sont intérieurs à aucune D_i. La réponse est particulièrement simple et intéressante :

11. *Théorème fondamental.* — Trois cas seulement sont possibles :

1° Ou bien deux points distincts du plan complet et deux seulement restent extérieurs à toutes les D_i successives (²). En les envoyant respectivement en a et à l'infini par une homographie convenable, $z_1 = \varphi(z)$ se réduit à l'une des deux formes simples

$$Z_1 - a = (Z - a)^k \quad \text{ou} \quad Z_1 - a = \frac{1}{(Z - a)^k},$$

(¹) C'est-à-dire : existe-t-il un feuillet de D_i qui recouvre ce point.

(²) C'est-à-dire ne sont recouverts par aucun feuillet des D_i successives.

alors toute aire finie du plan ne contenant pas le point a est intérieure à une D_i d'indice assez grand et à toutes les itérées de D_i.

2° Ou bien il y a un point du plan complet et un seul qui reste extérieur à toutes les D_i successives. En envoyant ce point à l'infini par une homographie convenable, $\varphi(z)$ ne peut être alors qu'un polynome et elle l'est effectivement. [Cette conclusion est encore vraie si $\varphi(z)$ est une transcendante entière.] Dans cette hypothèse, toute aire du plan située à distance finie est intérieure à une D_i d'indice assez grand et à toutes les itérées de D_i.

3° Ou bien tout point du plan complet est intérieur à une D_i d'indice assez grand [1], et comme le plan complet [2] est un ensemble fermé, il y aura une D_i d'indice assez grand qui recouvrira tout le plan complet; il en sera de même de toutes les itérées de cette D_i. C'est le cas d'une fraction rationnelle $\varphi(z)$ générale.

Supposons en effet que trois points distincts du plan complet restent extérieurs à toutes les D_i et remarquons que l'ensemble des points du plan recouverts par une D_i représente l'ensemble des valeurs prises par la fonction $\varphi_i(z)$ itérée de $\varphi(z)$ dans l'aire D initiale. On conclurait de là qu'il existe aux moins trois valeurs que la famille des fonctions

$$\varphi(z),\quad \varphi_2(z),\quad \ldots,\quad \varphi_i(z),\quad \ldots$$

ne pourrait prendre dans D. Cette famille est composée de fonctions rationnelles; elle serait donc *normale dans* D, au sens de M. Montel, c'est-à-dire que de la suite des $\varphi_i(z)$ on pourrait extraire une suite partielle

$$\varphi_{n_1}(z),\quad \varphi_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad \varphi_{n_i}(z),\quad \ldots$$

qui tendrait *uniformément dans toute aire intérieure à* D, vers une fonction méromorphe dans D, qui pourrait être partout infinie dans D.

Cette dernière éventualité est impossible, puisqu'à l'origine toutes les φ_i sont nulles. La fonction limite $f(z)$ serait donc nulle à l'origine et méromorphe dans D. L'origine serait point ordinaire de $f(z)$ et dans une petite aire Δ entourant l'origine et contenue dans D, $f(z)$ serait holomorphe. Dans cette aire Δ, les φ_{n_i} tendraient uniformément

---

[1] C'est-à-dire est recouvert par un feuillet au moins d'une D_i d'indice convenable.

[2] Ou la sphère de Riemann dont il est la projection stéréographique.

vers $f(z)$. En particulier aussi, les valeurs des dérivées des φ_{n_i} à l'origine $\varphi'_{n_i}(0)$ tendraient vers la valeur bien déterminée et finie de la dérivée $f'(0)$ de f à l'origine. Ici se rencontre une contradiction, car bien évidemment, le développement de Taylor de $\varphi_{n_i}(z)$ autour de l'origine est

$$\varphi_{n_i}(z) = a_1^{n_i} z + \ldots, \qquad \varphi'_{n_i}(0) = a_1^{n_i},$$

si

$$\varphi(z) = a_1 z + \ldots,$$

et comme n_i devient infini, $a_1^{n_i}$ devient infini aussi puisque $|a_1| > 1$ par hypothèse.

Deux points seulement peuvent échapper à toutes les D_i; on a donc trois cas.

Premier cas. — Ou bien il y en a deux distincts et alors chacun d'eux coïncide avec ses propres antécédents, ou bien chacun d'eux coïncide avec tous les antécédents d'ordre un de l'autre; en envoyant les deux points respectivement en a et à l'infini par une homographie convenable, la relation $z_1 = \varphi(z)$ se transformera (¹) soit en

$$Z_1 - a = (Z - a)^k,$$

soit en

$$Z_1 - a = \frac{1}{(Z - a)^k}.$$

On voit immédiatement que toute aire à distance finie ne contenant pas le point a sera intérieure à toutes les D_j d'indice $j \geqq i$, i étant convenablement choisi.

On reconnaîtra aisément qu'on est dans ce cas, à ce fait qu'alors il existe deux points ζ_1 et ζ_2, et deux seulement, où $\varphi'(z) = 0$ et ces points sont tels, en outre, que : ou bien (²)

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta_1), \quad \varphi'(\zeta_1) = 0, \quad \varphi''(\zeta_1) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_1) = 0, \quad \varphi^{(k)}(\zeta_1) \neq 0,$$

(¹) Pour abréger il nous arrivera de dire que la fraction $\Phi(Z)$, fournie par la transformation de $z_1 = \varphi(z)$ en $Z_1 = \Phi(Z)$, à l'aide de l'homographie auxiliaire, est la transformée homographique de $\varphi(z)$.

(²) Chacun d'eux est alors un point limite à convergence régulière et l'on verra plus loin qu'il n'est ni point de E, ni limite de points de E.

avec

$$\zeta_2 = \varphi(\zeta_2),\quad \varphi'(\zeta_2) = 0,\quad \varphi''(\zeta_2) = 0,\quad \ldots,\quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_2) = 0,\quad \varphi^{(k)}(\zeta_2) \neq 0;$$

ou bien [1]

$$\zeta_2 = \varphi(\zeta_1),\quad \varphi'(\zeta_1) = 0,\quad \varphi''(\zeta_1) = 0,\quad \ldots,\quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_1) = 0,\quad \varphi^{(k)}(\zeta_1) \neq 0,$$

avec

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta_2),\quad \varphi'(\zeta_2) = 0,\quad \varphi''(\zeta_2) = 0,\quad \ldots,\quad \varphi^{(k-1)}(\zeta_2) = 0,\quad \varphi^{(k)}(\zeta_2) \neq 0.$$

Deuxième cas. — Il y a un point et un seul qui échappe à toutes les D_i, il coïncide alors, nécessairement, avec tous ses antécédents. Si on l'envoie à l'infini par une homographie convenable, la relation $z_1 = \varphi(z)$ se transforme en une relation $Z_1 = \Phi(Z)$, $\Phi(Z)$ étant une fraction rationnelle dont tous les pôles sont à l'infini (car un pôle est un antécédent du point à l'infini), c'est-à-dire un polynome entier en Z.

On reconnaîtra aisément, étant donnée une forme rationnelle $\varphi(z)$, si l'on a affaire à ce deuxième cas. La fraction sera transformée homographique d'un polynome si, et seulement si l'on trouve un point ζ qui coïncide avec tous ses antécédents. Ce point sera critique pour la fonction $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, il sera aussi un point où $\varphi'(z) = 0$ puisque, parmi les antécédents d'un point critique de $\psi(z)$, il en est un où $\varphi'(z) = 0$. C'est donc un point ζ, pour lequel l'équation

$$\varphi(z) - \zeta = 0,$$

a ses k racines égales à ζ.

C'est un point $\zeta = \varphi(\zeta)$, qui annule $\varphi'(\zeta)$, $\varphi''(\zeta)$, ..., $\varphi^{(k-1)}(\zeta)$. $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$, et c'est à cela qu'on le reconnaîtra [2].

Si l'on est dans ce cas, il sera aisé de transformer $\varphi(z)$ en un polynome, et alors on reconnaît tout de suite que, quelle que soit l'aire Δ à distance finie du plan z, on peut trouver un indice i tel que les itérées de D d'ordre $\geqq i$ recouvrent complètement Δ : ceci résulte de ce

---

[1] Ils forment alors un groupe circulaire limite d'ordre 2 et l'on verra qu'ils ne sont ni points de E, ni limites de points de E.

[2] C'est donc un point limite à convergence régulière. Il ne sera ni de E, ni limite de points de E.

que chaque point de l'aire Δ, qui est un ensemble *borné* et *fermé* ([1]), est intérieur à une D_i; donc, les D_i étant contenues chacune dans la suivante, il en est une bien déterminée qui contient Δ à son intérieur. Pour bien préciser encore une fois, cela voudra dire qu'*il existe un feuillet de* D_i sur lequel tout point de l'aire Δ ou de son contour est un point intérieur à D_i.

Troisième cas. — Si la fraction rationnelle $\varphi(z)$ donnée ne se laisse ramener à aucun des types offerts par les deux cas précédents (et l'on a donné le moyen de reconnaître quand ces deux cas se présentent), c'est-à-dire s'il n'existe ni point qui coïncide avec tous ses antécédents, ni système de deux points dont chacun coïncide avec les k antécédents d'ordre un de l'autre, on peut affirmer que tout point du plan complet sera intérieur à une D_i d'indice assez grand, et comme le plan *complet* ([2]) est un ensemble *fermé*, il existera un indice i tel que toutes les itérées de D d'indice $\geq i$ *recouvriront le plan complet.*

Ainsi se trouve démontré notre théorème fondamental.

Remarque. — I. L'aire D initiale a été prise limitée par un cercle de centre O uniquement assujetti à être assez petit, c'est-à-dire dont le rayon soit inférieur à un nombre déterminé r_0.

Mais toutes nos conclusions sont encore vraies, quelle que soit *l'aire* $\mathcal{D}$ *entourant* O dont on parte, si petite soit-elle, car une telle aire contiendra toujours à *son intérieur* une aire circulaire D de centre O assez petite, et il est évident que toute itérée $\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{D}$ contient à son intérieur l'itérée D_i de D.

II. Dans un langage équivalent à celui du théorème précédent on peut dire :

Quelle que soit l'aire arbitrairement petite $\mathcal{D}$ entourant O que l'on

---

([1]) Je fais ici appel au lemme de théorie des ensembles appelé *Lemme de Borel-Lebesgue :* « Si tout point d'un ensemble fermé borné à deux dimensions est intérieur à une aire plane, on peut trouver un nombre *fini* de ces aires qui contiennent à leur intérieur tous les points de l'ensemble. » Mais ceci n'est pas essentiel.

([2]) Ou, si l'on veut, la sphère de Riemann considérée comme support de la variable z.

envisage, il existe deux valeurs complexes (y compris l'infini) au plus que ne puissent prendre dans $\mathfrak{D}$ les fonctions $\varphi_i(z)$ itérées de $\varphi(z)$.

Premier cas. — Il y en a *deux* qui se ramènent à a et *l'infini* lorsque $\varphi(z)$ se ramène, par homographie, à

$$Z_1 - a = (Z - a)^k \qquad \text{ou} \qquad Z_1 - a = \frac{1}{(Z-a)^k}.$$

Alors, si l'on considère une aire quelconque Δ du plan complet ne contenant pas ces deux points à son intérieur ou sur sa frontière, à partir d'un certain indice i chacune des itérées $\varphi_j(z)$, $j \geqq i$, prendra dans $\mathfrak{D}$ toutes les valeurs affixes des points de l'aire Δ.

Deuxième cas. — Il y en a *une* qu'on peut supposer être *l'infini*, lorsque $\varphi(z)$ se ramène par homographie à un *polynome quelconque*. Alors il existe un indice i tel que chaque itérée $\varphi_j(z)$ d'indice $j \geqq i$ prenne, dans $\mathfrak{D}$, toutes les valeurs affixes des points d'un domaine borné quelconque, fixé à l'avance, du plan.

Troisième cas. — Pour une fraction quelconque $\varphi(z)$ qui n'est ni transformée d'un polynome, ni transformée de $Z_1 = \frac{1}{Z^k}$ par homographie, il existe un indice i tel que toute itérée $\varphi_j(z)$ d'indice $j \geqq i$ prenne, dans $\mathfrak{D}$, *toutes les valeurs complexes finies ou infinies.*

12. *Corollaires.* — 1° Les conclusions précédentes sont vraies si l'on remplace le point O, racine de $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| > 1$, par un point quelconque de E, racine de $z = \varphi_n(z)$ où $|\varphi'_n(z)| > 1$, quel que soit l'indice n. Il n'y a, pour s'en assurer, qu'à substituer $\varphi_n(z)$ à $\varphi(z)$, pour former les itérées successives de l'aire $\mathfrak{D}$ entourant le point de E considéré; on étudie $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}_{2n}$, $\mathfrak{D}_{3n}$, ..., $\mathfrak{D}_{pn}$, ..., d'où l'on conclut pour toute la suite $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{D}_i$, ..., que le théorème précédent est vrai.

2° *Tout point de* E *est point limite pour l'ensemble des antécédents successifs d'un point quelconque du plan*, exception faite pour deux points du plan au plus qui peuvent : ou bien coïncider chacun avec ses propres antécédents, ou bien coïncider chacun avec tous les antécédents d'ordre un de l'autre.

On a fait remarquer, d'autre part, que, parmi les antécédents d'ordre 1 d'un point quelconque de E, il peut y en avoir un au plus qui coïncide avec ce point lui-même, un peu de réflexion suffit alors à prouver qu'un point quelconque de E a une infinité d'antécédents successifs et par conséquent *tout point de E est point limite pour l'ensemble de ses propres antécédents* (¹).

3° De là suit une propriété très intéressante des points de E, à savoir : *tout point de E est limite de points de E*, c'est-à-dire que dans un voisinage arbitrairement petit d'un point P de E

$$[\zeta = \varphi_p(\zeta);\ |\varphi'_p(\zeta)| > 1],$$

il y a toujours une infinité de points de E, racines d'équations telles que

$$z = \varphi_n(z), \qquad \text{où} \qquad |\varphi'_n(z)| > 1.$$

En effet, quelque petite que soit l'aire ω entourant un point P de E, on peut trouver dans ω un point distinct de P qui soit antécédent de P d'ordre assez élevé m ; soit P_{-m} ce point-là, on peut l'entourer d'une aire Δ_{-m}, intérieure à ω et ne contenant pas P, assez petite pour que la transformée de Δ_{-m} par $\varphi_m(z)$ qui est une aire Δ entourant P, soit une aire simple à un seul feuillet aussi petite qu'on voudra (mais ceci n'a pas d'importance, l'essentiel est que Δ entoure P). L'itérée d'ordre n de Δ est itérée d'ordre $m+n$ de Δ_{-m}, et l'on peut prendre n assez grand pour que la petite aire finie Δ_{-m} soit tout entière à l'intérieur d'un feuillet de Δ_n (ceci résulte bien de ce qu'aucun des antécédents d'un point E ne peut être un de ces deux points exceptionnels qui interviennent dans le premier et le deuxième cas de notre théorème fondamental).

La fraction $\varphi_{m+n}(z)$ transforme alors l'aire Δ_{-m} en une aire Δ_n, qui peut se recouvrir elle-même à la façon d'une surface de Riemann, mais qui est telle que Δ_{-m} est intérieur à un feuillet de Δ_n, c'est-à-dire que, sur le feuillet considéré, Δ_{-m} et son contour ne renferment que des points *intérieurs à* Δ_n et non sur le contour de Δ_n. Ceci suffit pour affirmer (²) que l'aire Δ_{-m} renferme *à son intérieur* une racine de

(¹) Un point de E n'est donc jamais un des deux points exceptionnels prévus au théorème fondamental

(²) *Voir* aux Préliminaires, § 5.

$z = \varphi_{m+n}(z)$ pour laquelle $|\varphi'_{m+n}(z)| > 1$ et cette racine est distincte de P, car Δ_{-m} ne contient pas P.

On a ainsi montré que toute aire arbitrairement petite ω entourant un point P de E contient un point de E distinct de P; elle en contient donc une infinité : donc tout point de E est bien limite de points de E.

Ceci montre en outre que E, qui contient sûrement un point au moins, *en contient toujours une infinité dénombrable.* Il est alors permis de parler de *l'ensemble* E' *dérivé de* E. E' contient E, c'est ce qu'affirme le corollaire 3° que nous venons de démontrer.

4° Les principes sur lesquels reposent la démonstration précédente prouvent aussi que *tout antécédent d'un point de* E appartient à E'; enfin il est évident que E' est un ensemble *parfait*, car d'une part il contient son dérivé E'', d'autre part, il contient E, et tout point de E' étant limite de points de E est limite de points de E'. Donc, E' est identique à E'', E' *est parfait.*

Remarque. — Le fait : tout point de E est limite de points de E, est capital, nous l'avons obtenu par une analyse toute naturelle, comme conséquence du théorème fondamental. Voici une nouvelle démonstration directe. Elle utilise le théorème de M. Picard, avec le perfectionnement apporté par M. Landau, dont voici l'énoncé :

α et β étant deux nombres complexes quelconques ($\beta \neq 0$), il existe un nombre R(α, β) *ne dépendant que de α et de β, tel que toute fonction holomorphe*

$$f(z) = \alpha + \beta z + \ldots,$$

dans le cercle $|z| < R$, prend dans ce cercle la valeur ZÉRO *ou la valeur* UN.

Supposons que l'origine soit un point de E et, pour simplifier l'exposition, que ce soit une racine de $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| > 1$, ce n'est pas là, comme on l'a dit plusieurs fois, restreindre la généralité.

$\varphi(z)$ se développe autour de l'origine sous la forme

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad (|a_1| > 1).$$

L'itérée d'ordre n de φ a un développement facile à calculer : c'est

$$z_n = \varphi_n(z) = a_1^n z + a_2 a_1^{n-1}(a_1^n - 1) z^2 + \ldots.$$

Or

$$\frac{\varphi_n(z)}{z} = a_1^n + a_2 a_1^{n-1}(a_1^n - 1)z + \ldots, \qquad (|a_1^n| > 1).$$

On est sûr alors que dans un cercle de rayon $R[a_1^n, a_2 a_1^{n-1}(a_1^n - 1)]$, $\frac{\varphi_n(z)}{z}$ prend, si elle est régulière dans ce cercle, en un point distinct de O, la valeur *zéro* ou la valeur *un*.

M. Hurwitz a montré (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. 3, p. 377) que

$$R(\alpha, \beta) \leqq 16 \frac{1}{|\beta|} \sqrt[3]{|\alpha|^2} \sqrt{|\alpha - 1|}.$$

On peut donner des expressions plus précises de R, mais celle-là nous suffit. Si l'on calcule avec elle la valeur de R pour $\frac{\varphi_n(z)}{z}$, on trouve une expression qui est de l'ordre de

$$\frac{|a_1^n|^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}}{|a_1|^{2n-1}} = |a_1|^{-\frac{5n}{6}+1},$$

c'est-à-dire qui *tend vers zéro quand n grandit indéfiniment.*

La conclusion de tout cela est que dans un cercle de centre O dont le rayon est d'ordre $|a_1|^{-\frac{5n}{6}+1}$ (rayon arbitrairement petit si n est assez grand), $\frac{\varphi_n(z)}{z}$ a un pôle, ou bien un zéro, ou prend la valeur 1, ailleurs qu'à l'origine.

1° Si $\frac{\varphi_n}{z}$ prend la valeur 1, le théorème est démontré, car en ce point z, on a $\varphi_n = z$. Les seuls cas embarrassants sont ceux où, quel que soit n à partir d'un certain rang, $\frac{\varphi_n}{z}$ prendrait bien les valeurs 0 et ∞, mais pas la valeur 1.

2° Si c'est la valeur zéro, on arrive à la conclusion que O est point-limite de ses propres antécédents et l'on se tire de la difficulté bien aisément par le procédé employé au 3e corollaire : le cercle C, qui est *arbitrairement petit*, contient un antécédent P_{-n} de l'origine qu'on peut entourer d'une aire Δ_{-n} assez petite pour être contenue dans C et pour que son itérée Δ par $\varphi_n(z)$ entourant O soit arbitrairement petite; comme l'étude locale des environs de O suffit, C étant arbitrairement petit, à prouver qu'une certaine itérée Δ_p de Δ renferme à son intérieur C, et par suite Δ_{-n}, on conclut que Δ_{-n} et par suite C renferment un point de E distinct de O pour lequel

$$z = \varphi_{n+p}(z), \qquad |\varphi'_{n+p}(z)| > 1.$$

3° Enfin, si $\frac{\varphi_n(z)}{z}$ a toujours un pôle dans le cercle C, cela veut dire que O est point-limite pour l'ensemble formé par les antécédents du point à l'infini. Par une homographie convenable, s'il existe un point du plan distinct de O dont les antécédents n'admettent pas O pour point-limite, on enverra ce point à l'infini et la difficulté précédente se trouvera écartée. Il ne serait impossible de la conjurer que si O était point-limite d'antécédents pour tout point du plan. Mais l'origine ayant alors des antécédents distincts d'elle-même, on raisonnerait comme au 2° et le théorème serait encore démontré.

Cette deuxième démonstration n'est pas, *au fond*, différente de la première, surtout si l'on songe que M. Montel a déduit le théorème de Picard-Landau des notions qu'il a introduites sur les familles normales de fonctions. On remarquera le lien étroit qui relie ces deux faits : 1° tout point de E est point-limite de points de E ; 2° tout point de E est point-limite pour ses propres antécédents.

13. *L'ensemble* E', *dérivé de* E. — Nous avons vu que E' est parfait.

Tout point P de E' étant limite de points de E, quelle que soit l'aire arbitrairement petite ω dont on entoure P, il y aura toujours dans ω un point de E, et par suite il y aura au plus deux points du plan (conformément aux premier et deuxième cas de notre théorème fondamental) qui resteront extérieurs à toutes les itérées ω_i de ω.

C'est là une *propriété caractéristique des points de* E'.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point* P *du plan complet jouisse de la propriété fondamentale suivante : quelque petite que soit l'aire* ω *entourant* P, *deux points du plan complet au plus pourront rester extérieurs à toutes ses itérées* ω_i *(cas correspondant aux* 1° *et* 2° *de notre théorème fondamental), est que* ω *soit un point de* E'.

On a vu que, si P est de E', la condition était réalisée : la condition est suffisante. Il est visible qu'elle est nécessaire; en effet, si quel que soit ω entourant un point P, les itérées ω_i de ω recouvrent tout point du plan complet sauf deux points au plus, il est visible que P est point limite pour l'ensemble des antécédents d'un point *quelconque* du plan (il ne peut y avoir exception que pour deux points du plan, si ce système de deux points est identique à l'ensemble de tous ses antécédents et de tous ses conséquents, ce qui nous ramène aux premier et second cas de notre théorème fondamental). Parmi ces points dont les antécédents admettent P pour un de leurs points limites, se trouve évidemment tout point de E. (On a vu qu'un point de E n'est jamais un des deux points exceptionnels.) P étant limite pour les antécédents d'un point de E est donc de E', puisque, d'une part, tout antécédent d'un point de E est de E' et, d'autre part, E' est parfait.

P étant donc un point de E' et $\mathfrak{D}$ une aire arbitrairement petite qui l'entoure, Δ étant d'autre part une aire quelconque du plan complet, uniquement assujettie à ne contenir ni à son intérieur ni sur sa frontière un ou deux points particuliers bien déterminés, quand $\varphi(z)$ est une des fractions visées par le premier ou le second cas du théorème fondamental, Δ pouvant être le plan complet lui-même si $\varphi(z)$ est générale, il existe un indice i tel que toutes les itérées de $\mathfrak{D}$, d'indice $\geq i$, recouvrent complètement Δ (¹).

14. *Corollaires*. — 1° Tout point de E' est point limite pour l'ensemble des antécédents successifs d'un point quelconque du plan complet, exception faite peut-être pour deux points au plus qui coïncident chacun avec ses propres antécédents ou chacun avec tous les antécédents d'ordre 1 de l'autre. (Cas 1° et 2° du théorème fondamental.)

Dans un autre langage, il existe au plus deux valeurs complexes, finies ou infinies, qu'aucune des fonctions

$$\varphi(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots$$

(¹) En particulier, tout point de E' ne pouvant être un des deux points exceptionnels prévus au théorème précédent, sera *intérieur à une* $\mathfrak{D}_i$, et comme l'ensemble E' est parfait (et borné si l'on se place sur la sphère de Riemann), on pourra même trouver un nombre fini de $\mathfrak{D}_i$, ou même simplement une $\mathfrak{D}_{i_0}$ d'indice assez élevé i_0 qui contienne *à son intérieur tout l'ensemble* E', ainsi que toutes les $\mathfrak{D}_i$ d'indice $i > i_0$. Cela tient à ce que, quelque petite que soit l'aire $\mathfrak{D}$ entourant P de E', elle contient une petite aire circulaire entourant un point de E, et pour les itérées de cette petite aire, qui sont toutes *intérieures* aux itérées de même rang de $\mathfrak{D}$, la propriété précédente a déjà été reconnue exacte.

ne puisse prendre dans un voisinage donné $\mathfrak{O}$ de P arbitrairement petit.

2° Tous les antécédents successifs d'un point de E' et tous ses conséquents appartiennent à E'; car les uns et les autres possèdent, comme le point de E' considéré, la propriété caractéristique énoncée au théorème ci-dessus (1).

On peut dire que E' est un ensemble parfait qui reste invariant par la transformation simplement rationnelle du plan $z_1 = \varphi(z)$ et par les k branches de la transformation inverse.

3° Les antécédents successifs d'un point quelconque P de E' forment un ensemble partout dense dans E' (2), c'est-à-dire que toute aire contenant des points de E' contient des antécédents du point considéré P. C'est évident puisque, aucun point P de E' ne pouvant être un des deux points exceptionnels prévus au théorème précédent, tout point de E' est limite pour les antécédents du point considéré P.

4° *En un point* P *de* E', *il est impossible que la famille* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... *ou une famille quelconque formée d'une infinité de* φ_i *soit normale.*

En effet, quelque petit que soit le cercle C de centre P, il existe un indice i tel que toutes les aires C_j itérées de C d'indice $j \geqq i$ recouvrent

(1) De la note (1) (page précédente) il résulte, en tenant compte de ce second corollaire, que, si l'on considère une aire arbitrairement petite $\mathfrak{O}$ (par exemple un cercle de centre O entourant un point P de E', et la partie $\mathcal{E}'$ de E' *intérieure à l'aire* $\mathfrak{O}$, l'itérée $\mathfrak{O}_{i_0}$ de $\mathfrak{O}$ contenant à son intérieur tout l'ensemble E' :

a. Tout itéré d'ordre i_0 d'un point de $\mathcal{E}'$ est un point de E' intérieur à $\mathfrak{O}_{i_0}$;

b. Tout point de E' étant intérieur à $\mathfrak{O}_{i_0}$, aura un antécédent d'ordre i_0 intérieur à $\mathfrak{O}$, cet antécédent sera un point de $\mathcal{E}'$; d'où l'on conclut :

c. Tout point de E' est contenu dans l'ensemble itéré d'ordre i_0 (et dans tous les itérés d'ordre $i > i_0$) de $\mathcal{E}'$.

On peut donc dire qu'*à partir de toute partie arbitrairement petite* $\mathcal{E}'$ *de* E' *on peut engendrer tout* E' *à l'aide d'un nombre fini d'itérations successives de* $\mathcal{E}'$, ceci nous sera utile pour discuter la structure de E', car on peut dire, comme conséquence de cette note : *La structure de* E' *tout entier est la même que celle de toute partie* $\mathcal{E}'$ *de* E' *formée des points de* E' *intérieurs à une aire arbitrairement petite du plan qui entoure un point arbitraire de* E'.

(2) Il n'en est pas de même des conséquents de tout point de E', puisque l'on sait *a priori* que tout point de E ou tout antécédent d'un point de E n'a qu'un nombre *fini* de conséquents successifs.

toute aire Δ fixée à l'avance et uniquement assujettie à la condition de laisser deux points bien déterminés du plan au plus à son *extérieur*. Si la famille considérée était normale en P, ou si une suite infinie quelconque extraite de la suite φ_i était normale en P, on pourrait trouver une suite

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

qui, dans C supposé assez petit, tendrait uniformément vers une fonction analytique $f(z)$ qui pourrait être une constante; mais C étant supposé assez petit, à partir d'un certain rang les aires C_{n_p}, $C_{n_{p+1}}$, ... itérées de C seraient voisines de l'aire Γ transformée de C par $f(z)$, et par suite seraient, comme Γ, arbitrairement petites. Ceci contredit le fait que pour tout indice j supérieur ou égal à l'indice i dont il a été question plus haut, C_j recouvre Δ.

5° Dans toute aire ω, arbitrairement petite, entourant un point P de E′ il existe deux valeurs complexes (finies ou infinies) au plus que ne puisse prendre aucune des fonctions $\varphi'_1(z)$, $\varphi'_2(z)$, ..., $\varphi'_n(z)$ ou même que ne puisse prendre aucune des fonctions d'une suite infinie extraite de la précédente :

$$\varphi'_{n_1}(z), \quad \varphi'_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi'_{n_i}(z), \quad \ldots.$$

Car s'il existait trois valeurs complexes distinctes qu'aucune des fonctions

$$\varphi'_{n_1}(z), \quad \varphi'_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi'_{n_i}(z), \quad \ldots$$

ne prenne dans ω, cette suite serait *normale dans* ω, et l'on en déduirait de suite que

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_i}(z), \quad \ldots$$

serait aussi normale, contrairement au 4e corollaire.

13. *La structure de* E′. — Des exemples simples montrent immédiatement que E′ peut être : 1° un ensemble parfait discontinu, ou 2° un ensemble parfait continu linéaire [1], mais 3° rien n'exclut *a priori* la possibilité pour E′ d'avoir des portions qui soient des continus superficiels, des aires.

---

[1] *A priori*, E′ peut être à la fois discontinu dans certaines régions et continu linéaire dans d'autres; nous verrons plus loin que cela ne peut être.

A ce titre la proposition suivante est intéressante.

Théorème. — L'ensemble E' ne peut comprendre des aires que s'il comprend tout le plan complet; en d'autres termes : s'il existe un point du plan complet qui n'appartienne pas à E', E' ne peut être qu'un ensemble continu linéaire ou un ensemble parfait discontinu, mais ne comprend certainement aucune aire du plan. Autrement dit encore, dans ce cas, E' n'a pas de *point intérieur*.

En effet, si A est un point du plan n'appartenant pas à E', on peut l'entourer d'une petite aire Δ dont aucun point n'est de E'; aucune des antécédentes de Δ ne contient de point de E'; par suite, un point P de E' ne peut être point limite pour les antécédents d'un point *arbitrairement choisi dans* Δ (¹), que si dans tout cercle de centre P il y a des points n'appartenant pas à E'. Ceci exclut donc la possibilité pour P d'être « point intérieur » de E', c'est-à-dire d'être centre d'un certain petit cercle dont tous les points sont de E'. Comme nous le verrons par la suite, l'étude locale aux environs des points remarquables du plan déjà signalés par M. Kœnigs permet de fixer certaines régions qui ne contiennent pas de point de E'.

A priori E' peut donc : 1° être un ensemble parfait discontinu ou continu linéaire (²), ou 2° être identique au plan complet.

(¹) Ceci écarte l'objection au raisonnement actuel que pourrait faire naître l'hypothèse que tous les antécédents de A ne sont qu'en nombre fini, hypothèse qui correspond aux premier et deuxième cas du théorème fondamental, A étant supposé un des deux points exceptionnels dont il est fait mention alors. Nous verrons d'ailleurs plus tard que ces deux points exceptionnels dans les premier et deuxième cas ne sont jamais des points de E', et qu'on peut les entourer chacun d'une aire ne contenant pas de point de E' : ils forment en effet un groupe circulaire limite d'ordre 2, ou bien chacun est point limite à convergence régulière.

(²) Voici une conséquence immédiate de la note (¹) de la page 99 du présent Mémoire : Si dans une région R arbitrairement petite du plan, les points de E' forment un ensemble partout discontinu, c'est-à-dire « mal enchaîné entre deux quelconques de ses points », E' tout entier sera *partout discontinu*. En effet, tout point de E' peut être entouré d'une petite région D, dont une itérée D_i contient R à son intérieur (car un point de E' n'est jamais un des deux points exceptionnels qui peuvent échapper à toutes les D_i). Il y a donc une antécédente R_{-i} d'ordre i de R qui est tout entière contenue dans D. Dans D, les points de E' forment un ensemble mal enchaîné entre deux quelconques de ses points, car si cet ensemble partiel était bien enchaîné entre deux de ses points

16. 1° Voici des exemples simples du premier cas :

1° E' est ensemble parfait discontinu : Il suffit d'envisager les fractions rationnelles signalées par M. Fatou, dans sa Note des *Comptes rendus* du 15 octobre 1906 : $z_1 = \frac{z^k}{z^k+2}$, pour lesquelles il démontre que tout point du plan complet n'appartenant pas à un certain ensemble parfait discontinu E' a des conséquents qui tendent vers l'origine.

[Par la transformation $z = \frac{1}{Z}$, ces fractions se réduisent à des polynomes

$$Z_1 = 2Z^k + 1$$

et le point de convergence pour tout le plan, sauf E', est le point à l'infini.]

E' est obtenu par M. Fatou de la façon très simple que voici : Il détermine un cercle C_0 de centre situé à l'origine, dont le rayon ρ se calcule d'après les formules de M. Kœnigs, et tel que, si $|z| < \rho$, on ait

$$|z_1| < K|z| \qquad (0 < K < 1).$$

K se détermine connaissant la valeur de $\frac{dz_1}{dz}$ à l'origine, qui est ici nulle. C_0, dans le cas présent, contient les deux points critiques de la fonction algébrique $z(z_1)$ inverse de $z_1 = \varphi(z)$ qui sont $z_1 = 1$

---

son itéré d'ordre i le serait aussi; or, cet itéré d'ordre i contient la portion de E' contenue dans R (puisque D contient R_{-i}) qui, par hypothèse, est partout discontinue dans R.

De même, si dans une région R arbitrairement petite du plan, les points de E' forment un *ensemble continu linéaire*, c'est-à-dire bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, E', tout entier, sera bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, E' sera un continu linéaire.

E' ne peut donc être partout discontinu dans une région et continu dans d'autres. Il ne peut se composer de deux portions continues sans point commun, mais rien n'empêche *a priori* E' d'être tel que, dans toute région du plan, il y ait des points de E' entre lesquels E' est bien enchaîné, et d'autres entre lesquels E' soit mal enchaîné; c'est-à-dire que rien n'empêche que dans toute région du plan contenant des points de E', si petite soit-elle, il y ait des portions de E' continues et des portions discontinues.

et $z_1 = 0$. Alors si l'on prend les antécédentes successives de C_0, on a successivement k courbes, puis k^2 courbes, ..., k^q courbes, la portion du plan limitée à C_0 contenant O a pour antécédente une portion du plan contenant la précédente et limitée aux k courbes antécédentes de C_0, cette dernière portion a pour antécédente la portion du plan contenant O et limitée aux k^2 antécédentes d'ordre 2 de C_0, etc. Chacune des régions antécédentes l'une de l'autre, ainsi déterminées, contient sa conséquente, et chacune de ses courbes limites délimite une région (ne contenant pas O) où se trouvent k courbes limites de la région antécédente de la région considérée.

Par ce processus, on voit que les courbes antécédentes successives de C_0 ainsi introduites, se rétrécissent indéfiniment dans toutes leurs dimensions. L'ensemble des points n'appartenant à *aucune* des régions envisagées précédemment, qui sont les antécédentes de l'aire du cercle C_0, est un ensemble parfait partout discontinu. Tout point de cet ensemble est point limite pour les antécédents de tout point du plan, sauf l'origine (qui est un point exceptionnel du type signalé au deuxième cas de notre théorème fondamental), c'est évident d'après la définition même de cet ensemble; on reconnaît ainsi que cet ensemble n'est autre que l'ensemble E' relatif à la fraction $z_1 = \frac{z^k}{z^k + 2}$.

2° E' est un continu linéaire : Il suffit de prendre l'exemple $z_1 = z^2$ qui entre dans le premier cas du théorème fondamental.

Ici l'itérée d'ordre n de z^2 est

$$z_n = \varphi_n(z) = z^{2^n}.$$

Les racines ζ de $z = \varphi_n(z)$ ont toutes 1 pour module, excepté $z = 0$. Ce sont les racines de

$$z^{2^n-1} - 1 = 0.$$

En chacune de ces racines, on a

$$\varphi'(\zeta) = 2\zeta;$$

donc

$$|\varphi'(\zeta)| = 2,$$

et, par suite,

$$|\varphi'_n(\zeta)| > 1.$$

Les racines de

$$z^{2^n-1} - 1 = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

sont toutes des points de E. Elles sont partout denses sur le cercle $|z| = 1$. E′ *se compose de toute la circonférence* $|z| = 1$.

L'équation $z = \varphi(z)$ admet en outre les racines o et ∞ [qui sont les deux points exceptionnels du théorème fondamental (1^er cas)], où $|\varphi'(z)|$ est nul. Ce sont respectivement les points-limites des conséquents de tout point de la région du plan limitée par le cercle $|z| = 1$ qui les contient.

3° Nous verrons plus loin quelle complexité peut offrir l'ensemble E′ dans des cas où il est linéaire. Nous verrons en particulier qu'il pourra diviser le plan en une *infinité de régions*, c'est-à-dire qu'il sera possible de donner des fractions $\varphi(z)$ simples pour lesquelles il existe une infinité de régions distinctes du plan limitées chacune par une partie de E′.

17. La question se pose de savoir si, effectivement, E′ peut comprendre le plan complet tout entier, et de répondre à cette question soit par la négative, soit par l'affirmative, en donnant un exemple de fonction rationnelle $\varphi(z)$ pour laquelle tout point du plan soit de E′. Nous verrons plus loin qu'une telle fonction n'est ni un polynome ni une fraction se ramenant au premier cas de notre théorème fondamental.

Montrons dès maintenant comment, par analogie avec une question connue et bien simple, on peut penser que E′ pourra peut-être compter tout le plan.

E′ a été défini par sa propriété caractéristique : *Tout point de E′ est point-limite pour les antécédents d'un point quelconque du plan complet, sauf peut-être pour deux points au plus.*

Or, prendre les antécédents successifs d'un point z du plan, c'est résoudre l'équation

$$\begin{array}{llll} \varphi(z_{-1}) = z & \text{qui donne } k \text{ antécédents} & z_{-1} & \text{d'ordre } 1, \\ \varphi(z_{-2}) = z_{-1} & \quad » \quad k^2 \quad » & z_{-2} & \text{d'ordre } 2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Ce problème est un cas particulier du suivant : $f(z, z_1) = 0$ étant une relation algébrique entre z et z_1 (f est un polynome en z et z_1). z est dit *antécédent* de z_1 ; z_{-1} défini par $f(z_{-1}, z) = 0$ sera antécédent de z, etc. On définit ainsi les antécédents successifs de z et la question est d'examiner l'ensemble dérivé de l'ensemble formé par ces antécédents. Or il est facile de voir que, pour certains choix de f, *cet ensemble dérivé se compose du plan tout entier*, quel que soit le point z envisagé.

En effet, si

$$z' = S_1(z), \quad z' = S_2(z), \quad \ldots, \quad z' = S_n(z)$$

sont les substitutions fondamentales d'un *groupe automorphe improprement discontinu dans tout le plan* (groupe de Picard par exemple, où ces substitutions sont

$$z' = z + 1, \quad z' = z + i, \quad z' = -\frac{1}{z}, \quad z' = -\frac{iz}{i}\Big)$$

en prenant

$$f(z, z_1) = [z_1 - S_1(z)][z_1 - S_2(z)]\ldots[z_1 - S_n(z)] = 0,$$

les antécédents successifs d'un point quelconque z_1 du plan ne seront pas autre chose évidemment que tous les homologues de z_1 dans le groupe considéré. Le groupe étant improprement discontinu quel que soit z_1 dans tout le plan, ces homologues seront denses partout dans le plan; l'ensemble dérivé de l'ensemble de ces homologues se compose *de tout le plan complet*, quel que soit le point z_1 dont on est parti.

La question qui nous occupe : détermination de E' pour une relation

$$z_1 - \varphi(z) = 0,$$

φ étant rationnel en z, et la question de la détermination des points du plan, autour desquels un groupe automorphe cesse d'être proprement discontinu, sont donc deux cas particuliers de la question plus générale suivante : détermination de l'ensemble dérivé pour l'ensemble des antécédents d'un point quelconque z_1 du plan, ces antécédents étant définis de proche en proche par la relation algébrique

$$f(z, z_1) = 0.$$

A ce titre, puisque le deuxième cas particulier (groupe automorphe) donne facilement des exemples où E' est identique au plan complet, on peut tout au moins penser qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que la question qui nous occupe dans ce Mémoire (itération des fonctions rationnelles) ne comporte pas de tels exemples, et l'analogie signalée serait plutôt une présomption en faveur de l'affirmative ([1]). Je profite de l'occasion pour signaler d'autres analogies entre la question de l'itération et celle des groupes automorphes.

18. Si l'on prend pour $S_1(z), \ldots, S_n(z)$ les substitutions d'un groupe fuchsien à cercle fondamental, il est clair que, pour tout point du plan, l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents sera composé de tous les points du cercle fondamental : E' se compose de toute la circonférence conservée par le groupe. On a trouvé un résultat analogue dans le deuxième exemple signalé plus haut $(z_1 = z^2)$.

Si les $S_i(z)$ sont les substitutions fondamentales d'un groupe kleinéen de l'espèce de ceux qui conservent l'intérieur d'une courbe continue pourvue de tangente en une infinité de points et dépourvue de cercle osculateur en ces points (courbe signalée par Poincaré dans son Mémoire sur les groupes kleinéens), E' se composera de tous les points de cette courbe. Effectivement, nous donnerons plus tard des exemples de fonctions rationnelles pour lesquelles E' se compose de tous les points d'une courbe de Jordan sans tangente.

Enfin, si les $S_i(z)$ sont, par exemple, les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien pour lequel le polygone fondamental a des côtés de la deuxième sorte, ce qui conduit à des fonctions fuchsiennes définies *dans tout le plan*, sauf aux points d'un ensemble parfait discontinu E' situé sur le cercle fondamental, on a l'analogue du premier exemple signalé $\left[z_1 = \dfrac{z^4}{z^4+2}\right]$ où l'ensemble était parfait

---

([1]) Depuis le dépôt de ce Mémoire, M. Lattès a fait connaître dans une Note des *Comptes rendus* (7 janvier 1918) un exemple intéressant de ce cas.

En posant

$$z = \wp(u) \qquad (g_2 = 4)$$
$$z_1 = \wp(2u) \qquad (g_3 = 0)$$

on a

$$z_1 = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}.$$

Tous les points $u = 2\omega(v + iw)$ pour lesquels v et w ont des développements *périodiques simples* dans le système de base 2 avec n chiffres à la période, sont tels que $2^n u \equiv u$ à une période près et correspondent à des racines de $z = z_n = \varphi_n(z)$ pour lesquelles $\varphi'_n(z) = 2^n$. Ce sont des points de E; les u précédents étant denses dans le parallélogramme des périodes, E est dense dans tout le plan. E' est identique au plan complet.

discontinu. On aura facilement un exemple de tels $S_i(z)$ en prenant trois cercles extérieurs deux à deux C_1, C_2, C_3, considérant l'aire qui leur est extérieure, la réfléchissant sur un des cercles, C_1 par exemple, et considérant l'ensemble de l'aire primitive et de son image comme le domaine fondamental d'un groupe fuchsien, en faisant se correspondre dans le domaine fondamental obtenu C_2 et son image C'_2, C_3 et C'_3. Si les $S_i(z)$ sont les substitutions fondamentales d'un groupe kleinéen donnant des fonctions kleinéennes définies dans tout le plan, sauf aux points d'un ensemble parfait discontinu (groupe Schottrky, par exemple), on aura encore une foule d'exemples où E' est parfait discontinu, mais n'a pas ses points sur un cercle fondamental.

J'ai un peu insisté sur les rapprochements entre l'ensemble E' relatif à l'itération d'une fraction rationnelle et l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points où un groupe automorphe cesse d'être proprement discontinu; car il m'a paru que les deux questions que ces deux ensembles dominent (itération d'une fraction rationnelle, et étude d'un groupe automorphe) devaient s'éclairer l'une l'autre, toutes deux étant cas particuliers de la question plus générale relative à la fonction algébrique $z(z_1)$ définie par $f(z, z_1) = 0$ que j'ai signalée plus haut. Dans nos deux cas particuliers, tout point de E' (ou de $\mathcal{E}'$) est point limite pour l'ensemble des antécédents (ou des homologues) d'un point *quelconque du plan*, et cette propriété caractéristique de E' comme de $\mathcal{E}'$ est trop importante pour que nous n'ayions pas mis en lumière les liens étroits qu'elle établit entre les deux questions signalées.

Je bornerai là cette digression pour ne pas m'écarter trop du sujet propre de ce Mémoire, qui est l'étude de l'itération d'une fraction rationnelle.

19. Sans nous attarder à la question de savoir si, effectivement, E' peut, pour certaines fractions rationnelles $\varphi(z)$, se composer du plan tout entier, nous poursuivrons plus avant l'étude des cas où l'on a reconnu que E' n'est pas superficiel. On reconnaît le plus souvent ceci par l'étude locale des environs d'un point limite $[z = \varphi(z), |\varphi'(z)| < 1]$, ou d'un groupe circulaire limite.

Montrons, en effet, que si l'on reconnaît pour la fraction $z_1 = \varphi(z)$ l'existence d'un point limite à convergence régulière, c'est-à-dire d'un point A racine de

$$z = \varphi(z), \quad \text{où} \quad |\varphi'(z)| < 1,$$

on peut fixer un voisinage de ce point dans lequel *aucune des* *équations*

$$z = \varphi_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

n'a de racine distincte de A [1].

On sait, en effet, que si ζ est l'affixe de A, on peut trouver un nombre ρ tel que si

$$|z - \zeta| < \rho$$

on ait

$$|z_1 - \zeta| < \mathrm{H}.\rho.$$

H étant compris entre o et 1.

De là s'ensuit

$$|z_n - \zeta| < \mathrm{H}^n.\rho.$$

z décrivant le cercle C de centre A de rayon ρ, z_1 décrira une

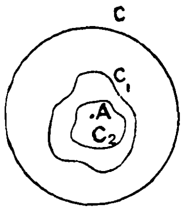

Fig. 12.

courbe C_1 sans point commun avec C, toute intérieure à C. Si z décrit l'aire D intérieure à C, z_1 décrit l'aire D_1 intérieure à C_1. Si $\varphi'(\zeta) \neq 0$, on peut supposer ρ assez petit pour que, l'aire D étant simple et à un seul feuillet, l'aire D_1 décrite par z_1 soit aussi à un seul feuillet; il est clair, alors, que les itérées successives de D seront emboîtées chacune dans la précédente et tendront vers A dans toutes leurs dimensions.

Si $\varphi'(\zeta) = 0$, alors l'aire décrite par z_i sera à 2 feuillets, quel que soit i, et admettra A pour point de ramification; mais ceci n'a pas d'importance, l'essentiel est que, *dans tous les cas*, z décrivant le cercle C dans le sens positif autour de A, z_1, z_2, ..., z_n, ..., décrivent

(1) Tout polynome admet le point à l'infini comme point limite à convergence régulière, on peut s'en assurer par une homographie arbitraire qui ramène à distance finie le point à l'infini. Pour aucun polynome E' ne peut donc être superficiel.

tous des courbes *complètement intérieures à* C. Car alors, ainsi qu'on l'a indiqué dans les préliminaires, la variation de l'argument de $z - z_n$ lorsque z décrit C est nécessairement égale à 2π comme la variation de l'argument de $z - \zeta$, d'où il suit que, dans l'aire D, les équations

$$z - \varphi_n(z) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, \infty.$$

n'ont d'autre racine que ζ.

L'ensemble E se composant de points qui sont racines de telles équations, il est visible que aucun point de E ni de E' ne figure dans l'aire D. E' n'est alors sûrement pas superficiel.

