JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. DE MONTESSUS DE BALLORE

Sur les quartiques gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 3 (1917), p. 77-170.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1917_7_3__77_0>

Sur les quartiques gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification,

Par R. de MONTESSUS de BALLORE.

INTRODUCTION.

Les quartiques gauches de première espèce, qui sont les intersections de deux surfaces du second ordre, se partagent en trois groupes : les quartiques φ''_4, qui ont un point de rebroussement; les quartiques φ'_4, qui ont un point double, et les quartiques φ_4, qui n'ont pas de point singulier (¹).

Les quartiques φ''_4 et φ'_4 sont unicursales, comme le sont aussi les quartiques gauches de deuxième espèce : on sait que ces dernières courbes sont les intersections d'une surface du troisième ordre et d'une surface du second ordre, qui se coupent en outre suivant deux génératrices d'un même système de la quadrique. On sait aussi qu'il n'existe pas d'autres courbes du quatrième ordre que celles de deuxième et de première espèce.

Certains théorèmes généraux montrent que les quartiques φ_4, elles ne sont pas unicursales, peuvent être représentées paramétriquement au moyen des fonctions elliptiques : et cela met en relief des propriétés intéressantes et bien connues de ces courbes. Cependant, il faut prendre garde, nous le verrons, que ces quartiques doivent être partagées en trois sous-groupes : les courbes φ^1_4, pour lesquelles le faisceau de quadriques correspondant comprend quatre cônes du second degré réels; les courbes φ^2_4, pour lesquelles deux cônes seulement sont réels; les courbes φ^3_4, où il n'y a plus de cônes réels : et, si un cône est imaginaire, son sommet est imaginaire, quand la courbe est réelle.

(¹) Cette notation paraît être insuffisante. Une notation un peu différente sera proposée au n° 45.

W. Killing (¹) a réalisé la préparation paramétrique des quartiques φ_4^1 au moyen des fonctions σ, et l'on peut remplacer ces fonctions, qui figurent par leurs rapports, par $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, sous réserve de montrer que le module k^2 est compris entre o et 1. *Cette représentation ne convient plus pour les sous-groupes φ_4^2, φ_4^3, à moins d'accepter un tétraèdre de référence imaginaire*, car le tétraèdre employé a pour sommets les sommets des quatre cônes correspondant à la courbe : *et si le tétraèdre est imaginaire, les coordonnées le sont aussi.* La même remarque doit être faite pour la représentation indiquée par Léauté (²), qui emploie les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ $\operatorname{dn} u$, et pour les résultats obtenus par G. Loria (³), qui se sert des fonctions θ.

H. Halphen (⁴) a montré que les fonctions pu, $p'