La démonstration, pour un groupe limite $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ provenant des racines de

$$z = \varphi_p(z), \quad \zeta_1 = \varphi(\zeta), \quad \ldots, \quad \zeta_{p-1} = \varphi(\zeta_{p-2}), \quad \zeta = \varphi(\zeta_{p-1});$$
$$\varphi'_p(\zeta_i) = \varphi'(\zeta)\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{p-1}).$$

est à peine différente [1]. Comme l'a montré M. Kœnigs, chacun des ζ_i peut être entouré d'un cercle C_i de rayon ρ_i tel que, si z est intérieur à un C_i, ses itérés tombent respectivement dans les cercles C suivants, z_p revenant tomber dans C_i de telle façon que $|z - \zeta_i| < \rho$ entraîne $|z_p - \zeta_i| < H\rho_i$, H étant < 1. On peut toujours supposer que les C_i sont extérieurs deux à deux et assez petits; alors, si z décrit C, $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$ décrivent des courbes extérieures à C et respectivement voisines de $\zeta_1, \ldots, \zeta_p, \ldots$, donc la variation de l'argument de $z - z_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p, \ldots)$ le long de C est nulle.

On voit immédiatement qu'il en sera de même quel que soit i, sauf pour les valeurs de i multiples de p; la variation de $\arg(z - z_i)$ sera toujours nulle le long de C si i n'est pas multiple de p; elle sera égale à 2π si i est multiple de p. On conclut que, dans l'aire D limitée par C, les équations

$$z - \varphi_n(z) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

n'ont pas de racine si n n'est pas multiple de p, et n'ont qu'une racine (qui est ζ) si n est multiple de p. Le même raisonnement vaut pour

---

(1) On peut toujours supposer que tous les points du groupe sont à distance finie, sans restreindre la généralité.

les aires D_1, D_2, ..., D_{p-1} limitées par les cercles C_1, C_2, ..., C_{p-1} ([1]).

En rapprochant ce que nous venons de dire du troisième corollaire de notre théorème fondamental, on peut dire : « Dans l'ensemble des racines des équations

$$z = \varphi_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

» 1° Si une racine ζ rend $|\varphi'_n(\zeta)| < 1$, elle est isolée dans l'ensemble;

» 2° Si une racine ζ rend $|\varphi'_n(\zeta)| > 1$, elle est limite de points de l'ensemble [et le troisième corollaire dit même qu'elle est limite de racines d'équations $z = \varphi_p(z)$ pour lesquelles $|\varphi'_p(z)| > 1$]. »

Ainsi se distinguent nettement les points de E' des points limites à convergence régulière ou des groupes circulaires limites.

20. Il peut arriver aussi que des propriétés particulières de la fraction $\varphi(z)$ considérée permettent d'énoncer des propriétés de l'ensemble E' et, en particulier, de reconnaître de suite qu'il n'est pas superficiel, c'est le cas des fractions qui conservent l'intérieur et la circonférence d'un cercle fondamental et que M. Fatou a signalées dans une Note des *Comptes rendus* (21 mai 1917). On peut toujours supposer que ce cercle C est le cercle $|z| \leq 1$; alors, pour $|z| < 1$, on a $|\varphi(z)| < 1$, et pour $|z| = 1$ on a $|\varphi(z)| = 1$. [M. Fatou a donné la forme nécessaire des $\varphi(z)$ jouissant de cette propriété en ramenant le cercle au demi-plan analytique supérieur, par une transformation homographique.] $\varphi(z)$ est supposée de degré k. On voit qu'à deux points z et z' symétriques par rapport au cercle C correspondent deux points $\varphi(z)$ et $\varphi(z')$ symétriques par rapport au cercle. La fonction algébrique inverse de $\varphi(z)$ a, en général, $k-1$ points critiques intérieurs à C, et $(k-1)$ autres points critiques symétriques des premiers par rapport à C. Si l'on considère la surface de Riemann R relative à cette fonction algébrique, la circonférence $|z| = 1$ découpera dans ses k feuillets une aire S simplement connexe à k feuillets contenant O et

---

([1]) Pour toute fraction du type correspondant au premier cas de notre théorème fondamental, c'est-à-dire pouvant par homographie se ramener à

$$Z_1 - a = \frac{1}{(Z-a)^k},$$

le point a et le point à l'infini (c'est-à-dire les deux points exceptionnels du théorème) forment un groupe circulaire limite d'ordre 2.

limitée à la circonférence $|z| = 1$ parcourue k fois. La fonction algébrique $z = \psi(z_1)$ inverse de $\varphi(z)$ donne une *représentation conforme* sur l'intérieur du cercle C de l'intérieur de la surface S à k feuillets précédente; par la même fonction, la portion de la surface de Riemann R considérée *extérieure à* $|z| = 1$ se trouve représentée de façon conforme sur l'extérieur du cercle $|z| = 1$. En définitive $z = \psi(z_1)$ représente, conformément sur le plan complexe des z, la surface de Riemann R, complétée par les k points à l'infini des k feuillets, qui est comme on sait, fermée et de *genre zéro*. Si z parcourt C dans le sens positif une fois, $z_1 = \varphi(z)$ *parcourra* C *toujours dans le sens positif et k fois* d'où il suit facilement que, sur C, se trouvent $k - 1$ racines au moins de l'équation $z = \varphi(z)$, et, s'il y en a plus de $k - 1$ il y en a $k + 1$, c'est-à-dire que toutes sont sur C.

S'il y en a effectivement $k + 1$, on verra qu'il y aura sur C toutes les racines des équations $z = \varphi_n(z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

En effet, z_2 décrit C dans le sens positif k^2 fois, z_3 le décrit k^3 fois. Chacune des équations $z = \varphi_n(z)$ a sur C au moins $k^n - 1$ racines. Elle en a en tout $k^n + 1$. Il ne peut en exister deux hors de C que si chacune est racine de $z = \varphi(z)$, ce qui est impossible puisque $z = \varphi(z)$ a ses $k + 1$ racines sur C, ou si les deux racines considérées forment un groupe circulaire fourni par $z = \varphi_2(z)$, mais on voit immédiatement que ces deux racines devant être symétriques l'une de l'autre par rapport à C, l'hypothèse actuelle est impossible à accepter, car la transformée $\varphi(z)$ de la racine intérieure à C serait ζ, extérieure à C, ce qui par hypothèse, est impossible.

Conclusion. — Ou bien toutes les équations $z = \varphi_n(z)$, $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ont leurs racines sur C; ou bien l'équation $z = \varphi(z)$ a deux racines, symétriques (¹) par rapport à C, non situées sur C, et toutes ses autres racines ainsi que toutes les autres racines des $z = \varphi_n(z)$ $(n = 2, 3, \ldots, \infty)$ sont sur C.

La donnée du cercle fondamental permet donc d'affirmer immédiatement que E′ n'est pas superficiel. M. Fatou a énoncé dans sa Note que, si toutes les racines sont sur le cercle C, il peut arriver qu'elles y forment un ensemble dont le dérivé (qui comprend E′ évidemment) soit parfait discontinu, ou soit composé de C tout entier.

(¹) Il peut arriver que ces deux racines viennent à se confondre sur C, elles vérifient alors $z - \varphi(z) = 0$, $\varphi'(z) = 1$, et forment une racine double de $z - \varphi(z) = 0$, mais c'est là un cas particulier.

21. Si $z = \varphi(z)$ admet deux racines symétriques par rapport à C, non situées sur C, on peut, à une homographie auxiliaire près, supposer que ces racines sont o et ∞. Alors $\varphi(z)$ est telle que

$$\varphi(0)=0; \quad |\varphi(z)|<1 \text{ si } z<1; \quad |\varphi(z)|=1 \text{ si } z=1;$$
$$|\varphi(z)|>1 \text{ si } z>1; \quad \varphi(\infty)=\infty.$$

Le lemme de Schwarz rappelé dans les Préliminaires (§ 5) prouve alors, $\varphi(z)$ n'étant pas linéaire, que, pour $|z|<1$, on a

$$|\varphi(z)|<|z| \quad (^1)$$

sans égalité possible et cela prouve qu'à l'origine on a $|\varphi'(0)|<1$ sans égalité possible puisqu'un petit cercle γ de centre O se transforme, par $\varphi(z)$, en une courbe intérieure à γ (*voir* les Préliminaires).

L'origine est un point limite à convergence régulière, et l'on voit qu'il en est de même pour le point à l'infini.

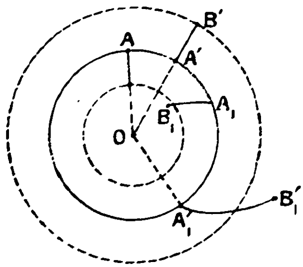

Fig. 13.

Il est facile de montrer que, dans l'hypothèse actuelle, *en tout point de* C *on a* $|\varphi'(z)|>1$ (²).

En effet, pour $|z|=1$,

$$|\varphi(z)|=1,$$

et pour $|z|<1$,

$$|\varphi(z)|<|z|.$$

(¹) On a, de même, pour $|z|>1$,

$$|\varphi(z)|>|z|.$$

(²) Cette proposition me parait un complément très utile à la Note, signalée plus haut, de M. Fatou.

Par suite, tout segment AB normal au cercle $|z| = 1$ est transformé en un arc de courbe A_1B_1 joignant A_1 (sur le cercle $|z| = 1$) à B_1 (intérieur au cercle de rayon OB). Donc, la longueur de l'arc A_1B_1 est toujours *supérieure* à celle de AB, sans égalité possible (¹). Ceci entraîne que $|\varphi'(z)| \geqq 1$ en A (²). D'ailleurs, la courbe Γ $|\varphi'(z)| = 1$ étant une courbe algébrique ne pourrait rencontrer C qu'en un nombre fini de points et l'on voit bien aisément qu'en ces points, Γ ne saurait couper C en un point A, ou lui être tangente, ou avoir un point multiple en A sans aboutir à une contradiction résultant de l'un ou de l'autre des faits suivants : 1° aux environs de A point commun, à C et Γ, il y aurait sur le rayon OA ou sur son prolongement, un segment AB sur lequel $|\varphi'(z)|$ serait < 1, sauf en A, et à ce segment AB ne pourrait correspondre un arc A_1B_1 de longueur supérieure à celle du segment AB lui-même; 2° ou bien il y aurait sur C, aux environs de A, des points où $|\varphi'(z)| < 1$.

Les figures *a* et *b* montrent l'impossibilité pour Γ de couper C en un point simple A, la région voisine de A hachurée est celle où $|\varphi'(z)| < 1$. *c* montre l'impossibilité pour Γ de toucher C et *d* l'impossibilité pour Γ d'avoir un point double (nécessairement à tangentes rectangulaires) en un point de Γ à cause du premier ou du deuxième fait précédent.

Donc, en chaque point de C $|\varphi'(z)| > 1$. Toutes les racines de $z = \varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ situées sur C rendent donc $|\varphi'_n(z)| > 1$. Elles sont donc de E. Il est aisé de montrer *qu'elles sont partout denses sur* C.

En effet, sur C on a

$$|\varphi'(z)| > M > 1,$$

M n'étant pas égal à un.

Si z décrit un arc quelconque *ab* de C, son itéré z_1 décrira un

---

(¹) De même à tout segment A'B' normal à C et extérieur à C, correspond un arc $A'_1B'_1$ toujours $>$ A'B'.

(²) En effet, on a

$$\text{arc}\, A_1B_1 = \int_A^B |\varphi'(z)|\,|dz|,$$

et si en A $|\varphi'(z)|$ était < 1, il serait < 1 sur un certain segment AB de OA et l'on aurait

$$\text{arc}\, A_1B_1 < \overline{AB}.$$

arc $a_1 b_1$, dans le même sens que ab, qui sera $> \mathrm{M} \times (\mathrm{arc}\, ab)$. z_2 décrira un arc

$$a_2 b_2 > \mathrm{M}^2 (\mathrm{arc}\, ab) \ldots.$$

Les arcs a_i, b_i grandissent indéfiniment. Il existe un itéré z_n qui

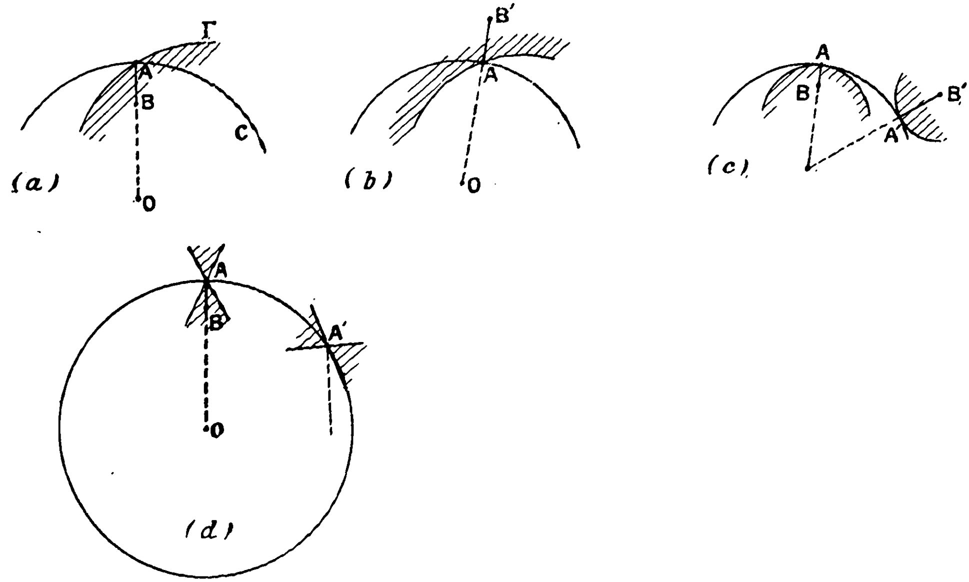

Fig. 14.

décrit sûrement un arc $a_n b_n$ comprenant autant de circonférences qu'on voudra et qui le décrit dans le sens positif si z décrit ab dans le sens positif : il faut donc évidemment que le point z_n coïncide avec z pour une certaine position de z, c'est-à-dire que $z = \varphi_n(z)$ ait une racine dans l'arc ab. L'arc ab étant quelconque, ceci veut dire que les racines des équations $z - \varphi_n(z) = 0$ sont partout denses dans le cercle C. E′ *est identique au cercle* C *tout entier*.

22. *Remarque* ([1]). — Si l'on avait considéré, au lieu d'un cercle C,

---

([1]) Après le dépôt de ce Mémoire, M. Fatou a démontré dans une Note des *Comptes rendus* (4 février 1918), que Γ *ne pouvait être qu'un cercle*, dès l'instant qu'elle était formée *d'un arc régulier* de *courbe analytique*. Cette remarque n'a donc plus de raison d'être et le lecteur est prié de n'en pas tenir compte.

une courbe analytique simple Γ séparant deux régions qui se transforment chacune en elle-même k fois (1) par $\varphi(z)$, comme l'aire limitée par C se transforme en elle-même k fois, on serait arrivé aux mêmes conclusions que les précédentes. Nous appellerons la courbe *courbe fondamentale* Γ. Ou bien toutes les racines des $z = \varphi_n(z)$ $n = 1, 2, \ldots, \infty$ sont sur Γ, ou bien deux d'entre elles seulement, racines de $z = \varphi(z)$ sont hors de Γ. Dans ce dernier cas, si l'on fait une représentation conforme de l'intérieur (2) de Γ sur l'intérieur de $C(|Z| \leqq 1)$ à l'aide de la fonction $z = f(Z)$ analytique dans Γ et sur Γ (Γ est en effet une courbe analytique *simple* sans singularités) la relation $z_1 = \varphi(z)$ qui fait correspondre z_1 à z dans Γ devient une relation $Z_1 = \Phi(Z)$ qui fait correspondre Z_1 à Z dans C. Φ est analytique dans C et sur C; si Z est sur C, Z_1 est sur C_1. Si l'on fait correspondre une racine de $z = \varphi(z)$ intérieur à Γ à $Z = 0$, alors on a

$$\Phi(0) = 0, \qquad \Phi|(Z)| \leqq 1 \text{ si } |Z| \leqq 1.$$

A un point z_1 intérieur à Γ correspondent k points z; donc à Z_1 intérieur à C correspondent k points Z, $\Phi(Z)$ n'est donc pas linéaire, donc on a pour $|Z| < 1$

$$|\Phi(Z)| < |Z|.$$

Donc, à l'origine, $\Phi'(0) < 1$. De là suit que les points $z = \varphi(z)$ hors de Γ rendent $|\varphi'(z)| < 1$. En effet en ces points

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{dz_1}{dz} = \frac{dz_1}{dZ_1}\frac{dZ_1}{dZ}\frac{dZ}{dz}$$

et comme $z = z_1$ et $Z = Z_1$ aux points considérés, on a aussi, en ces

---

(1) C'est-à-dire qu'à z intérieur à la courbe correspond un point z_1 intérieur à la courbe et à z_1, k points z distincts en général; si z est sur la courbe, z_1 est sur la courbe. La courbe Γ restant invariante par une infinité de substitutions rationnelles $z_i = \varphi_i(z)$, doit être de genre *zéro* ou *un*, si elle est algébrique, d'après un théorème de M. Painlevé.

(2) Nous appelons intérieur de Γ une quelconque des deux régions en lesquelles Γ divise le plan complet et, pour fixer les idées, celle qui contient une racine de $z = \varphi(z)$. Nous verrons d'ailleurs plus loin que, dans ce cas, chacune des deux régions contient une de ces racines à son intérieur et que pour ces racines $|\varphi'(z)| < 1$.

points,

$$\frac{dz_1}{dZ_1} = \frac{dz}{dZ}.$$

Donc

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{dZ_1}{dZ} = \Phi'(o).$$

La fonction inverse de $\varphi(z)$ a $k-1$ points critiques (en général) intérieurs à Γ et $k-1$ extérieurs à Γ; sur les k feuillets de sa surface de Riemann Γ découpe une aire simplement connexe à k feuillets, intérieure à Γ, limitée par la courbe Γ, k fois parcourue ([1]). De même la fonction inverse de $\Phi(Z)$ a $k-1$ points critiques intérieurs à C; sur les k feuillets de sa surface de Riemann C découpe une aire S à k feuillets, intérieure à C, contenant l'origine, simplement connexe et limitée par C, k fois parcourue.

La fonction $Z = \psi(Z_1)$ inverse de $\psi(Z)$ réalise donc la représentation conforme sur l'aire simple $|Z| \leqq 1$ de l'aire S ([2]). Les bords des deux aires en correspondance étant analytiques, cette représentation conforme peut se prolonger analytiquement. Complétons S en lui adjoignant sa symétrique S' par rapport à C et soudant S et S' le long de C parcouru k fois. L'ensemble S + S' fait une surface de Riemann R fermée, à k feuillets, de genre zéro. A deux points Z_1 et Z'_1 symétriques par rapport à C, faisons correspondre, d'après le principe des symétries de Schwarz, deux points Z et Z' symétriques par rapport à C; on aura alors réalisé l'application conforme de R sur le plan complet, à l'aide de la fonction $\psi(Z_1)$ et de son prolongement précédent. Mais on sait que la fonction qui réalise l'application d'une surface fermée de genre zéro à k feuillets (Z_1) sur le plan complet de Z est une fonction algébrique $Z = \psi(Z_1)$, fonction inverse d'une fraction rationnelle ([3]) de degré k.

On voit donc que $Z_1 = \Phi(Z)$ est nécessairement une fonction rationnelle de Z, et c'est une des fonctions rationnelles à cercle fondamental

---

([1]) Cette aire est celle que décrit z_1 lorsque z décrit l'intérieur de Γ.

([2]) On sait d'ailleurs qu'à une substitution homographique près qui conserve l'aire $|Z| \leqq 1$, la fonction $\psi(Z_1)$ qui réalise cette application est parfaitement déterminée.

([3]) On peut dire aussi en raisonnant directement que Z_1 est une fonction analytique de Z, n'ayant dans le plan complet que des pôles; c'est donc une fonction rationnelle.

conservant l'origine que nous avons considérées plus haut. Aux racines de $Z = \Phi_n(Z)$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) partout denses [1] sur C correspondront par la représentation conforme $z = f(Z)$ des racines de $z = \varphi_n(z)$ partout denses sur Γ, dans le cas où nous nous plaçons : celui où deux des racines de $z = \varphi(z)$ sont hors de Γ, et l'on voit par ce qui précède, que de ces deux racines, l'une est *intérieure* et l'autre *extérieure* à Γ. E', ici encore, est identique à la courbe Γ.

Il peut sembler bizarre *a priori* que la fonction $z = f(Z)$ qui applique conformément l'intérieur de Γ sur l'intérieur de $C(|Z| \leqq 1)$ et qui, si Γ n'est pas un cercle, n'est pas linéaire, donne une relation $Z_1 = \Phi(Z)$, transformée de $z_1 = \varphi(z)$ qui soit rationnelle et de même degré k que $z_1 = \varphi(z)$. En effet, la relation $z = f(Z)$ applique non seulement Γ et son intérieur sur l'intérieur de C, mais encore toute une petite bande limitrophe de Γ (extérieure à Γ) sur une petite bande limitrophe de C (extérieure à C), puisque, la courbe Γ étant analytique, l'extension analytique de $z = f(Z)$ au delà de C et Γ se fait par la méthode des symétries de Schwarz.

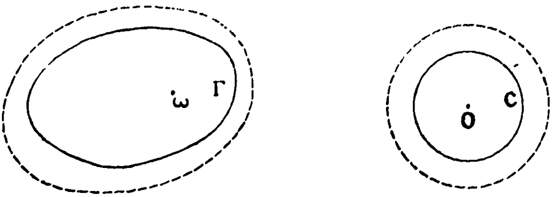

Fig. 15.

On pourrait être alors tenté de croire que $z = f(Z)$ réalise l'application de tout le plan z sur le plan Z [2], ce qui *n'est sûrement pas vrai* si Γ n'est pas un cercle, car alors $f(Z)$ ne peut être linéaire ; la fonction $f(Z)$ aura un domaine d'existence plus grand que C, mais qui ne *s'étendra sûrement pas sur tout le plan ;* on est sûr *d'avance* que, Γ n'étant pas un cercle, l'extension de $f(Z)$ au delà de C *n'est pas*

(1) On démontre facilement que si Z et z se correspondent et sont tels que

$$Z = \Phi_n(Z), \qquad z = \varphi_n(z),$$

on a aussi en Z et en z

$$\Phi'_n(Z) = \varphi'_n(z).$$

(2) D'autant plus que la relation $Z_1 = \Phi(Z)$ transformée de $z_1 = \varphi(z)$ est définie dans tout le plan Z.

possible indéfiniment. Il n'y a plus, dès lors, paradoxe à ce que la relation rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ se transforme, par la substitution auxiliaire non linéaire

$$z = f(Z), \quad [z_1 = f(Z_1)],$$

$f(Z)$ n'existant que *dans une partie du plan* Z, en une relation rationnelle $Z_1 = \Phi(Z)$. Si la fonction $z = f(Z)$ réalisant la transformation de $z_1 = \varphi(z)$ en $Z_1 = \Phi(Z)$ était définie dans tout le plan Z, elle *devrait être linéaire*. Mais si elle n'existe que dans une partie du plan Z au delà de laquelle elle n'est plus prolongeable analytiquement, il n'y a nulle nécessité qu'elle soit linéaire.

23. *Étude des régions du plan qui ne contiennent aucun point de* E'. — Soit D une aire quelconque du plan ne contenant aucun point de E'. Il est clair qu'aucune des itérées de D ne contiendra de point de E', car l'hypothèse contraire, E' coïncidant avec tous ses antécédents, nous conduirait à admettre que D contient des points de E'. Il est donc immédiat que dans l'aire D aucune des fonctions de la famille $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... ne prend une valeur affixe d'un point E'. E' est parfait; il y a donc une infinité de valeurs (ayant la puissance du continu) qu'aucune des φ_i ne saurait prendre dans E'. Il suit de là, d'après les travaux de M. Montel, que la famille des φ_i est *normale dans* D. *De toute suite infinie extraite de la suite des* φ_i, *on peut extraire une suite qui, dans toute aire intérieure à* D *tende uniformément vers une fonction limite qui est méromorphe dans* D (*comme les* φ_n), *et qui peut être une constante, voire une constante infinie.*

C'est là un résultat primordial pour l'étude de l'itération et en particulier de l'ensemble dérivé de l'ensemble des conséquents d'un point du plan.

Si, en effet, z est un point quelconque intérieur à D, $z_1 = \varphi(z)$, $z_2 = \varphi_2(z)$, ..., $z_n = \varphi_n(z)$, ... sont ses conséquents successifs. Soit

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

une suite infinie extraite des φ_i, qui, dans toute aire intérieure à D, tende vers une fonction limite $f(z)$ méromorphe dans D, qui peut être une constante. Alors z étant un point quelconque intérieur à D, ses conséquents

$$z_{n_1} = \varphi_{n_1}(z), \quad \ldots, \quad z_{n_p} = \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

auront un point limite $\zeta = f(z)$ qui sera la valeur en z de la fonction $f(z)$ limite dans D de la suite des $\varphi_{n_p}(z)$.

Lorsque z variera dans toute aire intérieure à D, ζ *pourra rester fixe*, sa valeur pouvant être *infinie; sinon* ζ *dépendra analytiquement de* z, $\zeta(z)$ sera méromorphe dans D (¹). C'est là un résultat particulièrement intéressant et simple. Il est d'ailleurs immédiat que, si l'on connaît une suite particulière

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendant uniformément dans toute aire intérieure à D, vers une fonction méromorphe dans D, ou vers une constante finie ou infinie, on connaît l'allure de *toute la suite* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... *dans* D. Car bien évidemment, si

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tend vers $f(z)$ dans D, la suite

$$\varphi_{n_1+1}(z), \quad \varphi_{n_2+1}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p+1}(z), \quad \ldots$$

tendra uniformément vers $\varphi[f(z)]$ dans D, et généralement

$$\varphi_{n_1+i}(z), \quad \varphi_{n_2+i}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p+i}(z), \quad \ldots$$

tendra uniformément vers $\varphi_i[f(z)]$ dans toute aire intérieure à D, quel que soit i. Il est, d'autre part, évident que toute fonction $\varphi_k(z)$ d'indice $k > n$ figure dans l'une des lignes précédentes, pour une certaine valeur de i.

On peut donc dire, en résumé que, z variant dans D, les points limites de ses conséquents successifs varient analytiquement avec z : ce qu'il faut entendre par là est suffisamment expliqué par les lignes précédentes.

(¹) Si l'on sait seulement que, z étant un point déterminé intérieur à D (z non de E'), est point limite d'une suite z_{n_1}, z_{n_2}, ..., z_{n_p}, ... de conséquents de z, de la suite φ_{n_1}, φ_{n_2}, ..., φ_{n_p}, ... normale dans D, on pourra extraire une suite

$$\varphi_{N_1}, \quad \varphi_{N_2}, \quad \ldots \quad \varphi_{N_p}, \quad \ldots$$

qui converge vers une fonction limite méromorphe dans tout D et la valeur de cette fonction au point z ne saurait être différente de ζ, ce qui montre que *tout point limite* ζ pour l'ensemble des conséquents de z dépend analytiquement de z dans D.

D'autre part, on a vu que, en un point quelconque de E', et par suite *dans toute aire contenant un point de E', aucune suite infinie extraite de la suite des φ_i ne pouvait être normale;* il s'ensuit donc qu'aucune suite infinie

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

ne peut, dans une aire contenant un point de E', tendre vers une fonction analytique. On voit donc que z variant dans une telle aire, *aucun point limite pour l'ensemble de conséquents successifs ne pourra dépendre analytiquement de z dans toute l'aire.* Les points de E' apparaissent ainsi comme des points *singuliers essentiels* des *fonctions limites* de la suite des $\varphi_i(z)$. La propriété caractéristique des points de E' est d'ailleurs, au fond, identique au théorème de M. Picard sur les points singuliers essentiels. C'est pour cela que nous appellerons *points singuliers* de l'itération tous les points de E'.

24. A ce titre, l'importance des points de E' apparaît comme primordiale, pour *délimiter les régions du plan complet, dans chacune desquelles l'allure de la suite des fonctions $\varphi_i(z)$ est toujours la même.*

Voici ce qu'il faut entendre par là :

Considérons une région du plan, *d'un seul tenant, qui n'aura pour points frontières que des points de* E'. On peut en définir une à partir de tout point A du plan n'appartenant pas à E', par la méthode de prolongement analytique : elle sera d'un seul tenant, et limitée uniquement par des points de E', si on la définit *l'ensemble des points qu'on peut joindre à* A *par une ligne simple dont aucun point n'est de* E'. Appelons R cette région, aucun de ses points intérieurs n'est de E'. Elle peut être simplement connexe dans certains cas, si E' est identique à une ligne simple fermée (par exemple, l'intérieur du cercle $|z| = 1$ relativement à l'itération de $z_1 = z^2$ est une région R); elle peut aussi être multiplement connexe, voire d'un ordre de connexion infini ([1]), si E' est un ensemble parfait discontinu dans tout le

---

([1]) A ce point de vue, on peut faire une remarque intéressante. Si l'on a reconnu que *dans une petite aire du plan* les points de E' forment un ensemble bien enchaîné entre deux quelconques de ses points, on sait que E' tout entier est un continu linéaire. Alors, toute région R du plan, d'un seul tenant, dont la frontière est formée par E' ou partie de E' est nécessairement *simplement connexe*, car l'hypothèse contraire impliquerait l'existence d'une ligne L simple plan. Il peut (comme dans les deux exemples précédents) n'y avoir qu'un nombre fini de régions R dans tout le plan; *il peut aussi en exister une infinité*, et nous en verrons plus loin des exemples bien simples.

Quoi qu'il en soit, il est certain que dans toute aire D′ intérieure à R la suite des φ_i est normale. Si donc, par un moyen quelconque, on a reconnu qu'une suite partielle

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendrait, quel que soit z à l'intérieur, d'une aire D (d'ailleurs arbitrairement petite), toute entière située dans R, vers une fonction-limite $f(z)$, méromorphe dans D, on peut affirmer que, quelle que soit l'aire Δ intérieure à R qu'on envisage, la suite

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

tendra *uniformément vers une fonction-limite $f(z)$ méromorphe dans tout Δ*. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer des aires emboîtées les unes dans les autres contenant toutes D à leur intérieur, et ayant pour limite R. Toute aire Δ intérieure à R peut être ainsi enfermée dans une aire Δ' intérieure à R et contenant D à son intérieur. Il est clair maintenant que, d'une part, la suite des

$$\varphi_{n_1}(z), \quad \varphi_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{n_p}(z), \quad \ldots$$

étant normale dans Δ', d'autre part cette suite convergeant uniformément vers une fonction méromorphe $f(z)$ (ou une constante finie ou infinie) dans une aire D intérieure à Δ', *cette suite tendra uniformément vers une fonction méromorphe $f(z)$ dans tout Δ'* (¹).

Dire que dans tout R l'allure de la suite des $\varphi_n(z)$, $\varphi_2(z)$, …, $\varphi_n(z)$, … est la même, c'est dire qu'une suite partielle extraite de

---

fermée *dont tous les points sont intérieurs à* R, et telle que chacune des deux régions en lesquelles L divise le plan complet contiendrait à son intérieur des points de E′. E′ ne serait donc pas un ensemble d'un seul tenant, contrairement à l'hypothèse, puisqu'un point de E′ intérieur à L et un point de E′ extérieur ne sauraient être bien enchaînés dans E′, tous les points de L étant à une distance de E′ $\geqq \varepsilon$, ε étant un nombre positif fixe non nul.

(¹) Je m'appuie ici sur le théorème suivant de M. Montel [*Sur les familles de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 531)] :

cette suite converge dans toute aire intérieure à R ou ne converge dans *aucune de ces aires.*

C'est de cette façon qu'on peut dire que *l'ensemble parfait* E′ *délimite les diverses régions de convergence du plan : dans toute région d'un seul tenant que délimite* E′, *les caractères de convergence des diverses suites infinies extraites de la suite* $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... *sont les mêmes.*

25. Le théorème précédent fait le véritable pont entre l'étude générale de l'itération dans tout plan et l'étude locale, seule entreprise jusqu'à ce jour. L'étude locale nous apprend, par exemple, que si l'on trouve un point ζ racine de $z = \varphi(z)$ pour lequel $|\varphi'(\zeta)| < 1$, on peut déterminer un cercle C de centre ζ dans lequel :

1° Il n'existe aucun point de E′;

2° Quel que soit z, ses conséquents successifs z_1, z_2, ..., z_n, ... admettent ζ et ζ seul pour point-limite.

Le théorème précédent nous donne aussitôt un résultat plus général :

1° ζ est intérieur à une région R, d'un seul tenant, limitée uniquement par des points de E′;

2° C est intérieur à cette région R, et, dans tout C, la suite $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... tend uniformément vers la constante ζ;

3° Il s'ensuit donc que, quel que soit z dans R, la suite $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... tendra vers ζ; les conséquents successifs d'un point quelconque z de R auront ζ et ζ seul pour point-limite.

A ce titre, nous dirons que R est le *domaine de convergence immédiat* du point-limite ζ. *Immédiat* rappelle que R est d'un seul tenant avec ζ. Sa frontière est formée uniquement de points de E′, chacun de ces points-frontières n'a pour conséquents que des points de E′ qui n'admettent pas ζ pour point-limite.

Soit une suite infinie de fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ *holomorphes dans* D *et appartenant à une famille normale dans* D.

1° *Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à* D, *elle converge dans tout* D.

2° *Si la suite converge dans* D, *la convergence est uniforme dans l'intérieur de* D ([a]).

([a]) Il n'y a qu'à supposer qu'on a envoyé un point P de E′ à l'infini pour que, tous les pôles des φ_i étant antécédents de P, soient de E′, c'est-à-dire que tous les φ_i soient holomorphes dans R.

Des considérations toutes analogues s'appliquent à un point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$ pour lequel $|\varphi'_n(\zeta)| < 1$ et aux points $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ qui forment avec lui un groupe circulaire limite.

26. Voici des applications immédiates de cet important théorème :

1° Si E′ est un *ensemble partout discontinu* (¹), il n'y a qu'une région R composée de tout le plan, sauf E′; il ne peut donc exister qu'un point-limite à convergence régulière

$$z = \varphi(z). \qquad |\varphi'(z)| < 1$$

mais jamais deux points limites distincts, à convergence régulière, ni un groupe circulaire limite (²).

Le point limite à convergence régulière, si l'on reconnaît son existence, aura pour domaine de convergence tout le plan sauf E′.

Ceci s'applique, en particulier, aux fractions rationnelles à cercle fondamental si E′ est partout discontinu.

2° Pour les fractions à cercle fondamental C qui admettent deux racines $z = \varphi(z)$ symétriques par rapport à C, on a vu qu'en chacune de ces racines on avait $|\varphi'(\zeta)| < 1$; ces racines sont des points limites à convergence régulière, E′ est identique au cercle C; le domaine de convergence pour chacun des deux points limites se compose de la région du plan, limitée par C, qui contient ce point.

(¹) Et d'une façon générale, si E′ ne divise pas le plan en plusieurs régions telles que tout chemin allant d'un point intérieur à l'une à un point intérieur à l'autre contienne nécessairement un point de E′.

(²) En effet, s'il y avait deux points limites distincts à convergence régulière ζ_1 et ζ_2, il y aurait deux aires D_1 et D_2 intérieures à R entourant respectivement ζ_1 et ζ_2, telles que dans D_1 la suite des $\varphi_i(z)$ converge uniformément vers la constante ζ_1, et dans D_2 cette même suite converge vers ζ_2, ce qui contredirait notre théorème.

S'il y avait un groupe circulaire limite $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$

$$\zeta = \varphi_n(\zeta), \qquad |\varphi'_n(\zeta)| < 1,$$

on pourrait entourer les points ζ et ζ_1 qui sont distincts des petites aires D et D_1 telles que la suite

$$\varphi_n(z), \quad \varphi_{2n}(z), \quad \ldots, \quad \varphi_{kn}(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers la constante ζ dans D et vers la constante différente ζ_1 dans D_1, et notre théorème serait encore contredit.

Ces résultats 1° et 2° sont d'accord avec ceux signalés par M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

3° Si, *a priori*, on reconnaît l'existence simultanée de deux points limites distincts à convergence régulière, ou d'un groupe circulaire limite, on peut affirmer que E′ comprend un *ensemble continu linéaire qui divise le plan en plusieurs régions*, car E′ ne peut alors ni contenir tout le plan, ni être partout discontinu dans aucune aire du plan, et les domaines de convergence immédiats vers chacun des deux points limites distincts (par exemple), ne pouvant évidemment avoir aucun point commun, doivent être séparés l'un de l'autre par E′, de façon qu'on ne puisse aller de l'un dans l'autre par aucun chemin simple qui ne contienne de point de E′.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la convergence régulière vers un point limite et de la convergence périodique vers un groupe circulaire limite.

27. Le théorème énoncé à la fin du Chapitre précédent nous a montré que si l'on connaissait l'allure de la suite

$$\varphi(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots,$$

dans une aire arbitrairement petite, intérieure à une région R, d'un seul tenant, dont les points intérieurs ne sont pas de E′, mais dont tous les points frontières sont de E′, on connaissait par cela même l'allure de la suite dans toute la région R. Nous avons fait remarquer alors que l'étude locale de l'itération, telle qu'on l'avait pratiquée jusqu'à ce jour, donnait des renseignements sur l'allure de la suite des $\varphi_i(z)$ dans le voisinage : 1° de tout point dit *point limite à convergence régulière*, c'est-à-dire de toute racine de $z = \varphi(z)$ pour laquelle $|\varphi'(z)| < 1$; 2° de tout point appartenant à un *groupe circulaire limite*, c'est-à-dire de tout point ζ racine de $z = \varphi_n(z)$ (1) pour lequel $|\varphi'_n(z)| < 1$, et des $n-1$ autres

(1) On suppose, bien entendu, avec M. Kœnigs, que ζ n'est pas racine d'une équation $z = \varphi_p(z)$, où $p < n$. On dit quelquefois que ζ appartient à l'indice n, ou que c'est une racine *primitive* de $z = \varphi_n(z)$, par analogie avec les équations binomes.

points

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \quad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \quad \dots, \quad \zeta_{n-1} = \varphi(\zeta_{n-2}) \quad [\zeta = \varphi(\zeta_{n-1})]$$

qui avec ζ_1 forment le groupe circulaire limite.

Nous allons maintenant approfondir l'étude des caractères d'une région R qui contient à son intérieur, soit un point limite à convergence régulière, soit un point d'un groupe circulaire limite.

28. *Domaine de convergence immédiat vers un point limite à convergence régulière.* — Bornons-nous pour l'instant au cas du point limite à convergence régulière $\zeta = \varphi(\zeta)$, $|\varphi'(\zeta)| < 1$ et nous verrons ensuite que nos conclusions vaudront encore pour les groupes circulaires limites.

On peut toujours, grâce à une homographie préalable, supposer que le point limite considéré est à l'origine. On peut supposer aussi que le point à l'infini ([1]) est un point qui n'admet pas o pour limite de ses conséquents. Un point $z = \varphi(z)$, distinct de l'origine, pourra par exemple être envoyé à l'infini

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \qquad |a_1| < 1.$$

Si $a_1 \neq 0$, l'origine a *un antécédent et un seul confondu avec elle-même.*

Si $a_1 = 0$, l'origine a au moins deux antécédents confondus avec elle-même. Soit ρ un nombre positif assez petit; si je fais décrire au point z le cercle C de centre O de rayon ρ :

1° Si $a_1 \neq 0$, l'antécédent unique z_{-1} de z qui devient égal à zéro pour $z = 0$ décrit autour de l'origine une courbe analytique C_{-1} qui comprend C à son intérieur. z décrivant l'aire limitée par C contenant O, z_{-1} qui est fonction analytique de z dans C, décrit l'aire limitée par C_{-1} contenant O.

2° Si $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_{p-1} = 0$ $(a_p \neq 0)$, l'origine a p antécédents confondus avec elle et p seulement. z étant voisin de zéro, ces p antécédents sont voisins de zéro et forment un seul et même système circulaire; z décrivant C p fois de suite dans le sens positif, chacun des p antécédents précédents décrira une fois une courbe C_{-1}

([1]) Ceci permet de conclure que dans une petite région autour de zéro toutes les fonctions $\varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots, \infty)$ ont une branche de leurs fonctions inverses $\psi_n(z)$ qui reste finie.

analytique fermée entourant C; z décrivant l'aire S simplement connexe, composée de p feuillets superposés, chacun identique à la surface du cercle C, ces feuillets se ramifiant au point O les uns aux autres, S étant d'ailleurs limitée par le cercle C, p fois décrit et contenant O à son intérieur, chacun des p antécédents de z, dont il a été parlé précédemment, décrit une et une seule fois l'intérieur de la courbe C_{-1} précédente; tout point z intérieur au cercle C a p antécédents intérieurs à C_{-1} et p seulement; tout point intérieur à C_{-1} a son conséquent et par suite tous ses conséquents dans C.

Nous savons d'autre part que, si z est un point quelconque intérieur à C, $|z| < \rho$, on a

$$|z_1| < H.\rho \qquad (H < 1),$$

et par suite

$$|z_i| < H^i.\rho.$$

La suite $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ a, quel que soit z dans C, O et O seulement pour point limite. Nous allons étudier des propriétés du *domaine de convergence immédiat du point* O, entendant par là l'ensemble des points du plan dont les conséquents admettent O pour seul point limite, et qu'on peut joindre au point O par un chemin simple dont tous les points jouissent de la propriété précédente (d'admettre o pour seul point limite de leurs conséquents). Ce domaine, c'est la région R du plan d'un seul tenant contenant O limitée par l'ensemble parfait E' : tout point intérieur à cette région admet O pour seul point limite de ses conséquents, et peut être joint à O par un chemin simple dont tous les points sont intérieurs à R et jouissent de la propriété précédente. Un point frontière de la région R appartient à E', ses conséquents sont dans E', ils n'admettent pas O pour point limite, car O n'étant pas de E' est, comme on l'a déjà vu, entouré d'un cercle C où ne pénètre aucun point de E'.

Sur la frontière de R *les points de E sont denses partout*, c'est-à-dire que dans toute aire du plan qui contient des points frontières de R il s'en trouve qui sont des racines de $z = \varphi_n(z)$ pour des valeurs convenables de n, et pour lesquels $|\varphi'_n(z)| > 1$. Tout point z intérieur à R ayant O pour point limite de ses conséquents, il s'ensuit qu'un certain z_i sera intérieur à C, ainsi que tous les conséquents suivants de z.

R peut donc se définir aussi : *l'ensemble des points, d'un seul* *tenant avec* O, *dont un conséquent tombe dans* C, *et nous sommes conduits à le construire par le processus dont nous allons maintenant nous occuper.*

z décrivant l'aire intérieure à C, cherchons l'aire décrite par celui ou ceux de ses antécédents qui s'annulent avec z : c'est l'aire limitée par C_{-1}, je l'appellerai pour abréger *antécédente de l'aire* C. On a vu que C_{-1}, contient C.

z_{-1} décrivant l'aire C_{-1}, celui ou ceux de ses antécédents qui s'annulent avec z_{-1} *décriront une aire* C_{-2} *qui contiendra* C_{-1} *à son intérieur*, puisque C_{-1} contenait C et puisque l'aire C_{-1} est antécédente de C. C_{-2} sera dite *antécédente* d'ordre 2 de C.

Il importe de faire de suite une remarque : si $a_1 = 0$, le point O est un point critique pour la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, c'est aussi un point qui annule $\varphi'(z)$; le domaine R de convergence immédiat vers O contient alors *à son intérieur* un point critique de l'inverse de $\varphi(z)$, conséquent d'un point qui annule $\varphi'(z)$.

Supposons au contraire $a_1 \neq 0$ et, partant du petit cercle C envisagé précédemment, définissons successivement l'aire C_{-1} antécédente de l'aire C, décrite par z_{-1}, antécédent unique de z, qui soit $= 0$ pour $z = 0$ lorsque z décrit l'aire C; puis C_{-2} antécédente de C_{-1} dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. Le processus se poursuivra sans difficulté tant que les aires successives $C_{-1}, C_{-2}, \ldots, C_{-i}$, qu'on déterminera ainsi ne contiendront pas de point critique de la branche de fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, qui devient égale à o pour $z = 0$; toutes les aires ainsi déterminées seront à un seul feuillet, simplement connexes, et chacune complètement intérieure à son antécédente. Si ce processus se poursuivait indéfiniment sans qu'aucun point critique de $\psi(z)$ soit intérieur à une des aires C_{-i} successives, R se présenterait comme la limite de l'aire C_{-i} pour i grandissant indéfiniment [1]. Je vais montrer que cette hypothèse est impossible.

---

[1] Il est facile, en effet, de voir que si l'aire C_{-i} ne renferme aucun point critique de $\psi(z)$, chacun des K antécédents de z est fonction analytique de z dans C_{-i}; chacun décrit une aire à un seul feuillet limitée par un contour analytique simple, si z décrit l'aire C_{-i} et *les k aires antécédentes de* C_{-i} *n'ont deux à deux ni point intérieur ni point frontière commun*, seule peut donc chaque fois nous intéresser l'antécédente de C_{-i} qui contient l'origine.

29. En effet R serait alors une aire simplement connexe (¹) dont il est aisé (²) de faire la représentation conforme sur l'aire intérieure à un cercle $|Z| < 1$ (*tous les points de* E′ étant extérieurs à R ou points frontières de R, c'est bien *sur un cercle* que se fait la représentation ; cette représentation conforme $z = f(Z)$ fait correspondre à tout point z intérieur à R un point Z de module $|Z| < 1$, la correspondance étant biunivoque et analytique pour tous les points intérieurs. Nous ferons correspondre entre elles les origines des plans z et Z, $[f(0) = 0]$ ainsi que les directions positives des axes réels de ces plans $[f'(0)$ réel$]$. A deux points z et z_1 qui se correspondent par $z_1 = \varphi(z)$ la représentation conforme fait correspondre deux points Z et Z_1. Quel que soit Z dans $|Z| < 1$, il lui correspond un point z par $z = f(Z)$, puis z_1 par $z_1 = \varphi(z)$, puis Z_1 par $z_1 = f(Z_1)$. Ainsi, à tout point Z dans $|Z| < 1$ correspond un point Z_1 dans $|Z_1| < 1$ qui évidemment dépend analytiquement de Z dans $|Z| < 1$. Inversement à Z_1 dans $|Z_1| < 1$ correspond un point Z et un seul dans $|Z| < 1$ qui dépend analytiquement de Z_1. La relation $Z_1 = \Phi(Z)$, holomorphe dans $|Z| < 1$ [ainsi que son inverse $Z = \psi(Z_1)$ dans $|Z| < 1$] est la transformée de $z_1 = \varphi(z)$ par la substitution $z = f(Z)$. La relation $Z_1 = \Phi(Z)$ transforme en lui-même l'*intérieur* du cercle $|Z| < 1$ et *conserve l'origine* (si $Z = 0$, $Z_1 = 0$), il en est de même de la fonction inverse $Z = \psi(Z_1)$. La transformation est biunivoque, analytique. C'est un résultat bien connu qu'elle ne peut être autre qu'une rotation autour de l'origine (³) : on a nécessairement

$$Z_1 = Z\, e^{i\theta};$$

c'est-à-dire qu'en O on a

$$\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right|_0 = 1.$$

(¹) La relation $z_1 = \varphi(z)$ ferait correspondre à tout point z intérieur à R un point z_1 intérieur à R et, inversement, à tout point z_1 intérieur à R correspondrait un et un seul point z intérieur à R.

(²) On peut, par exemple, en désignant par $f_n(Z)$ la fonction qui applique sur $|Z| < 1$ l'aire C_{-n} $[f_n(0) = 0, f'_n(0)$ réel$]$, affirmer que $f(Z)$ est la limite de la suite $f_1(Z), \ldots, f_n(Z), \ldots$, uniformément atteinte dans toute aire intérieure à $|Z| < 1$.

(³) *Voir* Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, § 7. Lemme fondamental.

Or c'est là un résultat contradictoire avec nos hypothèses.

En effet on a

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = \left(\frac{dZ_1}{dz_1}\right)_0 \left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0 \left(\frac{dz}{dZ}\right)_0,$$

$$\left(\frac{dz_1}{dZ_1}\right)_0 = f'(o) = \left(\frac{dz}{dZ}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dz_1}{dz}\right)_0 = \varphi'(o) = a_1$$

d'après l'hypothèse.

Donc

$$\left(\frac{dZ_1}{dZ}\right)_0 = a_1,$$

et l'on a supposé $|a_1| < 1$.

Il est donc impossible de supposer sans contradiction que la région R ne renferme à son intérieur aucun point critique de $\psi(z)$ ou aucun point qui annule $\varphi'(z)$, antécédent d'un tel point critique. Dans la formation indiquée plus haut des antécédentes successives C_{-i} de l'aire C, on tombera toujours sur une aire C_{-n} qui, contiendra un point critique de la fonction inverse de $\varphi(z)$ (1).

30. Nous avons donc, que la dérivée soit nulle au point $\zeta = \varphi(\zeta)$ considéré ou qu'elle y soit tout simplement en module inférieure à un, le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME. — *Le domaine de convergence immédiat* R *d'un point limite à convergence régulière* ζ (2), *contient toujours à son intérieur au moins un point critique pour la fonction algébrique inverse de* $\varphi(z)$. *Ce point est critique pour la branche de cette fonction qui devient*

(1) Pour définir alors les antécédentes de l'aire C_{-n} qui contient un point critique, il faut imaginer que z décrive l'aire C_{-n}, alors il y a deux de ses antécédents en général qui deviennent égaux si z vient au point critique; le point considéré étant critique pour la branche $\psi(z)$ qui s'annule à l'origine, l'un de ces antécédents est fourni précisément par la branche $\psi(z)$; z décrivant l'aire C_{-n} une et une seule fois, l'ensemble des antécédents qui deviennent égaux entre eux, lorsque z vient au point critique, décrit une aire $C_{-(n+1)}$ qui contient C à son intérieur, et qui est à un seul feuillet, limitée par une seule courbe analytique. L'aire $C_{-(n+1)}$ est l'antécédente de C_{-n} qu'il faut considérer dans R.

(2) Il n'y a rien de particulier à dire pour le cas où ζ point limite à convergence régulière est le point à l'infini du plan; par homographie on peut, si l'on veut, ramener ce point à distance finie, mais ce n'est là qu'une commodité de langage. Ceci se présentera chaque fois que $\varphi(z)$ sera polynome; alors l'infini sera point limite à convergence régulière et aussi point critique pour $\psi(z)$.

égale à ζ pour $z = \zeta$, il est conséquent d'un point, intérieur aussi à R_1 *où* $\varphi'(z) = 0$ (¹).

La démonstration de ce théorème qui résulte de l'analyse précédente basée sur la représentation conforme est toute naturelle quand on cherche à définir R, comme nous l'avons fait, par la limite des antécédentes successives de l'aire C.

31. Voici une deuxième démonstration qui n'est pas différente, en principe, mais qui n'utilise pas la représentation conforme.

Reprenons

$$z_1 = \varphi(z) = a_1 z + \ldots,$$

d'où, pour la branche de $\psi(z)$ qui est nulle à l'origine,

$$z_{-1} = \frac{1}{a_1} z + \ldots.$$

Si le processus indiqué plus haut pour la formation des antécédentes C_{-1}, C_{-2}, ..., de l'aire C se poursuit indéfiniment sans que l'on rencontre à l'intérieur d'une C_{-i} de point critique pour la branche de $\psi(z)$ considérée, cela veut dire que la fonction $\psi_n(z)$ inverse de $\varphi_n(z)$ a, quel que soit n, une branche nulle à l'origine et *analytique dans* C (²).

C'est ici le lieu d'appliquer le théorème suivant :

Si une fonction $w = F(z)$ holomorphe dans un cercle C de centre O de rayon r et sur ce cercle, pour laquelle $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, ne prend jamais dans ce cercle la même valeur en deux points distincts, alors, z décrivant le cercle C de rayon ρ, w décrit une ligne L dont la plus courte distance à l'origine est

$$d > \frac{-1+\sqrt{2}}{4}\rho \quad (³).$$

(¹) En réfléchissant un peu, on se rend compte que le théorème précédent est encore vrai pour l'itération d'une fonction *entière transcendante* dans le voisinage d'une racine de $z = \varphi(z)$ qui rend $|\varphi'(z)| < 1$.

(²) Grâce à la précaution prise d'envoyer à l'infini un point qui n'admet pas zéro pour point limite de ses conséquents, il n'y a dans C aucun pôle de $\psi_n(z)$ (quel que soit n) en choisissant C assez petit.

(³) *Voir* Klein et Fricke, *Fonctions automorphes*, p. 500.

La branche de $\psi_n(z)$, inverse de $\varphi_n(z)$, nulle à l'origine, est analytique dans C et sur C (si C est assez petit), son développement de Taylor dans C est

$$z_{-n} = \psi_n(z) = \left(\frac{1}{a_1}\right)^n z + \ldots.$$

Cette branche étant l'inverse d'une fraction rationnelle ne peut prendre la même valeur en deux points différents z et z', le théorème précédent peut lui être appliqué; d'autre part $\dfrac{z_{-n}}{\left(\frac{1}{a_1}\right)^n}$, nul à l'origine, a une dérivée égale à 1 à l'origine; z décrivant C, z_{-n} décrira C_{-n} antécédente de C d'ordre n.

Il s'ensuit donc que la plus courte distance de C_{-n} à l'origine sera

$$d_n > \frac{\sqrt{2}-1}{4}\rho\left|\frac{1}{a_1}\right|^n,$$

ρ étant le rayon de C.

Cela voudrait dire que, pour n assez grand, l'aire C_{-n} contiendrait un cercle de centre O de rayon aussi grand qu'on voudrait (puisque $\left|\frac{1}{a_1}\right|^n$ est aussi grand qu'on veut pour n assez grand, à cause de $|a_1| < 1$). Mais il n'y aurait qu'à choisir ce rayon *égal à la distance à l'origine d'un point critique pour la branche de* $\psi(z)$, *inverse de* $\varphi(z)$, *nulle à l'origine*, pour être sûr que l'aire C_{-n} contiendrait à son intérieur un point critique de la branche considérée, contrairement à l'hypothèse, faite au début.

32. *Remarque.* — Le théorème précédent étant admis, voici comment il faudra opérer pour trouver R à partir de C. On imagine qu'on ait étalé sur le plan z la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ à K feuillets de la fonction $\psi(z)$, algébrique, inverse de $\varphi(z)$. Partons de C; s'il est assez petit et si $\varphi'(0) \neq 0$, il ne contient pas de point de ramification de $\mathfrak{R}$. C découpe, dans $\mathfrak{R}$, k aires identiques superposées : quand z décrit chacune de ces aires, z_{-1} décrit dans le plan analytique z une aire simple limitée par une courbe analytique simple, et il y a une de ces aires et une seule C_{-1} qui contient C à son intérieur. Les $(k-1)$ autres aires n'ont pas de point commun avec C_{-1}. Puis si l'aire C_{-1}, comme C, ne contient pas de point de ramification de $\mathfrak{R}$, on opère sur elle comme on vient d'opérer sur C; on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une aire C_{-i} limitée par une courbe C_{-i} analytique simple, contenant à son intérieur un point de ramification de $\mathfrak{R}$. Si l'on suppose que l'origine appartient au feuillet supérieur de $\mathfrak{R}$, C_{-1} sera l'antécédente de l'aire découpé par C dans le feuillet supérieur et les $(k-1)$ autres aires décrites par z_{-1} seront les antécédentes des $k-1$ aires découpées par C dans les 2^e, 3^e, ..., $k^{\text{ième}}$ feuillets de $\mathfrak{R}$. Il en sera de même tant que la courbe C_{-i} ne renfermera pas à son intérieur [1] de point de ramification de $\mathfrak{R}$, et, en précisant, de point qui ramifie le *feuillet supérieur* de $\mathfrak{R}$ avec un feuillet inférieur.

Car s'il arrivait que la courbe C_{-i} contienne un point qui ramifie entre eux deux feuillets de $\mathfrak{R}$ distincts du feuillet supérieur, ce point *ne serait pas critique pour la branche de la fonction* $\psi(z)$ *qui s'annule à l'origine*, cette branche serait parfaitement holomorphe dans l'aire C_{-i}; alors C_{-i} découperait dans le feuillet supérieur une aire simple, dont l'antécédente $C_{-(i+1)}$ serait aussi une aire simple, contenant C_{-i}. A vrai dire, dans ce cas, il y aurait à envisager les feuillets qui sont ramifiés entre eux en un point P intérieur à la courbe C_{-i}; il y en a deux en général; la courbe C_{-i} découpe dans ces deux feuillets une aire Σ simplement connexe, se recouvrant elle-même; z décrivant l'intérieur de cette aire Σ, il y a deux de ses antécédents (qui deviennent égaux lorsque z vient en P) qui décrivent une même aire simple Σ_{-1}, à un seul feuillet du plan, limitée par un seul contour analytique : chacun de ces antécédents décrit toute l'aire Σ_{-1}, si z décrit toute l'aire Σ; on peut donc dire si l'on veut que Σ_{-1} est décrite deux fois, une fois par chacun des deux antécédents de z considérés, lorsque z décrit une fois l'aire Σ, en ce sens qu'à tout point z intérieur à C_{-i} correspondent deux antécédents intérieurs à Σ_{-1}.

Mais l'aire Σ_{-1} n'aurait aucun point commun avec l'aire intérieure à $C_{-(i+1)}$ et Σ_{-i} ne peut être prise en considération dans la formation du domaine R de convergence *immédiat* des O. Si elle reste toujours extérieure aux courbes C_{-i}, successives, Σ_{-1} sera intérieure à une certaine antécédente de l'aire simple R, elle appartiendra bien, comme nous le verrons plus tard, au domaine de convergence *total* de O, mais n'aura aucun point commun avec le domaine *immédiat*.

---

[1] L'intérieur de C_{-i} s'entend toujours : la région du plan limitée à C_{-i} qui contient l'origine.

Ceci étant bien précisé, on se rend compte du mécanisme de formation de R, tant que chacune des C_{-i} découpe dans le feuillet supérieur une aire ne contenant pas de point où ce feuillet se ramifie avec un feuillet inférieur, c'est-à-dire, répétons-le, de point qui soit critique pour la branche de $\psi(z)$ nulle à l'origine.

Mais nous savons qu'un certain contour C_{-i} (1) contiendra à son intérieur un tel point P. En ce point le feuillet supérieur se ramifie avec un certain nombre de feuillets inférieurs, en général avec le feuillet immédiatement inférieur seulement (2).

Supposons, pour simplifier, que seul ce point P de ramification de $\mathcal{R}$ figure dans C_{-i}; la courbe C_{-i} découpe alors dans $\mathcal{R}$ un certain nombre d'aires simplement connexes, superposées, dont la supérieure contient l'origine, est limitée par la courbe C_{-i} parcourue deux fois et comprend deux feuillets superposés ramifiés en P. D'une façon générale, on considérera l'aire d'un seul tenant S_{-i}, découpée dans $\mathcal{R}$ par C_{-i} et *qui contient l'origine sur le feuillet supérieur*: cette aire se recouvrira plusieurs fois elle-même, elle comprendra la partie du feuillet supérieur intérieure à C_{-i} et les parties intérieures à C_{-i} de tous les feuillets qui sont d'un seul tenant avec le feuillet supérieur à l'intérieur de C_{-i}, c'est-à-dire de tous les feuillets tels qu'on puisse joindre un point quelconque de ces feuillets intérieur à la courbe C_{-i} au point O du feuillet supérieur par un chemin continu, intérieur à la courbe C_{-i}, tracé sur $\mathcal{R}$.

L'aire à plusieurs feuillets S_{-i}, ainsi déterminée par C_{-i}, est simplement connexe, si elle admet C_{-i} plusieurs fois décrit pour seul contour, ce qui arrive par exemple si elle ne contient qu'un point de ramification pour la fonction algébrique $\psi(z)$.

Mais il peut arriver que cette aire soit multiplement connexe : un cas très simple où il en est ainsi serait celui où la courbe C_{-i} renfermerait à son intérieur deux points de ramification unissant entre eux le premier et le deuxième feuillet, et uniquement ceux-là.

---

(1) Cela pourra arriver dès le premier contour C_1, si l'on a $\varphi'(0) = 0$ avec $\varphi(0) = 0$.

(2) Je rappelle que $\mathcal{R}$ étant le genre zéro et $\varphi(z)$ étant générale, le feuillet supérieur n° 1 sera uni au deuxième feuillet par deux points de ramification, chacun des feuillets n^{os} 2, 3, ..., $k-1$ sera uni par deux points de ramification au feuillet précédent et au suivant; enfin le feuillet inférieur n° k sera uni par deux points au feuillet $(k-1)$ (*voir* PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 2, p. 416, § 16).

Alors, évidemment, l'aire considérée S_{-i} serait limitée par deux contours superposés à C_{-i}, le premier tracé tout entier sur le feuillet supérieur, le deuxième tracé tout entier sur le feuillet inférieur.

Quoi qu'il en soit, on considérera donc l'aire d'un seul tenant S_{-i} découpée dans la surface de Riemann par C_{-i}, qui contient l'origine sur le feuillet supérieur; z_{-i} décrivant cette surface, celui de ses antécédents $z_{-(i+1)}$ qui devient nul à l'origine, décrira une aire plane $C_{-(i+1)}$ à un seul feuillet contenant à son intérieur la courbe C_{-i} et l'aire plane limitée par C_{-i}; l'aire plane $C_{-(i+1)}$ sera limitée par autant de contours que l'aire d'un seul tenant, découpée dans $\mathfrak{R}$ par C_{-i}, a de contours. Cette aire plane $C_{-(i+1)}$ est le lieu des points qui peuvent être joints à O par un chemin dont tous les points ont leurs conséquents à l'intérieur de la courbe C_{-i}. On peut dire de cette aire que c'est l'antécédente contenant O de l'aire limitée par C_{-i} qui contient O; z décrivant l'aire C_{-i}, l'antécédent qui est nul à l'origine et tous les antécédents qui se ramifient avec celui-là à l'intérieur de C_{-i} décriront la nouvelle aire plane en question. Bien qu'il puisse arriver que cette nouvelle aire plane antécédente de l'aire C_{-i} ne soit pas simplement connexe, je l'ai encore appelée $C_{-(i+1)}$. On continuera à opérer sur $C_{-(i+1)}$ comme sur C_{-i} : on cherchera l'antécédente $C_{-(i+2)}$ de l'aire $C_{-(i+1)}$, qui contient O; ce sera le lieu des points du plan, qu'on peut joindre à O par un chemin simple dont tous les points ont leurs conséquents à l'intérieur de l'aire $C_{-(i+1)}$; pour déterminer $C_{-(i+2)}$, on envisagera dans $\mathfrak{R}$ l'ensemble *d'un seul tenant* avec l'origine du feuillet supérieur formé par les parties des feuillets de $\mathfrak{R}$ qui se projettent à l'intérieur de l'aire plane $C_{-(i+1)}$. Cet ensemble est une aire $S_{-(i+1)}$ d'un seul tenant, contenant l'origine du feuillet supérieur, se recouvrant elle-même plusieurs fois; tout point de $S_{-(i+1)}$ se projette à l'intérieur de $C_{-(i+1)}$ et peut être joint à l'origine pointée sur le feuillet supérieur par un chemin continu tracé sur $\mathfrak{R}$ et se projetant à l'intérieur de l'aire plane $C_{-(i+1)}$. $z_{-(i+1)}$ décrivant l'aire $S_{-(i+1)}$, celui de ses antécédents qui devient nul lorsque $z_{-(i+1)}$ coïncide avec l'origine pointée sur le feuillet supérieur décrira une aire plane $C_{-(i+2)}$ d'un seul tenant contenant l'origine O, contenant à son intérieur l'aire plane $C_{-(i+1)}$ et dont l'ordre de connexion est égal à celui de l'aire $S_{-(i+1)}$. Le processus, nettement expliqué maintenant pour tous les cas possibles, peut se continuer indéfiniment. Les aires planes successives C, C_{-1}, C_{-2}, ..., C_{-i}, ... sont contenues chacune dans la suivante, et chacune C_{-i} a pour antécédente l'aire $C_{-(i+1)}$ qui la contient. R, *domaine de convergence immédiat de* O, *n'est autre que la limite de l'aire* C_{-i} *lorsque* i *croît indéfiniment.* Tout point intérieur à R est intérieur à tous les C_{-j}, dont l'indice j surpasse un nombre donné bien déterminé. Tout point intérieur à R doit en effet pouvoir être joint à O par un chemin simple intérieur à R dont les conséquents admettent O pour unique point limite, et par suite soient, à partir d'un certain rang, intérieurs à l'aire C; c'est bien cette propriété qui a réglé la construction des régions C_{-i} successives car toute région C_{-i} est l'ensemble des points qu'on peut joindre à O par un chemin dont le $i^{\text{ième}}$ conséquent soit tout entier à l'intérieur de l'aire C dont toutes les conséquentes tendent vers O et O seulement. La frontière de R est, nous l'avons déjà vu, uniquement formée de points de E′, et sur cette frontière, les points de $E[z = \varphi(z), |\varphi'_n(z)| > 1]$ sont partout denses. Le plus souvent, dans les exemples aisés à traiter, les C_{-i} seront tout simplement connexes, et il en sera de même pour R. E′ sera alors un simple continu linéaire. Mais on a donné plus haut un exemple

$$\left(z_1 = \frac{z^k}{z^k + 2}\right)$$

où R avait un ordre de connexion infini. Par la transformation $z_1 = \varphi(z)$ tout point z intérieur à R se transforme en un point z_1 intérieur à R. Inversement, à un point z_1 intérieur à R, correspondent deux antécédents au moins intérieurs à R à cause du théorème fondamental précédent.

33. *Cas du groupe circulaire limite.* — Il s'agit ici d'un groupe de p points distincts $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ racines de $z = \varphi_p(z)$ pour lesquels $|\varphi'_p(z)| < 1$. On a

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \qquad \zeta_2 = \varphi(\zeta_1), \qquad \ldots, \qquad \zeta_{p-1} = \varphi(\zeta_{p-2}), \qquad \zeta = \varphi(\zeta_{p-1}),$$
$$\varphi'_p(\zeta_i) = \varphi'(\zeta)\,\varphi'(\zeta_1)\,\varphi'(\zeta_2)\ldots\varphi'(\zeta_{p-1}).$$

Nous envisagerons la substitution $z_p = \varphi_p(z)$, dans le voisinage de chacun des points précédents, dans le voisinage de ζ par exemple; nous pourrons définir comme précédemment, à partir d'un petit cercle C entourant ζ, le domaine de convergence R immédiat vers ζ pour cette substitution $z_p = \varphi_p(z)$: ce sera la limite des antécédentes successives contenant ζ de l'aire C par la branche de $\psi_p(z)$ inverse de $\varphi_p(z)$ qui devient égale à ζ pour $z = \zeta$.

R renfermera à son intérieur un point critique pour la branche considérée de $\psi_p(z)$. On aura les domaines de convergence immédiats vers $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$ pour la substitution $z_p = \varphi_p(z)$ en prenant tout simplement les itérés d'ordre $1, 2, \ldots, p-1$ du domaine R. (L'itéré d'ordre p de R est identique à R.) Ce seront des domaines $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$ entourant respectivement $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$; chacun d'eux est d'un seul tenant, ils n'ont aucun point commun deux à deux ; on peut les ranger dans un ordre circulaire $R, R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$, de telle façon que, quel que soit le chemin intérieur à l'un d'eux, R par exemple, unissant un point intérieur à R au point ζ, ses conséquents successifs sont respectivement intérieurs à $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}, R, R_1, \ldots$, périodiquement répétés, et n'ont comme points limites que le système des p points $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ qui sont les seuls conséquents de ζ distincts. Dans l'ordre circulaire, $R, R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$ sont chacun l'itéré du précédent par la substitution

$$z_1 = \varphi(z)\,[R_1 = \varphi(R), R_2 = \varphi(R_1), \ldots, R = \varphi(R_{p-1})].$$

Tout cela est aisé à voir. Chacun des R_i contient au moins un point critique pour la branche de la fonction inverse de $\varphi_p(z)$ qui devient égale à ζ_i pour $z = \zeta_i$. Or les points critiques de $\psi_p(z)$ inverse de $\varphi_p(z)$ sont les points critiques de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ et leurs conséquents d'ordre $1, 2, \ldots, (p-1)$. $\psi(z)$ a, en général, $2(k-1)$ points critiques qui sont les conséquents d'ordre 1 des $2(k-1)$ points où $\varphi'(z) = 0$ [$\varphi(z)$ est d'ordre k], $\psi_p(z)$ a donc en tout $2p(k-1)$ points critiques. Il arrive donc nécessairement qu'un des points critiques de $\psi(z)$ au moins est intérieur à un R_i, et ses $p-1$ conséquents suivants sont respectivement intérieurs aux R_j qui suivent le R_i considéré dans l'ordre circulaire. On peut encore dire : *il y a au moins un point annulant $\varphi'(z)$ qui tombe dans un des p domaines* $R, R_1, \ldots, R_{p-1}$, *c'est-à-dire dont les conséquents admettent $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$ comme groupe circulaire limite.*

Dans le cas où existe un groupe circulaire limite, on est sûr, comme on l'a dit, que E′ comprend un ensemble parfait continu linéaire qui divise le plan en plusieurs régions telles qu'il soit impossible de passer de l'une à l'autre par un chemin simple qui ne renferme aucun point de E'. $R, R_1, \ldots, R_{p-1}$, sont parmi ces régions séparées par E'. Leurs frontières, appartenant à E', comprennent des continus linéaires qui séparent tout point intérieur à un R_i de tout point extérieur (*voir* n° 26, 3°).

34. Conclusion importante. — *Pour une fraction rationnelle $\varphi(z)$ quelconque, le nombre des points limites à convergence régulière et des groupes circulaires limites est fini.*

Il est clair en effet que chaque point limite à convergence régulière devant être point limite unique des conséquents d'un point au moins où $\varphi'(z) = 0$, et les p points d'un groupe circulaire limite devant aussi être points limites des conséquents d'un point au moins où $\varphi'(z) = 0$, le nombre des points limites à convergence régulière, augmenté du nombre des groupes circulaires limites ne pourra jamais dépasser le nombre des points où $\varphi'(z) = 0$, lequel nombre, en général égal à $2(k-1)$ si $\varphi(z)$ est de degré k, n'est en tout cas jamais supérieur à $2(k-1)$.

Je rappelle que le théorème fondamental qui oblige un point au moins où $\varphi'(z) = 0$ à avoir des conséquents convergeant régulièrement vers un point limite, ou convergeant périodiquement vers les points d'un groupe limite, est encore vrai si $\varphi(z)$ est une transcendante entière. Mais la conclusion que nous venons de tirer ne s'étend pas à toutes les transcendantes entières $\varphi(z)$, car il arrive en général qu'une telle transcendante admet une infinité de points où $\varphi'(z) = 0$.

Ainsi se trouve levé, bien simplement, le doute qui subsistait relativement aux groupes circulaires limites. M. Kœnigs dit en effet, au paragraphe 34 de son Mémoire, *Sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, publié aux *Annales de l'École normale supérieure* en 1884 (page 401 du Supplément) :

« L'importance de la division du plan en régions, d'après le point limite auquel conduisent ses points, se trouve ainsi une fois de plus mise en évidence. Mais on concevra quelle difficulté s'attache au problème en songeant qu'il y a généralement une infinité de groupes circulaires limites, pour si grand que soit l'indice auquel ce groupe appartient. M. Cayley a mis le premier en avant ce problème dans le cas de la règle de Newton; mais, *même dans le cas d'un simple polynome entier*, le nombre des groupes limites peut être infini... »

Cette dernière assertion ne subsiste plus maintenant, pour tout polynome entier le nombre des groupes circulaires limites est FINI. Nous reviendrons plus loin sur l'application du problème à la règle de Newton, car nous verrons surgir, dès que l'équation soumise à la règle dépasse le degré 2, des circonstances tout à fait nouvelles et intéressantes.

35. *Applications.* — On peut, dès maintenant, utiliser les théorèmes généraux établis jusqu'ici pour traiter complètement des problèmes d'itération d'un caractère beaucoup plus général que ceux traités jusqu'ici. Les seuls exemples jusqu'ici connus de l'étude d'une itération dans tout le plan sont ceux publiés par M. Fatou dans ses deux Notes des *Comptes rendus* de 1906 et 1917 (15 octobre 1906, 21 mai 1917). On verra plus loin que ce sont les cas *les plus simples* qui se puissent présenter dans l'itération, et l'on verra à quelles circonstances tient cette simplicité.

1° La Note de 1906 traite des fractions $z_1 = \frac{z^k}{z^k + 2}$ (qui dérivent, par l'homographie auxiliaire $z = \frac{1}{Z}$, des polynomes $Z_1 = 2Z^k + 1$). Pour ces fractions l'origine est un point limite à convergence régulière.

Le cercle C_0 de centre O que, avec M. Kœnigs, on est conduit à former dans l'étude locale autour de l'origine, contient les deux seuls points critiques de la fonction inverse qui sont $z = 0$ et $z = 1$. On est sûr alors que ces points-là admettent O pour seul point limite de leurs conséquents. Il n'y a donc pas d'autre point limite à convergence régulière ni d'autre groupe circulaire limite $z = \varphi_n(z)$ où $|\varphi'_n(z)| < 1$. R, domaine de convergence immédiat vers O, comporte tout le plan sauf un ensemble parfait partout discontinu qui est E'. R est aussi le domaine de convergence total vers O.

La simplicité de la réponse tient à ce que l'inverse de $\varphi(z)$ n'a ici que deux points critiques, et tous les deux appartiennent au domaine R de l'origine.

2° Elle traite ensuite de l'exemple particulier $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$ pour lequel l'origine et le point à l'infini sont des points limites à convergence régulière. Les points critiques de la fonction inverse sont $z = -\frac{1}{8}$ et $z = \infty$. Il est immédiat que $z = -\frac{1}{8}$ appartient au domaine de convergence immédiat R_0 de l'origine et $z = \infty$ au domaine R_∞ du point à l'infini. Entourant l'origine d'un cercle C assez petit $\left(\text{par exemple } |z| = \frac{1}{2}\right)$ et prenant les antécédentes successives de l'aire C, on formera des aires C_{-1}, C_{-2} qui toutes comprendront l'origine et seront à distance finie. Elles seront toutes intérieures à un certain cercle Γ de rayon assez grand qui est au point ∞ ce que C est à l'origine : l'aire limitée par Γ contenant ∞ se transforme par $\varphi(z)$ en une partie d'elle-même entourant aussi ∞, c'est-à-dire que la conséquente de la courbe Γ est une courbe Γ_1 qui entoure complètement Γ [1]. (On pourra prendre par exemple

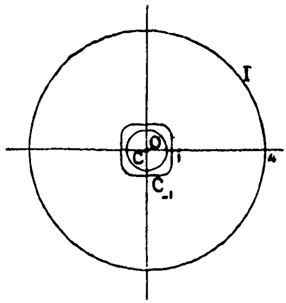

Fig. 16.

pour Γ le cercle $|z| = 4$.) Toutes les aires C_{-i} seront simplement connexes, elles auront pour limite une aire R_0 simplement connexe intérieure à Γ qui sera le domaine de l'origine. On prendra de même les antécédentes successives de l'aire Γ limitée par Γ et contenant le point à l'infini. Ces antécédentes sont toutes *extérieures à* R_0, elles ont une limite qui est une aire simplement connexe R_∞ contenant le point à l'infini; cette aire est le domaine du point à l'infini.

Les aires R_0 et R_∞ n'ont aucun point intérieur commun. Donc E′ est dans ce cas un ensemble qui divise le plan en deux régions au moins R_0 et R_∞; E′ comprend un continu linéaire. La frontière de R_0 et celle de R_∞ sont des cóntinus appartenant à E′. Mais tout point de E′ est limite pour les antécédents successifs d'un point quelconque du plan (le point à l'infini excepté), et si l'on choisit un point quelconque dans R_0 tous ses antécédents

---

[1] L'aire limitée par Γ et contenant ∞ devient ainsi l'aire limitée par Γ_1 et contenant ∞ qui est intérieure à la précédente.

sont dans R_0, et pour un point quelconque de R_∞, ils sont tous dans R_∞ [1]. Ceci prouve que tout point de E' qui est frontière pour R_0 l'est aussi pour R_∞ et inversement. *Donc* R_0 *et* R_∞ *ont pour frontière commune un continu linéaire* E' *vers lequel tendent à la fois les antécédentes de la courbe* C *et celles de* Γ. (Nous verrons plus loin que E' est dans ce cas une *courbe de Jordan.*)

3° Ce qui vient d'être dit de $z_1 = \frac{z+z^2}{2}$, peut évidemment se répéter de *toute fraction du deuxième degré qui possède deux points limites à convergence régulière*, c'est-à-dire deux points ζ_1 et ζ_2 pour lesquels $z = \varphi(z)$, $|\varphi'(z)| < 1$. Une telle fraction aura des coefficients complexes qui pourront varier dans certaines limites (par exemple chaque coefficient pourra être représenté par un point du plan complexe assujetti à demeurer dans *certaines aires* de son plan), mais ces limites sont bien moins restrictives que celles qui consistent par exemple à assujettir $z_1 = \varphi(z)$, à admettre un cercle fondamental. Ainsi que l'a montré, en effet, M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917, une fraction $z_1 = \varphi(z)$, qui conserve l'intérieur d'un cercle fondamental se ramène par homographie à une fraction dont *tous les coefficients sont réels*, et il est clair que la condition de réalité imposée à des coefficients équivaut à une relation *d'égalité* [c'est écrire que la partie imaginaire est *nulle* [2]], alors que les restrictions imposées plus haut aux coefficients ne sont que des *inégalités*, les points représentatifs de ces coefficients pouvant décrire *des aires à deux dimensions chacun dans leur plan.* Il suffit, pour se rendre compte de ce dernier point, de partir d'une fraction du deuxième degré particulière ayant deux points limites à convergence régulière; les racines de l'équation $z = \varphi(z)$, dépendant continûment des paramètres qui entrent dans $\varphi(z)$ ainsi que la quantité $\varphi'(z)$ prise en une de ces racines, on verra, en considérant les deux racines de $z = \varphi(z)$ qui rendent $|\varphi'(z)| < 1$ dans le cas particulier dont on part, que si les coefficients de $\varphi(z)$

---

(1) Car chacun de ces domaines, R_0 par exemple, renferme un point critique et un seul pour $\psi(z)$; ce point est critique pour la branche de $\psi(z)$ qui est égale à zéro à l'origine. A un point intérieur à R_0 correspondent deux antécédents intérieurs à R_0 et un conséquent intérieur à R_0.

(2) Ou que le point représentatif de ce coefficient est sur l'axe réel ou sur une circonférence, transformée de cet axe par la substitution homographique exécutée sur la variable.

décrivent, chacun dans leur plan, de petites aires autour de leurs valeurs initiales, les deux racines précédentes varieront continûment et rendront toujours $|\varphi'(z)| < 1$.

ζ_1 et ζ_2 étant donc les deux points limites à convergence régulière, chacun sera point limite pour les conséquents d'un point critique de la fonction inverse de $\varphi(z)$. Il y a deux points critiques en tout et on les obtient facilement : si $z_1 = \dfrac{az^2+bz+c}{a'z^2+b'z+c'}$ est la fraction envisagée $\varphi(z)$, ces deux points critiques s'obtiennent en égalant à zéro le discriminant de l'équation

$$(a'z_1 - a)z^2 + (b'z_1 - b)z + c'z_1 - c = 0.$$

Ils sont racines de l'équation

$$(b'z_1 - b)^2 - 4(a'z_1 - a)(c'z_1 - c) = 0.$$

En dehors de ζ_1, ζ_2, il n'y aura ni point limite à convergence régulière, ni groupe circulaire limite. Partant de deux cercles suffisamment petits, C et Γ, entourant respectivement ζ_1 et ζ_2 et cherchant les antécédentes successives des aires qu'ils limitent, on verra que les antécédentes de C sont toutes des aires simplement connexes C_{-1}, C_{-2}, ..., laissant Γ à leur extérieur, celles de Γ qui sont de même Γ_{-1}, Γ_{-2}, ... laissent C à leur extérieur. Les premières C_{-i} ont pour limite une aire simplement connexe R_1 qui est le domaine de convergence immédiat vers ζ_1, les deuxièmes Γ_{-i} ont pour limite une aire R_2 domaine de ζ_2, et l'on voit comme précédemment que R_1 *et* R_2 *ont pour frontière commune l'ensemble* E' *qui est ici encore un continu linéaire séparant le plan complet en deux régions complémentaires* R_1 *et* R_2; ce continu est la limite commune des antécédentes successives C_{-i} et Γ_{-i} des courbes C et Γ. Tout point du plan appartient soit à R_1, soit à R_2, soit à leur limite commune E'. Sur la nature du continu linéaire E' (dont nous savons déjà qu'il n'est nulle part superficiel), nous reviendrons plus loin.

4° Les exemples généraux que vient de nous offrir le 3° nous permettent de nous élever à des exemples plus généraux encore.

Dans l'exemple précédent, les aires C_{-i} comme les Γ_{-i} successives étaient simplement connexes et leurs limites avaient une même frontière; cela tenait au fond à ceci : à partir d'un certain rang, C_{-i}, par exemple, contenait un point critique pour la détermination de $\psi(z)$ qui devient égale à ζ_1 en ζ_1; alors z_{-i} décrivant l'intérieur de l'aire C_{-i}, *ses deux antécédents* décrivent l'intérieur d'une aire $C_{-(i+1)}$, simplement connexe, contenant C_{-i} à son intérieur; $z_{-(i+1)}$ décrivant le contour $C_{-(i+1)}$ une fois dans le sens positif, z_{-i} décrit C_{-i} *deux fois* dans le sens positif; on peut dire la même chose de C_{-j} et $C_{-(j+1)}$ pour $j > i$; même chose aussi pour les Γ_{-i} à partir d'un certain rang. L'essentiel est que TOUS LES ANTÉCÉDENTS d'une aire C_{-i} soient intérieurs à $C_{-(i+1)}$ dès que i dépasse une certaine valeur, et qu'il en soit de même des Γ_{-i}; alors il faudra bien que R_1, limite de C_{-i}, qui a pour frontière une partie de E', voisine en tous ses points frontières avec R_2, limite des Γ_{-i}, puisque tout point de E' est limite pour les antécédents d'un point de C_{-i} comme d'un point de Γ_{-i}. D'où la conclusion de 3°.

a. Ce que nous avons dit précédemment s'appliquera donc aussi *à toute fraction d'un degré quelconque ayant deux points limites à convergence régulière, mais pour laquelle la fonction inverse n'a que deux points critiques*; par exemple à toute fraction du type

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{a z^k + b}{c z^k + d},$$

a, b, c, d étant des constantes telles que l'équation $z = \varphi(z)$ admette deux racines ζ_1 et ζ_2 pour lesquelles $|\varphi'(z)|$ soit < 1.

D'ailleurs il est facile de ramener toute fraction du deuxième degré $z_1 = \varphi(z)$ au type précédent $(k = 2)$ par une substitution linéaire auxiliaire sur z.

Pour une telle fraction le plan se divisera encore en deux régions simplement connexes, R_1 et R_2, contenant respectivement ζ_1 et ζ_2, séparées par un continu linéaire E'. R_1 et R_2 sont respectivement les lieux des points dont les conséquents convergent vers ζ_1 et ζ_2. Tout point de E' a tous ses conséquents dans E'. Sur E' les points de E $[z = \varphi_n(z), |\varphi'_n(z)| > 1]$, points n'ayant qu'un nombre fini de conséquents, sont partout denses.

b. Mais on peut encore généraliser, en laissant de côté la restricition imposée à $\varphi(z)$ de n'avoir que deux *points distincts où* $\varphi'(z) = 0$ [correspondant aux deux points critiques de l'inverse de $\varphi(z)$]. Considérons une fraction du degré k pour laquelle existent deux points limites à convergence régulière ζ_1 et ζ_2; entourant ζ_1

et ζ_2, comme précédemment, de deux petites aires limitées C et Γ, on prend les antécédentes successives de C et de Γ, à l'aide des branches de $\psi(z)$ qui deviennent respectivement égales à ζ_1 et ζ_2 en ζ_1 et ζ_2, ainsi qu'on l'a expliqué pages 59-64 du présent Mémoire. Supposons qu'en procédant ainsi on arrive à une C_{-i}, simplement connexe, contenant ζ_1, telle que z_{-i} décrivant C_{-i} *tous ses k antécédents* $z_{-(i+1)}$ décrivent une aire $C_{-(i+1)}$, simplement connexe, contenant C_{-i} à son intérieur, en sorte que, $z_{-(i+1)}$ décrivant une fois le contour simple $C_{-(i+1)}$ dans le sens positif, z_{-i} décrira k fois le contour simple C_{-i} dans le sens positif. Ceci exigera en général que C_{-i} contienne à son intérieur $(k-1)$ points critiques convenables de la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, points critiques qui seront tels que, partant de ζ_1 avec une détermination quelconque de $\psi(z)$, on pourra revenir en ζ_1 par un chemin intérieur à C_{-i}, avec telle autre détermination qu'on voudra de $\psi(z)$. On se rendra bien compte de cela en imaginant la surface de Riemann $\mathcal{R}$ à k feuillets relative à $\psi(z)$: il faudra que le contour C_{-i} découpe dans $\mathcal{R}$ une aire simplement connexe à k feuillets superposés, contenant ζ_1, et limitée par C_{-i} parcouru k fois. [Ceci exige en général que chaque feuillet de $\mathcal{R}$ soit relié au suivant par un point critique intérieur à C_{-i}, ce qui donc exige la présence dans C_{-i} de $(k-1)$ points critiques convenables de $\psi(z)$.]

Supposons qu'en procédant de même sur Γ on arrive à une antécédente Γ_{-j} jouissant relativement à ζ_2 des mêmes propriétés que C_{-i} relativement à ζ; c'est-à-dire que, z_{-j} décrivant l'intérieur de l'aire simplement connexe Γ_{-j}, tous ses k antécédents $z_{-(j+1)}$ décrivent l'intérieur d'une aire simplement connexe $\Gamma_{-(j+1)}$, contenant Γ_{-j} à son intérieur.

Alors les antécédentes successives de l'aire C, comme celles de l'aire Γ, seront toutes simplement connexes. Les premières ont pour limite une aire R_1, simplement connexe, qui est le domaine de convergence vers ζ_1; les deuxièmes ont pour limite une aire R_2, simplement connexe aussi, qui est le domaine de convergence vers ζ_2; R_1 et R_2 ont pour frontière commune un continu linéaire E' qui les sépare et qui est la limite commune des courbes simples C_{-i} et Γ_{-j}. Tout point du plan appartient à R_1, à R_2, ou à E'. On reviendra plus loin sur la nature de E', et l'on verra que, dans des hypothèses très générales, c'est une *courbe de Jordan*.

Remarquons que, dans tout ce qui a été dit précédemment, on peut se borner à *partir de* C_{-i} *et de* Γ_{-j} *au lieu de* C *et* Γ, car c'est seulement à partir de C_{-i} et de Γ_{-j} qu'on a commencé à tirer les conclusions précédentes sur R_1, R_2 et leur limite commune E'. Si C_{-i} et Γ_{-j} sont *a priori* deux courbes, quelconques d'ailleurs, entourant respectivement ζ_1 et ζ_2, jouissant relativement à ζ_1 et ζ_2 des propriétés indiquées précédemment dans tout leur détail, dont les k antécédentes d'ordre 1 soient, pour la première, confondus avec $C_{-(i+1)}$, pour la deuxième avec $\Gamma_{-(j+1)}$, l'aire $C_{-(i+1)}$ contenant C_{-i} et ζ_1, et l'aire $\Gamma_{-(j+1)}$ contenant Γ_{-j} et ζ_2, alors on peut affirmer que les C_{-n} successifs et les Γ_{-n} tendent vers la même limite E', séparant les domaines R_1 et R_2 de ζ_1 et ζ_2.

Certaines des fonctions à cercle fondamental signalées par M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917) rentrent dans ce cas-là. Ce sont celles qui admettent deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, symétriques par rapport au cercle fondamental [*voir n° 26 et suiv., et aussi n° 20 du présent Mémoire* (2°)]. Si ζ_1 est intérieur et ζ_2 extérieur, R_1 se compose de l'intérieur, et R_2 de l'extérieur du cercle, E' est identique au cercle séparateur. On peut *a priori* choisir pour les courbes C_{-i} et Γ_{-j} *des cercles, très voisins du cercle fondamental, ayant pour points de Poncelet* ζ_1 *et* ζ_2 (1).

Mais à partir d'une telle fraction rationnelle qui, comme on l'a fait remarquer plus haut, a des coefficients assujettis à des conditions d'*égalité* (conditions de réalité), on peut en définir de beaucoup plus générales, en s'affranchissant de la propriété de conserver le cercle fondamental; si en effet on fait varier assez peu les coefficients de la fraction initiale, chacun de ces coefficients restant, dans son plan, dans une aire assez petite entourant sa valeur initiale, mais par ailleurs étant quelconque, on obtiendra une fraction rationnelle beaucoup plus générale (dont les coefficients ne satisferont plus qu'à des inégalités), ne conservant plus un cercle fondamental, mais pour laquelle, comme pour la fraction initiale, les propriétés fondamentales relatives : 1° à l'existence de deux points limites ζ_1, ζ_2 à convergence régulière; 2° aux courbes C_{-i} et Γ_{-j}, qui les entourent respectivement, seront encore satisfaites. (Si les variations des coefficients sont assez petites, on pourra en effet conserver pour C_{-i} et Γ_{-j} les cercles indiqués plus haut pour la fraction initiale.)

(1) *Voir* le lemme de Schwarz rappelé aux Préliminaires.

Pour cette fraction la division du plan en deux régions R_1 et R_2, par le procédé indiqué plus haut, sera valable. Le continu E' qui sépare R_1 de R_2 sera voisin du cercle fondamental que conservait la fraction initiale, puisqu'il est compris entre les cercles C_{-i} et Γ_{-j} qu'on a choisis pour la fraction initiale aussi voisins qu'on a voulu du cercle fondamental. Dans ce cas l'on peut dire que *le continu linéaire E' a varié de façon continue avec les paramètres de la fraction $\varphi(z)$*, résultat qui est loin d'être évident *a priori*; quant aux deux points limites à convergence régulière, ils ont, eux aussi, varié continûment avec les paramètres de φ, ce qui résulte immédiatement de la continuité de $\varphi(z)$ relativement à ces paramètres [comme aussi de la continuité de $\varphi'(z)$].

36. *Domaine de convergence total vers un point limite à convergence régulière ou vers un groupe circulaire limite.* — Il convient d'appeler ainsi l'ensemble de tous les points du plan dont les conséquents successifs admettent pour seul point limite le point limite considéré, ou pour seul groupe limite le groupe circulaire considéré. Nous allégerons l'exposition en nous bornant au cas du point limite à convergence régulière.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes occupés d'étudier le domaine de convergence *immédiat* R vers le point limite ζ considéré $[\zeta = \varphi(\zeta), |\varphi'(\zeta)| < 1]$. C'était un domaine d'un seul tenant, contenant ζ à son intérieur, n'ayant pour points frontières que des points de E', n'ayant pour point intérieur que des points n'appartenant pas à E', qu'on puisse joindre à ζ par un chemin dont aucun point n'appartienne à E'. Nous avons reconnu que R contenait nécessairement à son intérieur un point au moins où $\varphi'(z) = 0$ dont le conséquent est critique pour la branche de $\psi(z)$, fonction inverse de $\varphi(z)$, qui devient égale à ζ au point ζ. Ceci indique : 1° qu'à tout point z intérieur à R correspond un conséquent intérieur à R (ainsi que tous les conséquents successifs); 2° que tout point z intérieur à R a *au moins deux antécédents z_{-1} d'ordre* 1 *intérieur à* R, ces deux antécédents devenant égaux à une valeur qui annule $\varphi'(z)$ lorsque z devient égal à un point critique intérieur à R de la branche $\psi(z)$ qui nous intéresse.

Mais il ne résulte nullement de là, ainsi qu'on le verra plus loin, que *tous les antécédents* d'un point intérieur à R soient intérieurs à R. Cela serait vrai par exemple si, à partir d'un certain rang i, toutes les courbes C_{-i} antécédentes l'une de l'autre, qu'on a appris à former précédemment et dont la limite pour $i=\infty$ constitue la frontière de R, étaient formées *d'un seul contour*, limitant une aire *simplement connexe du plan*, telles aussi que chacune de ces C_{-i} (à partir d'un certain rang) découpe dans la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ à k feuillets relative à $\psi(z)$ une aire S_{-i} à k feuillets superposés, contenant ζ, simplement connexe, limitée par la courbe C_{-i} parcourue k fois. Alors, z décrivant l'intérieur de C_{-i}, l'ensemble de ses k antécédents décrira l'intérieur d'une courbe simple $C_{-(i+1)}$ entourant C_{-i} et contenant C_{-i} à son intérieur. Puisque R est la limite pour $i=\infty$ de l'intérieur de C_{-i}, il est clair que, z décrivant l'intérieur de R, l'ensemble de ses K antécédents décrira aussi l'intérieur de R. Si l'on imagine la portion S de $\mathfrak{R}$, simplement connexe, à k feuillets, qui se projette sur R, z décrivant cette S, *chacun de ses antécédents sera fonction uniforme de z sur* S, *et décrira l'intérieur de* R *quand z décrira l'intérieur de* S. S contiendra alors en général $k-1$ points critiques convenables pour $\psi(z)$. Ils devront être tels que, *partant de ζ avec une détermination arbitraire de $\psi(z)$, on puisse revenir en ζ avec telle autre détermination qu'on voudra de $\psi(z)$ après avoir suivi un chemin intérieur à* R (¹). *Dans ce cas, réalisé aux numéros* 2°, 3°, *et* 4° *des applications précédentes, le domaine total* D *de convergence vers ζ, se confond avec le domaine immédiat* R (²).

En effet, un point z intérieur au domaine total admettant ζ pour seul point limite de ses conséquents successifs, il arrivera qu'un de ses conséquent z_i d'indice convenable, et tous les conséquents suivants, tomberont dans le domaine R qui contient ζ. D peut donc se définir l'*ensemble des points dont un conséquent* (*d'ordre arbi-*

(¹) C'est là, en définitive, la condition nécessaire et suffisante pour que R soit identique à D, puisqu'alors à tout point z intérieur à R correspondent k antécédents tous intérieurs à R et tels qu'on puisse passer de l'un à l'autre sans sortir de R en faisant décrire à z des circuits convenables *intérieurs à* R.

(²) Dans l'exemple donné précédemment comme première application,

$$z_1=\frac{z^k}{z^k+2},$$

R est encore identique à D, car la *condition nécessaire et suffisante* qu'on vient dénoncer se trouve là encore vérifiée, R contenant tous les points critiques de $\psi(z)$.

trairement élevé d'ailleurs) tombe dans R. D *se compose donc de* R *et de toutes les antécédentes successives de l'aire* R.

37. Dans le cas signalé plus haut, l'aire R coïncide avec ses k antécédentes d'ordre 1; elle coïncide donc avec toutes ses antécédentes successives. Le domaine total D de convergence vers ζ est alors identique à R, domaine immédiat.

On a indiqué plus haut la condition nécessaire et suffisante pour que cette circonstance se produise : c'est que R soit un domaine tel que, partant de ζ avec une détermination arbitraire de $\psi(z)$, on puisse y revenir, par un chemin intérieur à R, avec telle autre détermination de $\psi(z)$ que l'on voudra. C'est dire, en d'autres termes, que l'ensemble des points de $\mathcal{R}$ [surface de Riemann de $\psi(z)$] qui se projettent à l'intérieur de R doit former une surface S *d'un seul tenant à k feuillets* (¹) (tous les feuillets de $\mathcal{R}$) contenant ζ.

Ceci exige, dans le cas où tous les points critiques sont simples, c'est-à-dire ne relient entre eux que deux feuillets de la surface $\mathcal{R}$, ou bien ne permutent entre elles que deux déterminations de $\psi(z)$, que R, s'il est simplement connexe (²), *contienne à son intérieur* $k-1$ *points critiques au moins qui permettent, par des circuits convenables intérieurs à* R, *de permuter chacune des* k *déterminations de* $\psi(z)$ *avec les* $(k-1)$ *autres, sans sortir de* R. Si les points critiques sont multiples, ils devront compter pour au moins $(k-1)$ points critiques simples (³).

38. Or il n'est pas difficile *a priori* de constater que cette condition ne peut se trouver réalisée dans la majorité des cas dès que le

---

(¹) S pourra être simplement connexe, comme dans les applications 2°, 3°, 4°, ou d'un ordre de connexion infini, comme dans la première application. Si z décrit R une et une seule fois, son conséquent z_1 décrit l'aire S à K feuillets.

(²) Je fais ici cette restriction, car il pourrait arriver que R, sans contenir le nombre de points critiques que j'indique pour les domaines simplement connexes, pût satisfaire à la condition nécessaire et suffisante énoncée plus haut s'il était multiplement connexe. C'est là une question délicate que je réserve pour l'instant.

(³) La condition *est toujours remplie par le domaine immédiat de convergence vers le point à l'infini*, dans le cas où $\varphi(z)$ est un *polynome quelconque de degré* k; car le point à l'infini compte pour $k-1$ points critiques multiples; autour de lui se permutent, en effet, les k branches de la fonction inverse de $\psi(z)$.

degré k de $\varphi(z)$ dépasse 2. Lorsque $k=2$, il suffit d'un point critique dans R pour satisfaire à la condition, et on sait que ce point critique figure toujours dans R, nécessairement; donc la condition est remplie d'elle-même.

Lorsque $k>2$, nous allons voir que le nombre des points limites à convergence régulière peut atteindre k alors que le nombre des points critiques de $\psi(z)$ ne dépasse pas $2k-2$. Il est donc impossible, *a priori*, que les domaines de convergence immédiats vers chacun des points limites à convergence régulière, dans tous les cas où l'on aura reconnu qu'ils sont bien simplement connexes ([1]), ces domaines étant évidemment sans point commun deux à deux, renferment chacun à leur intérieur $k-1$ points critiques au moins, *dès que le nombre des points limites existants dépasse* 2. On est certain *a priori* dans tous les cas, s'il y a plus de deux points limites à convergence régulière, que pour un au moins de ces points limites le *domaine total de convergence sera plus étendu que le domaine immédiat.* C'est là une circonstance toute nouvelle, elle paraît avoir échappé à tous les auteurs qui se sont occupés jusqu'ici d'itération. Dans tous leurs exemples, que j'ai repris en partie dans les applications précédentes, les domaines totaux de convergence coïncident toujours avec les domaines immédiats. J'en ai montré la raison dans le décompte des points critiques de $\psi(z)$ figurant à l'intérieur des domaines immédiats.

A ce titre, comme je l'annonçais (n° 35) en traitant des applications précédentes, ces exemples étaient *les plus simples* qui puissent se présenter dans l'itération; ils ne conduisaient qu'à une division du plan par E' en un nombre *fini* de régions R, ils ne laissaient pas soupçonner que E' pouvait très bien diviser le plan en *une infinité de régions*, et que c'était là-même le cas le plus général dès que le degré de la fraction à itérer dépassait 2. Ils ne faisaient pas prévoir qu'en général le domaine total de convergence, vers un point limite à convergence régulière, se composerait d'*une infinité d'aires*, sans point commun deux à deux, antécédentes successives de l'aire R

([1]) On verra plus loin sur un exemple que ceci se reconnaît en déterminant, pour chaque point limite à convergence régulière, les points critiques de $\psi(z)$ dont les conséquents convergent vers ce point limite, et examinant les permutations des branches de $\psi(z)$ autour de ces points.

(distinctes de R) qui constitue le domaine de convergence immédiat.

39. Montrons d'abord, en considérant une fraction rationnelle quelconque du degré k, que le nombre des points limites à convergence régulière peut atteindre la valeur k, sans la dépasser. Reportons-nous pour cela au paragraphe de ce Mémoire qui traite de l'existence des points de $E\,[z = \varphi_n(z), |\varphi'_n(z)| > 1]$ (n° 9). Soit

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

la fraction à itérer, P et Q étant deux polynomes de degré k. Les racines de $z = \varphi(z)$ sont les racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k+1}$ (¹) de l'équation

$$R = P - zQ = 0$$

de degré $(k+1)$.

On a d'ailleurs démontré la relation

$$\sum_1^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1.$$

On sait aussi que

$$\varphi'(\zeta_i) = 1 + \frac{R'(\zeta_i)}{Q(\zeta_i)}.$$

On a vu aussi que si le point M_i d'affixe $\varphi'(\zeta_i)$ est intérieur au cercle de centre O de rayon 1 $[|\varphi'(\zeta_i)| < 1]$, le point N_i d'affixe $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$ est dans le demi-plan

$$\mathcal{R}(z) = \text{partie réelle de } z < -\frac{1}{2}.$$

et réciproquement.

La relation

$$\sum_1^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1$$

prouve que les $(k+1)$ points $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$ ont pour centre de gravité le point d'affixe $-\frac{1}{k+1}$.

Il s'ensuit immédiatement de là que parmi ces points N_i, *il peut*

(¹) Nous nous plaçons dans le cas général où toutes ces racines sont distinctes *y en avoir k, mais pas plus, dans le demi-plan* $\mathcal{R}(z) < -\frac{1}{2}$. On pourra se les donner *a priori*, et le $(k+1)^{\text{ième}}$ sera alors déterminé par la relation précédente.

Connaissant ainsi *a priori* les $(k+1)$ valeurs des $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$, on formera immédiatement $\frac{Q(z)}{R(z)}$ à l'aide de l'identité

$$\frac{Q(z)}{R(z)} = \sum_1^{k+1} \frac{1}{z-\zeta_i} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)},$$

en se donnant *arbitrairement les* $(k+1)$ *points* ζ_i. $Q(z)$ et $R(z)$ seront respectivement de la forme

$$Q(z) = a_0 z^k + \ldots,$$
$$R(z) = -a_0 z^{k+1} + \ldots.$$

à cause de l'identité

$$\sum_1^{k+1} \frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)} = -1,$$

connaissant Q et R on aura $P(z)$ par

$$P(z) = R(z) + z\,Q(z).$$

et la fraction $z_1 = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, admettra les points $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ pour points limites à convergence régulière, puisqu'en ces points $|\varphi'(\zeta_i)| < 1$, à cause du choix des k premières valeurs $\frac{Q(\zeta_i)}{R'(\zeta_i)}$ dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) < -\frac{1}{2}$.

On a ainsi le moyen de former une fraction rationnelle $\varphi(z)$ du degré k ayant k points limites [1] à convergence régulière $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ arbitrairement choisis, en lesquels les $\varphi'(\zeta_i)$ ont des valeurs inférieures à 1 en module, arbitrairement choisies *a priori*. C'est une

[1] On voit aussi qu'une fraction du degré k ne peut avoir plus de k points limites à convergence régulière. Il y a toujours une racine de $z = \varphi(z)$ qui rend $|\varphi'(z)| > 1$ ainsi qu'on l'a fait remarquer en établissant l'existence des points de l'ensemble E. On voit aussi qu'il est facile de former une fraction sans point limite à convergence régulière.

fraction très générale eu égard aux arbitraires qui entrent dans la question. Pour une telle fraction, $(k-1)$ de ces points limites à convergence régulière pourront avoir des domaines totaux de convergence plus étendus que leur domaine immédiat de convergence.

40. Supposons donc que le domaine de convergence immédiat R vers un point limite ζ à convergence régulière ne satisfasse pas à la condition requise pour que le domaine total D de convergence vers ζ soit identique à R. Cela voudra dire que, z décrivant R, *il y a des antécédents de z qui ne sont pas dans* R. Imaginant l'ensemble des points de $\mathcal{R}$ [surface de Riemann de $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$] qui se projettent à l'intérieur de R, cet ensemble se composera de *plusieurs parties distinctes, chacune d'un seul tenant, telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre par un chemin dont tous les points se projettent à l'intérieur de* R (¹); l'une de ces parties S, contenant le point ζ du feuillet supérieur, est d'un seul tenant avec la partie du feuillet supérieur qui se projette à l'intérieur de R; z décrivant S, un de ses antécédents z_{-1}, qui est égal à ζ pour $z=\zeta$, est fonction uniforme de z sur S et décrit l'aire simple à un seul feuillet R, z décrivant les parties de $\mathcal{R}$ projetées sur R et ne se ramifiant pas avec S à l'intérieur de R, il y aura des antécédents z_{-1}, de z qui ne tomberont pas dans R et *qui décriront des aires simples du plan analytique d'un seul tenant, à un seul feuillet, sans point commun intérieur entre elles, et sans point commun intérieur avec* R (*voir* Préliminaires, § 6); nous appellerons ces aires, les aires R_{-1} pour marquer qu'elles sont décrites par des antécédents d'ordre 1 de z lorsque z décrit R. Ainsi, z décrivant R, ses antécédents décrivent et R, et les aires R_{-1} sans point commun avec R. On continuera de même; z décrivant chacune des aires R_{-1} aucun de ses antécédents ne peut tomber dans une aire R_{-1} ni dans l'aire R (²); ces antécédents décriront donc un certain nombre d'aires simples, chacune d'un seul tenant, à un seul feuillet; ces aires, que j'appellerai les R_{-2}, n'ont ni point commun intérieur entre elles, ni point commun intérieur avec les R_{-1}, ni avec R. Lorsque z décrit R, ses antécédents d'ordre 2 décrivent R, les R_{-1} et R_{-2}. De même z décrivant les R_{-2}, ses anté-

---

(¹) Car autrement R satisferait à la condition nécessaire et suffisante pour que tout point intérieur à R *ait tous ses antécédents dans* R.

(²) Car cela forcerait z à être dans R, ce qui est absurde.

cédents décriront des aires R_{-3} sans point commun avec R, ni avec les R_{-1}, ni avec les R_{-2}, etc.

En continuant indéfiniment, on voit que *le domaine total de convergence vers* ζ *se composera de* R, *des* R_{-1}, ..., *des* R_{-2}, ..., *c'est-à dire d'une infinité d'aires chacune d'un seul tenant* (¹), *à un seul feuillet, et sans point commun intérieur deux à deux.* z décrivant R, ses antécédents d'ordre i décrivent les aires R, R_{-1}, ..., R_{-i}. Les R_{-i} sont les antécédentes des $R_{-(i-1)}$; lorsque z est dans une R_{-i}, son conséquent est dans une $R_{-(i-1)}$, ses antécédents d'ordre 1 sont dans des $R_{-(i+1)}$. Les points frontières de R, sont tous des points de E′, on le sait, et tout antécédent d'un point de E′ étant de E′, tout point frontière d'une R_{-i} sera point de E′. On est ici dans le cas où E′ comprend un ensemble continu linéaire et divise le plan en une infinité de régions sans point commun intérieur deux à deux, telles qu'il soit impossible de passer d'un point quelconque d'une région à un point quelconque d'une autre par un chemin qui ne contienne de point de E′.

Parmi ces régions sont toutes les R, R_{-1}, R_{-2}, ...

41. S'il y a un point limite à convergence régulière autre que ζ, aucun des R_{-i} n'aura de point commun intérieur avec son domaine de convergence immédiat ou total; si pour ce deuxième point limite la même circonstance que pour ζ se produit, c'est-à-dire si son domaine immédiat de convergence n'est point identique à son domaine total, on déterminera à partir de son domaine immédiat une série de domaines antécédents l'un de l'autre, analogues à la série des R, R_{-1}, R_{-2}, ..., etc. Il peut d'ailleurs arriver que pour certains points limites à convergence régulière le domaine immédiat R coïncide avec le domaine total D, sans que cela se produise pour d'autres. Nous en verrons des exemples plus loin : il est clair par exemple que, pour un polynome $\varphi(z)$ quelconque de degré k, l'∞ étant point limite à convergence régulière, et aussi point critique pour la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ autour duquel se permutent les k branches de cette fonction, le domaine immé-

(¹) Si R est supposée simplement connexe, toutes les R_{-1} le seront si tout morceau d'un seul tenant de la surface de Riemann $\mathcal{R}$ qui se projette sur l'intérieur de R est aussi simplement connexe. Mais, *a priori*, on conçoit très bien que ceci puisse ne pas avoir lieu pour les morceaux de $\mathcal{R}$ distincts du morceau S qui contient le feuillet supérieur.

diat du point à l'infini sera identique à son domaine total; si en outre il y a au moins deux points limites à convergence régulière, à distance finie, on pourra s'attendre à ce que leur domaine total compte une infinité d'aires $R, R_{-1}, R_{-2}, \ldots$.

Remarquons encore qu'en supposant (ce qui peut se faire par une homographie convenable, par exemple en envoyant à l'infini un point intérieur à R d'où ne résulte aucune ambiguïté sur ce qu'on doit appeler l'aire R) que le point à l'infini n'est pas point *limite* pour l'ensemble des aires R_{-i}, les aires $R_{-i}(i=1, 2, \ldots, \infty)$ ne devant pas avoir de point commun intérieur deux à deux, devront se rapetisser indéfiniment lorsque i grandit indéfiniment, de façon, par exemple, qu'on ne puisse trouver de cercle intérieur à R_{-i} qui conserve un rayon fini lorsque i grandira indéfiniment.

42. *Cas où le domaine de convergence immédiat vers un point limite à convergence régulière n'est pas simplement connexe.* — Je me suis borné, pour montrer que le domaine de convergence total pouvait être plus étendu que le domaine immédiat, aux cas où l'on reconnaissait, *a priori*, que le domaine immédiat R était simplement connexe. On peut aussi étudier le cas où R est multiplement connexe. Il est clair, par la façon même dont ce domaine R a été envisagé comme limite pour $i=\infty$ des aires (C_{-i}) antécédentes successives convenables de la petite aire (C) entourant le point limite ζ, que R sera multiplement connexe si et seulement si, à partir d'un certain indice i, les aires (C_{-i}) le sont aussi. Il faudra donc, et c'est une condition suffisante, qu'une certaine courbe C_{-i} formée d'un *seul contour*, embrasse une aire (C_{-i}) dont l'antécédente $C_{-(i+1)}$ soit limitée par *plusieurs contours*. Cela exige que la portion d'un seul tenant de $\mathcal{R}$ [surface de Riemann de $\psi(z)$], appelée précédemment S_{-i}, qui se projette à l'intérieur de (C_{-i}) et qui contient le point ζ du feuillet supérieur, soit *multiplement connexe*, et pour cela il est indispensable que S_{-i} soit limitée par *plus d'un contour*. S_{-i} devra être limitée par plusieurs courbes fermées dont chacune se projettera sur la courbe C_{-i}, chacune de ces diverses courbes fermées pouvant être tracée sur plusieurs feuillets de $\mathcal{R}$, mais ces diverses courbes étant telles qu'on ne puisse passer d'un point de l'une à un point d'une autre courbe distincte de la première que par un chemin qui traverse l'*intérieur de* S_{-i}. Autrement dit, encore, si l'on imagine que z décrive le contour de

(C_{-i}) la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ échange entre elles p de ses déterminations, d'une part, et d'autre part p' autres déterminations. Il est impossible, lorsque z décrit le contour C_{-i} de passer de l'une des p premières déterminations à l'une des p' autres détermination considérées, mais, et c'est là le fait important, partant d'un point de C_{-i} avec une des p premières déterminations, on peut revenir en ce point *avec une des p' autres envisagées*, à condition de décrire un chemin intérieur à (C_{-i}). Pour avoir un exemple simple, il suffit d'imaginer que, $\varphi(z)$ étant du deuxième degré, C_{-i} soit une courbe simple fermée entourant les deux points critiques de $\psi(z)$. Alors S_{-i} sera une surface de Riemann doublement connexe à deux feuillets, limitée par deux courbes distinctes tracées chacune sur un feuillet de $\mathcal{R}$ et chacune projetée sur C_{-i}, les deux feuillets de S_{-i} étant réunis par une ligne de croisement joignant les deux points critiques, ligne qu'on peut supposer intérieure à C_{-i}.

43. Revenant au cas général, en supposant bien entendu que les points critiques de $\psi(z)$ sont simples et au nombre de $2k-2$ (k étant le degré de φ), il résulte d'un procédé classique exposé par exemple dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, 2e édition, p. 416-417, qu'on peut supposer les k feuillets de $\mathcal{R}$ unis chacun au précédent par une *seule ligne de croisement*. Dans ces conditions, sur les p premiers feuillets de $\mathcal{R}$, C_{-i} découpe une courbe fermée Γ_{-i} et sur les p' feuillets suivants, elle découpe une autre courbe fermée Γ'_{-i} (1). Γ_{-i} et Γ'_{-i} sont des contours de S_{-i}; on ne peut passer d'un point de Γ_{-i} à un point de Γ'_{-i} que par un chemin *intérieur* à S_{-i} et nullement en suivant le bord de S_{-i}. Cela implique que la ligne de croisement unique entre le $p^{\text{ième}}$ feuillet et le $(p+1)^{\text{ième}}$ a ses deux extrémités *intérieures à* S_{-i} [ce sont deux points critiques convenables de $\psi(z)$] et il est bien clair, les lignes de croisement étant dans une certaine mesure arbitraires entre leurs extrémités connues, qu'on peut toujours supposer la ligne de croisement entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet *intérieure tout entière à* S_{-i}. Il suit de là cette conséquence fort importante que, partant d'un point z du plan extérieur à (C_{-i})

(1) Si $p+p'<k$, C_{-i} découpera encore d'autres courbes dans $\mathcal{R}$, mais cela ne nous préoccupe pas pour l'instant.

avec une des p déterminations de $\psi(z)$ qui correspondent aux p premiers feuillets de $\mathfrak{R}$, on ne peut passer à une quelconque des autres déterminations de ψ qu'en décrivant un circuit fermé qui *traverse l'aire* (C_{-i}) en traversant la ligne de croisement entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet. Donc tout circuit fermé qui ne traversera pas l'aire (C_{-i}) ramènera en z une des p premières déterminations de $\psi(z)$ du système auquel appartenait la détermination initiale. De même, si l'on part de z, extérieur à (C_{-i}) avec toute autre détermination de $\psi(z)$ qu'une des p déterminations précédentes, on ne pourra jamais revenir en z avec une de ces p déterminations, si le circuit décrit ne traverse pas (C_{-i}).

44. La conclusion est immédiate. S'il existe un point limite à convergence régulière ζ' distinct de ζ, son domaine immédiat R' ne ne pourra pas satisfaire à la condition nécessaire et suffisante pour que R' soit aussi le domaine total, puisque, évidemment, R' étant extérieur à R, sera extérieur à (C_{-i}) et, partant d'un point z intérieur à R' avec une des p premières déterminations de $\psi(z)$ et décrivant un circuit fermé quelconque intérieur à R', on ne traversera pas (C_{-i}) et l'on ne pourra pas revenir en z avec une, $(k-p)$ déterminations de $\psi(z)$ distinctes des p premières. Donc le domaine total de ζ se composera d'une *infinité d'aires* distinctes sans point commun deux à deux.

L'hypothèse que le domaine de convergence immédiat vers un des points limites est multiplement connexe, conduit donc à cette conclusion intéressante que le domaine total de *tout autre* point limite sera composé d'une infinité d'aires. Le fait que j'énonçais page 148 est donc GÉNÉRAL : *Pour toute fraction de degré k qui a plus de deux points limites à convergence régulière, il ne peut y avoir qu'un de ces points limites au plus qui ait un domaine de convergence immédiat confondu avec son domaine total.* En effet, ou bien un des points limites a un domaine immédiat multiplement connexe, et alors *tous les autres ont un domaine total* (composé d'une infinité d'aires distinctes) *plus grand que leur domaine immédiat de convergence,* ou bien tous les points limites ont un domaine immédiat simplement connexe, il y en aura alors un au plus qui possédera à son intérieur les $(k-1)$ points critiques tels que soit vérifiée la condition nécessaire et suffisante pour que ce domaine soit identique au domaine total de convergence vers le point limite considéré.

45. Une autre conséquence non moins intéressante se tire de l'étude précédente. Si, *a priori*, on vérifie que l'un des points limites a un *domaine de convergence total identique à son domaine de convergence immédiat* [ce qui se fera, en général, en déterminant les points critques de $\psi(z)$ qui sont intérieurs au domaine immédiat considéré], on peut affirmer, s'il existe d'autres points limites à convergence régulière, que les domaines immédiats de convergence vers chacun de ces autres points limites *sont tous simplement connexes.*

46. Il n'est pas difficile non plus de tirer des considérations précédentes ce fait que le *domaine immédiat* $\mathfrak{R}$ *de convergence vers un point limite* ζ *ne peut être multiplement connexe sans avoir un ordre de connexion infini* (¹). On a vu en effet que, si (C_{-i}) est la première aire antécédente de l'aire (C), qui détermine dans la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann (S_{-i}), multiplement connexe, contenant le point ζ du feuillet supérieur, la seule ligne de croisement L entre le $p^{\text{ième}}$ et le $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet peut toujours être supposée *intérieure* à (S_{-i}). L'aire $(C_{-(i+1)})$, antécédente de (C_{-i}), sera donc limitée par autant de contours distincts que (S_{-i}) aura elle-même de contours distincts. Donc l'aire $(C_{-(i+1)})$ aura au moins deux contours distincts dont évidemment aucun ne traversera la ligne de croisement L, puisque tous ces contours sont extérieurs à (C_{-i}), l'aire $(C_{-(i+1)})$ contenant (C_{-i}) à son intérieur. Si alors on considère la surface de Riemann $S_{-(i+1)}$ qui est formée des points de $\mathfrak{R}$ projetés à l'intérieur de $(C_{-(i+1)})$ qu'on peut unir à ζ du feuillet

(¹) C'est là une propriété qui est vraie de tout domaine R d'un seul tenant limité par l'ensemble E'. Un tel domaine, s'il est multiplement connexe, a une connexion d'ordre infini. En effet, l'existence d'une courbe Γ fermée, dont tous les points sont intérieurs à R et dont l'intérieur et l'extérieur contiennent chacun des points de E' (ceci équivaut à dire que R n'est pas simplement connexe), entraîne *l'existence d'une telle courbe dans toute aire, si petite soit-elle, entourant un point frontière de* R d'où suit la propriété énoncée, car une telle aire a toujours une itérée qui contient à son intérieur Γ ainsi que l'aire finie limitée par Γ [il ne peut y avoir exception que pour les fractions banales $z_1 - a = (z-a)^K$,

$$z_1 - a = \frac{1}{(z-a)^K}$$

pour lesquelles la question ne se pose pas; pour les polynomes, le point exceptionnel rejeté à l'infini ne gêne pas]. On a d'ailleurs vu (p. 101, note 2) que E' ne pouvait être formé de plusieurs continus linéaires distincts sans point commun deux à deux, ce qui équivaudrait à une connexion d'ordre fini.

supérieur par un chemin continu tracé sur $\mathcal{R}$ et se projetant à l'intérieur de $(C_{-(i+1)})$, il est visible que chacun des contours de $(C_{-(i+1)})$ donnera naissance au moins à deux contours de $S_{-(i+1)}$ projetés sur le contour considéré de $(C_{-(i+1)})$. En effet, z décrivant un contour de $(C_{-(i+1)})$, $\psi(z)$ supposé partie d'une des p déterminations qui correspondent aux p premiers feuillets de $\mathcal{R}$ n'échangera la détermination initiale qu'avec une autre des p déterminations précédentes sans jamais faire passer à la détermination qui correspond au $(p+1)^{\text{ième}}$ feuillet, ni aux suivants; donc $S_{-(i+1)}$ a un premier contour limite projeté sur le contour considéré de $(C_{-(i+1)})$ et tracé sur tout ou partie des p premiers feuillets de $\mathcal{R}$. Mais, $S_{-(i+1)}$ ayant des points intérieurs dans le $p+1^{\text{ième}}$ feuillet, et plus généralement dans les p' feuillets qui suivent les p premiers, le même raisonnement que précédemment, fait sur le même contour de $(C_{-(i+1)})$, en substituant les p' déterminations de $\psi(z)$ qui suivent les p déjà considérées à ces p déterminations, prouvera que $S_{-(i+1)}$ a aussi un deuxième contour limite projeté sur le même contour de $(C_{-(i+1)})$ et tracé sur tout ou partie des p' feuillets de $\mathcal{R}$ qui suivent les p premiers. La conclusion est que $S_{-(i+1)}$ aura au moins 2^2 contours ainsi que $(C_{-(i+2)})$. En continuant le même raisonnement, on verra que $S_{-(i+l)}$ aura au moins 2^{p+1} contours, ainsi que $(C_{-(i+p+1)})$; tous ces contours sont extérieurs deux à deux (1), $(C_{-(i+p+1)})$ est l'aire d'un seul tenant limitée par tous ces contours et contenant ζ à son intérieur. R, limite de (C_{-n}) pour $n=\infty$, a donc un ordre de connexion infini.

On a déjà rencontré des exemples de ce fait (*Voir* Fatou, *Comptes rendus*, 15 octobre 1906), et l'on en a rappelé dans la première partie (*voir* p. 58). C'est ainsi que pour $z_1 = 2z^k + 1$, le domaine de convergence vers le point à l'infini est d'une connexion d'ordre infini, il est limité par les points de l'ensemble parfait discontinu E' : c'est un cas où les contours limites envisagés précédemment tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions, quand p devient infini; il n'y a alors qu'un seul point limite à convergence régulière. Mais je donnerai plus loin un exemple avec plusieurs points limites à convergence régulière, l'un d'eux ayant un domaine immédiat, dont la connexion est d'ordre infini, limité par

(1) Dans le plan des z, il peut y en avoir un qui contient tous les autres, mais sur la sphère de Riemann ceci n'a pas lieu.

une infinité de *courbes*, et non plus seulement par un ensemble discontinu de *points*.

47. *Exemples.* — J'en donnerai de trois sortes : d'abord, sur un exemple particulier, j'étudierai le mode de génération et de groupement des domaines $R, R_{-1}, \ldots$ rencontrés au cours de l'étude précédente; puis je montrerai que l'application de la règle de Newton, pour la recherche des racines d'un polynome quelconque de degré > 2, conduit immédiatement aux circonstances précédentes, ce qui explique l'insuccès de la tentative de Cayley, quand il a voulu délimiter le plan en diverses régions suivant la racine du polynome, à laquelle conduit l'application de la règle de Newton en partant d'un point quelconque de la région considérée [1]. Il avait très bien réussi, et nous le montrerons, pour les équations du deuxième degré, à diviser le plan en deux régions contenant chacune une racine à laquelle conduit par approximations successives la méthode de Newton en partant d'un point quelconque de cette région ; nous verrons que la solution ne peut être aussi simple pour les degrés > 2, le domaine de convergence total vers une racine pouvant alors se composer d'une infinité d'aires séparées.

Enfin, je donnerai l'exemple d'un domaine immédiat multiplement connexe qui n'est pas limité uniquement par un ensemble parfait discontinu de *points*.

48. *Premier exemple.* — Considérons le polynome

$$z_1 = \frac{-z^3+3z}{2} = \varphi(z).$$

Il y a trois points limites à convergence régulière :

1° $z=1$, $\varphi'(1)=0$.

2° $z=-1$, $\varphi'(-1)=0$.

3° $z=\infty$, comme pour tout polynome.

L'équation $z=\varphi(z)=\dfrac{-z^3+3z}{2}$ admet encore la racine $z=0$ pour laquelle $\varphi'(0)=\dfrac{3}{2}$: elle appartient à l'ensemble E.

---

(1) *Voir* Kœnigs, *Annales de l'École normale*, 1884, Supplément, p. 40 et 41. — Cayley, *C. R. Acad. Sc.*, t. CX, 1890, p. 215-218. Il dit, en concluant : « J'espère appliquer cette théorie au cas d'une équation cubique, mais les calculs sont beaucoup plus difficiles. » Il n'a pas poussé la question plus loin.

Du calcul de $\varphi'(z) = \frac{3(1-z^2)}{2}$, il suit que les points qui annu ent $\varphi'(z)$ sont $z = 1$ et $z = -1$; ils sont à eux-mêmes leurs conséquents.

Les points critiques de $\psi(z)$, l'inverse de $\varphi(z)$ sont donc au nombre de trois.

1° Le point $z = 1$ autour duquel se permutent deux branches de $\psi(z)$ qui sont égales à 1 pour $z = 1$ [car $\varphi'(1) = 0$ et $\varphi''(1) \neq 0$].

2° Le point $z = -1$ autour duquel se permutent deux branches de $\psi(z)$ qui sont égales à (-1) pour $z = -1$ [car $\varphi'(-1) = 0$, $\varphi''(-1) \neq 0$].

3° Le point $z = \infty$, autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$, qui toutes trois deviennent infinies pour $z = \infty$.

On peut affirmer de suite qu'*en dehors des trois points limites à convergence régulière cités plus haut, il n'y a ni autre point limite, ni groupe circulaire limite*. Car chacun des trois points limites à convergence régulière $(\infty, 1, -1)$ aura dans son domaine immédiat un point critique de $\psi(z)$ $(\infty, 1, -1)$ et puiqu'il n'y a que trois points critiques, il ne peut y avoir ni quatrième point limite à convergence régulière, ni d'autre groupe circulaire limite.

Cherchons à former les domaines de convergence immédiats de chacun des points $1, -1, \infty$. Il suffit de considérer 1 et ∞, car le domaine de (-1) sera symétrique de celui du point 1 par rapport à l'origine, à cause de l'imparité du polynome $\varphi(z) = \frac{-z^3+3z}{2}$:

$$\varphi(z) = -\varphi(-z),$$

donc à deux points symétriques par rapport à O correspondent deux conséquents symétriques par rapport à O.

Pour le point $z = \infty$, on peut partir du cercle C de centre O de rayon $\rho = |z| = 3$. Si z est un point quelconque tel que $|z| > 3$, on aura

$$|z_1| \geqq \frac{|z|^3 - 3|z|}{2} \geqq 3|z|.$$

et par suite le domaine (C) limité par $|z| = 3$ contenant le point à l'infini [1] est tout entier intérieur au domaine de convergence immédiat vers ∞.

---

[1] Ce domaine (C) n'est autre que l'extérieur du cercle C, au sens ordinaire du mot, en comprenant dans (C) le point à l'infini.

Cherchons les antécédents successifs du domaine (C) pour avoir le domaine immédiat de convergence vers ∞. Si z décrit l'intérieur du domaine (C), ses trois antécédents décrivent l'intérieur d'un domaine (C_{-1}) contenant le point à l'infini, ainsi que (C), et limité par une seule courbe algébrique simple C_{-1} antécédente de C. Si z décrit C_{-1} une fois dans le sens positif, z_1 décrira C trois fois dans le sens positif; tout ceci résulte du simple fait que $z = \infty$ est un point critique autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$ fonction inverse de $\varphi(z)$, et c'est le seul point critique contenu dans (C). La courbe C_{-1} se définit très simlement par l'équation

$$\left|\frac{-z^3+3z}{2}\right| = 3.$$

Elle entoure les deux points -1 et $+1$, et les sépare du cercle C (1). z décrivant l'intérieur du domaine (C_{-1}) ses trois antécédents décriront l'intérieur d'un domaine (C_{-2}) qui contient (C_{-1}) et qui est limité par une courbe algébrique simple C_{-2} antécédente de C_{-1}. C_{-2} entoure les deux points -1 et $+1$ et les sépare de la courbe C_{-1}. On continuera indéfiniment ainsi. Toutes les aires antécédentes successives (C), (C_{-1}), $C_{-2})$, ... sont des aires simplement connexes chacune est contenue dans les suivantes; et contient le point à l'infini. (C_{-i}) est limitée par une courbe algébrique simple C_{-i} qui entoure les points (-1) et $+1)$ et les sépare des courbes $C_{-(i-1)}$, ..., C. La limite de (C_{-i}) pour $i = \infty$ est un domaine R_∞, simplement connexe, contenant le point à l'infini, laissant à son *extérieur* les points -1 et $+1$ (ainsi que des cercles assez petits ayant pour centres ces deux points), tel que toute courbe fermée simple intérieure à R_∞, ou bien entoure les deux points -1 et $+1$, ou bien n'en entoure aucun, les laissant tous deux à son extérieur, mais ne sépare jamais -1 de $+1$ (2). N'insistons par pour le moment sur la nature de la frontière de R_∞, nous verrons plus loin que c'est en effet *une courbe continue ayant des points multiples denses partout sur elle-même.* Sachons seulement,

(1) C'est-à-dire qu'on ne peut aller du point 1, par exemple, à un point de C sans traverser C_{-1}.

(2) Cette propriété résulte du fait que toute courbe fermée intérieure à R est, à partir d'un certain rang, intérieure à tous les domaines (C_{-i}) pour chacun desquels la propriété en question est évidente.

ce qui résulte immédiatement des faits précédents, que cette frontière est un continu séparant tout point intérieur à R_∞ des points (-1) et $+1$. Le point à l'infini étant point critique autour duquel se permutent les trois branches de $\psi(z)$, l'aire R_∞ coïncide avec toutes ses antécédentes : c'est à la fois le domaine immédiat et le domaine total de convergence vers le point à l'infini.

Il est bon de remarquer que tout point de l'axe imaginaire (excepté l'origine) est intérieur au domaine R_∞ ; il suffit pour s'en assurer de remarquer que si l'on pose $z = i\lambda$, $z_1 = i\lambda_1$, λ étant réel, λ_1 le sera aussi et l'on aura

$$\lambda_1 = \frac{\lambda^3 + 3\lambda}{2};$$

tout point de l'axe imaginaire a donc tous ses conséquents sur cet axe, et ces conséquents tendent régulièrement vers le point à l'infini, car on a toujours $|\lambda_1| > \frac{3}{2}|\lambda|$ dès que $\lambda \neq 0$.

L'origine est un point frontière (¹) de R_∞, c'est un *point multiple* de cette frontière, car on peut atteindre ce point O, en restant dans R_∞ (²), par le côté positif et par le côté négatif de l'axe imaginaire, et il est impossible de joindre un point infiniment voisin de O situé sur le demi-axe imaginaire positif à un point infiniment voisin de O situé sur le demi-axe imaginaire négatif par un chemin infiniment petit qui ne sorte pas de R_∞. (Un tel chemin doit en effet couper l'axe réel en un point infiniment voisin de O, et l'on verra que les points de l'axe réel, aux environs de O, sont extérieurs à R_∞.)

L'axe imaginaire tout entier, sauf l'origine, appartenant à R_∞, il en sera de même de toutes les courbes antécédentes de cet axe (il est confondu avec toutes ses conséquentes). Les antécédentes d'ordre 1 sont : cet axe lui-même et, en outre, une hyperbole dont l'équation se tire de

$$\mathcal{R}\left[\frac{-z^3 + 3z}{2}\right] = 0,$$

(¹) C'est un point de E, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| > 1$.

(²) L'origine est donc un point frontière de R_∞ *accessible par l'intérieur de* R_∞ (*voir* Préliminaires, § 4).

en posant $z = x + iy$. Cette hyperbole a pour équation

$$x^2 - 3y^2 - 3 = 0.$$

Elle passe par les deux points $x = \pm\sqrt{3}$ de l'axe réel qui sont les deux antécédents de l'origine distincts de O. Ces deux points sont des points frontières de R_∞, tous les autres points de l'hyperbole sont intérieurs à R_∞.

Les antécédentes successives de cette hyperbole seront aussi des courbes intérieures à R_∞. L'axe imaginaire et l'axe réel sont axes de symétrie pour R_∞, puisque à deux points symétriques par rapport à Ox ou à Oy la transformation $z_1 = \frac{-z^3 + 3z}{2}$ fait correspondre deux points symétriques par rapport à Ox ou à Oy. Donc (au sens de la théorie des images par rapport à une courbe algébrique), toutes les courbes antécédentes de l'axe imaginaire ou de l'axe réel sont des axes de symétrie de R_∞ puisque à deux points de R_∞ symétriques par rapport à Oy, ou à Ox, correspondent, par la transformation $z_1 = \psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, deux antécédents symétriques par rapport à l'antécédente considérée de Oy ou de Ox. Toutes ces courbes antécédentes successives de l'axe imaginaire couperont l'axe réel à angle droit (l'axe réel coïncide avec une de ses propres courbes antécédentes), comme l'axe imaginaire lui-même, en des points qui seront tous les antécédents successifs réels de l'origine et qui sont des points frontières de R_∞. Ce seront des courbes algébriques dont les degrés iront constamment en croissant. Elles passent toutes par le point à l'infini qui coïncide avec tous ses antécédents. Dans le plan complet (ou sur la sphère de Riemann) elles sont à considérer comme des courbes fermées ayant le point à l'infini comme point multiple. Ainsi l'hyperbole $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$ est à considérer comme une courbe fermée ayant pour point double le point à l'infini, les tangentes de ce point double (asymptotes), jointes à l'axe imaginaire (qui est aussi une courbe antécédente de l'axe imaginaire), étant régulièrement disposées en étoile autour du point à l'infini; ces tangentes (asymptotes de l'hyperbole) font en effet des angles de 60° entre elles et avec l'axe imaginaire. Tout ceci résulte de ce que l'axe imaginaire, dont on prend les antécédentes, passe par le point critique $z = \infty$ de $z_{-1} = \psi(z)$ autour duquel les *trois branches de* $\psi(z)$ *se permutent* et il est inutile d'insister plus longuement là-dessus. Ajoutons que les *antécédents successifs de l'origine* sont tous points frontières de R_∞ et sont *partout denses sur la frontière de* R_∞. Ils sont tous, comme l'origine elle-même, *points multiples de cette frontière* ([1]), et c'est là un fait remarquable qu'on a signalé plus haut. On a vu d'ailleurs, au début de ce Mémoire, que les points frontières d'un domaine comme R_∞ sont des points de E'; d'autre part tout point de E', étant limite pour les antécédents d'un point arbitraire du plan (sauf l'infini) et en particulier d'un point intérieur à R_∞, devra être point frontière de R_∞, puisque les antécédents successifs d'un point intérieur à R_∞, étant tous intérieurs à R_∞, tout point limite pour ces antécédents devra être limite de points intérieurs à R_∞. *La frontière de* R_∞ *épuise donc tout l'ensemble* E' *auquel donne naissance la raction frationnelle*

$$z_1 = \frac{-z^3 + 3z}{2}.$$

Ceci, on le verra, est la source d'apparents paradoxes qui résultent de notre intuition élémentaire de la frontière d'un domaine sous forme de courbe simple, dès qu'on éclaircit la nature des domaines de convergence vers les points (-1) et $(+1)$. Tous ces paradoxes s'expliquent d'ailleurs parfaitement dès qu'on remarque, ainsi que je l'ai fait précédemment avec insistance, que la frontière de R_∞ renferme des *points multiples* partout denses sur elle-même.

Si l'on étudie l'axe réel, on voit bien facilement que seules appartiennent à R_∞ les deux demi-droites de cet axe qui vont de $(+\sqrt{5})$ à $(+\infty)$ et de $(-\sqrt{5})$ à $(-\infty)$.

Les points $+\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$ forment d'ailleurs un groupe circulaire appartenant à l'indice 2. Ils appartiennent à E, car ils satisfont à

$$z = \varphi_2(z) \qquad \text{avec} \qquad |\varphi'_2(z)| > 1.$$

Ils sont points frontières de R_∞. Dès que $|z| > \sqrt{5}$ on a, en effet, $|z_1| > |z|$ et les conséquents d'un point du demi-axe $(+\sqrt{5}, +\infty)$, par exemple, tendent régulièrement sur cet axe vers $+\infty$.

([1]) Et, comme l'origine, ils sont points frontières de R_∞ *accessibles par l'intérieur de* R_∞ : on les atteint par exemple en suivant une courbe antécédente de l'axe imaginaire.

49. Passons maintenant au point $z = 1$ pour déterminer son domaine de convergence immédiat R_1. Nous partirons pour cela d'un petit cercle Γ de centre $z = 1$ dont les antécédentes successives embrasseront un domaine contenant $z = 1$ de plus en plus grand et tendant vers R_1. Ce cercle Γ devra être tel, nous le savons, que, si z décrit son intérieur, le conséquent z_1 devra rester dans une aire *complètement intérieure à* Γ.

Si ρ_0 est le rayon de Γ on devra avoir, dès que $|z - 1| \leqq \rho_0$,

$$|z_1 - 1| < K|z - 1|,$$

K étant entre 0 et 1.

Or il est facile d'avoir la relation

$$z_1 - 1 = \frac{-(z-1)^3 - 3(z-1)^2}{2}.$$

Si $|z - 1| = \rho$, on a

$$\rho_1 = |z_1 - 1| < \frac{\rho^3 + 3\rho^2}{2}.$$

Pour que $\rho_1 < \rho$, il suffit que $3\rho + \rho^2 < 2$, c'est-à-dire

$$0 \leqq \rho < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}.$$

Si donc on choisit ρ_0 positif et $< \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$, par exemple $\rho_0 = \frac{1}{2}$, on est sûr que pour $|z - 1| < \rho_0$, on aura

$$|z_1 - 1| < K|z - 1|.$$

K étant entre 0 et 1.

Imaginons que z décrive l'intérieur (Γ) de Γ; alors la branche de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, qui présente en $z = 1$ un point critique simple, décrira l'intérieur d'une aire (Γ_{-1}) antécédente de (Γ), comprenant (Γ) à son intérieur. Γ_{-1} est la courbe limite de (Γ_{-1}) [1]. Si z est dans (Γ), il y a deux de ses antécédents et deux seulement dans (Γ_{-1}), ce sont les deux antécédents qui se permutent quand z fait un tour autour du point $z = 1$. Si l'on imagine deux feuillets superposés et ramifiés l'un à l'autre en $z = 1$ et l'aire à deux feuillets simplement connexe Σ découpée dans ces deux feuillets par Γ, contenant

---

[1] Γ_{-1} est évidemment une courbe algébrique simple fermée entourant $z = 1$. Elle rencontre l'axe réel à angle droit, comme Γ lui-même.

$z = 1$ et limitée par Γ deux fois parcouru, l'aire (Γ_{-1}) sera l'aire simple du plan analytique que décrira le point $z_{-1} = \psi(z)$ lorsque z décrira l'aire Σ [$\psi(z)$ est en effet uniforme sur Σ et ne prend qu'une fois chacune de ses valeurs dans Σ]. Γ ne rencontrant pas l'axe imaginaire Oy, Γ_{-1} *ne le rencontrera pas non plus*. Il est bon de remarquer encore que, lorsque z décrira (Γ), le troisième antécédent de z décrira une aire simple à un seul feuillet entourant le point $z = -2$ (qui est antécédent de $z = 1$) et limitée par une courbe algébrique simple fermée, *sans point commun avec* Oy, entourant $z = -2$.

La suite du processus est immédiate; z_{-1} décrivant l'intérieur de (Γ_{-1}), deux de ses antécédents z_{-2} décriront l'intérieur d'une aire simple (Γ_{-2}) limitée par une courbe algébrique fermée Γ_{-2}, sans point commun avec Oy, entourant Γ_{-1}; le troisième antécédent décrira une aire simple limitée par une courbe algébrique fermée, sans point commun avec Oy, entourant le point $z = -2$. Il est à peine besoin de remarquer que toutes les aires (Γ), (Γ_{-1}), (Γ_{-2})... successives que l'on construira ainsi seront toutes *intérieures* au cercle C de rayon $\rho = 3$, de centre O qui a servi de point de départ dans la construction de R_x. Toutes ces aires seront dans la région intérieure à ce cercle, limitée par Oy, qui contient $z = 1$, c'est-à-dire dans la moitié *droite* de l'aire limitée par le cercle. Quant aux régions que décrirait le troisième antécédent de z, lorsque z décrit une des (Γ_{-i}), elles sont toutes dans la moitié *gauche* de l'aire limitée par C, et jamais elles n'auront de point commun ni avec Oy ni avec les aires (Γ_{-i}). Toutes les aires (Γ_{-i}) sont simplement connexes; leur limite, pour $i = \infty$, qui est le domaine de convergence immédiat R_1 vers $z = 1$, est donc une *aire simplement connexe* contenant $z = 1$, située dans la moitié droite de l'aire limitée par C. On reconnaît immédiatement que la portion d'axe réel comprise entre l'origine et le point d'abscisse $+\sqrt{3}$ appartient à R_1, les points O et $\sqrt{3}$ eux-mêmes sont frontières pour R_1 [$+\sqrt{3}$ est d'ailleurs antécédent de l'origine]. O est d'ailleurs le seul point où la frontière de R_1 touche l'axe imaginaire Oy.

30. Le domaine R'_1 symétrique de R_1 par rapport à l'origine est le domaine de convergence immédiat vers $z = -1$. Il contient le segment $(O, -\sqrt{3})$ de l'axe réel. La frontière de R_1 comme celle de R'_1 appartiennent à E'. Sur ces frontières les antécédents de l'origine sont partout denses, mais alors que l'origine, considérée comme point frontière de R_∞, était point multiple de cette frontière, il ne semble pas *a priori* qu'elle soit point multiple de la frontière de R_1 ou de R'_1. Cela tient à ce que les courbes C_{-i}, entourant l'origine, dont la limite donnait la frontière de R_∞, tendaient à admettre l'origine (et tous ses antécédents) comme point double,

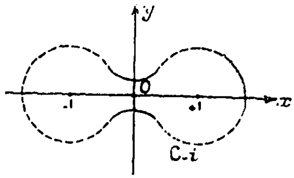

Fig. 17.

c'est-à-dire que deux arcs distincts de C_{-i}, symétriques par rapport à l'origine, séparés l'un de l'autre par une longueur finie de courbe, deux arcs, non infiniment voisins *sur la courbe*, tendaient tous deux vers O lorsque i grandissait indéfiniment, tandis qu'il ne semble pas *a priori* que sur (Γ_{-i}) deux arcs distincts, non infiniment voisins sur cette courbe, tendent tous deux vers O, puisque les (Γ_{-i}) *n'entourent pas l'origine* et n'atteignent pas Oy (1).

R_1 et R'_1 se touchent en leur point frontière commun O, et en ce point seulement. R_1 et R'_1 touchent le domaine R_∞ en O, comme en tous leurs points frontières, puisque tous ces points étant de E',

---

(1) Voici d'ailleurs une démonstration rigoureuse de ce fait que O, comme d'ailleurs tout point de la frontière de R_1 (ou de R'_1) qui est accessible par l'intérieur de R_1 (ou de R'_1), est *point simple* pour cette frontière. Prenons O par exemple; si c'était un point multiple pour la frontière de R_1, il existerait une ligne simple L fermée (ligne de Jordan) passant en O, dont chaque point distinct de O soit *intérieur* à R_1, et qui ne pourrait se réduire au seul point O par un mouvement continu sans rencontrer un point frontière au moins de R_1 distinct de O (c'est là la définition des points multiples d'une frontière); c'est dire que cette ligne contiendrait *à son intérieur* (on sait très bien qu'une ligne de Jordan divise le plan en une région intérieure et une région extérieure) un point Q, au moins, frontière de R_1. Ce point Q serait point de E', il serait donc point frontière de R_∞, car E' est identique à la frontière de R_∞. Il y aurait donc, *dans tout voisinage de* Q, des points *intérieurs* à R_∞. Il existerait donc dans la région intérieure à L une infinité de points intérieurs à R_∞. J'en prends un au hasard Q'. Prenant d'autre part un point Q'' intérieur à R_∞, et qui soit sûrement extérieur

appartiennent à la frontière de R_∞ (¹). Il faut maintenant déterminer les domaines de convergence totaux D_1 et D'_1 vers les points $z=1$ et $z=-1$.

31. Si z est dans R_1, deux de ses antécédents sont dans R_1, le troisième décrit une aire simplement connexe que je désigne par $R_1^{(-1)}$, entourant le point $z=-2$, contenant à son intérieur un petit segment de l'axe réel, débutant à $z=-\sqrt{3}$, segment qui est antécédent réel du segment $(0, +\sqrt{3})$, du même axe. R_1^{-1} n'accède par aucun point à l'axe Oy, car R_1 n'y accède que par le point O, dont les antécédents sont O, $(+\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3})$; il est tout entier à gauche de Oy, il n'a pas de point commun, même frontière, avec R_1, et il touche R'_1 au point $z=-\sqrt{3}$ et en ce point seulement. $R_1^{(-1)}$ est intérieur au cercle C. Lorsque z décrira $R_1^{(-1)}$, chacun de ses trois antécédents est fonction analytique de z dans $R_1^{(-1)}$ et décrit par suite une aire simple à un seul feuillet simplement connexe : ces trois aires sont complètement extérieures les unes aux autres, elles sont extérieures à $R_1^{(-1)}$, à R_1, et à R'_1, je les appelle les aires $R_1^{(-2)}$; l'une d'elles contient un petit segment de l'axe réel positif antécédent réel du segment de l'axe réel négatif qui traverse $R_1^{(-1)}$; ce segment est séparé du segment $(0, +\sqrt{3})$ par le segment symétrique par rapport à O du segment négatif qui traverse $R_1^{(-1)}$, le segment séparatif est d'ailleurs intérieur à l'aire $R_1'^{(-1)}$ antécédente de R'_1, comme $R_1^{(-1)}$ est antécédente de R_1. Le processus est indéfini. On définit de proche en proche les aires $R_1^{(-3)}$ décrites par les antécédents de z lorsque z décrit les $R_1^{(-2)}$. Ces $R_1^{(-3)}$ sont simplement

---

à L, par exemple un point extérieur au cercle C $[|Z|>3]$, il serait impossible de joindre Q' et Q'', tous deux *intérieurs à* R_∞, par une ligne simple sans rencontrer L (en un point intérieur à R_1, donc extérieur à R_∞) ou sans passer par O (point frontière de R_∞). Ceci est absurde puisque Q', Q'' tous deux intérieurs à R_∞, domaine *d'un seul tenant*, doivent pouvoir être joints par une ligne simple dont tous les points soient intérieurs à R_∞. La contradiction rencontrée démontre donc que O est point simple de la frontière de R_1, et qu'il en est de même de tout point accessible de cette frontière. Le raisonnement précédent se retrouvera plus loin (p. 198 et suiv.).

(¹) C'est là qu'est le paradoxe apparent : La frontière de R_1 est une partie de celle de R_∞, mais sur cette partie, la frontière de R_∞ a des *points multiples* denses partout : ce sont tous les antécédents de l'origine situés sur la frontière de R_1.

connexes et n'empiètent ni sur les $R_1^{(-2)}$ ni sur $R_1^{(-1)}$ ni sur R_1. On définit de même les $R_1'^{(-2)}$, les $R_1'^{(-3)}$, ... symétriques des $R_1^{(-2)}$, $R_1^{(-3)}$, ..., par rapport à O. Toutes les aires ainsi définies sont extérieures deux à deux et ne peuvent se toucher qu'en des points frontières.

L'ensemble des R_1, $R_1^{(-1)}$, $R_1^{(-2)}$, ..., constitue le domaine de convergence total vers $+1$, et l'ensemble des R_1', $R_1'^{(-1)}$, $R_1'^{(-2)}$, ..., le domaine de convergence total vers (-1). Tout point frontière d'un $R_1^{(-i)}$ ou d'un $R_1'^{(-i)}$ est point de E', il est point frontière de R_∞, en sorte que R_∞ touche tous les $R_1^{(-i)}$ et tous les $R_1'^{(-i)}$ en tous leurs points frontières. On voit bien de quelle étrange espèce est ce continu E' qui limite R_∞ et tous les $R_1^{(-i)}$ et $R_1'^{(-i)}$, il porte des points multiples denses partout sur lui-même, et divise le plan en une infinité de régions. L'axe réel, par exemple, coupe E' en une infinité de points qui sont tous les antécédents réels de l'origine, auxquels il faut joindre l'ensemble des deux points $(+\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ qui sont points limites de ces antécédents réels.

52. Si l'on suit l'axe réel Ox vers la droite, on traverse d'abord R_1 le long du segment $(0, +\sqrt{3})$, puis on traverse $R_1'^{(-1)}$, puis une $R_1^{(-2)}$, puis une $R_1'^{(-3)}$, puis une $R_1^{(-4)}$, etc.; suivant une loi évidente, les segments ainsi décrits décroissent constamment et ont $(+\sqrt{5})$ pour point limite. Puis, dépassant $(+\sqrt{5})$, on entre dans R_∞. Si l'on suit Ox' (axe réel vers la gauche) on traverse R_1', $R_1^{(-1)}$, $R_1'^{(-2)}$, $R_1^{(-3)}$, $R_1'^{(-4)}$, etc. Il serait facile également de voir que les antécédents de l'axe réel traversent une infinité de régions successives appartenant alternativement aux domaines totaux de $z = 1$ et de $z = -1$, puis entrent dans R_∞. Les régions $R_1^{(-i)}$ et $R_1'^{(-i)}$ tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions, lorsque i augmente indéfiniment. On s'en rend compte immédiatement en remarquant qu'à l'extérieur des cercles Γ et Γ' de centres $(+1)$ et (-1) de rayons $\rho = \frac{1}{2}$ la valeur de $\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \frac{3}{2}|1 - z^2|$ est $> M$, M étant un nombre > 1.

En effet, sur Γ et sur Γ', on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \frac{3}{2}|1 - z|\,|1 + z| \geqq \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} = \frac{9}{8},$$

et évidemment la courbe

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = 1 = \frac{3}{2}|1 - z|\,|1 + z|$$

sera une courbe algébrique, formée de deux ovales de Cassini entourant respectivement les points (-1) et $(+1)$ où $\frac{dz_1}{dz} = 0$. Donc sur Γ, Γ' et à l'extérieur, on a

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| \geq \frac{9}{8} > 1.$$

D'autre part, aucune des $R_1^{(-i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ ni des $R_1'^{(-i)}$ ne renferme de point critique de $\psi(z)$. Donc dans les $R_1^{(-i)}$ comme dans les $R_1'^{(-i)}$, $\psi(z)$ est holomorphe. Ces $R_1^{(-i)}$ et $R_1'^{(-i)}$ sont toutes extérieures aux cercles Γ et Γ' qui sont dans R_1 et R_1'. Donc dans tout $R_1^{(-i)}$

$$\left|\frac{d\psi_1(z)}{dz}\right| < \frac{8}{9},$$

comme dans tout $R_1'^{(-i)}$. Si donc S est l'aire [1] couverte par $R_1^{(-1)}$, celle couverte par chacune des $R_1^{(-2)}$ sera $< \left(\frac{8}{9}\right)^2$ S, et celle couverte par chacune des $R_1^{(-i)}$ sera $< \left(\frac{8}{9}\right)^{2(i-1)}$ S. Elle tend donc vers zéro quand i augmente indéfiniment [2].

Tout point de E' est point frontière de R_∞, il est point limite de régions $R_1^{(-i)}$ et de régions $R_1'^{(-i)}$, dont l'indice i augmente indéfiniment, ou est point frontière d'une $R_1^{(-i)}$ et d'une $R_1'^{(-i)}$, ou est point frontière d'une $R_1^{(-i)}$ et limite de région $R_1'^{(-i)}$, dont l'indice i croît indéfiniment, ou bien enfin est point frontière d'une $R_1'^{(-i)}$ et limite de région $R_1^{(-i)}$ dont l'indice i croît indéfiniment.

Cela résulte de ce qu'un point de E' est limite pour les antécédents d'un point arbitraire de R_∞, d'un point de R_1, d'un point de R_1'.

35. Il est assez difficile de se représenter exactement ce que peut être ce continu E'. Mais il n'est pas impossible de s'en faire une idée à l'aide d'un processus constructif, que je vais maintenant exposer et qui montrera qu'il n'y a nulle impossibilité par exemple à ce

---

(1) Il n'est pas absurde de parler de l'aire de R_1^{-1}, car R_1, par exemple, limite pour $i = \infty$ des aires quarrables contenues chacune dans la suivante, (Γ), (Γ_{-1}), ..., (Γ_{-i}), ..., est *quarrable*. Il en est donc de même de tous les $R_1^{(-i)}$, de tous les $R_1'^{(-i)}$ et de R_∞.

(2) On montre de même que, si L est la *plus grande corde* de $R_1^{(-1)}$, la plus grande corde de $R_1^{(-i)}$ sera $\leq \left(\frac{8}{9}\right)^{i-1}$ L, et, par suite, tend vers zéro avec i.

qu'une aire $\mathcal{A}_x$, simplement connexe, soit limitée par un continu linéaire E′ ayant des points multiples partout denses sur lui-même, continu qui divise le plan en une infinité de régions dont chacune touche $\mathcal{A}_x$ par toute sa frontière; la frontière de chaque petite région étant d'ailleurs une courbe simple.

Ce qui suit n'est évidemment qu'un schéma, mais il est très propre à aider l'intuition et à expliquer ce qu'il y a de paradoxal dans le fait que la frontière de $\mathcal{A}_x$ qui est un continu linéaire, tout en

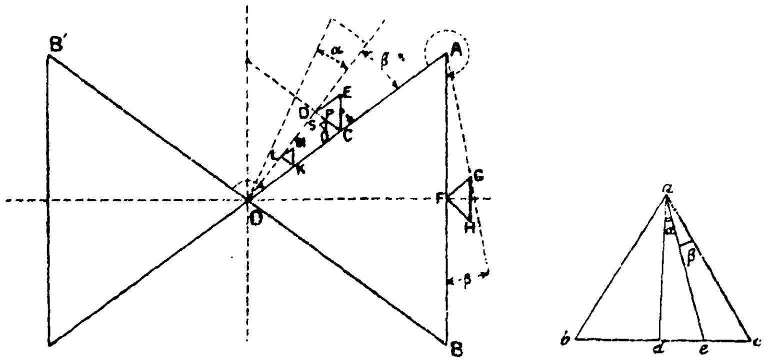

Fig. 18.

touchant la frontière de chacune des petites régions précédentes en *tous les points* de cette dernière frontière, ne *coïncide cependant pas avec elle.* J'ai puisé l'idée du processus que je vais exposer dans un beau Mémoire de M. Helge von Koch, rédacteur suédois aux *Acta Mathematica*, inséré aux *Acta* de 1906 (t. XXX) sous le titre *Une méthode géométrique élémentaire...*

34. Partons de deux triangles équilatéraux égaux opposés par un sommet. Soit a leur côté, OAB, OA′B′ les deux triangles. L'ensemble des deux fait une ligne polygonale P_1 fermée (régulière et de côté a) OABOA′B′O qui divise le plan en trois régions : 1° $\mathcal{A}_1$ intérieur de OAB; 2° $\mathcal{A}'_1$, intérieur de OA′B′; 3° région contenant x limitée par la ligne polygonale entière OABOA′B′O. O est point double pour la frontière de cette dernière région.

Au milieu de chacun des côtés de la ligne polygonale P_1 précédente, plaçons un sommet d'un triangle équilatéral de côté $\frac{a}{8}$, de côtés parallèles aux côtés de la ligne polygonale P_1; chacun de ces triangles étant d'ailleurs dans la région limitée par P_1 qui contient x.

CDE, FGH sont deux de ces triangles. L'ensemble de P_1 et des triangles ainsi construits fait une ligne polygonale fermée P_2 dont les sommets se suivent dans l'ordre OCDECAFGHFB.... P_2 divise le plan en $3+6=9$ régions, à savoir $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}'_1$, l'intérieur des six triangles qu'on vient de construire, enfin la région contenant ∞ et limitée à P_2; pour cette dernière région, la frontière, qui est P_2 tout entière, a des points multiples (doubles) en O, C, F, ... Il n'est pas inutile d'ajouter que si l'on décrit P_2 en ayant à sa gauche la région précédente (contenant ∞) les angles que font deux côtés consécutifs de la ligne P_2 (angles comptés vers l'intérieur de la région) sont de $120°$, ou $60°$, ou $300°$ ($360°$-$60°$) (Exemples : angles O, C, ou A).

55. Au milieu de chacun des côtés de la ligne P_2, nous plaçons un sommet d'un triangle équilatéral dont le côté est le $\frac{1}{8}$ *du côté considéré de la ligne* P_2, dont les côtés sont parallèles à ceux de P_2, chacun des nouveaux triangles étant situé dans la région limitée par P_2 qui contient le point à l'infini (KLM, PQS sont deux de ces triangles). L'ensemble de P_2 et des nouveaux triangles fait une ligne polygonale fermée P_3 qui, quant aux angles, a les mêmes propriétés que P_2, mais qui détermine dans le plan un nombre de régions égal à celui qui déterminait P_2 augmenté du nombre des côtés de P_2. Il est facile de voir, en effet, que *deux des nouveaux triangles construits ne peuvent avoir aucun point commun, et qu'ils sont bien tous intérieurs à la région limitée par* P_2 *contenant le point à l'infini.*

Pour la construction de P_2, cette difficulté se présentait déjà, nous allons la lever. Prenons le triangle CDE construit sur le côté OA de P_1. A cause de $CD=\frac{a}{8}=\frac{CO}{4}$, il est visible que l'angle $\widehat{COD}<30°$. (On a construit à côté de la figure un triangle équilatéral abc; $cd=\frac{1}{2}cb$ et $ce=\frac{1}{4}cb$. Il est visible que

$$\widehat{COD}=\widehat{cae}=\beta<30°.)$$

Donc le triangle CDE ne peut empiéter sur le triangle analogue construit sur OB'. Point de difficulté donc pour P_2. Pour P_3 il importe seulement de montrer que deux triangles construits sur deux côtés consécutifs de P_2, faisant entre eux un angle de $60°$ (compté intérieurement à la région limitée par P_2 contenant ∞), ne peuvent empiéter l'un sur l'autre. Par exemple, KLM et PQS construits sur les côtés OC et CD de P_2. Il est visible en effet que

$$\widehat{LOK} = \widehat{MCK} = \beta \quad \text{à cause de} \quad KL = \frac{OC}{8} = \frac{OK}{4}.$$

De même

$$\widehat{QCP} = \beta \quad \text{à cause de} \quad PQ = \frac{CD}{8} = \frac{CP}{4}.$$

Donc le triangle LKM est intérieur à l'angle $\widehat{MCO} = \beta$ et le triangle PQS est intérieur à l'angle $\widehat{PCQ} = \beta$. Ces deux angles sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{OCD}$ et sont séparés l'un de l'autre par cette bissectrice et par un angle égal à 2α ($\alpha = 30^\circ - \beta$, *voir* la figure) qu'elle bissecte. Les deux triangles en question ne peuvent empiéter l'un sur l'autre.

On a déjà vu à propos de P_2 que deux triangles construits sur deux côtés consécutifs de P_2 faisant entre eux 120° (tels les côtés issus de O) ne peuvent empiéter l'un sur l'autre. Il est visible, d'autre part, que les triangles construits sur les côtés de P_2 tels que DE ou GH ne peuvent empiéter sur les autres triangles.

Tout ceci tient en somme dans cette simple remarque : le triangle construit sur un des côtés de la ligne polygonale P_1 ou P_2 est tout entier *intérieur* à un triangle isoscèle, dont la base est ce côté, dont l'angle à la base est β. Il était donc essentiel que cet angle β fût choisi $< 30^\circ$ afin que les triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur deux côtés consécutifs de P_2 comme base, faisant entre eux un angle de 60°, fussent sûrement extérieurs l'un à l'autre et n'eussent en commun que le point d'articulation des deux côtés considérés [1].

Il est bien établi donc que P_3 limite une région d'un seul tenant, simplement connexe, contenant le point à l'infini; chacun des sommets de cette région est accessible, de l'intérieur de la région, par tout chemin situé dans un angle de 2α au moins bissecté par la bissectrice des deux côtés de P_3 qui aboutissent au sommet considéré.

---

[1] C'est à cette fin que j'ai pris le côté de chaque nouveau triangle égal au $\frac{1}{8}$ du côté de P_2 sur lequel il est construit; cela donne un $\beta < 30^\circ$, mais j'aurais pu remplacer le dénominateur 8 par tout autre nombre > 5 (car pour 4 l'angle β eût été égal à 30°). J'ai pris 8 pour la simplicité de l'exposition.

36. Le processus peut se continuer indéfiniment. Au milieu de chaque côté de P_i plaçons le sommet d'un triangle équilatéral, dont le côté sera le $\frac{1}{8}$ du côté de P_i considéré, dont les côtés seront parallèles à ceux de P_i, et qui sera situé dans la région d'un seul tenant limitée par P_i contenant le point à l'infini. Les nouveaux triangles joints à P_i donneront une ligne polygonale fermée P_{i+1}. On démontrera de proche en proche que la construction est toujours possible sans que les nouveaux triangles à chaque fois construits empiètent l'un sur l'autre ou sur les précédents déjà construits. La raison en est immédiate : si l'on considère les côtés de P_3, les nouveaux triangles qu'on construit sur eux sont intérieurs aux triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur ces côtés comme base. Les triangles isoscèles ainsi construits sur chacun des côtés de P_3 sont deux à deux extérieurs, et par suite les triangles qu'on construit pour passer de P_3 à P_4 sont deux à deux extérieurs et n'empiètent pas sur les triangles de P_3. On vérifie ensuite que les triangles isoscèles construits sur les côtés de P_4 comme base avec l'angle à la base β sont encore extérieurs deux à deux (¹). Ces triangles sont dans la région du plan d'un seul tenant limitée par P_4 et contenant l'infini, et par suite le processus peut se continuer sur P_4 comme sur P_3 pour donner P_5, etc.

37. Imaginons donc que le processus se continue indéfiniment. La ligne polygonale fermée P_i aura pour limite pour $i = \infty$ une ligne fermée continue $\mathcal{C}'$ ayant des points doubles partout denses sur elle-même (²). Ce seront les points tels que O, K, C, P, F, etc., qui évidemment sont denses sur chaque côté d'une P_i quelconque. Les triangles qu'on ajoute à P_i pour passer à P_{i+1} ont des côtés qui tendent vers zéro lorsque i croît indéfiniment. La portion du continu $\mathcal{C}'$ comprise entre deux sommets consécutifs d'une P_i est tout entière à l'intérieur du triangle isoscèle d'angle à la base β construit sur le côté de P_i unissant les deux sommets comme base. C'est immédiat. $\mathcal{C}'$ divise le plan en une infinité dénombrable de régions, qu'on

(¹) Ces triangles isoscèles étant *intérieurs* à ceux construits sur les côtés de P_3, il suffit d'examiner ce qui se passe à l'intérieur d'un des triangles isoscèles construits sur les côtés de P_3, et là encore la vérification est immédiate.

(²) Il est clair que $\mathcal{C}'$ a tous ses points à l'intérieur des triangles isoscèles d'angle à la base β construits sur les côtés des deux triangles équilatéraux initiaux comme base.

peut ranger par ordre : 1° $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}'_1$; 2° l'intérieur des triangles construits pour passer de P_1 à P_2; 3° l'intérieur de ceux construits pour passer de P_2 à P_3, etc.; enfin une région simplement connexe $\mathcal{R}_\infty$ d'un seul tenant contenant le point à l'infini, et limitée par $\mathcal{E}'$, c'est la limite de la région contenant le point à l'infini et limitée par P_i quand $i = \infty$. Tout sommet d'une ligne P_i quel que soit i est un point de $\mathcal{E}'$, un *point accessible* (1) de l'intérieur de $\mathcal{R}_\infty$, par tous les chemins compris dans un angle 2α ayant même bissectrice que la bissectrice de l'angle considéré de la ligne P_i (bissectrice dirigée vers l'intérieur de R_∞). $\mathcal{E}'$ est identique à l'ensemble dérivé de l'ensemble dénombrable formé par tous les sommets des lignes P_i ($i = 1, 2, \ldots, \infty$). Sur $\mathcal{E}'$, tout point qui est sommet d'une ligne P_i où les deux côtés de P_i font entre eux un angle de 60° (compté vers l'intérieur de $\mathcal{R}_\infty$) est un point *double* de la frontière de de $\mathcal{R}_\infty$. O est aussi point double. Les points doubles de $\mathcal{E}'$ sont denses partout sur $\mathcal{E}'$. $\left(\text{Ces sommets des } P_i \text{ jouent le rôle des antécédents de l'origine dans l'itération de } z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}.\right)$

38. Le continu linéaire $\mathcal{E}'$ que nous venons de construire jouit donc de toutes les propriétés de l'ensemble E' relatif à la fonction rationnelle

$$z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}.$$

J'ai, avec intention, affecté de lettres correspondantes les éléments qui, dans l'itération de $z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}$ et dans la construction précédente, jouaient ce même rôle : ainsi $\mathcal{E}'$ et E', $\mathcal{R}_1$ et R_1, $\mathcal{R}'_1$ et R'_1, $\mathcal{R}_\infty$ et R_∞. Quant aux triangles que les lignes polygonales P_2, P_3, ... ajoutent à la ligne P_1, on peut y voir l'analogue des domaines $R_1^{(-1)}$, $R_1'^{(-1)}$, $R_1^{(-2)}$, $R_1'^{(-2)}$, ...

Tous les points (2) de la frontière de $\mathcal{R}_1$ sont, ici aussi, des points de la frontière $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{R}_\infty$, sans que $\mathcal{E}'$ coïncide pour cela dans la région du plan considérée avec la frontière de $\mathcal{R}_1$; $\mathcal{E}'$ contient cette

---

(1) Le sens de l'expression point frontière d'un domaine *accessible par l'intérieur de ce domaine* est bien net (*voir*, par exemple, les Préliminaires).

(2) Il est évident que tout point de la frontière de $\mathcal{R}_1$ est simple sur cette frontière $\mathcal{R}_1$ puisque $\mathcal{R}_1$, est l'intérieur d'un triangle équilatéral.

dernière frontière, c'est vrai, mais sur sur cette dernière frontière, il faut bien le remarquer, car c'est essentiel, $\mathcal{E}'$ a des *points doubles* partout denses.

Je n'ai pas besoin d'insister sur la nouveauté des circonstances que cet exemple bien simple, $z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}$, a fait surgir. Il montre avec quelle précaution il faut raisonner dès qu'on ne suppose rien *a priori* dans les questions d'analyse et de théorie des fonctions. Les notions les plus subtiles relatives aux frontières des domaines plans simplement connexes, sur lesquelles récemment il a été écrit bien des Mémoires intéressants [1], surgissent naturellement, et c'est au regard des circonstances actuelles que l'on peut dire, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer plus haut, que les exemples d'itération jusqu'à ce jour traités étaient *les plus simples possibles*.

39. *Deuxième exemple.* — J'ai annoncé qu'il était d'ordre général et qu'il était fourni par l'application de la règle de Newton à une équation algébrique quelconque.

Si $f(z) = 0$ est une équation algébrique, $f(z)$ étant un polynome, on sait que la méthode de Newton pour évaluer une racine ζ de $f(z) = 0$ consiste à procéder par approximations successives à partir d'une valeur z assez voisine de ζ; le conséquent de z se définit par la relation rationnelle

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)};$$

les conséquents successifs de z sont les approximations successives, leur limite est une racine ζ de $f(z) = 0$. $f(z)$ étant un polynome quelconque, envisageons donc l'itération définie par

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \varphi(z);$$

si f est de degré k, $\varphi(z)$ est rationnelle et de degré k.

Si

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^k + \ldots \\ f'(z) &= k a_0 z^{k-1} + \ldots \end{aligned}$$

(1) *Voir* LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse*... (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, 1915), où se trouve une bibliographie complète. — *Voir* aussi MONTEL, *Sur la représentation conforme* (*Comptes rendus*, 4 juin 1917).

et

$$z_1 = \varphi(z) = \frac{(k-1)a_0 z^k + \ldots}{k a_0 z^{k-1} + \ldots}.$$

Le point $z = \infty$ est une racine infinie de $z = \varphi(z)$, c'est un point double de la transformation $z_1 = \varphi(z)$ du plan. Si on le ramène à l'origine par l'homographie auxiliaire $z = \frac{1}{Z}$, $z_1 = \frac{1}{Z_1}$, la substitution transformée de $z_1 = \varphi(z)$ est

$$Z_1 = \frac{k a_0 Z + \ldots}{(k-1)a_0 + \ldots},$$

numérateur et dénominateur étant cette fois ordonnés suivant les puissances croissantes de Z. On voit bien qu'à $Z = 0$ correspond $Z_1 = 0$. D'ailleurs, à l'origine, $\frac{dZ_1}{dZ} = \frac{k}{k-1}$, donc $\left|\frac{dZ_1}{dZ}\right|_0 > 1$. Donc l'origine est un point de l'ensemble E relatif à $Z_1 = \Phi(Z)$.

Revenant à $z_1 = \varphi(z)$, l'infini est un point de E pour cette substitution. L'équation $z = \varphi(z)$ a, en outre, k racines à distance finie, ce sont les k racines de $f(z) = 0$.

En chacune de ces racines ζ, on a

$$\frac{dz_1}{dz} = 1 - \frac{f'^2 - ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2},$$

et à cause de $f(z) = 0$, on a

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_\zeta = 0.$$

Donc les k racines de $f(z)$ sont k points limites à convergence régulière, et aussi k points critiques de la fonction algébrique inverse de

$$z_1 = \varphi(z) = z - \frac{f}{f'}$$

et aussi k points où $\frac{dz_1}{dz} = 0$. Le point à l'infini étant point ordinaire pour l'inverse de $\varphi(z)$, on voit que, outre les k racines de $f(z)$, les seuls points du plan complet qui soient critiques pour l'inverse de $\varphi(z)$ sont les conséquents des $(k-2)$ points où $f''(z) = 0$.

D'ailleurs

$$\frac{d^2 z_1}{dz^2} = \frac{f''}{f'} + \frac{ff'''}{f'^2} - 2\frac{ff''^2}{f'^3},$$

et en une racine ζ de $f(z)=0$, on a

$$\frac{d^2 z_1}{dz^2}=\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

Donc $\frac{d^2 z_1}{dz^2}\neq 0$ si, comme on peut le supposer dans le cas général, chacune des racines rend $f''(\zeta)\neq 0$.

En un point où $f''(z)=0$, on a

$$\frac{d^2 z_1}{dz^2}=\frac{ff'''}{f'^2}$$

et, dans le cas général, $\frac{d^2 z_1}{dz^2}$ sera $\neq 0$ en un tel point.

Donc, dans le cas général, les points critiques de $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ sont :

1° Les k racines de $f(z)=0$ qui sont des points critiques simples autour desquels se permutent deux branches de $\psi(z)$;

2° Les conséquents d'ordre 1 des $(k-2)$ racines de $f''(z)=0$, qui sont aussi des points critiques simples autour desquels se permutent deux branches de $\psi(z)$. Cela fait bien, si $f(z)$ est quelconque de degré k, $2k-2$ points critiques distincts pour la fonction algébrique $\psi(z)$ inverse de

$$z_1=\varphi(z)=z-\frac{f(z)}{f'(z)}.$$

60. *a*. Liquidons d'abord le cas le plus simple : celui où $f(z)$ est du deuxième degré. Si l'on désigne par ζ_1 et ζ_2 ses racines, ce sont aussi les deux seuls points critiques de l'inverse de $z_1=\varphi(z)$; dans ce cas [car $f''(z)=\text{const.}$], ce sont deux points limites à convergence régulière. On est donc dans le cas simple, traité à l'application 3° (p. 140 du présent Mémoire). Le plan doit donc se diviser en deux régions R_1 et R_2 séparées par un continu linéaire, chacune de ces régions contenant un des points limites, dont elle est le domaine de convergence total (R_1 contient ζ_1 et R_2 contient ζ_2).

Pour apercevoir tous ces résultats, il suffit de se rappeler qu'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-\zeta_1}+\frac{1}{z-\zeta_2}$$

et, par suite, la relation d'itération s'écrit

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2}, \tag{1}$$

z_1 étant le conséquent de z. De là se conclut que : *si z décrit la perpendiculaire au milieu du segment $\zeta_1\,\zeta_2$, z_1 la décrit aussi.*

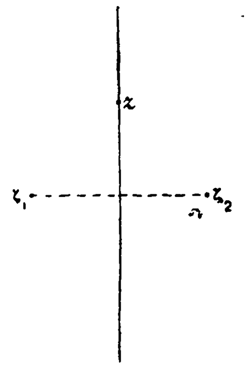

Fig. 19.

Le plus simple pour le voir est de faire une transformation homographique auxiliaire qui soit un simple déplacement du plan z et amène ζ_1 et ζ_2 à être sur l'axe réel symétrique l'un de l'autre par rapport à l'axe imaginaire; il est clair qu'on aura la même relation que (1) entre les transformés des points z, z_1, ζ_1, ζ_2.

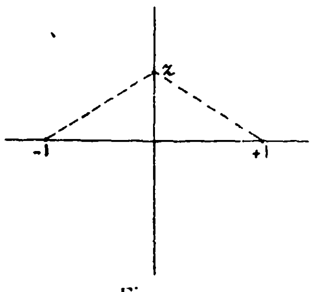

Fig. 20.

Rien n'empêche donc de supposer d'emblée ζ_1 réel positif et $\zeta_2 = -\zeta_1$. Ce n'est pas non plus diminuer la généralité que de supposer $\zeta_1 = 1$ (il suffit d'une simple homothétie auxiliaire pour y arriver). Le problème se ramène donc à étudier

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1}.$$

Alors, si z est purement imaginaire, $\frac{1}{z-1}$ et $\frac{1}{z+1}$ seront deux points symétriques par rapport à Oy. Donc leur somme sera un point de Oy. Donc $\frac{1}{z - z_1}$ sera purement imaginaire, comme z et par suite comme z_1. Donc la perpendiculaire au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$ est conservée par la relation de Newton

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Il est encore facile de prouver que chacun des demi-plans qu'elle détermine se transforme aussi en lui-même. On est donc dans le cas de ces fractions à cercle fondamental que M. Fatou considère dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus*. Le plus simple pour le voir consiste à revenir à l'expression

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

où l'on suppose $f(z) = z^2 - 1$, ainsi qu'une homographie auxiliaire qui transforme ζ_1 et ζ_2 en les points (-1) et $(+1)$ le permet assurément. Cela donne

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

et, sur cette expression, il est clair que chacun des demi-plans que détermine la perpendiculaire au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$ est transformé en lui-même par la substitution

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)} = \varphi(z);$$

chacun d'eux est le domaine de convergence total vers celui des points ζ_1 ou ζ_2 qu'il contient. Sur la frontière commune des deux domaines, qui est la perpendiculaire commune au milieu de $\zeta_1 \zeta_2$, les points racines des équations $z = \varphi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ pour lesquels $|\varphi'_n(z)| > 1$ (ensemble E) sont partout denses.

61. *b.* Si l'on revient à un polynome général $f(z)$ de degré k, la fraction

$$z_1 = \varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

admet, on l'a vu, pour points limites à convergence régulière les k racines distinctes de $f(z) = 0$. La fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ admet pour points critiques les k racines de $f(z) = 0$ et les $(k-2)$ racines de $f''(z)$ qui sont distinctes en général des précédentes. Il suit de là que $(k-1)$ *au moins des racines de* $f(z)$ *ont un domaine de convergence total formé d'une infinité d'aires* du genre de ceux considérés dans le premier exemple. Il suffit de se reporter aux remarques faites page 155 pour s'en assurer immédiatement.

62. Si, par exemple, on considère le polynome $f(z) = z(z^2 - 1)$ dont les racines sont $0, -1, +1$, on a

$$z_1 = z - \frac{z(z^2-1)}{3z^2-1} = \frac{2z^3}{3z^2-1},$$

et si l'on transforme cette substitution par l'homographie auxiliaire

$$z = \frac{1}{Z}, \qquad z_1 = \frac{1}{Z_1},$$

il vient

$$Z_1 = \frac{3Z - Z^3}{2},$$

c'est-à-dire le *premier exemple traité*, sur lequel il est par suite inutile d'insister.

Donc, en général, la division du plan en régions, qui conduisent chacune à une racine déterminée de $f(z) = 0$, sera un problème impraticable, puisque $(k-1)$ au moins des racines ayant un domaine de convergence formé d'une infinité d'aires, on serait conduit à diviser le plan en une infinité de régions. Voilà la raison de l'échec de la tentative de Cayley pour l'application de la règle aux équations de degré $\geqq 3$.

63. Citons, pour terminer, le cas de $f(z) = z^3 - a^3$.

Alors

$$z_1 = \frac{2z^3 + a^3}{3z^2} = \varphi(z).$$

Les trois racines de f, a, $a\omega$, et $a\omega^2$ $(\omega^3 = 1)$ sont trois points limites à convergence régulière et trois points critiques de l'inverse de $\varphi(z)$. Le quatrième point critique de $\psi(z)$ est évidemment le point à l'infini, car le point à l'infini a deux antécédents confondus à l'origine. C'est un point de E'. Il n'y a donc pas de groupe circulaire limite, ni d'autre point limite à convergence régulière. Le domaine immédiat de convergence vers chacun des points a, $a\omega$, $a\omega^2$, ne contiendra pas à son intérieur d'autre point critique que ce point lui-même qui permute entre elles deux branches seulement de $\psi(z)$. Donc chacun des domaines de convergence totaux vers a, $a\omega$ ou $a\omega^2$ se composera d'une *infinité de pièces*, comme dans l'exemple précédent, chacun des domaines de convergence vers -1 et $+1$. Chacun de ces domaines totaux fournit les deux autres par deux rotations successives de 120° autour de l'origine, car, évidemment, à z et $z\omega$ correspondent les conséquents z_1 et $z_1\omega$.

Le continu linéaire E', qui forme l'ensemble des frontières des domaines totaux précédents (chaque domaine *total* a évidemment pour frontière tout l'ensemble E', car tout point de E' est limite pour les antécédents successifs d'un point arbitraire pris dans chacun de ces domaines), se conserve par une rotation de 120° autour de l'origine. Par une transformation homographique simple ($z = aZ$), on ramène au cas où $a^3 = 1$. Alors, sans diminuer la généralité, on prendra

$$z_1 = \frac{2z^3+1}{3z^2}.$$

Les trois points limites sont 1, ω, ω^2.

On reconnaît *a priori* que la partie positive de l'axe réel appartient au domaine immédiat vers $(+1)$, O et ∞ étant points frontières. Cet axe réel est axe de symétrie pour le domaine considéré. On a ainsi quelques renseignements sur les domaines des points 1, ω, ω^2.

64. *Troisième exemple.* — Conformément aux considérations exposées aux pages 153-158 du présent Mémoire, montrons que le domaine immédiat de convergence vers un point limite peut être limité par un ensemble infini de *courbes* deux à deux extérieures et non seulement de points comme dans les exemples $z_1 = 2z^k + 1$ mentionnés précédemment. J'obtiendrai immédiatement un tel exemple par le procédé suivant : $z_1 = \varphi(z)$ sera un *polynome* pour lequel $\varphi'(z) = 0$ n'aura que deux racines distinctes à distance finie, o et a. Je prendrai a *réel*, et je m'arrangerai pour que le point

$z = a$ soit du domaine immédiat du point ∞; on sait que pour un polynome quelconque le point ∞ a un domaine immédiat de convergence R_∞ confondu avec le domaine total. Si a appartient à R_∞, il est clair que R_∞ ne sera pas simplement connexe, car R_∞ contiendra deux points critiques de $\psi(z)$ qui sont ∞ et le conséquent de a, et un contour décrit autour des ces deux points critiques seulement [1] ne pourra pas permuter une détermination quelconque de $\psi(z)$ avec *toutes les autres* déterminations de $\psi(z)$. En effet, la surface de Riemann $\mathcal{R}$ relative à $\psi(z)$ inverse d'un polynôme de degré k, peut être construite en prenant pour lignes de croisement entre les divers feuillets des lignes unissant les points critiques de $\psi(z)$ situés à distance finie au point ∞. Un peu de réflexion suffit alors à se rendre compte de ce que je viens d'avancer.

Si maintenant j'impose au point O d'être un point limite à convergence régulière en prenant $\varphi(0) = 0$ avec $\varphi'(0) = 0$, ce point aura un domaine immédiat R_0 de convergence simplement connexe limité par un continu linéaire qui appartiendra à la frontière de R_∞. Et il est clair que le domaine total de convergence vers zéro sera composé d'une infinité d'aires antécédentes de R_0, toutes simplement connexes évidemment, toutes extérieures à R_∞, limitées chacune par un continu linéaire. L'ensemble de tous ces continus linéaires et de leurs points limites formera la frontière de R_∞. R_∞ est ainsi limité par une infinité de continus linéaires (et leurs points limites), sans que tous les continus réunis forment un continu (on le voit d'après le mode même de génération). Entre deux points appartenant à deux de ces continus distincts, la frontière de R_∞ est mal enchaînée; on peut tracer, dans le domaine R_∞, une infinité de courbes fermées deux à deux extérieures qui contiennent à leur intérieur comme à leur extérieur une infinité de ces continus linéaires. La génération de R_∞, à partir d'un petit domaine entourant le point ∞, met tout ceci en évidence, comme pour l'exemple

$$z_1 = 2z^k + 1;$$

mais dans cet exemple-là les courbes limites des antécédentes successives de ce petit domaine tendaient vers zéro dans toutes leurs dimensions, et se réduisaient, à la limite, à un ensemble de points, dont le dérivé était l'ensemble parfait discontinu E'.

---

[1] Il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le sens de cette expression.

65. Ceci bien compris, la réalisation de l'exemple est facile. Je prends tout simplement

$$\varphi'(z) = A z^2 (z - a)^2,$$

A étant un nombre réel positif à déterminer et a un nombre positif arbitraire, mais fixe. Alors, je prendrai

$$\varphi(z) = A\left(\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right)$$

pour avoir

$$\varphi(o) = o, \qquad \varphi'(o) = \varphi''(o) = o.$$

Le point O est point limite à convergence régulière. Il faut s'arranger pour que les conséquents de a tendent vers l'infini.

La courbe $z_1 = \varphi(z)$, z et z_1 étant considérés comme des coor-

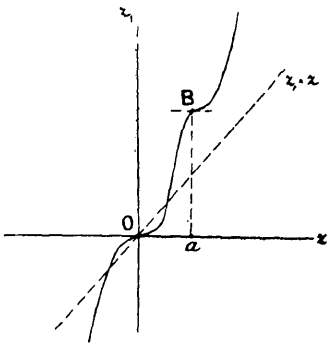

Fig. 21.

données rectangulaires d'un point à l'allure ci-contre; il suffira que la portion de courbe correspondant à la variation de z dans $(a; +\infty)$ soit tout entière *au-dessus de la bissectrice* $z_1 = z$ pour qu'on soit sûr que les conséquents de a ont des abscisses régulièrement croissantes vers $+\infty$. Or, c'est là une chose aisée : il suffira de choisir A assez grand pour que l'on ait, pour $z \geqq a > o$,

$$\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + \frac{a^2 z^3}{3} > \frac{z}{A}.$$

Or, la courbe

$$Z_1 = \frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3},$$

ayant une forme *bien déterminée* analogue à la précédente, il sera en effet toujours possible de choisir $\frac{1}{A}$ assez petit et positif pour que la droite de coefficient angulaire $\frac{1}{A}$ issue de l'origine soit tout entière au-dessous de la portion de cette courbe

$$Z_1 = \frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}$$

qui correspond à la variation de z dans $(a; +\infty)$.

66. A étant ainsi choisi,

$$z_1 = \varphi(z) = A\left[\frac{z^5}{5} - 2a\frac{z^4}{4} + a^2\frac{z^3}{3}\right]$$

aura pour points limites à convergence régulière o et ∞. Il n'y aura ni autre point $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| < 1$, ni groupe circulaire limite. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a que deux racines distinctes, o et a. $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, n'a que deux points critiques qui sont o et $\frac{Aa^5}{30}$ à distance finie.

Autour de O se permutent trois déterminations de $\psi(z)$; autour du point $z = \frac{Aa^5}{30}$ se permutent aussi trois déterminations. On peut imaginer les trois feuillets supérieurs 1, 2 et 3 ramifiés autour de $z = 0$, et les troisième, quatrième, cinquième ramifiés en $z = \frac{Aa^5}{30}$. Les cinq feuillets sont ramifiés en $z = \infty$. Les lignes de croisement peuvent être tracées de o à $-\infty$ et de $\frac{Aa^5}{30}$ à $+\infty$ sur l'axe réel. Quand on tourne autour de o dans le sens positif, on passera du premier au deuxième, puis du deuxième au troisième, puis du troisième au premier feuillet. En tournant autour de $z = \frac{Aa^5}{30}$, on passera du troisième au quatrième, du quatrième au cinquième, du cinquième au troisième, etc.

Partant d'un point du premier feuillet et décrivant dans le sens négatif un circuit qui entoure les deux points critiques, on passe sur le cinquième feuillet, etc.

67. Les cinq feuillets se ramifiant autour du point ∞, le domaine R_∞ sera à la fois domaine immédiat et domaine total de convergence vers l'infini. R_∞ est d'un seul tenant et infiniment connexe. Partant d'une courbe c qui délimite l'aire (c) entourant le point à l'infini et prenant ses antécédentes successives, l'une d'elles délimitera une région (C_{-i}) contenant l'infini et $z = \frac{A a^5}{30}$ et les antécédentes $(C_{-(i+1)}) \ldots$ seront d'un ordre de connexion de plus en plus grand. Toutes ces aires (C_{-p}) laissent o à leur extérieur. Quant à R_0, domaine immédiat de convergence vers o, il contiendra le seul point critique o de $\psi(z)$. R_0 sera simplement connexe. R_∞ laissera R_0 à son extérieur, mais aura tous les points frontières de R_0 pour points frontières. Cela résulte de ce que ces points sont points de E', et R_∞, d'un seul tenant, étant domaine total de convergence vers l'infini, la frontière de R_∞ *est identique à l'ensemble* E', puisque tout point de E', étant limite pour les antécédents successifs d'un point de R_∞, antécédents qui sont tous intérieurs à R_∞, devra être point frontière de R_∞.

68. R_0 découpe dans la surface de Riemann $\mathcal{R}$ de $\psi(z)$: 1° un morceau simplement connexe S_0 qui comprend les portions (ramifiées entre elles autour de o) des trois feuillets supérieurs qui se projettent à l'intérieur de R_0 ; 2° deux autres morceaux simplement connexes identiques à R_0 qui sont les parties des quatrième et cinquième feuillets projetés sur R_0. z décrivant R_0, trois de ses antécédents décriront R_0, les deux autres, correspondant aux quatrième et cinquième déterminations de $\psi(z)$ décriront chacun une aire simplement connexe, extérieure à R_0, ces deux aires n'ayant ni entre elles, ni avec R_0 *de point commun intérieur ou frontière.* Ce seront les aires $R_0^{(-1)}$. On pourra tracer un contour simple entourant R_0 et laissant à son extérieur les deux aires $R_0^{(-1)}$ et de même un contour entourant une des aires $R_0^{(-1)}$ et laissant l'autre et R_0 à son extérieur. Continuant ainsi, on déterminera les aires $R_0^{(-2)}$ antécédentes de $R_0^{(-1)}$, etc. Toutes ces aires $R_0^{(-i)}$ seront simplement connexes, aucune d'elles ne contiendra de point critique de $\psi(z)$. Elles sont toutes à distance finie. Elles s'agglomèrent entre elles [1] de façon que tout point frontière d'une aire $R_0^{(-i)}$, étant point de E', soit, par exemple, point limite pour les antécédents successifs des continus linéaires frontières des aires $R_0^{-(i+1)}$, $R_0^{-(i+2)}$, ..., toutes aires qui sont extérieures à l'aire $R_0^{(-i)}$ envisagée. Il n'est pas

---

[1] Par un processus analogue à celui suivant lequel se groupent les points d'un ensemble parfait discontinu.

utile d'insister davantage sur un processus de formation qui nous est déjà familier. Le domaine R_∞ apparaît ainsi comme un plan dans lequel seraient percés une infinité dénombrable de trous tous à distance finie et extérieurs deux à deux dont les courbes frontières s'aggloméreraient pour former un ensemble parfait, tout point d'une courbe frontière étant point limite d'une infinité de courbes frontières de plus ou plus petites, extérieures à la première.

Le domaine total de convergence vers l'origine serait l'ensemble des aires intérieures à tous ces trous.

69. *Quatrième exemple.* — Nous avons vu, page 180, à propos de l'exemple $z_1 = \frac{2z^3 + a^3}{3z^2}$, tiré de la règle de Newton, qu'un point critique de la fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$, conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$ pouvait faire partie de l'ensemble E'. En écrivant pour un polynome du deuxième degré que le deuxième conséquent du point où $\varphi'(z) = 0$ est un point double, on tombe sur l'exemple

$$z_1 = az^2 - \frac{2}{a},$$

a étant un paramètre arbitraire; posant $az = Z$, il vient

$$Z_1 = Z^2 - 2,$$

et cet exemple est intéressant. On voit immédiatement que $Z = 2$ est un point de E, *son antécédent* (-2) *est point critique de* $\psi(Z)$, *c'est un point de* E'. On voit que *tous les antécédents* du point $Z = 2$ sont réels et compris entre -2 et $+2$. Tout point du segment $(-2, +2)$ a des conséquents *qui ne sortent pas de ce segment.* Donc ce segment $(-2, +2)$ n'appartient pas au domaine du point à l'infini. $Z = 2$ étant de E, ses antécédents sont partout denses sur E' qui est donc l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents de $Z = 2$. E' a donc tous ses points sur le segment $(-2, +2)$. Tout point du plan hors de ce segment a donc des conséquents qui convergent régulièrement vers l'infini. Le domaine R_∞ comprend tout le plan, sauf la coupure $(-2, +2)$. On en conclut que le segment $(-2, +2)$, frontière complète de R_∞, est l'ensemble E' lui-même, et que les antécédents de $Z = 2$, comme de tout point du segment, sont partout denses sur ce segment.

Cet exemple montre que E' peut être un continu linéaire avec deux bouts distincts. Jusqu'ici on n'avait donné que des exemples de *continus linéaires fermés* pour E'.

TROISIÈME PARTIE.

Sur la nature des continus linéaires qui délimitent les divers domaines de convergence.

70. En étudiant la convergence régulière vers un point limite (comme aussi la convergence irrégulière vers un groupe circulaire limite), il arrive d'avoir simultanément plusieurs points limites à convergence régulière. Chacun d'eux a alors un domaine immédiat de convergence dont l'intérieur est séparé de tout point extérieur par un continu linéaire qui coupe toute ligne simple joignant un point intérieur au domaine à un point extérieur. On peut essayer de pénétrer plus avant dans la question en recherchant quelle est la nature des continus linéaires qui se présentent ainsi. Déjà, à propos de l'exemple $z_1 = \frac{-z^3+3z}{2}$, on a eu affaire à des continus d'une nature très compliquée. On peut cependant montrer dans des cas très généraux que la complexité de tels continus peut se résoudre en une agglomération de continus linéaires d'une nature beaucoup plus simple, par exemple de lignes de Jordan, courbes continues fermées, sans points multiples. Je n'ai pas toujours réussi à disséquer les propriétés caractéristiques de tous les continus qui se présentent dans les itérations de fractions rationnelles; j'ai néanmoins, sous des hypothèses très générales, réussi à montrer qu'ils se ramènent à des lignes de Jordan. Ceci jettera un jour nouveau sur la structure de ces continus, et expliquera les difficultés rencontrées jusqu'à ce jour dans la délimitation des domaines de convergence. A ce titre, on verra que les exemples d'itération traités jusqu'ici, et notamment celui des fractions à cercle fondamental, sont des exemples particulièrement simples (*voir* p. 110, n° 20 et la généralisation indiquée en remarque, p. 114-118 de ce Mémoire).

Je commencerai par un exemple simple, qui fera bien comprendre la méthode que j'ai suivie. Ainsi qu'il est bien naturel, je prendrai toujours des fractions rationnelles dont je saurai *a priori* qu'elles ont au moins deux points limites distincts à convergence régulière : je serai sûr ainsi *a priori* que l'ensemble E' comprend un continu linéaire qui divise le plan en régions, et c'est sur la nature de ce continu que va porter la recherche actuelle.

71. *Premier exemple.* — Je reprendrai le cas de $z_1 = \dfrac{z+z^2}{2}$ signalé par M. Fatou dans sa Note du 15 octobre 1906, aux *Comptes rendus*. Nous avons reconnu antérieurement qu'il y a dans ce cas deux points limites (o et ∞) à convergence régulière. Le plan se divise en deux régions R_0 et R_∞ simplement connexes contenant respectivement o et ∞, ayant pour commune frontière un continu linéaire E' (*voir* p. 138 du présent Mémoire). E' est la limite commune des antécédentes successives de deux cercles, l'un C entourant l'origine $|z| = \frac{1}{2}$, l'autre Γ entourant le point à l'infini $|z| = 4$ (¹). Les points critiques de l'inverse de $\varphi(z)$ sont $z = -\frac{1}{8}$ et $z = \infty$. Si donc z décrit une fois C, l'ensemble de ses deux antécédents décrit une courbe algébrique fermée C_{-1} entourant C. Si z décrit C deux fois, chacun de ses antécédents décrit C_{-1} une fois; on peut dire la même chose des antécédentes successives $C_{-2}, C_{-3}, \ldots$, qui tendent vers E'. Je dis que la convergence des C_{-i} vers E' est *uniforme;* voici ce qu'il faut entendre par là. Les courbes C_{-i} successives sont emboîtées les unes dans les autres; d'après le processus de formation, quel que soit le nombre positif ε donné à l'avance, il sera possible de déterminer un indice N assez grand tel que, quels que soient les indices n et p *supérieurs à* N, *l'écart des deux courbes* C_{-n} et C_{-p} soit toujours $< \varepsilon$. On pourra appeler écart de deux courbes *le maximum* (²) *de la plus courte distance d'un point de l'une à l'autre quand le point considéré décrit la courbe sur laquelle il est situé.* Dire que deux courbes L et L' ont un écart $< \varepsilon$, c'est dire que L' est tout entière dans la bande balayée par un cercle de rayon ε dont le centre décrirait L.

72. Pour montrer ceci, je remarquerai que de la relation

$$\frac{dz_1}{dz} = \varphi'(z) = \frac{1}{2} + z,$$

il résulte que l'on a $|\varphi'(z)| > 1$ en tout point extérieur au cercle γ de centre $\left(-\frac{1}{2}\right)$ de rayon 1.

(¹) Il n'y a pas d'équivoque sur ce qu'il faut entendre par là.

(²) C'est un nombre bien défini, positif lorsque les deux courbes, comme c'est le cas pour C_{-n} et C_{-p}, sont des courbes continues sans point commun.

Écrivons d'ailleurs

$$z_1 = \frac{z + z^2}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8},$$

et nous verrons que lorsque z décrit le cercle précédent, $\left|z + \frac{1}{2}\right| = 1$,

$$\left|z_1 + \frac{1}{8}\right| = \frac{1}{2}\left|z + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2};$$

donc z_1 décrit au cercle γ_1 de centre $-\frac{1}{8}$ de rayon $\frac{1}{2}$, c'est un cercle γ_1 complètement intérieur au précédent, et qui contient à son intérieur le point critique $\left(-\frac{1}{8}\right)$, et aussi le point de convergence o. Il n'en faut pas plus pour affirmer que γ est tout entier intérieur à R_0, les conséquentes successives de γ ayant o pour seul point limite. On voit immédiatement que pour définir R_0 on peut partir de γ aussi bien que de C, on arrivera toujours à la frontière E' comme limite des antécédentes successives $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots, \gamma_{-i}, \ldots$. Les γ_{-i} jouissent les unes par rapport aux autres des mêmes propriétés que les C_{-i} les unes par rapport aux autres. Si z décrit une γ_{-i} une fois, son conséquent z_1 décrira $\gamma_{-(i-1)}$ deux fois de suite, etc. Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on voit que l'aire contenant O limitée par une C_{-i} quelconque sera, pour P assez grand, intérieure à toutes les γ_{-p} d'indice $p > P$. Inversement, une γ_{-i} quelconque sera, pour P assez grand, intérieure à toutes les C_{-p} d'indice assez grand. Tout ceci tient, répétons-le, à cette propriété essentielle que, si z décrit une aire (C_{-i}) ou une aire (γ_{-i}), *ses deux antécédents* décrivent une aire $(C_{-(i+1)})$, ou une aire $(\gamma_{-(i+1)})$ qui comprend à son intérieur l'aire (C_{-i}) ou l'aire (γ_{-i}); j'ai longuement insisté, lors de la recherche du domaine immédiat de convergence vers un point limite à convergence régulière, sur ce fait essentiel qui permet de définir le domaine immédiat comme limite des domaines (C_{-i}) ou des (γ_{-i}), lorsque i augmente indéfiniment.

73. Puisque, en tout point extérieur à γ, on a $|\varphi'(z)| > 1$, il en résulte que, pour I assez grand, toutes les C_{-i} $(i \geqq I)$ entourant γ, on aura à l'extérieur de ces C_{-i} $|\varphi'(z)| > M > 1$. Pour la même raison, $\psi(z)$ étant la fonction inverse de $\varphi(z)$, on aura, pour l'indice assez grand I,

$$|\psi'(z)| < N < 1.$$

dès que z est extérieur à C_{-l}. Il suffira de choisir pour cela l de telle façon que C_{-l} entoure γ, car alors, si z est extérieur à C_{-l}, chacun des antécédents est extérieur à $C_{-(l+1)}$ et l'on a

$$\psi'(z) = \frac{1}{\varphi'(z_{-1})}.$$

Donc, z_{-1} étant extérieur à γ,

$$|\psi'(z)| = \frac{1}{|\varphi'(z_{-1})|} < \frac{1}{M} = N < 1.$$

Désignons par δ l'écart entre C_{-l} et $C_{-(l+1)}$, cela veut dire que la plus courte distance de tout point de $C_{-(l+1)}$ à C_{-l} est $\leqq \delta$. Imaginons une quelconque de ces plus courtes distances AB. Aux points B et A correspondent des antécédents situés respectivement sur $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$.

Soit B_{-1} un antécédent de B; z décrivant BA, la détermination de $\psi(z)$ dont l'affixe est B_{-1} quand z est en B, aura pour affixe un cer-

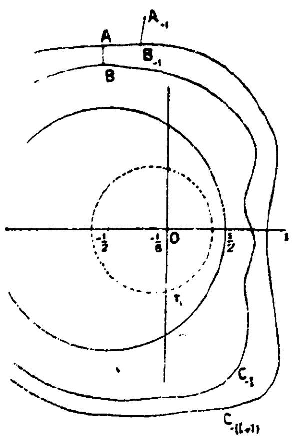

Fig. 22.

tain point A_{-1} quand z viendra en A. A_{-1} sera un antécédent de A, et z décrivant BA, $\psi(z)$ décrira une courbe unissant B_{-1} A_{-1}. Puisque, sur BA, on a $|\varphi'(z)| \leqq N < 1$, on aura

$$\text{longueur arc } A_{-1}B_{-1} \leqq N \times \text{segment } AB \leqq N\delta,$$

car $\overline{AB} \leqq \delta$. Il est donc clair que *l'écart de* $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$ *sera* $\leqq N\delta$, puisque la plus courte distance de A_{-1} [qui est en somme un point quelconque de $C_{-(l+2)}$, à condition de choisir convenablement A sur

$C_{-(I+1)}$ à $C_{-(I+1)}$ étant sûrement $\leqq$ arc $A_{-1}B_{-1}$ sera $\leqq N\delta$, quel que soit le point A_{-1} de $C_{-(I+2)}$.

74. On montrera de même que l'écart entre $C_{-(I+p)}$ et $C_{-(I+p+1)}$ sera $\leqq N^p\delta$, N étant < 1. On voit donc que l'écart entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$ décroît dès que $i > I$ suivant une progression géométrique. Il est, d'autre part, évident que l'*écart entre* C_{-n} et $C_{-(n+p)}$ *est inférieur à la somme des écarts entre* C_{-n} *et* $C_{-(n+1)}$, $C_{-(n+1)}$ et $C_{-(n+2)}$, ..., $C_{-(n+p-1)}$ et $C_{-(n+p)}$; puisque l'on peut, d'un point quelconque A de C_{-n}, aller à un certain point de $C_{-(n+p)}$ par un chemin formé de segments rectilignes AA_1, A_1A_2, ..., A_{p-1}, A_p, A_i étant sur $C_{-(n+i)}$, A_iA_{i+1} étant la plus courte distance de A_i à $C_{-(n+i+1)}$, et puisque chacun de ces segments est inférieur, quel que soit A initial, à l'écart entre les deux courbes que décrivent ses extrémités. On en conclut donc que, si l'on considère la série convergente,

$$N\delta + N^2\delta + \ldots + N^p\delta + \ldots,$$

l'écart entre C_{-n} et $C_{-(n+n')}$ sera, dès que $n \geqq n_0$, n_0 étant assez grand, quel que soit d'ailleurs n', inférieur au *reste de la série précédente*, pris à partir d'un certain rang p, et ce reste est arbitrairement petit si p est assez grand. Il est bien prouvé ainsi que les C_{-i} convergent uniformément vers leur limite qui est E'. Il en résulte immédiatement que, i tendant vers l'infini, C_{-i} tend vers une *courbe continue*, c'est-à-dire vers un ensemble de points E' représenté par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

les fonctions f et φ étant des *fonctions continues de t* dans l'intervalle (0, 1).

75. Je vais montrer ceci d'une façon bien nette en formant, théoriquement, les fonctions $\psi(t)$ et $\varphi(t)$, et je déduirai d'autres propriétés de E'.

A partir d'un certain rang I, on sait que toutes les C_{-i} $(i > I)$ sont dans la région où $|\varphi'(z)| \geqq M > 1$, par suite aussi dans une région où $|\psi'(z)| \leqq N < 1$, $\psi(z)$ étant la fonction inverse de $\varphi(z)$.

Considérons l'anneau compris entre les deux courbes C_{-I} et $C_{-(I+1)}$. Les deux courbes limites sont des courbes algébriques simples formées *d'un seul arc analytique* fermé, puisque le C initial (ni aucune des C_{-i}) ne passant par aucun point critique de ψ, aucune des C_{-i} n'aura de point anguleux. On peut alors faire une représentation conforme de l'anneau $(C_{-i}, C_{-(i+1)})$ sur un anneau $(\mathcal{C}\mathcal{C}')$ compris entre deux cercles concentriques. Il suffit pour cela que le rapport des rayons des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ soit un nombre conve-

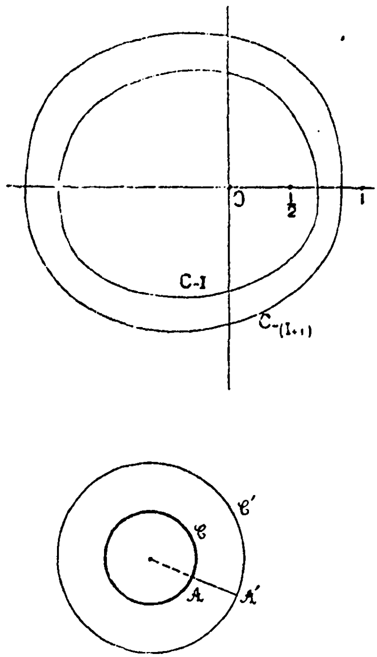

Fig. 23.

nable. La fonction analytique $F(z)$ qui, à tout point z intérieur à l'anneau $(\mathcal{C}\mathcal{C}')$, fait correspondre un point $F(z)$ intérieur à l'anneau $(C_{-i}, C_{-(i+1)})$ est encore analytique sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et un peu au delà, puisque C_{-i} comme $C_{-(i+1)}$ sont formés d'un seul arc analytique (1). Aux rayons tels que $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ qui unissent un point de $\mathcal{C}$ à un point de $\mathcal{C}'$ correspondent des courbes analytiques unissant un point A de C_{-i} à un point B de $C_{-(i+1)}$. A et $\mathcal{A}$, B et $\mathcal{A}'$ se correspondent par la fonction $F(z)$. L'arc de courbe analytique AB coupe orthogonalement les courbes C_{-i} et $C_{-(i+1)}$, puisque le rayon $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ coupe orthogonalement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et puisque les angles sont conservés par la représentation conforme que $F(z)$ définit. *A tous*

(1) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. II (2e édition), p. 301 et suiv.

les rayons de l'anneau $\varepsilon\varepsilon'$ correspondent ainsi des trajectoires orthogonales de C_{-l} *et* $C_{-(l+1)}$; ces trajectoires font correspondre à tout point A de C_{-l} un point B et un seul de $C_{-(l+1)}$ situé sur la trajectoire orthogonale de AB. A deux points distincts de C_{-l} correspondent deux points distincts de $C_{-(l+1)}$ et réciproquement. Deux trajectoires orthogonales issues de deux points distincts de C_{-l} n'ont aucun point commun, et par chaque point de C_{-l} ne passe qu'une de ces trajectoires.

76. z décrivant C_{-l}, considérons un de ses antécédents $z_{-1} = \psi(z)$; il décrira $C_{-(l+1)}$; si z décrit la trajectoire orthogonale AB, z_{-1} va décrire une courbe $A_{-1}B_{-1}$ qui sera orthogonale à $C_{-(l+1)}$ comme AB l'est à C_{-l}; en B_{-1}, cette courbe $A_{-1}B_{-1}$ sera orthogonale à $C_{-(l+2)}$ comme AB l'est en B à $C_{-(l+1)}$. Lorsque z occupe toutes les positions sur C_{-l}, à chaque antécédent z_{-1} de z correspond ainsi une trajectoire qui coupe orthogonalement $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$; si la trajectoire orthogonale AB issue de z balaie *deux fois de suite* l'anneau $(C_{-l}, C_{-(l+1)})$, la trajectoire $A_{-1}B_{-1}$, antécédente de AB [qui est décrite par une détermination quelconque de $\psi(z)$ quand z décrit AB] *balaie une fois* l'anneau $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$. Cela tient à ce que si z décrit deux fois de suite C_{-l}, chacun de ses deux antécédents correspondant à une quelconque des deux déterminations de $\psi(z)$ décrit une fois d'une façon continue $C_{-(l+1)}$ en marchant toujours dans le même sens.

77. Chaque trajectoire orthogonale AB de l'anneau $(C_{-l}C_{-(l+1)})$ admet deux antécédentes qui sont trajectoires orthogonales de l'anneau $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$. Ce dernier anneau est donc, lui aussi, sillonné de trajectoires orthogonales à $C_{-(l+1)}$ et $C_{-(l+2)}$ et qui sont telles évidemment que deux quelconques de ces trajectoires sont ou bien identiques, ou bien n'ont aucun point commun. Ces nouvelles trajectoires prolongent celles de l'anneau $(C_{-l}, C_{-(l+1)})$, *avec continuité de la tangente*, mais *sans nécessairement les prolonger analytiquement* (¹). En effet, la trajectoire BD de $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$ qui passe en B a pour tangente en B *la normale à la courbe* $C_{-(l+1)}$, mais c'est un *arc analytique* qui est antécédent d'une trajectoire de $C_{-l}C_{-(l+1)}$

(¹) Il ne faut pas croire que les trajectoires de $(C_{-(l+1)}, C_{-(l+2)})$ qui prolongent deux trajectoires déterminées, d'ailleurs quelconques de $(C_{-l}, C_{-(l+1)})$, sont des antécédentes de ces dernières, il n'en est rien en général.

issue du conséquent B_1 *de* B, et il n'y a aucune raison *a priori* pour que l'antécédente BD de la trajectoire B_1D_1 de $(C_{-1}, C_{-(1+1)})$ soit *prolongement analytique* de la trajectoire AB de $(C_{-1}, C_{-(1+1)})$.

L'anneau $(C_{-1}, C_{-(1+2)})$ (¹) est donc sillonné de trajectoires orthogonales à C_{-1}, $C_{-(1+1)}$, $C_{-(1+2)}$ formées chacune de deux arcs analytiques se raccordant sur $C_{-(1+1)}$ avec continuité de la tangente. Deux trajectoires n'ont aucun point commun ou coïncident sur tout leur parcours.

Le processus peut évidemment se continuer, car la zone où l'on opère (région entre C et Γ) ne contient pas de point critique de $\psi(z)$. On définira ainsi des trajectoires *orthogonales à toutes les* C_{-i} d'indice $i \geqq 1$. Elles seront formées chacune d'une infinité d'arcs, à savoir les portions entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$, qui seront individuellement analytiques, se raccordant les unes aux autres avec continuité de la tangente. Deux trajectoires ou bien sont identiques ou bien n'ont aucun point commun *intérieur à* R_0 (²).

78. On voit que, à l'aide de ces trajectoires orthogonales, s'établit une correspondance biunique et continue entre les points d'une C_{-i} quelconque d'indice $i > 1$ et les points de C_{-1} elle-même (³). Faisant correspondre à chaque point de C_{-1} un paramètre variant de 0 à 1 (par exemple, on choisira sur C_{-1} une origine ω et un sens de parcours; si l est la longueur de C_{-1}, à tout point A de C_{-1} correspondra le paramètre $t = \frac{s}{l}$, s étant l'arc de C_{-1} décrit dans le sens positif pour aller de ω à A; t variant de 0 à 1, A décrit une fois C_{-1} dans le sens positif de ω à ω), on voit que les coordonnées x_i, y_i d'un point qui décrit C_{-i} seront des fonctions continues du paramètre t

$$x_i = f_i(t), \quad y_i = g_i(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1; \quad i = 1, 1+1, \ldots, \infty),$$

(¹) Si l'on faisait la représentation conforme de l'anneau $(C_{-1}, C_{-(1+1)})$ sur un anneau $(\mathfrak{C}\mathfrak{C}'')$ formé de deux cercles concentriques, il n'y a aucune raison pour que les trajectoires qu'on vient de trouver correspondent aux rayons qui coupent orthogonalement les cercles $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}''$, car, dans cette représentation, *la courbe* $C_{-(1+1)}$ *ne correspondra pas en général à un cercle concentrique à* $\mathfrak{C}\mathfrak{C}''$.

(²) *A priori*, rien n'empêche deux trajectoires distinctes, issues de deux points distincts de C_{-1}, de tendre vers un *même point de* E'; nous verrons plus loin que c'est impossible.

(³) On fera correspondre entre eux les points situés sur une même trajectoire orthogonale.

et l'on n'aura simultanément

$$f_i(a) = f_i(b),$$
$$g_i(a) = g_i(b),$$

que si $a = 0$, $b = 1$, ou bien $a = b$ [1].

Tous les points des C_{-i} ($i = I+1, I+2, \ldots$) situés sur une même trajectoire orthogonale correspondent à la même valeur de t.

79. Je vais montrer que les $f_i(t)$ tendent uniformément vers une limite $f(t)$ ainsi que les $\varphi_i(t)$.

Lorsque A, de paramètre t, décrit C_{-I} l'arc de trajectoire compris entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$ a un maximum Δ et un minimum tous les deux positifs (le maximum Δ joue un rôle analogue à ce qu'on a appelé plus haut *l'écart* entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$). Il est clair que $|\psi'(z)|$ étant $< N$ dans toute la région où sont les C_{-i} d'indice $i \geqq I$, toute portion de trajectoire comprise entre $C_{-(I+1)}$ et $C_{-(I+2)}$ sera $< N\Delta$, car ces portions sont décrites par $\psi(z)$ quand z décrit les portions situées entre C_{-I} et $C_{-(I+1)}$. De même on voit, en continuant, que toute portion de trajectoire comprise entre $C_{-(I+p)}$ et $C_{-(I+p+1)}$ sera $< N^p\Delta$. On en déduit immédiatement

$$|f_{I+p}(t) - f_{I+p+1}(t)| \leqq N^p\Delta,$$
$$|g_{I+p}(t) - g_{I+p+1}(t)| \leqq N^p\Delta$$
$$(p = 0, 1, \ldots, \infty),$$

quel que soit t, car évidemment $|x_{i+1}(t) - x_i(t)|$ différence des abscisses de deux points extrémités d'un arc de trajectoire compris entre C_{-i} et $C_{-(i+1)}$ est, en valeur absolue, inférieure à la longueur de cet arc qui est elle-même $\leqq N\Delta$ d'après ce que l'on vient de voir.

Donc la suite des $f_i(t)$ tend *uniformément* pour $i = \infty$ vers une fonction limite $f(t)$ qui est *continue*. De même la suite des $g_i(t)$ tend *uniformément* vers une fonction limite $g(t)$ continue. Cela résulte en somme de ce que la série

$$(\Sigma) \qquad \Delta + N\Delta + N^2\Delta + \ldots + N^p\Delta + \ldots$$

convergeant [c'est une progression géométrique ($N < 1$)], on en

---

[1] C_{-i} répond exactement à la définition des courbes de Jordan *simples* fermées, que, pour abréger, l'on appelle *courbes de Jordan*.

déduit

$$|f_{1+p}(t) - f_{1+p+q}(t)| < \varepsilon,$$
$$|g_{1+p}(t) - g_{1+p+q}(t)| < \varepsilon,$$

quel que soit q positif, ε étant arbitrairement donné à l'avance, dès que p est pris assez grand pour que le reste R_p de la série (Σ) soit $< \varepsilon$.

80. L'ensemble E′ est donc l'ensemble des points

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

f et g étant deux fonctions continues, et

$$f(0) = f(1),$$
$$g(0) = g(1).$$

Toute trajectoire orthogonale est formée d'une infinité d'arcs dont les longueurs successives sont $\leqq$ aux termes de la progression (Σ). Chacune de ces trajectoires a donc une *longueur finie*, et le point où elle coupe C_{-i} tend uniformément vers *un point limite et un seul*, quand i grandit indéfiniment; à savoir le point $[f(t), \varphi(t)]$ correspondant à la valeur de t qui caractérise la trajectoire considérée.

81. Il peut subsister dans l'esprit du lecteur un doute relatif à la représentation particulière choisie pour les C_{-i} d'où découle une représentation particulière pour la limite des C_{-i}. Il est facile de la dissiper. Si P est un point quelconque de E′, il est, on l'a vu, limite de points des C_{-i}. On peut sur chaque C_{-i} choisir un point P_i tel que l'ensemble des P_i ait P pour seul point limite. On prendra par exemple pour P_i le pied de la plus courte distance $\overline{PP_i}$ abaissée de P sur C_{-i}, alors

$$\overline{PP_{i+1}} < \overline{PP_i} < \overline{PP_{i-1}} \ldots .$$

car $C_{-(i+1)}$ entoure C_{-i}; $\overline{PP_i}$ est une fonction de i qui décroît constamment vers zéro quand i croît indéfiniment. Evidemment avec ce choix des P_i l'ensemble des P_i n'a pour point limite que le point P. Soit t_i la valeur du paramètre t qui correspond au point P_i; P_i a pour coordonnées $f_i(t_i)$ et $g_i(t_i)$. L'ensemble des t_i est en général un ensemble infini dénombrable compris entre 0 et 1. Il a donc au moins un point limite τ (si une infinité de t_i coïncident, on prendra pour τ une des valeurs qui coïncident avec une infinité de t_i, ceci pour lever l'objection relative au cas où les t_i ne seraient distincts qu'en nombre fini à cause des coïncidences précédentes), c'est-à-dire qu'on peut trouver dans tous les cas une infinité d'indices croissants

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_p, \quad \ldots,$$

tels que, quel que soit ε donné à l'avance, on ait $|\tau - t_{i_p}| < \varepsilon$, dès que $p > \mathrm{P}$, P étant assez grand. Il est clair alors qu'à cause de la convergence uniforme des $f_i(t)$ vers $f(t)$ et des $g_i(t)$ vers $g(t)$, la suite

$$f_{i_1}(t_{i_1}), \quad f_{i_2}(t_{i_2}), \quad \ldots, \quad f_{i_p}(t_{i_p}), \quad \ldots$$

tendra vers $f(\tau)$ et

$$g_{i_1}(t_{i_1}), \quad g_{i_2}(t_{i_2}), \quad \ldots, \quad g_{i_p}(t_{i_p}), \quad \ldots$$

tendra vers $g(\tau)$. Or la première suite est celle des abscisses de la suite

$$\mathrm{P}_{i_1}, \quad \mathrm{P}_{i_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{P}_{i_p}, \quad \ldots,$$

qui tend vers P et P seul, et la seconde est celle des ordonnées de la même suite. Il en résulte que P (qui est un point quelconque de E′) a des coordonnées fournies par les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ pour la valeur τ du paramètre. Donc la *courbe continue*

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

est bien *identique à l'ensemble* E′.

82. Dans ce qui précède, rien ne nous assure *a priori* que l'ensemble des t_i n'a pas plus d'un point limite τ; donc rien ne nous assure *a priori* que E′ est une courbe continue *simple* fermée, c'est-à-dire dont chaque point ne correspond qu'à une valeur t du paramètre (exception faite bien entendu pour les valeurs 0 et 1 qui donnent le même point). Dire que tout point P de E′ correspond à une valeur au moins τ, de t, cela veut dire qu'il y a au moins une trajectoire orthogonale du système considéré dont P est l'extrémité, c'est celle qui passe par le point de C_{-1} de paramètre τ.

Cette trajectoire orthogonale, aboutissant en P, est une *ligne simple*, [c'est-à-dire une courbe continue qui correspond biunivoquement et continûment à un segment de droite (*voir* Préliminaires, § 2 et 4)], dont tous les points, sauf P, sont intérieurs à R_0. C'est dire que *tout point* P *de* E *qui est point frontière de* R_0 *est accessible par l'intérieur de* R_0 *en suivant une des trajectoires orthogonales précédentes.*

83. Je vais maintenant, en m'aidant de considérations nouvelles puisées dans la théorie des continus frontières d'un domaine, montrer que E' est *ligne de Jordan fermée* SIMPLE.

Je dis en effet que tout point P de E' est point *simple* de la frontière de R_0. L'hypothèse contraire conduirait à dire qu'on peut trouver une ligne simple fermée L ou courbe de Jordan fermée, issue de P et revenant en P (1), dont tous les points, sauf P, soient des points intérieurs à R_0, telle aussi qu'elle délimite une région intérieure (2), *dans laquelle se trouve au moins un point* Q *frontière de* R_0 (3), car cela revient à dire qu'on ne peut réduire cette courbe de Jordan L au seul point P d'un mouvement continu sans rencontrer de point Q de E' distinct de P. Un raisonnement déjà fait antérieurement [*voir* p. 166, note (1)] prouve que Q ne pourrait alors être limite pour les antécédents successifs d'un point arbitraire de R_∞ sans qu'on se heurte à une contradiction, car il y aurait alors des points intérieurs à R_∞ dans l'intérieur de la ligne L, points qu'on ne saurait joindre à des points intérieurs à R_∞ assez éloignés dans le plan (pour lesquels par exemple $|z| > 4$) pour être extérieurs à L, par aucune ligne simple qui ne rencontre L, c'est-à-dire qui ne sorte de R_∞ (car les points de L sont dans R_0), on ne passe en P, c'est-à-dire encore en un point non intérieur à R_∞, et ceci contredit le fait que R_∞ est d'un seul tenant et simplement connexe.

Tout point P de E' étant *accessible par* R_0 et *point simple de la frontière de* R_0, *cette frontière ne peut être qu'une courbe de Jordan* (*voir* Th. XXIV, p. 366, du Mémoire cité plus haut, de M. Carathéodory).

84. Il n'est point nécessaire de recourir à ce théorème pour vérifier que E' est une *courbe de Jordan.*

En effet, on a vu que tout point de E' est accessible par l'intérieur de R_0. Mais tous les raisonnements faits pour R_0 valent pour R_∞ et pour l'approximation de E' à l'aide des courbes Γ_{-i} successives;

(1) P étant accessible par l'intérieur de R_0, il n'y a rien là de contradictoire.

(2) On sait ce qu'il faut entendre par l'*intérieur* d'une courbe de Jordan fermée simple.

(3) Tous les auteurs ne donnent pas cette définition pour un point multiple de la frontière (*voir*, par exemple, CARATHÉODORY, *Math. Ann.*, t. LXXIII, p. 362 et suiv., § 44, 45, 46, 48 et surtout Th. XXIV), mais dans le cas où le point frontière considéré est *accessible*, ces définitions reviennent à celle que j'indique.

car, dans la région comprise entre C_{-1} et Γ, région où sont tracées toutes les Γ_{-i}, on a $|\psi'(z)| < N < 1$, et c'est là ce qui sert à établir la convergence uniforme des Γ_{-i} vers E′, comme on a établi celle des C_{-i} vers E′. On voit donc que *tout point de* E′ *est accessible aussi par l'intérieur de* R_∞. Une courbe continue E′ fermée, dont tout point est ainsi accessible par son intérieur (R_0) et par son extérieur (R_∞), n'est autre qu'une *courbe de Jordan, courbe continue fermée dont les points correspondent biunivoquement et continûment aux points d'une circonférence* (*voir* SCHŒNFLIES, *Die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 2e Partie, Chap. V, § 11 et 12).

85. La ligne fermée simple E′, frontière commune de R_0 et R_∞, renferme des points racines des équations

$$z = \varphi_n(z) \qquad (n = 1, 2, \ldots, r),$$

où $|\varphi'_n(z)| > 1$ (points de E), partout denses sur elles-mêmes. Elle passe, en particulier, par le point $z = 1 = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = \frac{3}{2}$. Tout point de E′ a tous ses conséquents et tous ses antécédents sur E′. C'est dire que E′ reste invariante par la substitution simplement rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ et par ses inverses. M. Fatou, à l'aide de la théorie des équations fonctionnelles, annonce dans sa Note des *Comptes rendus* qu'elle n'est pas analytique Il est facile de voir qu'en un point de E, elle n'a pas en général de tangente déterminée.

86. Et tout d'abord remarquons qu'à cause de la relation

$$z_1 = \frac{z + z^3}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8},$$

à un point arbitraire z_1 de E′ correspondent deux antécédents z, symétriques par rapport au point $-\frac{1}{2}$, situés sur E′. Ceci montre que la courbe E′ *admet le point* $-\frac{1}{2}$ *pour centre de symétrie*; il est clair qu'elle admet pour axe de symétrie l'axe réel Ox, puisque C et les C^{-i} successives sont symétriques par rapport à cet axe. D'ailleurs les points de E sont deux à deux symétriques par rapport à cet axe puisque $z = \varphi_n(z)$ est une équation à coefficients réels, et ces points de E, partout denses sur la courbe de Jordan E′ simple, *suffisant à la déterminer*, la déterminent symétrique par rapport à Ox, comme l'ensemble E lui-même.

En définitive E′ admet pour axes de symétrie Ox, et la parallèle à l'axe Oy menée par le point $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ox coupe E′ en deux points qui sont le point 1 et le point -2, le segment $(-2, 1)$ est intérieur à R_0, les deux demi-droites $(1, +\infty)$ et $(-2, -\infty)$ sont intérieures à R_∞. Cela se voit immédiatement dès qu'on remarque que le segment $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ de l'axe réel est intérieur à R_0, car tous ses points, sauf le point $z = 1$, ont 0 pour seul point limite de leurs conséquents; le segment $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ symétrique du précédent par rapport à $z = -\frac{1}{2}$ (qui est centre de E′) est aussi intérieur à R_0. La demi-droite $(1, +\infty)$ est, on le voit de suite, intérieure à R_∞, ainsi que sa symétrique $(-2, -\infty)$ par rapport à $z = -\frac{1}{2}$.

E′ n'a sur Ox d'autre point que les points $z = 1$ et $z = -2$. E n'a donc sur Ox d'autre point que $z = 1$.

87. Considérons alors un point ζ de E, racine imaginaire de $z = \varphi_n(z)$, non située sur Ox. Désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ les points de E qui, avec ζ, forment groupe circulaire d'ordre n [1].

On a

$$\varphi'_n(z) = \varphi'(\zeta)\,\varphi'(\zeta_1)\ldots\varphi'(\zeta_{n-1}).$$

Or

$$\varphi'(z) = z + \frac{1}{2}.$$

Les arguments de $\zeta + \frac{1}{2}, \zeta_1 + \frac{1}{2}, \ldots, \zeta_{n-1} + \frac{1}{2}$ sont les angles que font avec Ox les segments allant du point $-\frac{1}{2}$ aux points $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Ces arguments ne sont pas nuls si ζ est un point arbitraire de E, donc imaginaire. La somme de ces arguments ne jouit pas d'une propriété particulière. Elle n'est pas *constamment nulle* pour les points de E. En général $\varphi'_n(\zeta)$ *n'est donc pas réel* en un point arbitraire de E. Il pourrait, à ce sujet, y avoir doute pour les groupes circulaires d'ordre pair, pour lesquels comme pour le groupe d'ordre 2,

---

[1] Si ζ est imaginaire, les ζ_i le sont aussi en général.

$\left(\zeta = \frac{-3 - i\sqrt{15}}{2}, \zeta_1 = \frac{-3 + i\sqrt{15}}{2}\right)$, il pourrait arriver peut-être que les $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ fussent deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel [l'équation $z = \varphi_n(z)$ étant à coefficients réels], auquel cas $\varphi'_n(\zeta)$ serait réel. Mais pareil fait ne se produira certainement pas pour les groupes d'*ordre impair*, les racines d'un tel groupe ne pouvant se grouper deux à deux par symétrie. On est donc en droit de penser que, sauf des points exceptionnels, un point arbitraire ζ de E, appartenant à l'indice n, rend $\varphi'_n(\zeta)$ imaginaire. Il est même probable, dans le cas général, que l'argument de $\varphi'_n(\zeta)$ sera incommensurable à 2π. Considérons alors un tel point ζ de E, $\zeta = \varphi_n(\zeta)$ où $\arg\varphi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π. Les points critiques de l'inverse de $\varphi_n(z)$ étant ceux de l'inverse de $\varphi(z)$ $\left(\text{c'est-à-dire } -\frac{1}{8} \text{ et } \infty\right)$ et leurs conséquents jusqu'à l'ordre n, qui n'ont pour point limite (n devenant ∞) que 0 et ∞, on pourra entourer ζ d'un cercle dans lequel la fonction inverse de $\varphi_n(z)$ aura une branche holomorphe $\psi_n(z)$ devenant égale à ζ pour $z = \zeta$. On aura $\psi'_n(\zeta) = \frac{1}{\varphi'_n(\zeta)}$. Donc $|\psi'_n(\zeta)| < 1$ et $\arg\psi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π, et même $\arg\psi'_n(\zeta) =$ incommensurable à 2π, en général. On peut alors entourer ζ d'un cercle C de rayon ρ dans lequel la relation $|z - \zeta| < \rho$ entraîne

$$|\psi_n(z) - \zeta| < H|z - \zeta| \qquad (0 < H < 1).$$

C'est dire que les points $\psi_n(z), \psi_{2n}(z), \ldots, \psi_{pn}(z), \ldots$ qui sont des antécédents d'ordre $n, 2n, 3n, \ldots$ du point z tendent vers ζ dès que $|z - \zeta| < \rho$.

Mais il est clair que, dès que $|z - \zeta|$ est assez petit, on aura

$$\arg[\psi_n(z) - \zeta] - \arg(z - \zeta) = \text{sensiblement } \arg\psi'_n(\zeta),$$

$$\arg[\psi_{pn}(z) - \zeta] - \arg(z - \zeta) = \text{sensiblement } \arg\psi'_{pn}(\zeta) = p\arg\psi'_n(\zeta).$$

Ceci veut dire que les points $\psi_n(z), \psi_{2n}(z), \ldots$ se rapprochent de ζ et les rayons qui joignent ζ à deux points consécutifs de cette suite font entre eux *un angle qui tend vers* $\arg\psi'_n(\zeta)$, quand, leur indice devenant ∞, les points considérés tendent vers ζ.

Si donc $\arg\psi'_n(z) \neq 0$ ou π, $\arg[\psi_{pn}(z) - \zeta]$ ne tendra pas vers une limite déterminée quand, p augmentant indéfiniment, $\psi_{pn}(z)$ tend vers ζ, et même, si $\arg\psi'_n(\zeta) =$ incommensurable à 2π, $\arg[\psi_{pn}(z) - \zeta]$ sera voisin de *toute valeur choisie entre* 0 *et* 2π, pourvu que p soit choisi assez grand. Remarquant maintenant que, si z est choisi sur E$'$, tous les $\psi_{pn}(z)$ seront sur E$'$, cela voudra dire que E$'$ *n'a pas en* ζ *de tangente déterminée*, et même si

$$\arg \psi'_n(\zeta) = \text{incommensurable à } 2\pi,$$

cela voudra dire que E$'$ *a, au voisinage de* ζ, *des points voisins de toute droite issue de* ζ. ζ est alors analogue à ces points doubles de substitutions loxodromiques E$'$ situés sur la frontière du domaine d'existence d'une fonction kleinéenne [*voir* POINCARÉ, *Mémoire sur les groupes kleinéens* (*Acta*, t. III, 1883, p. 77), et aussi SCHŒNFLIES, *Die Lehre ...*, Chap. V, § 14, déjà cité plus haut]. La courbe E$'$ entoure un de ces points ζ à la manière d'une double spirale logarithmique ayant un seul pôle (¹). Je n'insiste pas là-dessus, les travaux récents sur la nature des lignes de Jordan ayant suffisamment éclairci l'allure de ces courbes au voisinage d'un de leurs points.

88. Mais, puisque j'ai parlé d'un rapprochement entre les points ζ de E situés sur E$'$ et les points doubles des substitutions d'un groupe kleinéen admettant une courbe fondamentale du genre de celles signalées par Poincaré, je vais indiquer une génération de E$'$, d'un caractère théorique, tout à fait parallèle à la génération de la courbe fondamentale du groupe kleinéen à partir du domaine fondamental de ce groupe. Dans ce dernier cas, on sait que Poincaré part d'un domaine fondamental D simplement connexe limité par des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tels que C_1 touche C_2, C_2 touche C_3, ..., C_{n-1} touche C_n, C_n touche C_1, tous les contacts étant extérieurs. En ajoutant à D les domaines déduits de D par symétries relatives à ses côtés, puis ajoutant au domaine obtenu ses symétriques par rapport à ses côtés, ... indéfiniment, le lieu des sommets des domaines successifs, l'ensemble dérivé de l'ensemble de ces sommets, est la courbe signalée par Poincaré.

(¹) Cela n'a rien de contradictoire. Entre deux spirales logarithmiques non

sécantes ayant même pôle ζ, on peut observer une aire simplement connexe pour laquelle ζ est point frontière (*voir* la figure).

89. Je rappelle que j'ai signalé au début de ce Mémoire un rapprochement entre la génération des antécédents successifs d'un point z_1 dans l'itération de $z_1 = \varphi(z)$ et la génération des homologues d'un point z_1 dans un groupe automorphe, comme antécédents successifs ([1]) du point z_1, un antécédent z de z_1 étant défini par la relation

$$f(z, z_1) = [z_1 - S_1(z)] \ldots [z_1 - S_n(z)] = 0,$$

les $S_i(z)$ étant les substitutions fondamentales du groupe (*voir* p. 105 et suiv.). Le domaine fondamental D du groupe kleinéen est tel que, quel que soit le point z intérieur au domaine d'existence, il ait un homologue seulement intérieur à D (deux dans le cas où l'homologue est sur une frontière de D).

90. Je vais déterminer, parallèlement, un domaine fondamental $\mathfrak{D}$ pour l'itération de $z_1 = \dfrac{z + z^2}{2}$, c'est-à-dire un domaine $\mathfrak{D}$, intérieur à R_0, tel que si l'on choisit un point quelconque z intérieur à R_0, il y ait, dans l'ensemble de ses antécédents, *un antécédent au plus de chaque ordre* ([2]) qui soit intérieur à $\mathfrak{D}$ (exception faite pour les points situés sur le contour de $\mathfrak{D}$), tel aussi qu'à partir d'un certain indice i, il y ait, dans $\mathfrak{D}$, *un conséquent de chaque ordre* z_i, z_{i+1}, ...

Pour faire une exposition plus simple, nous ramenons d'abord, en posant

$$z = -\frac{1}{2} + Z,$$

la substitution $z_1 = \varphi(z) = \dfrac{z + z^2}{2}$ à s'écrire

$$Z_1 = \frac{4Z^2 + 3}{8}$$

pour laquelle les points limites à convergence régulière sont ∞ et $\frac{1}{2}$.

([1]) z_1 étant dit conséquent de z, il est évident qu'ici l'ensemble des *conséquents* successifs d'un point est identique à celui de ses *antécédents* successifs.

([2]) J'ai dû faire ainsi parce qu'en réalité, dans le cas où les homologues d'un point z_1 dans un groupe automorphe sont définis comme antécédents ou conséquents successifs de z_1 par la relation $f(z, z_1) = 0$, il y a une *infinité* d'antécédents qui tombent dans D, mais *ils sont tous confondus en un même point* z, et il n'y en a qu'un *de chaque ordre*. Ce sont toutes ces propriétés de D que j'ai attribuées à $\mathfrak{D}$.

Tout point Z_1 du plan a deux antécédents symétriques par rapport à la nouvelle origine $Z = 0$. Donc, il a un antécédent et un seul *dans le demi-plan supérieur* $\mathfrak{J}(z) > 0$ que j'appelle D_{-1}.

Remarquons maintenant que $Z_1 = \frac{3}{8}$ est point critique pour la fonction $Z = \Psi(Z_1)$ inverse de $Z_1 = \frac{4Z^2+3}{8}$. Si donc Z_1 décrit l'axe réel de $+\infty$ à $-\infty$, à la demi-droite $\left(+\infty, \frac{3}{8}\right)$ correspond pour Z la demi-droite $(+\infty, 0)$, Z étant l'antécédent de Z_1 qui est situé dans le demi-plan supérieur quand Z_1 est quelconque dans le plan; Z_1 décrivant $\left(\frac{3}{8}, -\infty\right)$, Z décrira *la partie positive* Oy *de l'axe imaginaire;* Z_1 décrivant le demi-plan $\mathfrak{J}(Z_1) > 0$, celui de ses antécédents qui est dans le demi-plan supérieur *décrira le premier quadrant* $XOY[\mathfrak{R}(Z) > 0, \mathfrak{J}(Z) > 0]$ que j'appelle D_{-2}.

Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 1 dans le demi-plan supérieur D_{-1} et un deuxième antécédent symétrique du précédent par rapport à 0; parmi les antécédents d'ordre 2 : ceux qui naissent du premier antécédent d'ordre 1 sont l'un dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant; ceux qui naissent du deuxième antécédent d'ordre 1 sont respectivement dans le deuxième et le quatrième quadrant [car à deux points symétriques par rapport à l'axe réel correspondent des antécédents symétriques par rapport à cet axe $\left(Z_1 = \frac{4Z^2+3}{8}\right.$ étant à coefficients réels$\left.\right)$, donc à un point quelconque du demi-plan inférieur correspond un antécédent dans le quatrième quadrant et un antécédent opposé dans le deuxième].

Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 2 et un seul dans le premier quadrant D_{-2}.

On continue l'application du procédé. Tout point Z du demi-plan supérieur avait un antécédent Z_{-1} et un seul dans le premier quadrant; tout point Z_{-1} de ce premier quadrant aura donc un antécédent et un seul Z_{-2} dans une partie du premier quadrant qui sera décrite par l'antécédent Z_{-1} d'ordre 1 de Z quand Z décrira le premier quadrant.

Pour cela, on fait décrire à Z : 1° le demi-axe réel $\left(+\infty, \frac{3}{8}\right)$ auquel cas Z_{-1} décrit $(+\infty, 0)$; 2° les egment $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$ auquel cas Z_{-1} décrit un segment OO_{-1}, de l'axe imaginaire OY $\left(O_{-1}, \text{antécédent de O a pour affixe } \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$; 3° le demi-axe imaginaire OY auquel cas z_{-1} décrit une demi-branche d'hyperbole H issue du point $\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$ orthogonale à OY et située dans le premier quadrant.

L'équation de cette hyperbole est aisée à obtenir : à $Z = X + iY$ correspond $Z_1 = X_1 + iY_1$, tel que

$$X_1 = \frac{4(X^2 - Y^2) + 3}{8},$$
$$Y_1 = XY.$$

L'hyperbole H en question s'obtient par $X_1 = 0$; elle a donc pour équation

$$X^2 - Y^2 + \frac{3}{4} = 0.$$

Elle est équilatère.

Lorsque Z décrit le premier quadrant, celui de ses antécédents qui est au-dessus de OX décrit l'aire limitée par OX, OO_{-1} et la branche H, aire contenant la bissectrice de XOY. J'appelle D_{-3} cette aire. Tout point du plan a donc un antécédent d'ordre 3 et un seul dans D_{-3}, comme il avait un antécédent d'ordre 2 et un seul dans D_{-2}. Reprenant tout cela, on voit qu'un point quelconque du plan a un antécédent d'ordre 1 et un seul dans D_{-1}, un antécédent d'ordre 2 et un seul dans D_{-2}, un antécédent d'ordre 3 et un seul dans D_{-3}. Mais on a vu aussi qu'un point arbitraire du plan a deux antécédents d'ordre *deux* dans D_{-1}; il aurait donc deux antécédents d'ordre *trois* dans D_{-2}, et quatre antécédents d'ordre *trois* dans D_{-1}, etc. Donc, si nous voulons rechercher un domaine ω fondamental tel qu'il n'y ait *qu'un antécédent au plus de chaque ordre* dans ω pour tout point intérieur à R_0, nous ne pouvons prendre pour ω ni D_{-1}, ni D_{-2}, ..., mais *il faut pousser le procédé indéfiniment.*

Tout point Z intérieur à D_{-3} a un antécédent et un seul dans une aire D_{-4} intérieure à D_{-3} limitée par : 1° l'axe OX; 2° le segment OO_{-1}, de OY; 3° l'arc $O_{-1}O_{-2}$ de la branche d'hyperbole H, qui limite D_{-3} (O_{-2} étant l'antécédent de O_{-1} sur cette branche); 4° une branche infinie H_{-1} d'une courbe algébrique antécédente d'ordre 1 de H, issue de O_{-2} orthogonalement à H, tracée dans l'intérieur de D_{-3}, ayant une direction asymptotique qui fait l'angle $\frac{\pi}{8}$ avec OX, la direction asymptotique de H faisant $+\frac{\pi}{4}$ avec OX. De même tout point intérieur à D_{-4} aura un antécédent et un seul dans une aire D_{-5} antécédente de D_{-4} intérieure à D_{-4}, limitée par OX, OO_{-1}, l'arc de H qui va de O_{-1} à O_{-2}, l'arc de H_{-1} qui va de O_{-2} à O_{-3} antécédent de O_{-2}, enfin une branche infinie H_{-2} de courbe algébrique antécédente de H_{-1} qui part de O_{-3} orthogonalement à H_{-1} et est tracée dans D_{-4}, sa direction asymptotique est $\frac{\pi}{16}$.

91. Poursuivons ce processus indéfiniment, les aires D_{-1}, D_{-2}, ... sont contenues chacune dans la précédente; si Z décrit D_{-i}, il a un antécédent d'ordre 1 et un seul dans $D_{-(i+1)}$; $D_{-(i+1)}$ est antécédente de D_{-i}. Je dis que l'aire D_{-i} ne tend pas vers zéro quand i augmente indéfiniment. Envisageons en effet le voisinage de $Z=\frac{1}{2}$ qui est point limite à convergence régulière, par exemple, *la partie* $(\mathcal{E}_1)$ *située au-dessus de* OX *de l'aire limitée par un cercle assez petit* [1] *de centre* $Z=\frac{1}{2}$, c'est une aire située dans D_{-1}, D_{-2}. Je dis que si elle est dans D_{-i}, elle est aussi dans $D_{-(i+1)}$. En effet, si Z décrit l'aire $(\mathcal{E}_1)$, son antécédent d'ordre 1 situé au-dessus de OX décrit une aire $(\mathcal{E})$ qui *contient à son intérieur* [2] l'aire $(\mathcal{E}_1)$, les frontières de ces deux aires n'ayant en commun qu'un segment de l'axe réel. Or $(\mathcal{E})$ est contenue dans $D_{-(i+1)}$, car $D_{-(i+1)}$ est décrite par l'antécédent de Z situé dans

---

(1) On pourra prendre le cercle $\left|Z-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{16}$, car la distance de $\frac{1}{2}$ au point critique voisin qui est $Z=\frac{3}{8}$ étant $\frac{1}{8}$, nous prendrons un cercle $\mathcal{E}_1$ de rayon $<\frac{1}{8}$ laissant le point critique extérieur pour ne pas avoir de difficulté relativement à l'antécédent choisi.

(2) Ceci résulte de la remarque évidente que si $\left|Z-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}$, par exemple, on a

$$\left|Z_1-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{4}\left|Z-\frac{1}{2}\right|,$$

par un procédé maintes fois employé dans ce Mémoire.

le demi-plan supérieur quand Z décrit D_{-i}. Donc $D_{-(i+1)}$ contenant $(\mathfrak{S})$ contient l'aire $(\mathfrak{S}_1)$ intérieure à $\mathfrak{S}$.

Donc tous les D_{-i} contiennent $(\mathfrak{S}_1)$. On peut donc parler sans équivoque de *l'aire Δ limite de D_{-i} pour $i = \infty$*. Elle contient l'aire $(\mathfrak{S}_1)$. Elle est limitée par une infinité de lignes algébriques : 1° l'axe réel OX; 2° le segment OO_{-1} de OY; 3° l'arc $O_{-1}O_{-2}$ de la branche H; 4° l'arc $O_{-2}O_{-3}$ de la branche H_{-1} antécédente de H; 5° l'arc $O_{-3}O_{-4}$ de la branche H_{-2} antécédente de H_{-1}, ...; $(i+1)^o$ l'arc $O_{-(i+1)}O_{-i}$ de la branche $H_{-(i-2)}$ antécédente de $H_{-(i-3)}$ ....

Δ est un polygone curviligne d'une infinité de côtés dont tous les angles sont droits; si on le parcourt, à partir du point $+\infty$ en venant vers O sur l'axe réel, puis décrivant OO_{-1}, ..., on a l'aire Δ à sa droite, et chaque côté du polygone est *antécédent* d'ordre 1 du précédent. Il faudrait encore remarquer que le point $\frac{3}{8}$ est à considérer comme un sommet du polygone (sommet critique) dont l'antécédent est O; OO_{-1} est antécédent du segment $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ de OX, et OX est antécédent de la demi-droite $\left(+\frac{3}{8}, +\infty\right)$ de OX.

92. *Un point intérieur à Δ* est intérieur à tous les D_{-i}; donc l'antécédent d'ordre 1 de ce point situé au-dessus de OX est aussi intérieur à tous les D_{-i} d'après la définition de ces D_{-i}; donc cet antécédent est *intérieur à Δ*. Tout point intérieur à Δ a un antécédent d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ. Tout point intérieur à Δ a son conséquent intérieur à Δ, car ce conséquent est intérieur à tous les D_{-i}.

Tous les conséquents d'un point intérieur à Δ sont intérieurs à Δ. Examinons les antécédents successifs d'un point intérieur à Δ. Il y en a un d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ. D'ailleurs tout *point extérieur à Δ n'a aucun antécédent d'ordre 1 dans Δ*, ni sur son contour, car le conséquent d'un point intérieur à Δ (ou sur son contour) étant intérieur à Δ ou sur son contour, il faudrait admettre, contrairement à l'hypothèse, que le point donné est intérieur à Δ. Donc un point extérieur à Δ n'a *aucun antécédent* dans Δ. Mais un point intérieur à Δ ayant un antécédent d'ordre 1 et un seul intérieur à Δ aura, de ce fait, *un antécédent de chaque ordre et un seul* intérieur à Δ.

Δ possède donc déjà cette propriété que tout point du plan aura un antécédent et un seul de chaque ordre dans Δ, s'il est intérieur à Δ, et n'en aura aucun s'il est extérieur à Δ.

93. Je dis que Δ *est tout entier à distance finie*, tout point intérieur à Δ a par exemple un module $|Z| < 4$, de même tout point du contour de Δ, sauf peut-être des points de l'axe OX, est à distance finie. En effet tout point du contour de Δ, non situé sur OX, a un conséquent sur OO_{-1}, et un sur le segment $\left(0, \frac{3}{8}\right)$ de l'axe OX, tous les points de ce dernier segment sont d'ailleurs intérieurs à R_0, comme on le voit immédiatement. Donc tous les points du contour de Δ, sauf la demi-droite $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ de OX ([1]), sont intérieurs à R_0. On pourrait en conclure, puisque Δ étant un domaine simplement connexe limité par un seul contour, que Δ tout entier est intérieur à R_0. Il y a cependant une difficulté qui se lève facilement.

Pour cela, je remarque que, tout point Z intérieur à Δ ayant tous ses conséquents Z_n dans Δ, si θ_n désigne l'argument du conséquent Z_n on devra avoir $\operatorname{tang}\theta_n > 0$, quel que soit n.

Or si r et θ sont les coordonnées de Z,

$$Z = r\,e^{i\theta};$$

si r_1 et θ_1 sont les coordonnées de Z_1,

$$Z_1 = r_1\,e^{i\theta_1}.$$

On a

$$r_1^2 = \left(\frac{4r^2-3}{8}\right)^2 + \frac{3r^2}{4}\cos^2\theta$$

et

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \frac{8r^2\operatorname{tang}\theta}{4r^2+3-(4r^2-3)\operatorname{tang}^2\theta}.$$

Si $|r| \geqq 4$, on a

$$4r^2-3>0, \qquad r_1 \geqq \frac{4r^2-3}{8} > 4 \qquad \text{et} \qquad 4r_1^2-3>0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta_1 > \operatorname{tang}\theta \quad \text{à condition que} \quad \operatorname{tang}^2\theta < \frac{4r^2+3}{4r^2-3},$$

et

$$\operatorname{tang}\theta_1 < 0 \quad \text{si} \quad \operatorname{tang}^2\theta > \frac{4r^2+3}{4r^2-3}.$$

([1]) Qui d'ailleurs, on le reconnaîtra immédiatement plus tard, n'est pas frontière de Δ, n'étant pas limite de points intérieurs à Δ.

Dans ce dernier cas, si $\tang^2\theta > \frac{4r^2+3}{4r^2-3}$, $\tang\theta_1 < 0$; donc z_1 n'est pas dans ω; donc z n'y est pas non plus.

Si $\tang^2\theta < \frac{4r^2+3}{4r^2-3}$, on aura

$$\tang\theta_1 > \tang\theta \quad \text{et} \quad r_1 > r;$$

donc θ_1 grandit ainsi que r. On continuera, tant que

$$\tang^2\theta_i < \frac{4r_i^2+3}{4r_i^2-3},$$

à avoir

$$\tang\theta_{i+1} > \tang\theta_i \quad (\theta_{i+1} > \theta_i) \qquad \text{et} \qquad r_{i+1} > r_i.$$

Mais, r_i grandissant indéfiniment avec l'indice i, $\frac{4r_i^2+3}{4r_i^2-3}$ décroît constamment vers 1, tandis que $\tang\theta_i$ croît constamment, il arrivera que, pour un certain indice p, on aura $\tang\theta_p > \frac{4r_p^2+3}{4r_p^2-3}$ et le conséquent Z_{p+1} étant alors hors de Δ, Z ne peut être dans Δ.

Je dis qu'il arrivera fatalement qu'un certain Z_p soit tel que

$$\tang\theta_p > \frac{4r_p^2+3}{4r_p^2-3};$$

car l'hypothèse contraire obligerait $\tang\theta_p$ croissant à avoir une limite positive $\leqq 1$ pour $p = \infty$, mais la relation

$$\tang\theta_p = \frac{8r_{p-1}^2 \tang\theta_{p-1}}{4r_{p-1}^2+3-(4r_{p-1}^2-3)\tang^2\theta_{p-1}},$$

où r_p tend vers ∞ si p augmente indéfiniment, prouve qu'il est impossible que $\tang\theta_{p-1}$ et $\tang\theta_p$ tendent vers une même limite $l \neq 0$, car on devrait avoir pour l la relation

$$l = \frac{8l}{4(1-l^2)} = \frac{2l}{1-l^2},$$

qui n'est satisfaite que pour le nombre réel $l = 0$ et les imaginaires $l = \pm i$. Il est donc prouvé que tout point du cercle $|Z| = 4$ est extérieur à Δ, car un au moins de ses conséquents est extérieur à Δ (celui pour lequel $\tang\theta_p < 0$). Donc Δ *tout entier est intérieur à* $|Z| \leqq 4$. Tout point *intérieur à* Δ a tous ses conséquents *intérieurs* à Δ, et non sur son contour, ces conséquents sont donc *tous à distance finie*. Donc tout point intérieur à Δ est intérieur à R_0, ainsi que tout point du contour de Δ, sauf la demi-droite $\left(+\frac{3}{2}, +\infty\right)$ de l'axe réel OX. *Nous conviendrons que cette demi-droite n'appartient*

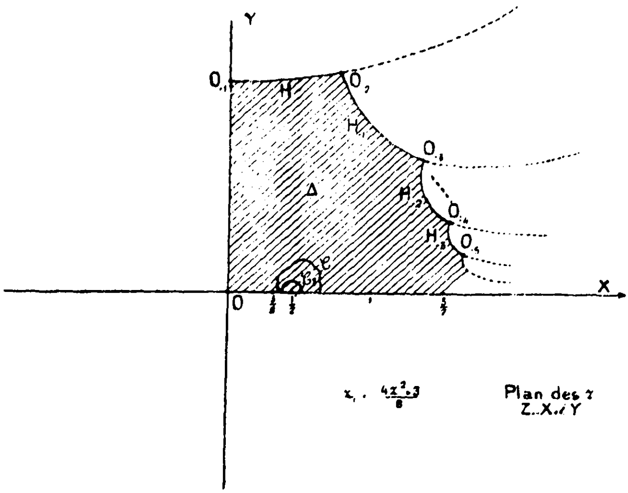

Fig. 24.

pas au contour de Δ, aussi bien il n'y a pas de point de Δ hors de l'axe réel au voisinage de tout point de $\left(+\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Donc Δ aura pour frontière le segment $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ de OX, puis OO_{-1}, $O_{-1}O_{-2}$, etc., tous ces côtés étant intérieurs à R_0 et délimitant une région simplement connexe contenant l'aire (ε_1) $\left|Z - \frac{1}{2}\right| \leqq \frac{1}{16}$ située au-dessus de OX, dont il a été fait mention plus haut.

94. Soit Δ', le domaine symétrique de Δ par rapport à l'axe réel. Envisageons le domaine ω formé par la réunion de Δ et Δ', après suppression de leur segment commun de frontière $\left(O, \frac{3}{2}\right)$ situé sur l'axe réel. ω est un domaine d'un seul tenant simplement connexe, intérieur à R_0, n'ayant en commun avec la frontière de R_0 que le point $Z = \frac{3}{2}$. Δ' ayant exactement les mêmes propriétés que Δ, à cause de ce fait que deux points symétriques par rapport à OX ont leurs antécédents et leurs conséquents symétriques par rapport à OX, la relation $Z_1 = \frac{4Z^2+3}{8}$ établit donc une transformation *biunivoque* de l'intérieur de Δ' en lui-même, comme de l'intérieur de Δ en lui-même.

L'ensemble $\Delta + \Delta' = \omega$ contient le cercle $\varepsilon_1 \left| Z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{16}$ qui entoure le point limite $Z = \frac{1}{2}$ à convergence régulière. Il en résulte que tout point intérieur à R_0, ayant, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents intérieurs à ε_1, aura, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents intérieurs à ω.

95. ω a bien les propriétés requises :

1° Tout point intérieur à R_0 ne peut avoir qu'un antécédent au plus de chaque ordre intérieur à ω. Et cela arrivera en effet et n'arrivera que si le point considéré est intérieur à ω. S'il est intérieur à Δ, il y a un antécédent de chaque ordre intérieur à Δ; s'il est intérieur à Δ', il y a un antécédent de chaque ordre intérieur à Δ'.

2° Tout point intérieur à R_0 a, à partir d'un certain rang, tous ses conséquents successifs dans ω (il n'y a bien sûr qu'un conséquent de chaque ordre).

A tout point intérieur à ω correspond un antécédent intérieur à ω, mais pour dire que l'intérieur de ω est transformé biunivoquement en lui-même, il faut, à cause du point critique $Z = \frac{3}{8}$, supposer qu'on a coupé ω suivant le segment $\left(0, + \frac{1}{2} \right)$ de OX $\left(\text{qui contient } Z = \frac{3}{8} \right)$, et imaginer que la coupure ainsi tracée appartient à la frontière de ω. [Cette coupure a pour antécédente le segment $\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}, +\frac{i\sqrt{3}}{2} \right)$ de OY, suivi du segment $\left(0, \frac{1}{2} \right)$ de OX.]

96. A cause de la propriété 2° de ω, on voit que R_0 s'obtient en ajoutant aux aires Δ et Δ' toutes leurs antécédentes d'ordre 1, puis toutes leurs antécédentes d'ordre 2, ..., indéfiniment et en supprimant toutes les parties communes aux frontières de deux aires ainsi déterminées. Cela nous donne une génération de R_0 à partir de Δ qui rappelle la génération du domaine d'existence d'un groupe kleinéen rappelée plus haut.

En effet, les antécédentes de Δ sont Δ et sa symétrique par rapport à O, celles de Δ' sont Δ' et sa symétrique par rapport à O.

Ces quatre aires réunies après suppression des frontières communes $\left[\text{segment } \left(-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right) \text{ de OX, segment } -\frac{i\sqrt{3}}{2}, +\frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ de OY}\right]$ forment un polygome curviligne $\mathfrak{D}_{-1}$ symétrique par rapport à OX et OY limité par des arcs des courbes algébriques $H, H_{-1}, \ldots$ qui limitaient Δ, polygone dont tous les angles sont droits. $\mathfrak{D}_{-1}$ est le polygone décrit par les deux antécédents de Z, quand Z décrit $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{D}_{-1}$ est formé de $\mathfrak{D}$ et de son symétrique par rapport à OY. Or à deux points symétriques par rapport à OY correspondent des antécédents deux à deux symétriques par rapport à l'hyperbole H équilatère qui est antécédente de l'axe OY (c'est la définition même de la symétrie par rapport à une courbe analytique, au sens de Schwarz). Donc lorsque Z décrira $\mathfrak{D}_{-1}$, ses deux antécédents décriront le polygone $\mathfrak{D}_{-1}$, auquel il faudra adjoindre son image par rapport à l'hyperbole H. Cette image se compose de *deux polygones curvilignes séparés*, le premier touchant $\mathfrak{D}_{-1}$ le long du côté $O_{-1}O_{-2}$ et de son symétrique par rapport à OY ([1]), le deuxième symétrique du premier par rapport à O. L'ensemble de $\mathfrak{D}_{-1}$ et de son image par rapport à H fait un polygone curviligne $\mathfrak{D}_{-2}$ à angles droits du même genre que $\mathfrak{D}_{-1}$.

Le même raisonnement, qui, de $\mathfrak{D}_{-1}$ formé par l'ensemble de $\mathfrak{D}$ et de son symétrique par rapport à OY, déduit $\mathfrak{D}_{-2}$ formé de l'ensemble de $\mathfrak{D}$ et de son image par rapport à l'hyperbole H, côté de $\mathfrak{D}_{-1}$ antécédent de OY, prouve que, Z décrivant $\mathfrak{D}_{-2}$, ses deux antécédents décriront un domaine $\mathfrak{D}_{-3}$ formé de $\mathfrak{D}_{-2}$ et de son image par rapport à la courbe algébrique H_{-1}, antécédente de l'hyperbole H.

L'image de $\mathfrak{D}_{-2}$ par rapport à H_{-1} est formée de quatre polygones séparés symétriques l'un de l'autre par rapport aux deux axes coordonnés et touchant respectivement $\mathfrak{D}_{-2}$ suivant quatre arcs qui se déduisent de l'arc $O_{-2}O_{-3}$ de H_{-1} qui est côté de Δ (*arc prolongé par son image relative à* H) par symétrie relative aux axes coordonnés et à l'origine. Le processus se poursuit indéfiniment, $\mathfrak{D}_{-(i+1)}$ se déduit de $\mathfrak{D}_{-i}$ en lui ajoutant l'image de $\mathfrak{D}_{-i}$ par rapport à la courbe algébrique $H_{-(i-1)}$ antécédente d'ordre i de OY; Z décrivant $\mathfrak{D}_{-i}$, ses deux antécédents décrivent $\mathfrak{D}_{-(i+1)}$.

R_0 sera évidemment la limite de $\mathfrak{D}_{-i}$ pour $i = \infty$. Il saute aux

---

([1]) Première branche de l'hyperbole H.

yeux que le procédé employé pour engendrer R_0 à partir de $\mathfrak{D}$ est celui qui sert à engendrer le domaine d'existence d'une fonction kleinéenne à courbe fondamentale, à partir du domaine fondamental D du groupe, en adjoignant à ce domaine D ses images successives par rapport à ses côtés.

Rien d'étonnant alors à ce que la frontière de R_0, comme la courbe limite signalée par Poincaré, soit une *courbe de Jordan* E′ simple fermée, sur laquelle les points où elle n'a pas de tangente peuvent former un ensemble partout dense. Ces points de E, partout denses sur E′, qui sont des *points coïncidant avec un de leurs antécédents* (1), jouent ici un rôle parallèle à celui des points doubles (2) des substitutions du groupe kleinéen, situés sur la courbe fondamentale du groupe. En tous ceux de ces derniers points qui sont points doubles de substitutions loxodromiques, la courbe fondamentale du groupe ne peut, on le sait bien, avoir de tangente déterminée (*voir* Schönflies, *loc. cit.*, Chap. V, § 14). C'est pour la même raison que E′ ne peut avoir de tangente déterminée en tout point ζ de E où $\arg\varphi'_n(\zeta) \neq 0$ ou π.

Je ne me suis aussi longuement étendu sur l'exemple précédent que parce qu'il est un type simple d'une catégorie d'exemples beaucoup plus généraux conduisant aux mêmes conclusions, qu'il suffira maintenant d'indiquer. Ces exemples seront choisis parallèles à ceux exposés dans les applications 3° et 4° (p. 140 à 145 du Mémoire présent) de la deuxième Partie.

97. *Deuxième exemple.* — Prenons d'abord le cas d'une fraction quelconque du deuxième degré $z_1 = \varphi(z)$ admettant deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, et supposons qu'on puisse entourer respectivement ζ_1 et ζ_2 de deux courbes C et Γ telles que :

1° La conséquente de l'aire (C) contenant ζ_1 soit une aire (C_1) *intérieure* à (C) contenant un point critique de $\psi(z)$ fonction inverse de $\varphi(z)$;

2° La conséquente de l'aire (Γ) contenant ζ_2 soit une aire (Γ_1)

---

(1) Car ils satisfont à $Z = \varphi_n(Z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$; ces points de E, coïncidant avec leur conséquent d'ordre n, coïncident avec un de leurs antécédents d'ordre n.

(2) Ces points doubles sont, en effet, des points qui coïncident avec un de leurs homologues dans le groupe.

intérieure à (Γ) et contenant un point critique de $\psi(z)$ [cela veut dire que (C) et (Γ) contiennent chacune une racine de $\varphi'(z) = 0$];

3° Dans l'aire doublement connexe comprise entre C et Γ, on ait

$$|\varphi'(z)| > M > 1.$$

Alors il est évident que, entre C et L, on aura

$$|\psi'(z)| \leq N = \frac{1}{M} < 1.$$

L'aire (C) est intérieure à R_1, domaine de convergence vers ζ_1;

L'aire (Γ) est intérieure à R_2, domaine de convergence vers ζ_2.

Les antécédentes (C_{-i}) successives de l'aire (C) convergent uniformément vers l'aire R_1, car les courbes C_{-i} antécédentes successives de C convergent uniformément vers leur limite à cause de l'inégalité $|\psi'(z)| < N$ valable entre C et Γ, région sillonnée par les C_{-i}. Les antécédentes Γ_{-i} de Γ convergeront aussi uniformément vers leur limite qui sera identique à celle des C_{-i} et sera une *courbe de Jordan* fermée simple E' séparant R_1 de R_2.

Il est même possible d'étendre à ce cas la génération indiquée pour R_0 dans le premier exemple en remplaçant l'axe réel de l'exemple précédent par une coupure convenable du plan unissant les points critiques de $\psi(z)$.

On peut, au lieu de la troisième condition, *réclamer seulement que : 4° entre C et Γ on ait $|\varphi'_n(z)| > M > 1$ pour une certaine valeur de n*, on verra alors que les C_{-n}, C_{-2n}, ..., C_{-pn}, ... convergent uniformément vers leur limite, et cela suffit, pour que cette limite soit *courbe de Jordan* fermée simple.

Quant aux courbes C et Γ dont il est question dans les première et deuxième conditions précédentes on les choisira le plus commodément possible; ce seront généralement des antécédentes d'ordre assez élevé de petits cercles entourant ζ_1 et ζ_2.

98. *Troisième exemple.* — *a.* Mais il est clair qu'à toute fraction d'ordre 2 satisfaisant aux conditions de l'exemple précédent, on pourra substituer, *toutes les conclusions restant valables* (¹), une frac-

(¹) Sauf évidemment la génération des domaines de convergence par symétries successives.

tion d'un degré quelconque n'ayant que deux points où $\varphi'(z) = 0$ [1] (c'est-à-dire dont la fonction inverse n'aura que deux points critiques) et ayant deux points limites ζ_1, ζ_2 à convergence régulière remplissant les première et deuxième conditions de l'exemple précédent, et, soit la troisième, soit la quatrième condition de ce même deuxième exemple. On aura encore, pour séparer les domaines de convergence R_1 et R_2 vers ζ_1 et ζ_2, une *courbe de Jordan* simple fermée E'.

b. Parallèlement à l'application 4°, *b* (p. 142, on peut laisser de côté la restriction imposée à $\varphi'(z)$ de ne s'annuler qu'en deux points distincts.

Soit une fonction rationnelle $z_1 = \varphi(z)$ de degré K ayant deux points limites, ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière

$$|\zeta_1 = \varphi(\zeta_1), |\varphi'(\zeta_1)| < 1; \zeta_2 = \varphi(\zeta_2), |\varphi'(\zeta_2)| < 1|$$

jouissant des propriétés suivantes analogues aux propriétés 1° et 2° des 3° et 4° exemples précédents.

1° On peut trouver une courbe fermée simple C entourant ζ_1

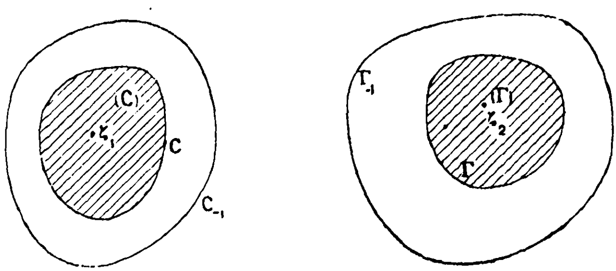

Fig. 25.

(séparant ζ_1 de ζ_2) délimitant une aire (C) contenant ζ_1, telle que l'*ensemble des* K *antécédents* d'un point z intérieur à (C) décrive une aire (C_{-1}) contenant (C) à son intérieur, la courbe C_{-1} étant une courbe simple fermée qui est alors décrite une fois par chaque antécédent de z quand z décrit K fois la courbe C.

2° On peut trouver une courbe fermée simple Γ entourant ζ_2, séparant ζ_2 de ζ_1 et de la courbe C, Γ étant extérieure à C et telle que

[1] Par exemple une fraction du type $z_1 = \dfrac{az^k + b}{cz^k + d}$ (*voir* application 4°, *a*, p. 142).

l'aire (Γ), limitée par Γ et contenant ζ_2, ait pour ensemble de ses K antécédents une aire simplement connexe (Γ_{-1}) contenant l'aire (Γ) limitée par une courbe simple fermée Γ_{-1} qui est décrite une fois par chaque antécédent de z quand z décrit K fois la courbe Γ (*voir* le schéma ci-dessus).

3° On suppose en outre que dans l'aire doublement connexe limitée par C et L (ou dans l'aire limitée par deux antécédentes quelconques C_{-i} et Γ_{-j} de C et Γ), on ait constamment $|\varphi'_n(z)| > M > 1$ pour une certaine valeur de l'indice n (le plus souvent, ce sera $|\varphi'(z)| > M > 1$ qu'on reconnaîtra).

Alors, d'après ce qu'on a dit dans l'application 4°, *b* (p. 142, 143, 144), le plan se divise en deux régions R_1 et R_2, chacune domaine de convergence du point ζ_1 ou ζ_2 qu'elle contient, séparées par un continu linéaire E' qui est la limite des antécédentes successives de C et de Γ.

Mais *il suffit que l'on ait dans l'aire doublement connexe, limitée par deux antécédentes quelconques* C_{-i} *et* Γ_{-j} *de* C *et* Γ, *la relation*

$$|\varphi'_n(z)| > M > 1,$$

pour un certain indice n, pour pouvoir affirmer que les antécédentes de C et Γ convergent uniformément vers une *courbe de Jordan simple fermée* qui coïncide avec E'.

Dans la pratique on reconnaîtra facilement les cas où l'on a

$$|\varphi'(z)| > M > 1$$

dans l'anneau limité par C *et* Γ, ils rentrent dans le cas général précédent.

99. *Quatrième exemple.* — En particulier, revenons aux exemples signalés par M. Fatou dans sa Note du 21 mai 1917 aux *Comptes rendus*, et repris dans le Mémoire actuel (application 4°, *b*, de la deuxième Partie, p. 144 et suiv.). Prenons une fonction à cercle fondamental $\mathcal{C}$, pour laquelle existent deux points limites ζ_1 et ζ_2 à convergence régulière, symétriques par rapport au cercle fondamental $\mathcal{C}$. Dans le cas où ce cercle fondamental est à distance finie (c'est-à-dire non dégénéré en une droite, ζ_1 et ζ_2 étant le centre du cercle et le point à l'infini, cas auquel on se ramène aisément par homographie, on a vu précédemment que l'on avait $|\varphi'(z)| > 1$ sur tout le cercle.

La fonction $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ admet en général $K-1$ points critiques simples *à l'intérieur* de $\mathfrak{S}$, ses $K-1$ autres points critiques simples étant les symétriques des premiers par rapport à $\mathfrak{S}$.

On a vu que, z étant un point quelconque intérieur au cercle $\mathfrak{S}$, on avait

$$|\varphi(z)| < |z|,$$

en vertu du lemme de Schwarz et, si z est extérieur au cercle $\mathfrak{S}$,

$$|\varphi(z)| > |z|.$$

On sait que

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(\infty) = \infty, \qquad |\varphi'(0)| < 1.$$

Considérons donc un cercle C de centre ζ_1 intérieur à $\mathfrak{S}$, ainsi que son symétrique Γ par rapport à $\mathfrak{S}$, C étant choisi *assez voisin de* $\mathfrak{S}$ pour que : 1° les points critiques de $\psi(z)$ soient intérieurs à C ou extérieurs à Γ; 2° entre C et Γ on ait

$$|\varphi'(z)| > M > 1.$$

Ceci est possible puisque, sur $\mathfrak{S}$, on a $|\varphi'(z)| > 1$ et jamais $|\varphi'(z)| = 1$. Alors, évidemment, si z décrit C, ses K antécédents décrivent une courbe simple fermée C_{-i} entourant C, tracée dans l'anneau $(C, \mathfrak{S})$ entre C et $\mathfrak{S}$. Les antécédentes successives de C, C_{-1}, C_{-2}, ... s'entourent mutuellement, C_{-i} étant dans l'anneau $(C_{-(i-1)}, \mathfrak{S})$ entourant $C_{-(i-1)}$, ...

Les antécédentes successives de Γ, Γ_{-1}, Γ_{2}, ... contiennent chacune la suivante. Γ_{-i} est dans l'anneau $(\Gamma_{-(i-1)}, \mathfrak{S})$, et entoure $\mathfrak{S}$.

Toutes les conditions 1°, 2°, 3° précédentes sont remplies. Les C_{-i} et les Γ_{-i} convergent uniformément vers le cercle $\mathfrak{S}$.

100. Mais si l'on fait varier les coefficients de $\varphi(z)$ dans des limites assez étroites, on verra que la nouvelle fonction rationnelle $\Phi(z)$ sera telle que :

1° Elle aura deux points limites à convergence régulière voisins de 0 et ∞, car aux racines 0 et ∞ de $z = \varphi(z)$ correspondent des racines voisines pour $z = \Phi(z)$, avec variation *petite* du module de la dérivée en ces points. J'appellerai Z_1 et Z_2 ces deux points limites.

2° $\Psi(z)$, fonction inverse de $\Phi(z)$, aura encore $K-1$ points critiques intérieurs à C et $K-1$ points critiques extérieurs à Γ; cela est évident puisque les points critiques de $\Psi(z)$ sont voisins de ceux de $\psi(z)$.

3° L'ensemble des K antécédents $\Psi(z)$ de z, lorsque z décrira C, décrira une courbe fermée C'_{-1} entourant C et très voisine de C_{-1} trouvée précédemment. C'_{-1} entourera donc C et sera tracée dans l'anneau (C, Γ).

De même l'ensemble des K antécédents de z, lorsque z décrira Γ, décrira une courbe fermée Γ'_{-1} située dans l'anneau (C, Γ) et entourant C'_{-1}.

4° Enfin, entre C et Γ, on aura $|\Phi'(z)| > M_1 > 1$ comme on avait $|\varphi'(z)| > M > 1$.

Ces quatre conditions sont satisfaites *si les variations des coefficients de $\varphi(z)$ qui font passer de $\varphi(z)$ à $\Phi(z)$ sont assez petites.*

L'ensemble des quatre conditions précédentes prouve que le plan est alors divisé en deux régions simplement connexes R_1 et R_2, domaines respectifs de Z_1 et Z_2, régions séparées par une *courbe de Jordan* simple fermée E' qui est la limite commune des antécédentes successives des cercles C et Γ, par la transformation $z_1 = \Phi(z)$. E' est évidemment tracée dans l'anneau (C, Γ). Cet anneau lui-même est très voisin du cercle fondamental Σ.

Il est donc visible que, pour des variations très petites (en valeur absolue) des coefficients d'une fraction $\varphi(z)$ à cercle fondamental Σ, du type signalé plus haut (variations par ailleurs arbitraires), les relations auxquelles les nouveaux coefficients seront astreints étant uniquement des *inégalités*, ce qui fournit de nouvelles fractions $\Phi(z)$ *beaucoup plus générales* que les fractions à cercle fondamental), on obtient des fractions $\Phi(z)$ relativement auxquelles le plan se divise en deux régions séparées par une *courbe de Jordan* simple fermée E', voisine du cercle Σ. En résumé, la courbe séparatrice des domaines de convergence vers ζ_1 et ζ_2, quand on fait varier infiniment peu les coefficients de $\varphi(z)$, *varie continûment* avec ces coefficients. C'est là un fait qui est loin d'être évident *a priori.*

101. En considérant une des fonctions $\Phi(z)$ qui dérivent d'une $\varphi(z)$ à cercle fondamental par variations assez petites des coefficients, et envisageant la *courbe de Jordan* E' qui sépare les domaines de ζ_1 et de ζ_2, on sait que sur E' sont partout denses les racines des équations

$$z = \Phi_n(z)$$

pour lesquelles

$$|\Phi'_n(z)| > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Envisageons une de ces racines, c'est un point P de l'ensemble appelé E, et il est évident qu'*en général, en* P, $\Phi'_n(z)$ *ne sera pas réel.* Voici comment on peut préciser ceci.

Si l'on considère conjointement avec $\Phi(z)$ la fraction à cercle fondamental $z_1 = \varphi(z)$ de laquelle dérive $\Phi(z)$, $\Phi(z)$ aura des coefficients arbitraires qui seront des paramètres assujettis seulement à certaines inégalités, par rapport à ceux de $\varphi(z)$: par exemple, chaque coefficient de $\Phi(z)$ sera assujetti à avoir son affixe intérieur à un petit cercle dont le centre sera l'affixe de la *valeur du coefficient considéré dans* $\varphi(z)$. Les valeurs de $\Phi'_n(z)$ aux points racines de $z = \Phi_n(z)$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) sont des fonctions des paramètres précédents, et écrire qu'un $\Phi'_n(z)$ est réel, c'est écrire *une relation d'égalité entre ces paramètres.* Pour préciser encore, la valeur de $\Phi'_n(z)$ en un point racine de $z = \Phi_n(z)$ est fonction algébrique des paramètres-coefficients de $\Phi(z)$, et écrire que $\Phi'_n(z)$ est réel, c'est écrire une relation algébrique (non identique) entre ces paramètres. Si l'on écrit toutes ces relations pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$, on a une infinité de relations algébriques ($\mathcal{R}$) entre les paramètres. Comme ces paramètres, ainsi qu'on l'a vu, peuvent varier chacun dans un petit cercle de leur plan, *il est toujours possible de les choisir de façon qu'aucune des relations précédentes* ($\mathcal{R}$) *ne soit satisfaite.* Pour cela, on choisira par exemple tous les paramètres sauf un arbitrairement, puis on choisira le dernier paramètre *distinct des racines de toutes les équations algébriques par rapport à ce paramètre* auxquelles se réduisent dans ces conditions les relations algébriques entre paramètres ($\mathcal{R}$), car ces racines-là ne forment qu'un *ensemble dénombrable,* alors que l'ensemble des valeurs permises au dernier paramètre a la puissance du continu.

Une fraction $\Phi(z)$ ainsi choisie sera évidemment ce qu'on peut appeler une fraction *générale,* c'est-à-dire une fraction *dont les coefficients ne satisfont à aucune relation particulière.*

On peut imposer à $\Phi(z)$ pour être dite *générale,* d'être telle qu'*aucune des valeurs de* $\Phi'_n(z)$ *en un point racine* $z = \Phi_n(z)$ pour $n = 1, 2, \ldots, \infty$, *n'ait un argument commensurable à* 2π, ça reviendrait à dire encore que les paramètres ne doivent satisfaire à aucune des relations d'égalité d'un groupe ($\mathcal{R}$) de relations en *infinité dénombrable.*

Quoi qu'il en soit, pour une fraction $\Phi(z)$ générale, en répétant un raisonnement antérieurement fait, on verra qu'*en aucun point* P *de* E, *la courbe* E' *ne peut avoir de tangente déterminée*, et les points de E sont partout denses sur E'. (Il va sans dire que ce que nous disons là s'applique en particulier aux fractions générales des 2^e, 3^e et 4^e exemples, car dans toutes ces fractions, les paramètres coefficients ne sont assujettis qu'à des relations d'*inégalité* et peuvent demeurer arbitraires chacun dans une petite aire du plan où on le représente par un affixe.)

Dans tous ces exemples, pour lesquels, dans les applications 1°, 2°, 3°, 4° de la deuxième Partie, on a fait remarquer qu'ils étaient les plus simples possibles, on trouve déjà des courbes séparatrices pour les domaines qui sont loin d'avoir la simplicité des courbes analytiques. C'est pourtant déjà un grand point que de pouvoir dire qu'elles sont des *courbes de Jordan simples fermées.*

102. *Cinquième exemple.* — Voici maintenant un exemple plus compliqué, où certains domaines ont pour frontières des courbes de Jordan simples fermées, et d'autres des courbes continues fermées, mais qui ne sont pas *simples*, car elles ont des points doubles denses partout sur elles-mêmes. Je veux parler de la fraction

$$z_1 = \frac{-z^3 + 3z}{2} = \varphi(z)$$

traitée à la fin de la deuxième Partie (p. 158 et suiv.).

Envisageons le domaine R_1 entourant le point limite $z = 1$: c'est la limite des aires (Γ_{-1}), (Γ_{-2}), ..., (Γ_{-i}), ... antécédentes de l'aire $\Gamma\left(|z-1| \leq \frac{1}{2}\right)$ qui entourent cette aire. On a déjà fait remarquer que, en dehors des cercles Γ, Γ' qui servent à définir R_1 et R'_1 (j'emploie les notations de la deuxième Partie), on avait

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| \geq \frac{9}{8} > 1;$$

c'est dans cette région extérieure à Γ et Γ' que sont tracées les courbes Γ_{-i}. Dans cette région on a

$$\left|\frac{dz}{dz_1}\right| = |\psi'(z_1)| \leq \frac{8}{9}.$$

On peut donc conclure, comme on l'a fait pour R_0 dans l'exemple

$z_1 = \frac{z+z^2}{2}$, que les courbes Γ_{-i}, antécédentes de Γ qui entourent Γ, tendent uniformément vers une courbe limite $\mathcal{C}$ qui est une courbe continue représentable par les équations

$$(\mathcal{C}) \qquad x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{pour } 0 \leqq t \leqq 1,$$

f et g étant deux fonctions continues de t. Tout point de la frontière de R_1 est un point de $\mathcal{C}$, et l'on voit qu'il est *accessible par l'intérieur de* R_1. [Tout ceci se fait à l'aide des trajectoires orthogonales de l'anneau (Γ, Γ_{-1}) qu'on prolonge dans tout R_1, ainsi qu'on l'a vu pour $z_1 = \frac{z+z^2}{2}$.]

D'autre part, j'ai montré [*voir* p. 166, note (1)] que tout point de la frontière de R_1 est simple pour cette frontière. On en conclut donc que cette frontière $\mathcal{C}$ est une *courbe de Jordan* simple fermée. La même conclusion s'impose pour la frontière $\mathcal{C}'$ de R'_1, qui est symétrique de $\mathcal{C}$ relativement à l'origine, et aussi pour les frontières de toutes les aires R_1^{-i} et $R_1'^{-i}$ de R_1 et R'_1 qui constituent les domaines totaux de convergence vers $(+1)$ ou (-1).

La frontière E' du domaine R_∞ du point à l'infini, est une *courbe continue*

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$

car on peut la définir, à partir du cercle C, $|z| = 3$, comme limite des C_{-i} antécédentes de C qui convergent *uniformément vers leur limite*, à cause de l'inégalité

$$|\psi'(z)| \leqq \frac{8}{9},$$

vérifiée hors de Γ et Γ', c'est-à-dire dans toute la région où sont tracées les C_{-i} (1). Mais, sur cette frontière, on a vu que l'origine était *point multiple*, ainsi que les antécédents de cette origine, qui sont partout denses sur E'. E' *est donc continue et fermée, mais n'est point* « DE JORDAN, SIMPLE », E' est formée de la réunion des courbes de Jordan $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, de toutes leurs antécédentes, et de tous les points qui sont des points limites pour l'ensemble de ces antécédentes (points au voisinage desquels se pressent une infinité de ces antécédentes).

(1) On verrait, comme dans les précédents exemples, que tout point de E' est accessible par l'intérieur du domaine R_∞ du point à l'infini.

QUATRIÈME PARTIE.

L'étude des convergences singulières.

103. Je me suis attaché surtout dans les deuxième et troisième Parties à l'étude de la convergence vers un point limite à convergence régulière $[\zeta = \varphi(\zeta), |\varphi'(\zeta)| < 1]$, ou vers un groupe circulaire limite $[\zeta = \varphi_p(\zeta), |\varphi'_p(\zeta)| < 1]$.

Déjà, dans ce champ de recherches, les résultats ont été nouveaux et variés. La considération de l'ensemble parfait E′ a dominé cette étude et a jeté sur elle un jour précieux. Je vais maintenant m'occuper des cas singuliers : points racines de

$$\zeta = \varphi(\zeta) \qquad \text{où} \qquad |\varphi'(\zeta)| = 1$$

ou de

$$\zeta = \varphi_p(\zeta) \qquad \text{avec} \qquad |\varphi'_p(\zeta)| = 1.$$

L'étude est moins aisée que celle des points limites réguliers. Les résultats que j'ai obtenus ne sont pas tout à fait généraux, mais, ainsi qu'on le verra, ils permettent déjà de se faire une idée convenable de la question qui est difficile. Pour l'historique, je remarquerai que M. Leau a, dans sa thèse, étudié les environs d'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $\varphi'(\zeta) = 1$. Mais on peut dire plus que ce qu'il a dit, à condition de se servir de l'ensemble E′.

M. Fatou, dans sa Note du 21 mai 1917, étudie les cas singuliers relatifs aux fractions à cercle fondamental; ce sont toujours des cas $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$ et ils sont très simples. Je donnerai des compléments à tous ces résultats connus et l'on verra clairement la raison de leur simplicité. Je donnerai des exemples moins aisés à traiter et d'une portée plus générale que ceux jusqu'ici étudiés. Enfin j'esquisserai pour le cas général des points $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$, θ étant réel et quelconque, un mode de raisonnement qui réduit les hypothèses possibles à deux, telles que la réalisation de l'une, si elle est reconnue dans un exemple donné, exclut la possibilité de l'autre pour ce même exemple. Je n'ai pas réussi jusqu'ici, quand θ est incommensurable à 2π, à décider [1] si l'on peut

---

[1] J'ai réussi, postérieurement au dépôt de ce Mémoire, à exclure l'une des deux possibilités; cela fera l'objet d'un Mémoire ultérieur.

construire des exemples de fractions $\varphi(z)$ pour chacune des deux possibilités précédentes. Pour θ commensurable à 2π, et $\varphi(z)$ rationnel, *c'est toujours l'une des deux hypothèses*, toujours la même, qui est vérifiée et jamais l'autre.

104. *Etude des points* $\zeta = \varphi(\zeta)$ *avec* $\varphi'(\zeta) = e^{i\theta}$ *et* $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ *avec* $\varphi'_p(\zeta) = e^{i\theta}$, *lorsque* θ *est commensurable à* 2π. — Je vais montrer qu'*un tel point appartient toujours à* E'.

Il suffit de considérer un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$, car : 1° si l'on avait $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = e^{2\pi i\frac{p}{q}}$, la substitution $z_q = \varphi_q(z)$ admettrait le point double $\zeta = \varphi_q(\zeta)$ avec $\varphi'_q(\zeta) = 1$ et cette substitution $z_q = \varphi_q(z)$ ayant même E' que $z_1 = \varphi(z)$ le théorème sera démontré; 2° si l'on a $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ avec $\varphi'_p(\zeta) = e^{2i\pi\frac{p'}{q}}$, la substitution $z_p = \varphi_p(z)$ aura le point double $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ avec $\varphi'_p(\zeta) = e^{2\pi i\frac{p'}{q}}$ et l'on retombe sur le 1°. Dans tout ce qui va suivre, je me bornerai donc aux $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$, les extensions à 1° et 2° étant très faciles.

On peut supposer que ζ est à l'origine : $\zeta = 0$; alors soit

$$\varphi(z) = z + a_n z^n + \ldots \qquad (n \geq 2)$$

le développement de Taylor de φ. On aura

$$\varphi_p(z) = z + p a_n z^n + \ldots \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Les fonctions $\varphi_p(z)$ sont nulles à l'origine. Si l'origine n'était pas point de E', la suite des φ_p serait normale dans une petite aire D entourant O, et comme les φ_p sont bornées en O elles le seraient dans tout D. On pourrait en extraire une suite infinie φ_{p_1}, φ_{p_2}, ... qui, dans D, convergerait *uniformément* vers une fonction limite $f(z)$ analytique dans D, pour laquelle $f(O) = 0$, $f'(z) = 1$. Ceci est impossible puisque le deuxième coefficient du développement de Taylor de φ_{p_i} qui est $p_i a_n$ devient infini avec p_i. Donc O est un point de E', les φ_p n'y sont pas normales.

105. M. Leau (Thèse, 1897) a montré qu'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $\varphi'(\zeta) = 1$ pouvait être entouré d'un petit cercle contenant des points dont les *conséquents* tendaient vers ζ et des points dont les *antécédents* successifs, définis par la branche de l'inverse de φ qui égale ζ en ζ, tendaient aussi vers ζ''. Je vais le montrer autrement à l'aide de la proposition établie dans les Préliminaires (§ 5) qui généralise le lemme de Schwarz.

Débutons par le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ se développe autour de $\zeta = 0$ par

$$z_1 = \varphi(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (a_2 \neq 0).$$

Considérons le cercle γ de centre α *passant par l'origine*, son équation sera

$$zz' - \alpha' z - \alpha z' = 0 \qquad (z \text{ et } z' \text{ étant conjugués});$$

d'où

$$z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$$
$$= [zz' - \alpha' z - \alpha z'] + a_2 z^2 (z' - \alpha') + a'_2 z'^2 (z - \alpha) + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre $\geqq 4$ si l'on suppose α infini-

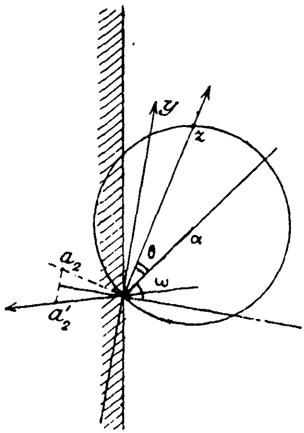

Fig. 26.

ment petit du premier ordre et le point z choisi intérieur à γ ou sur γ.

Si le point z est pris sur γ on aura, en posant $\alpha = re^{i\omega}$,

$$z - \alpha = r e^{i(\omega + 2\theta)}, \qquad z = 2r \cos\theta \, e^{i(\omega+\theta)}, \qquad z' - \alpha' = r e^{-i(\omega + 2\theta)},$$

et par suite

$$z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1 = 4 r^3 \cos^2\theta (a_2 e^{i\omega} + a'_2 e^{-i\omega}) + \ldots,$$

les termes suivants étant d'ordre $\geqq 4$ en r.

La partie principale de $z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$, dont le signe fixe la position de z_1 par rapport au cercle γ quand r est choisi assez petit, étant

$$4 r^3 \cos^2\theta \, \mathfrak{R}(a_2 e^{i\omega}) = 4 r^3 \cos^2\theta \times [\text{partie réelle de } a_2 e^{i\omega}],$$

a un signe constant si θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, z décrivant γ à condition que $\mathcal{R}(a_2 e^{i\omega}) \neq 0$. C'est le signe — si l'on a choisi α tel que

$$\frac{\pi}{2} < \arg\alpha + \arg a_2 < \frac{3\pi}{2},$$

car alors

$$\frac{\pi}{2} < \arg(a_2 e^{i\omega}) < \frac{3\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}(a_2 e^{i\omega}) < 0.$$

Supposons l'argument ω de α ainsi choisi tel que $\mathcal{R}(a_2 e^{i\omega}) < 0$: pour cette valeur de ω on pourra choisir r assez petit $(r < r_0)$ pour que, z décrivant le cercle γ de centre α, de rayon $r(\alpha = re^{i\omega})$, le signe de $z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$ soit constamment le signe —. Alors le point z_1 sera intérieur au cercle γ et ne viendra sur γ que lorsque z viendra en O. D'après notre lemme, tout point intérieur au cercle γ aura O pour seul point limite de ses conséquents.

Faisant varier ω entre ses limites extrêmes depuis $\frac{\pi}{2} - \arg a_2$ jusqu'à $\frac{3\pi}{2} - \arg a_2$ et pour chaque valeur de ω déterminant r positif de façon que $z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1$ $(\alpha = re^{i\omega})$ soit constamment négatif lorsque z décrit le cercle γ, on aura tout un domaine Δ [dont la forme rappelle celle de la cardioïde avec un angle rentrant nul en O dont la tangente (vers l'extérieur de Δ) serait la direction $(-\arg a_2)$, c'est-à-dire la direction qui va de O à a'_2 conjugué de a] tel qu'un point intérieur admettra O pour seul point limite de ses conséquents.

Si l'on passe à la branche de fonction inverse nulle à l'origine, on aura

$$z = \psi(z_1) = z_1 - a_2 z_1^2 + \ldots,$$

et les mêmes considérations donneront un domaine Δ' sensiblement symétrique de Δ par rapport à O, dont tout point a des antécédents successifs définis par $\psi(z)$ qui tendent vers O et vers O seulement. Δ et Δ' ont une partie commune à cause de leur forme en cardioïde.

Dans toute région *intérieure à* Δ, les $\varphi_i(z)$ tendent donc vers zéro uniformément et forment une suite normale. Δ est donc intérieur à une région R du plan z, d'un seul tenant, limitée par l'ensemble E' telle que tout point intérieur à R admette O pour seul point limite de ses conséquents. R sera le domaine de convergence immédiat du point O. (Nous verrons que R peut ne pas être le domaine total de O.) Il est clair que si l'on part d'un petit cercle c entourant O et intérieur à l'ensemble de Δ et de Δ' et si l'on prend les antécédentes successives de l'aire (c) par la branche de $\psi(z)$ qui est nulle à l'origine, la portion de (c) qui est intérieure à Δ' aura *des antécédentes qui tendront vers* O *et celle qui est intérieure à* Δ *aura des antécédentes qui tendront vers le domaine* R. R est donc la limite des aires (C_{-i}) antécédentes successives de l'aire (c) définies par la branche de $\psi(z)$ nulle en O [1].

106. Tout ce qui précède suppose évidemment $a_2 \neq 0$ et tombe si $a_2 = 0$, mais on peut présenter des considérations plus générales, inspirées du cas précédent, et plus faciles à suivre quand on a bien compris le cas $a_2 \neq 0$. Soit, généralement, le développement autour de O,

$$z_1 = \varphi(z) = z + a_p z^p + \ldots \qquad (a_p \neq 0,\ p \geq 2).$$

Cherchons à remplacer le cercle γ précédent par une courbe ana-

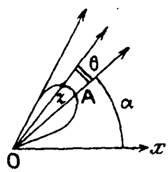

Fig. 27.

logue Γ passant par l'origine : nous prendrons une boucle de la rosace $r^n = a^n \cos n\theta$ (dont l'axe OA fait l'angle α avec OX, et nous cherchons à determiner n, α, a (a assez petit) de façon que, $z = re^{i\theta+\alpha}$ décrivant cette boucle Γ, z_1 reste intérieur à la boucle et ne vienne sur la boucle que lorsque z viendra en O, amenant aussi z_1 en O.

La boucle Γ sera définie par

$$z^n = r^n e^{ni(\theta+\alpha)} = a^n e^{ni(\theta+\alpha)} \frac{e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}}{2},$$

$$z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2} = \frac{a^n}{2} e^{ni(2\theta+\alpha)},$$

$$z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} = \frac{a^n}{2} e^{-ni(2\theta+\alpha)},$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2n}$ à $+\frac{\pi}{2n}$.

---

[1] Si une (C_{-i}) vient à contenir un point critique de la branche considérée, cela ne gênera pas, ainsi qu'on l'a déjà vu. Je montrerai que ce fait se produit toujours ici : le domaine R contient toujours un point critique de $\psi(z)$.

Donc

$$(\Gamma) \qquad z^n z'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} z^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2} z'^n = 0.$$

Considérons, a étant positif infiniment petit du premier ordre, la quantité

$$\delta = z_1^n z_1'^n - \frac{a^n e^{-ni\alpha}}{2} z_1^n - \frac{a^n e^{ni\alpha}}{2} z_1'^n ;$$

on aura, en développant δ et se rappelant que z est sur Γ,

$$\delta = n z^{n+p-1} a_p \left[z'^n - \frac{a^n}{2} e^{-ni\alpha} \right] + n z'^{n+p-1} a'_p \left[z^n - \frac{a^n}{2} e^{ni\alpha} \right] + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à $2n+p-1$ par rapport à a pris comme infiniment petit principal. Le signe de δ, si a est choisi assez petit, est donc, quel que soit z sur Γ, le signe de

$$\delta_1 = n z^{n+p-1} a_p \left[z'^n - \frac{a^n}{2} e^{-ni\alpha} \right] + n z'^{n+p-1} a'_p \left[z^n - \frac{a^n}{2} e^{ni\alpha} \right],$$

qui se réduit, *en prenant* $n = p - 1$, à

$$\delta_1 = n\, \Re \left[a_p \frac{a^n}{2} r^{2n} e^{ni\alpha} \right] = n \frac{a^n}{2} r^{2n}\, \Re [a_p e^{ni\alpha}].$$

Si donc on prend α tel que

$$\frac{\pi}{2} < n\alpha + \arg a_p < \frac{3\pi}{2} \qquad (\operatorname{mod} 2\pi),$$

on voit que l'on pourra ensuite déterminer a assez petit pour que, *z décrivant la boucle* Γ d'axe OA (OA faisant avec OX l'angle α), d'équation $r^n = a^n \cos n\theta$ par rapport à OA, le *signe de δ soit constamment celui de* $\Re(a_p e^{ni\alpha})$ *qui est négatif*. Alors, δ étant constamment négatif, z_1 sera *intérieur à la boucle considérée* Γ et ne viendra en O que si z vient en O (z_1 sera évidemment intérieur à la boucle considérée, et non à une autre boucle de la même rosace, parce que z_1 diffère de z par un infiniment petit d'ordre $p \geqq 2$). Un raisonnement tout pareil à celui qu'on a fait pour $p = 2$ et une extension immédiate du lemme qui nous a servi, au cas où Γ

remplace le cercle γ [1], prouve alors que tout point z intérieur à Γ admet O pour seul point limite de ses conséquents.

Les inégalités

$$\frac{\pi}{2} < n\alpha + \arg a_p < \frac{3\pi}{2} \qquad (\text{mod } 2\pi),$$
$$n = p - 1$$

prouvent que la direction déterminée par l'angle α peut être prise arbitrairement dans $p - 1 = n$ angles égaux chacun à $\frac{\pi}{n}$ (angles hachurés), régulièrement disposés autour de O. A chaque α ainsi

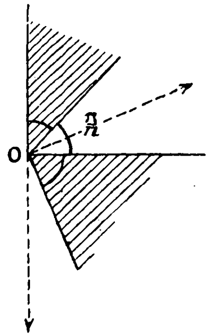

Fig. 28.

déterminé correspond un a assez petit, jouissant de la propriété précédente (on pourra prendre le plus grand nombre a jouissant de la propriété). Puis, α prenant ainsi toutes les valeurs admissibles, Γ balaiera un domaine Δ qui aura $n = p - 1$ pointes rentrantes

---

(1) Cette extension peut se faire en représentant Γ conformément sur un cercle γ par la transformation $Z = z^n$; alors Z_1 devient une fonction de Z régulière dans le cercle γ jouissant des propriétés prévues par notre lemme. En O, il est vrai [a], Z_1 n'est pas analytique en Z, elle est algébroïde en Z autour de O, mais Z tendant vers O par l'intérieur de Γ, on voit que Z_1 tend vers zéro, $\frac{dZ_1}{dZ}$ tend vers 1, $\frac{d^2Z_1}{dZ^2}$ tend vers une limite bien déterminée finie, en sorte que le lemme continue de s'appliquer.

(a) On a aux environs de O, dans Γ, $Z_1 = Z + (p = 1)a_p Z^2 + Z^2\varepsilon(Z)$, $\varepsilon(Z)$ tendant vers zéro avec Z mais n'étant qu'algébroïde en Z.

en O dont les tangentes sont les bissectrices des angles qui séparent les angles balayés par OA. Tout point intérieur à Δ aura O pour seul point limite de ses conséquents.

Si l'on considère la branche $\psi(z)$ inverse de φ qui est nulle en O, on aura, tout comme pour $a_2 \neq 0$,

$$z = \psi(z_1) = z_1 - a_p z_1^p + \ldots,$$

et l'on tombe sur un domaine Δ', analogue à Δ, ayant cette fois pour pointes les bissectrices des angles hachurés (Δ' sera sensiblement symétrique de Δ par rapport à une quelconque de droites qui déterminent les angles limites de α dans les inégalités précédentes). Δ et Δ' auront des parties communes ($2n$ en général opposées par O) à cheval sur les $2n$ demi-droites limites des angles hachurés. Tout point intérieur à Δ' aura des antécédents successifs définis par $\psi(z)$ qui tendront vers O.

Si donc on envisage un petit cercle c entourant l'origine et assez petit pour être intérieur dans toutes ses parties soit à Δ, soit à Δ', et si l'on prend les antécédentes successives de l'aire (c) contenant O, *à l'aide de la branche* $\psi(z)$ *nulle en* O, on verra, comme précédemment, que ces antécédentes (c_{-i}) tendent pour $i = \infty$ vers une aire (R) limitée par l'ensemble E', qui aboutit en O, point frontière de cette aire par $p - 1$ pointes dont les tangentes sont les tangentes aux points de Δ; cette aire (R) pourra être formée de plusieurs régions distinctes aboutissant en O et sans connexion entre elles. (R) *sera le domaine immédiat de convergence vers* O.

A vrai dire, les parties de (c) qui sont intérieures à Δ' tendront vers zéro et ce ne sont que celles qui sont intérieures à Δ qui tendront vers R. Dans toute aire intérieure à R, la suite des φ_i est normale et tend uniformément vers zéro. R contient Δ. Nous verrons que R peut ne pas être le domaine total de convergence vers O.

107. Si, en particulier, $p = 3$, on peut avoir un résultat plus simple. Prenons

$$z_1 = z + a_3 z^3 + \ldots,$$
$$z'_1 = z' + a'_3 z'^3 + \ldots,$$

et cherchons encore un cercle Γ passant par O, qui contienne son conséquent. Il faut déterminer le nombre complexe $\alpha = re^{i\omega}$ de façon que si

$$zz' - \alpha' z - \alpha z' = 0,$$

avec

$$z - \alpha = r e^{i(\omega+2\theta)}, \qquad z = 2r\cos\theta\, e^{i(\omega+\theta)},$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, on ait

$$\delta_1 = z_1 z'_1 - \alpha' z_1 - \alpha z'_1 < 0.$$

Or

$$\delta_1 = \mathcal{R}[a'_3 z'^3 (z-\alpha)] + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré > 4 en r pris pour infiniment petit principal. δ_1 a le signe de $\mathcal{R}[a'_3 z'^3 (z-\alpha)]$ si r est pris assez petit, et cette dernière quantité n'est autre que

$$\mathcal{R}[a'_3 . 8 r^4 \cos^3\theta\, e^{i(2\omega+\theta)}];$$

θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, cette quantité n'aura un signe constant, qui sera négatif, que si l'on a pris

$$2\omega + \arg a'_3 \equiv \pi \qquad (\text{mod } 2\pi).$$

Ceci détermine deux directions opposées sur lesquelles doit se trouver α. On prendra r assez petit sur ces directions pour que, z décrivant Γ, δ_1 soit négatif, et par suite z_1 soit *intérieur à* Γ. Donc Δ ici accède en O par deux pointes opposées, et il est plus simple de prendre pour Δ l'ensemble des deux plus grands cercles tangents extérieurement en O qui satisfont à la dernière condition énoncée; prenant les antécédentes successives des aires intérieures à ces deux cercles, on aura à la limite le domaine de convergence vers O.

108. Ceci a lieu par exemple pour les fractions singulières à cercle fondamental de M. Fatou (*Comptes rendus*, 21 mai 1917).

Considérons

$$z_1 = z + \sum \frac{b_i}{a_i - z} \qquad (b_i > 0,\ a_i \text{ réel}).$$

(L'axe réel est cercle fondamental.)

Le point à l'infini est un point limite singulier.

En effet, on peut écrire autour du point $z = \infty$

$$z_1 = z - \frac{\theta_1}{z} + \frac{\theta_2}{z^2} + \ldots, \qquad \theta_1 = \sum b_i, \qquad \theta_2 = -\sum \frac{b_i}{a_i}, \qquad \ldots,$$

la série du deuxième membre convergeant pour z assez grand.

Posant $z = \frac{1}{Z}$, $z_1 = \frac{1}{Z_1}$, il vient

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z} - \theta_1 Z + \theta_2 Z^2 + \dots$$

ou

$$Z_1 = \frac{Z}{1 - \theta_1 Z^2 + \dots},$$

le dénominateur convergeant pour Z assez petit, ou

$$Z_1 = Z + \theta_1 Z^3 + \dots.$$

On est ici dans le cas $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$.

On sait que tout point intérieur au cercle fondamental admet $Z = 0$ pour point limite de ses conséquents. E′ est ici le cercle fondamental tout entier (*voir* Fatou, p. 807). Dans cet exemple, les deux directions opposées que j'indiquais précédemment sont portées par la droite joignant le point limite singulier au centre du cercle fondamental ([1]). Γ est un cercle quelconque tangent en $Z = 0$, au cercle fondamental, c'est-à-dire à l'axe réel.

109. *Autres exemples* : I. $z_1 = z + z^2$. — L'origine est point limite singulier vers lequel tendent les conséquents du point $z = -\frac{1}{2}$ qui annule $\varphi'(z)$. L'infini est l'autre point limite. Le cercle Γ de diamètre $(0, -1)$ appartient au domaine de O. En effet, on voit que la condition pour que

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1}\right) \leqq \mathcal{R}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z}\right) = -\mathcal{R}\,\frac{1}{1+z} \leqq 0$$

est

$$\mathcal{R}(1+z) \geqq 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{R}(z) \geqq -1.$$

On en conclut que pour tout point du cercle Γ de diamètre $(0, -1)$ (sauf pour -1 qui étant antécédent de O est de E′), on a

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{z_1}\right) < \mathcal{R}\left(\frac{1}{z}\right),$$

([1]) Ici, la perpendiculaire en $Z = 0$ à l'axe réel.

et, par suite, le conséquent est *intérieur à* Γ, puisque l'équation de Γ est

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{z}\right) = -1.$$

Ici $a_2 = 1$. La direction de la tangente à la *pointe* du domaine de O qui est $(-\arg a_2)$ est bien ici la direction OX puisque $\arg a_2 = 0$.

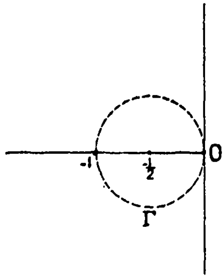

Fig. 29.

Si donc on prend les antécédentes successives de l'aire (Γ), les aires (Γ_{-i}), toutes simplement connexes, tendront vers le domaine R_0 [1] de l'origine. Les courbes Γ_{-i}, frontières de ces aires, tendent vers un continu linéaire qui est E′ et qui sépare R_0 de R_∞ domaine du point à l'infini. Hors de Γ, on a

$$|\varphi'(z)| > |2z - 1| > 1.$$

Donc, des considérations bien simples et que la troisième Partie nous a rendues familières prouvent que les Γ_{-i} tendent *uniformément* vers leur limite E′ qui est une *courbe de Jordan simple fermée* passant par O et -1 tangente en O à la direction OX_1.

110. II. Prenons $z_1 = z + z^3$. Les zéros de $\varphi'(z)$ sont $z = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$; on s'assure de suite que leurs conséquents tendent régulièrement vers O en restant sur l'axe imaginaire. En dehors de O, il n'y a donc ni point limite ni groupe circulaire limite. Le domaine immédiat du point O se compose de deux aires simplement connexes symétriques par rapport à O, tangentes en O à OX et qui s'obtiennent respecti-

(1) R_0 comme R_∞, chacun simplement connexe et d'un seul tenant, sont à la fois domaine immédiat et domaine total de convergence vers le point limite qu'ils contiennent.

vement à partir de deux cercles Γ et Γ' symétriques par rapport à O, tangents en O à OX, et de rayon quelconque pourvu qu'il soit $\leqq \frac{1}{2}$. On peut supposer, si l'on veut, que ce rayon est $\frac{1}{2}$, Γ et Γ' passent alors par i et $-i$ antécédents de O.

On vérifie, en effet, que

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{z_1}\right) - \mathcal{J}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathcal{J}\left(\frac{z}{1+z^2}\right),$$

dont le signe est celui de $\mathcal{J}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, deux nombres inverses ayant

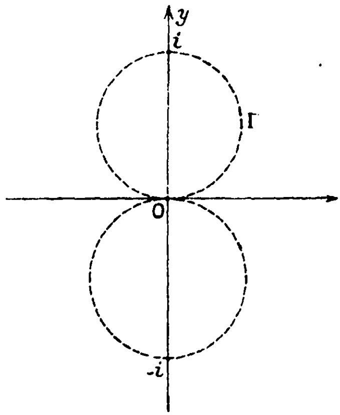

Fig. 30.

des parties imaginaires de signe contraire. Donc, si $|z| < 1$ et si $\mathcal{J}(z) > 0$, on aura

$$\mathcal{J}\left(\frac{1}{z_1}\right) < \mathcal{J}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc, si z est pris intérieur à Γ ou sur Γ (ailleurs qu'en $z = i$), on aura un point z_1 intérieur à Γ, car l'équation de Γ est $\mathcal{J}\left(\frac{1}{z}\right) = -1$, son intérieur correspondant à $\mathcal{J}\left(\frac{1}{z}\right) < -1$. Γ est bien intérieur à R_0. D'ailleurs on voit que $|\varphi'(z)| = 1$ est une lemniscate de foyers $+\frac{i}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{i}{\sqrt{3}}$ passant en O, et intérieure à Γ et Γ'. Donc, sur Γ, Γ' et hors de Γ et Γ', on a $|\varphi'(z)| > 1$. On en conclut que la frontière de R_0, domaine immédiat de O, est formée de deux courbes de Jordan simples fermées tangentes en O à OX et symétriques l'une de l'autre par rapport à OX. R_0 est formé de deux parties symétriques simplement connexes [1]; chacune des deux moitiés de R_0 ne contient qu'un point critique de $\psi(z)$. Si l'on forme le domaine total de convergence vers O en prenant les antécédentes successives de chacune des deux aires dont se compose R_0, on aura une infinité d'aires (limitées chacune par une courbe de Jordan simple fermée) dont les dimensions linéaires tendront vers zéro et qui se grouperont absolument comme se groupaient les aires étudiées dans l'exemple

$$z_1 = \frac{-z^3+3z}{2};$$

l'ensemble de leurs frontières formera un seul continu linéaire qui sera la frontière du domaine d'un seul tenant simplement connexe R_∞.

R_∞ est domaine immédiat et total de convergence vers l'infini. Le continu linéaire qui le borde est une courbe continue fermée représentable par des équations

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (f \text{ et } g \text{ étant continues}),$$
$$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b) \quad (a \leq t \leq b),$$

mais non de Jordan *simple*. Elle a des points doubles partout denses sur elle-même, ce sont les antécédents de l'origine. Tout ces points sont accessibles par l'intérieur de R_∞ comme l'origine est accessible par les deux côtés (positif et négatif) de l'axe réel [2].

111. *Les points critiques de $\psi(z)$ intérieurs au domaine immédiat*

---

(1) Chacune de ces deux parties se transforme d'ailleurs en elle-même par $z_1 = z + z^3$ et par les deux branches de la fonction inverse $\psi(z)$ qui se permutent autour du point critique intérieur à la partie considérée.

(2) Si j'avais pris $z_1 = z - z^3$, les points critiques auraient été réels, l'axe Oy aurait remplacé l'axe OX, et les deux parties de R_0 se seraient trouvées placées comme, dans l'exemple $z_1 = \dfrac{-z^3+3z}{2}$, les deux domaines R_1 et R'_1.

d'un point $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$ [1]. — Envoyons d'abord à l'infini un point $z = \varphi(z)$ où $|\varphi'(z)| > 1$, point de E, pour être sûr que le point à l'infini n'admettra pas le point ζ (qu'on peut supposer être l'origine) pour point limite de ses conséquents. Traçons autour de $\zeta = 0$ un petit cercle C limitant une aire (C), dont nous prendrons les antécédentes (C_{-i}) successives par la branche de $\psi(z)$ qui devient nulle à l'origine. Si, quel que soit i, aucune des (C_{-i}) ne contenait de point critique pour la branche de $\psi(z)$ envisagée, cela voudrait dire que les fonctions

$$z_{-1} = \psi(z) = z + \lambda_2 z^2 + \ldots,$$
$$z_{-2} = \psi_2(z) = z + \ldots$$

obtenues en itérant la branche $\psi(z)$ et qui sont respectivement les branches des inverses de $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, ... nulles à l'origine, sont toutes holomorphes dans (C) [elles n'y ont ni pôles ni point critiques, car (C) ne contient pas de conséquent de l'infini]. Toutes ces fonctions ont leur dérivée $= 1$ à l'origine, et l'une quelconque d'entre elles ne prend qu'une fois chacune de ses valeurs dans (C), c'est-à-dire que si z_1 et z_2 dans (C) sont distincts, on a $\psi_i(z_1) \neq \psi_i(z_2)$, quel que soit i. On peut alors se servir du théorème dû à M. Kœbe et rappelé page 130 du présent Mémoire. $\psi_i(z)$ remplirait toutes les conditions de validité du théorème; z décrivant C, le point z_{-i} décrirait une ligne fermée C_{-i} dont la plus courte distance à l'origine serait $d > \frac{\sqrt{2}-1}{4}\rho$, ρ étant le rayon de C. Toutes les courbes C_{-i} resteraient à une distance finie de O, et ceci est impossible puisqu'on a vu que les parties du cercle C, intérieures au domaine que nous avons appelé Δ' dans ce qui précède, ont des antécédentes qui tendent vers O. On a donc établi, en établissant que la plus courte distance de O à C_{-i} tend vers zéro pour $i = \infty$, que (C_{-i}) finit, i grandissant, par contenir un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O, et cela quelque petite que soit l'aire (C) initiale. On a vu aussi précédemment que seules ne tendaient pas vers zéro les parties des (C_{-i}) successives qui, n'étant pas intérieures à Δ', étaient intérieures à Δ; on a vu que ces parties, intérieures à Δ, étaient inté-

---

[1] Tout ce que nous disons s'applique à

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{2\pi i\frac{p}{q}} \qquad (p, q \text{ entiers}).$$

rieures au domaine immédiat R_0 de l'origine. On en conclut que le *domaine immédiat de l'origine* contient toujours un point critique pour la branche de $\psi(z)$ nulle à l'origine, ou bien, avec moins de précision, qu'il y a un point critique de $\psi(z)$, conséquent d'un point où $\varphi'(z) = 0$, dont les conséquents admettent O pour seul point limite.

112. Le mode de raisonnement employé prouve aussi que *si aucun point critique de $\psi(z)$ n'admettait l'origine pour point limite de ses conséquents, l'origine ne pourrait être de* E'. En effet, (C) étant avec cette hypothèse choisi assez petit pour ne contenir de conséquent d'aucun point critique de $\psi(z)$, toutes les ψ_i seraient holomorphes dans (C) et l'on aurait des limitations *supérieures* et *inférieures* pour $|\psi_i(z)|$, lorsque z décrirait un cercle déterminé quelconque intérieur à (C); ces limitations seraient *indépendantes de l'indice i* (*voir* Klein et Fricke, 2e volume, p. 500 et 506, pour la limitation supérieure de $|\psi_i(z)|$). On en conclurait que O serait intérieur à une région $\mathcal{A}$, simplement connexe, d'un seul tenant, intérieure à toutes les (C_{-i}), cette $\mathcal{A}$ se transformant biunivoquement en elle-même par $z_1 = \varphi(z)$ et par la branche de $z_{-1} = \psi(z)$ nulle à l'origine. Cette $\mathcal{A}$ pourrait être représentée conformément sur l'intérieur d'un cercle de centre O, par $z = f(Z)$. La relation transformée entre Z_1 et Z, $Z_1 = \Phi(Z)$ serait évidemment la rotation $Z_1 = Ze^{i\omega}$ (1) conservant tout cercle de centre O. $z_1 = \varphi(z)$ conserverait alors une infinité de petites courbes analytiques sillonnant $\mathcal{A}$ et entourant O (à la façon des *centres* des équations différentielles du premier ordre). Il est dès lors évident que, dans l'intérieur d'une de ces courbes, toutes les $\varphi_i(z)$ seraient bornées puisque toutes les $z_i = \varphi_i(z)$ transformeraient en elle-même biunivoquement l'aire intérieure à cette courbe. Les $\varphi_i(z)$ formeraient une suite normale dans l'in-

---

(1) $e^{i\omega}$ est la valeur de $\varphi'(\zeta)$ au point $\zeta = \varphi(\zeta)$, et, dans nos hypothèses, $\omega = 2\pi \frac{p}{q}$ (p, q entiers). Si l'on avait $\varphi'(\zeta) = 1$, on aurait tout simplement $e^{i\omega} = 1$, d'où $Z_1 = Z$, impossible évidemment, car $z_1 \neq z$ autour de O. Pour $\omega = 2\pi \frac{p}{q}$, l'impossibilité d'une telle représentation conforme avec $\varphi(z)$ rationnelle résulte aussi de ce que $z_q = \varphi_q(z)$ deviendrait, par cette représentation, $Z_q = Z$ ($e^{i\omega q} = 1$) et l'on aurait $\varphi_q(z) \equiv z$ autour de O, ce qui est évidemment impossible.

térieur de l'aire $\mathcal{A}$ et O ne serait pas de E'. Ceci contredit le résultat déjà trouvé qu'*aucune suite infinie extraite de la suite des* $\varphi_i(z)$ *n'est normale en* O. Donc le fait que O est de E' entraîne qu'un point critique de $\psi(z)$ doit avoir O pour point limite de ses conséquents.

113. *Quelques réflexions sur les points* (1)

$$\zeta = \varphi(\zeta), \qquad \varphi'(\zeta) = e^{i\theta}.$$

θ *incommensurable à* 2π (on suppose toujours $\zeta = 0$). — L'emploi simultané des théorèmes sur les suites normales et du théorème de M. Kœbe, indiqué précédemment, va nous conduire à réduire les possibilités à deux seulement.

Entourons, comme précédemment, le point $\zeta = 0$ d'une petite courbe C (cercle) dont nous prendrons les antécédentes successives par la branche de $\psi(z)$ inverse de φ nulle à l'origine :

$$\varphi(z) = z e^{i\theta} + \ldots.$$
$$\psi(z) = z e^{-i\theta} + \ldots.$$

On a vu que, si aucune des aires (C_{-i}) antécédentes de (C) ne contient de point critique pour la branche de $\psi(z)$ considérée, O est centre d'une région $\mathcal{A}$ sillonnée de courbes analytiques conservées par $z_1 = \varphi(z)$ comme par $z_{-1} = \psi(z)$. On peut, autour de O, trouver une fonction holomorphe

$$Z = f(z),$$

telle qu'entre Z et Z_1 la relation devienne

$$Z_1 = Z e^{i\theta};$$

$f(z)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f[\varphi(z)] = e^{i\theta} f(z),$$

qui est l'équation dite de Schrœder.

Cette équation *a une solution* $f(z)$ *holomorphe en* O, si O n'est pas point limite des conséquents des points critiques de la branche $\psi(z)$ nulle en O. Inversement, si elle a une solution holomorphe

---

(1) Ce que nous dirons s'appliquera évidemment aux groupes circulaires limites pour lesquels $\zeta = \varphi_p(\zeta)$, $\varphi'_p(\zeta) = e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π.

en O, tout point z voisin de O a tous ses conséquents sur la courbe analytique qui dérive de $|Z| = \text{const.}$ par la représentation conforme $Z = f(z)$, $[f(o) = o]$, et sur cette courbe ses conséquents sont partout denses, comme sont denses sur $|Z| = \text{const.}$ les conséquents de Z par $Z_1 = Ze^{i\theta}$. Donc $z = o$ *ne peut être point limite des conséquents d'aucun point du plan.*

114. Il revient donc au même de dire que O est un centre, ou de dire que O n'est point limite des conséquents d'aucun point critique de $\psi(z)$. Qu'il soit possible d'avoir des fonctions $\varphi(z)$, holomorphes en O, telles que pour elles O soit un centre, c'est ce qu'il est facile de voir en partant de

$$Z_1 = Z e^{i\theta},$$

choisissant $f(z)$ holomorphe et nulle en O $[f(o) = o]$ et tirant z_1 de z par l'équation

$$f(z_1) = f(z) e^{i\theta},$$

qui admet une solution $z_1 = \varphi(z)$ holomorphe et nulle en O développable par

$$z_1 = \varphi(z) = z e^{i\theta} + \ldots.$$

Les courbes conservées seraient ici les courbes $|f(z)| = \text{const.}$ Si l'on prend, par exemple, $Z = 2z - z^2$, on aura

$$2z_1 - z_1^2 = e^{i\theta}(2z - z^2) \qquad \text{et} \qquad z_1 = 1 - \sqrt{1 - (2z - z^2) e^{i\theta}}.$$

$$z_1 = \varphi(z) = z e^{i\theta} - \frac{z^2}{2}(e^{i\theta} - e^{2i\theta}) + \ldots \quad (^1).$$

Pour cette transformation, l'origine est centre et les courbes conservées sont les ovales de Cassini de foyers o et 2

$$|2z - z^2| = K.$$

entourant l'origine $(K < 1)$; toutes ces ovales sont intérieures à la boucle de lemniscate L

$$|2z - z^2| = 1$$

qui entoure l'origine.

115. Le problème revient donc, étant donnée une fraction $\varphi(z)$

---

(1) Cette série entière en z converge dans le cercle de centre O tangent intérieurement à la boucle de lemniscate L. $|2z - z^2| = 1$, qui entoure l'origine.

rationnelle, à discerner si $\zeta = 0$ est un centre, c'est-à-dire : 1° si l'équation

$$f[\varphi(z)] = e^{i\theta} f(z)$$

a une solution $f(z)$ holomorphe (et nulle en O) autour de l'origine, ou bien 2° si elle n'en a pas, auquel cas on est sûr que $\zeta = 0$ sera point limite pour les conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O. Telles sont les deux hypothèses auxquelles on est réduit. Nous savons que, $\varphi(z)$ étant rationnelle, la deuxième est seule possible si θ est commensurable à 2π, nous l'avons reconnu au paragraphe précédent, et nous avons vu que l'impossibilité de la première hypothèse venait de ce fait que $\zeta = 0$ était, pour θ commensurable à 2π, *un point de* E'. Cela résultait pour nous alors du fait que $\zeta = 0$ était toujours limite des conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en O. On peut dire aussi que, dans tous les cas où la première hypothèse sera vérifiée, l'aire (Γ) intérieure à une courbe $|f(z)| =$ const. (la constante étant assez petite), se transformant en elle-même biunivoquement par $z_1 = \varphi(z)$ et son inverse $z_{-1} = \psi(z)$, on est sûr que la suite des $\varphi_i(z)$ sera bornée dans (Γ) puisque toutes les $z_i = \varphi_i(z)$ transforment (Γ) en elle-même, donc la suite des φ_i sera normale dans Γ. O ne sera pas point de E'.

Ainsi, la première hypothèse ne peut se trouver vérifiée que si $\zeta = 0$ *n'est pas de* E'. Dans tous les cas où l'on constatera que $\zeta = 0$ est de E', on pourra affirmer que la deuxième hypothèse seule se vérifie, et l'équation de Schrœder n'a pas de solution holomorphe et nulle en O.

116. Montrons qu'effectivement, si $\zeta = 0$ n'est pas de E', c'est-à-dire si les $\varphi_i(z)$ forment une suite normale [1] dans l'aire R (limitée par E') d'un seul tenant qui contient le point $\zeta = 0$ considéré, *la première hypothèse se réalise toujours.*

Entourons en effet $\zeta = 0$ d'une petite aire D, intérieure à R, dans laquelle la suite des $\varphi_i(z)$ est normale. Celle des $\varphi'_i(z)$ l'est aussi, ainsi que celle des $\frac{1}{\varphi'_i(z)}$. En O on a $|\varphi'_i(z)| = 1$, quel que soit i.

---

(1) On supposera toujours que l'infini est un point de E, en sorte que, dans R, il n'y ait aucun pôle pour les $\varphi_i(z)$ et pour leurs fonctions inverses, ces pôles étant les antécédents et les conséquents de l'infini se trouvent alors tous être dans E', c'est-à-dire non intérieurs à R.

Les $|\varphi'_i(z)|$ bornés en O sont bornés dans D, ainsi que les $\left|\frac{1}{\varphi'_i(z)}\right|$. Donc, dans D, assez petite, on aura

$$\frac{1}{K} < |\varphi'_i(z)| < K \qquad (K > 1),$$

quel que soit i.

On pourra aussi borner supérieurement les $|\varphi_i(z)|$ dans D.

Les $\varphi_i(z)$, nulles en O, ayant leurs dérivées toutes égales à 1 en module en O, une suite extraite des $\varphi_i(z)$ ne peut converger uniformément dans D vers une constante, car il faudrait pour cela que les valeurs en D des dérivées des fonctions de la suite convergeassent vers zéro. On peut donc trouver un nombre N tel que, quel que soit i, et quel que soit le nombre complexe a, aucune des φ_i ne prenne dans D plus de N fois la valeur a.

La suite des $\frac{\varphi_i}{z}$ est, dans D, normale comme celle des φ_i, et bornée. Si

$$z_1 = \varphi(z) = z\,e^{i\theta} + \ldots,$$

on voit que

$$z_k = \varphi_k(z) = z\,e^{ki\theta} + \ldots;$$

donc, pour $z = 0$, toutes les $\frac{\varphi_k}{z}$ sont holomorphes et le point 1 est un point limite pour les valeurs de ces fonctions en O. Choisissons alors une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots$ tels que les valeurs $e^{n_1 i\theta}, e^{n_2 i\theta}, \ldots$ tendent vers 1. En O, la suite des $\Phi_k(z) = \frac{\varphi_k}{z}$ tend vers 1.

Donc, on peut extraire de la suite des n_i une suite $N_1, N_2, \ldots$ telle que $\Phi_{N_1}(z), \ldots, \Phi_{N_i}(z), \ldots$ tende dans D uniformément, soit vers la constante 1, soit vers une fonction $\Phi(z)$ holomorphe en O, prenant en O la valeur 1.

Dans la deuxième hypothèse, $\Phi(O)$ étant égal à 1, toutes les fonctions $\Phi_N(z)$ prendraient dans un petit cercle de centre O, à partir d'un certain rang, la valeur 1. Donc, toutes les équations $\Phi_{N_i}(z) = 1$ ou $\varphi_{N_i}(z) = z$ auraient toutes, à partir d'un certain rang, des solutions dans tout cercle de centre O. O serait un point de E′, ce qui est absurde.

Reste donc la seule hypothèse que les $\Phi_{N_i}(z)$ tendent vers la constante 1 dans D, c'est-à-dire, les $\varphi_{N_i}(z)$ tendent *uniformément vers z* dans D. (On voit dès ici apparaître le centre $z = 0$.)

Dans ce cas, on peut tracer autour de O un cercle dans lequel aucune fonction $\varphi_i(z)$ ne prenne la même valeur en deux points distincts. En effet, admettre le contraire serait admettre l'existence d'une suite infinie de rayons ρ_i tendant vers zéro, de couples de points distincts z_i, z'_i, intérieurs respectivement aux cercles de centre O, de rayon ρ_i, et d'indices n_i grandissant indéfiniment, tels que

$$\varphi_{n_i}(z_i) = \varphi_{n_i}(z'_i).$$

De la suite des φ_{n_i}, on peut extraire une suite φ_{χ_i} tendant uniformément dans D vers une fonction $f(z)$ non constante, puisque en O tous les $\varphi'_{n_i}(z)$ sont $= 1$; $f(z)$ est nulle en O, et sa dérivée est en module $= 1$ à l'origine. Donc, $f(z)$ représente conformément un cercle assez petit de centre O *sur une aire qui ne se recouvre nulle part*, c'est-à-dire que $f(z)$ prend des valeurs distinctes en deux points distincts quelconques intérieurs à un cercle assez petit de centre O; pour i assez grand, les $\varphi_{\chi_i}(z)$ diffèrent aussi peu qu'on le veut de $f(z)$; ils ne peuvent donc prendre la même valeur en deux points distincts voisins de O, comme on vient de le supposer dans l'hypothèse. La contradiction qui se rencontre montre donc qu'on peut trouver un petit cercle γ entourant O dans lequel aucune des $\varphi_i(z)$ ne prend la même valeur en deux points distincts.

On peut alors, les $\varphi_i(z)$ étant holomorphes dans γ, ayant en O leurs dérivées $= 1$ en module, et jouissant de la propriété qu'on vient de montrer, leur appliquer le théorème de M. Kœbe déjà mentionné. Les conséquentes de l'aire (γ) sont des aires simples, simplement connexes, ne se recouvrant nulle part et dont les contours restent à distance finie, et supérieure à une limite fixe, de l'origine. On en déduit l'existence d'une aire $\mathcal{A}$ intérieure à toutes les (γ_i), simplement connexe, entourant O. $\mathcal{A}$ sera transformée biunivoquement en elle-même par $z_1 = \varphi(z)$ et par la branche de $\psi(z)$ nulle en O. La représentation conforme de $\mathcal{A}$ sur un cercle de centre O, avec conservation de l'origine prouve ici encore que l'origine est un *centre*. On entourera O d'une famille de courbes analytiques qui se conservent biunivoquement par $z_1 = \varphi(z)$. Les conséquents d'un point z assez voisin de O seront partout denses sur la courbe analytique qui passe en ce point [en particulier, il y aura une suite d'indices $n_1, n_2, \ldots$ tels que $\varphi_{n_i}(z)$ tende vers z uniformément dans $\mathcal{A}$].

L'équation de Schrœder

$$F[\varphi(z)] = e^{i\theta} F(z)$$

aura une solution nulle à l'origine, holomorphe en O. Et, d'après les propriétés des domaines R limités par E′ (¹), F(z) sera holomorphe dans tout ce domaine R, tout R sera sillonné par des courbes analytiques conservées par $z_1 = \varphi(z)$. $\zeta = 0$ ne sera limite pour les conséquents d'aucun point du plan.

117. Ainsi, lorsque θ est incommensurable à 2π, nous n'avons le choix qu'entre deux hypothèses :

1° $\zeta = 0$ n'est pas de E′. Alors, c'est un *centre*. Toute l'aire R d'un seul tenant entourant ce centre, limitée par E′, est sillonnée de courbes analytiques conservées par $z_1 = \varphi(z)$. Le domaine R ne contient aucun point critique pour la branche $\psi(z)$ inverse de $\varphi(z)$ qui est nulle à l'origine (²). On voit aussi facilement qu'aucun antécédent du domaine R ne peut contenir de point critique de la fonction algébrique $\psi(z)$, sans que $\zeta = 0$ cesse d'être un centre. L'équation de Schrœder a une solution F(z) holomorphe dans tout R. Pour cette solution, les points frontières de R (points de E′) sont des points singuliers essentiels, et le théorème fondamental, démontré dans la première Partie relativement aux points de E′ et aux deux seules valeurs exceptionnelles, apparaît ici comme le théorème de M. Picard appliqué à la solution F(z) de l'équation de Schrœder. Tous ces faits se tiennent entre eux et tiennent à ce que les $\varphi_i(z)$ sont supposées normales en $\zeta = 0$.

2° $\zeta = 0$ est de E′. Alors, il est limite pour les conséquents d'un point critique de la branche $\psi(z)$ nulle en $\zeta = 0$. L'équation de Schrœder n'a pas de solution holomorphe à l'origine. $\zeta = 0$ n'est pas un centre.

Je n'ai pas pu, jusqu'ici (³), me prononcer entre ces deux hypothèses qui, pour un cas déterminé, s'excluent mutuellement. Il m'aurait fallu, pour pousser la question plus à fond, plus de temps et de connaissances que je n'en ai. Je me réserve d'y revenir plus tard, s'il y a lieu, car peut-être l'utilisation de l'équation de Schrœder conduira-t-elle à trancher la question.

Si, en effet, on cherche les coefficients de Taylor de F(z) satis-

---

(¹) Toute suite extraite des $\varphi_{n_i}(z)$, qui converge uniformément dans une partie de R, converge uniformément dans toute aire intérieure à R.

(²) Ni pour les $\psi_i(z)$ itérées de $\psi(z)$, branches inverses de $\varphi_i(z)$ qui sont nulles en O.

(³) *Voir* note (¹), page 223.

faisant à

$$F[\varphi(z)] = e^{i\theta} F(z),$$

où

$$\varphi(z) = z e^{i\theta} + \ldots,$$

on peut les déterminer tous de proche en proche lorsque θ est incommensurable à 2π (ce calcul formel est en général impossible si θ est commensurable à 2π). J'ai essayé de montrer la convergence de développement par la méthode des majorantes, mais toutes les majorantes que j'ai obtenues étaient divergentes ! J'ai tenu à montrer cependant que, pour $\varphi(z)$ holomorphe autour de l'origine, cette équation pouvait, dans certains cas, avoir une solution holomorphe, en sorte que l'existence des centres est certaine. [Exemple donné où $F(z) = 2z - z^2$, $\varphi(z)$ étant une fonction algébrique de z.] Reste à savoir si, pour $\varphi(z)$ rationnelle, elle peut en avoir; il serait intéressant de décider soit l'affirmative en construisant un exemple, soit la négative.

NOTE ADDITIONNELLE.

118. J'ai reconnu, après le dépôt de ce Mémoire, qu'il n'était pas toujours exact de dire que l'équation $z = \varphi(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ a toujours une solution ζ pour laquelle $|\varphi'(\zeta)| > 1$. Ce serait exact si cette équation *n'avait pas de racine double*, mais la présence possible de ces racines doubles pour lesquelles $\zeta = \varphi(\zeta)$ et $\varphi'(\zeta) = 1$ oblige à conclure que :

1° Ou bien il y a une racine au moins de $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $|\varphi'(\zeta)| > 1$;

2° Ou bien il y a au moins une racine $\zeta = \varphi(\zeta)$ où $\varphi'(\zeta) = 1$.

Dans le premier cas, tout ce que nous avons dit dans la première Partie du Mémoire, de l'ensemble E, de E' et de leurs propriétés, est absolument légitime.

Toutes ces propriétés *restent vraies dans le deuxième cas*, mais elles ont besoin d'être présentées différemment.

On reconnaît, en effet, d'abord, comme à la page 223 du Mémoire, que les $\varphi_n(z)$ *ne forment pas une suite normale* au point $\zeta = \varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta) = 1$.

Donc, dans un cercle arbitrairement petit de centre ζ, toute valeur déterminée, sauf deux au plus, est prise par une certaine fonction $\varphi_n(z)$. Ces valeurs exceptionnelles, on voit aisément, comme dans la première Partie, qu'elles ne se présentent que si $z_1 = \varphi(z)$ se ramène par transformation homographique à $z_1 = z^{\pm m}$ ou à un polynome. Mais certainement ζ *n'est pas valeur exceptionnelle ni aucun de ses antécédents*. (En aucun de ces antécédents, les φ_n ne sont d'ailleurs normales.) ζ *est donc nécessairement point limite de ses propres antécédents*. Si l'on entoure ζ d'un cercle Γ suffisamment petit, on pourra trouver une suite ζ_{-n_1}, ζ_{-n_2}, ... d'antécédents de ζ intérieurs à Γ et tendant vers ζ. Il y a plus. L'*étude locale* des environs de ζ, faite aux pages 224 et suivantes du Mémoire précédent, prouve que, si l'on entoure ζ d'un cercle Γ suffisamment petit, on peut trouver deux domaines (¹) Δ_1 et Δ'_1 intérieurs à Γ dont ζ soit point frontière, Δ_1 et Δ'_1 ayant une ou plusieurs aires communes, domaines tels que tout point de Δ_1 ait *tous ses conséquents dans* Γ (*et dans* Δ_1), *tendant vers* ζ *et vers* ζ *seul*, et que *tout point de* Δ'_1 *ait tous ses antécédents* [par la branche de la fonction $\psi(z)$, inverse de $\varphi(z)$, égale à ζ en ζ] *successifs intérieurs à* Γ (*et à* Δ'_1) *et tendant vers* ζ *et vers* ζ *seul* (²). Ajoutons que, dans le domaine formé par Δ_1 et Δ'_1, on peut enfermer un cercle assez petit Γ_1 de centre ζ. Tout point de Γ_1 appartient donc à Δ_1 ou à Δ'_1.

Envisageons alors un cercle Γ assez petit pour laisser à son extérieur un certain antécédent ζ_{-p} de ζ et pour que la construction précédente soit possible.

(¹) Si par exemple $\zeta = 0$ et si $z_1 = \varphi(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_2 \neq 0$, on pourra, à condition que Γ soit assez petit, prendre pour Δ_1 l'aire intérieure à deux cercles convenables passant par ζ et tangents à Γ, et pour Δ'_1 l'aire symétrique par rap-

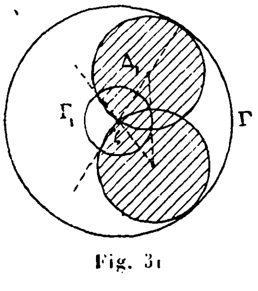

Fig. 31

port à ζ. Il est alors visible que $\Delta_1 + \Delta'_1$ contient un cercle assez petit Γ_1 de centre ζ.

(²) Dans Δ'_1 la branche de $\psi(z)$ égale à ζ en ζ, et toutes les itérées de cette branche sont *holomorphes*.

Dans Γ on peut trouver une suite infinie d'antécédents de ζ :

$$\zeta_{n_1},\quad \zeta_{n_2},\quad \ldots \qquad (p < n_1 < n_2 < \ldots)$$

tendant vers ζ. Si l'on fait la construction précédente, à partir d'un certain indice n_i, les $\zeta_{-n_i}, \zeta_{-n_{i+1}}, \ldots$ sont intérieurs au cercle Γ_1. Mais ζ_{-n_i} ayant un conséquent ζ_{-p} extérieur à Γ n'appartient pas à Δ_1 ; il appartient donc à Δ'_1, c'est-à-dire que *tous ses antécédents* par la branche de $\psi(z)$ qui égale ζ en ζ sont intérieurs à Γ et tendent vers ζ. On peut même entourer ζ_{-n_i} d'un cercle assez petit γ pour que *toutes les aires antécédentes successives de ce cercle par la branche considérée de* $\psi(z)$ soient des aires planes simplement connexes tendant vers ζ. Donc dans tout cercle de centre ζ, si petit soit-il, on peut trouver une aire plane à un seul contour γ_{-N} qui soit antécédente de l'aire du cercle γ précédent.

Cela équivaut à dire que, quelque petite que soit une aire plane ω entourant ζ, tout le cercle γ sera intérieur à un feuillet d'une certaine itérée ω_N de l'aire ω, ou bien que *sur un certain feuillet de* ω_N *tous les points qui se projettent à l'intérieur de* γ *ou sur* γ *sont des points intérieurs à* ω_N. Or on a pu choisir γ assez petit pour que l'itérée γ_{n_i} contenant ζ soit une petite aire simple entourant ζ, qu'on choisira précisément pour l'aire ω. Et l'on a vu dans la première Partie (troisième corollaire du théorème fondamental) qu'il résulte de là, en vertu du paragraphe 5 des Préliminaires, que γ contient toujours une racine au moins de l'équation $z = \varphi_{N+n_i}(z)$ pour laquelle $|\varphi'_{N+n_i}(z)| > 1$, puisque l'itérée d'ordre $N + n_i$ de γ n'est autre que ω_N, ω étant identique à l'itérée d'ordre n_i de γ.

On vient donc de prouver que *tout point* ζ *vérifiant* $\zeta = \varphi(\zeta)$ avec $\varphi'(\zeta) = 1$ *est limite de points-racines d'équations* $z = \varphi_n(z)$ *où* $|\varphi'_n(z)| > 1$. Ceci prouve bien que E existe, contient une infinité dénombrable de points, et qu'on est en droit de parler de son dérivé E'. L'exposition se poursuit maintenant comme dans le Mémoire.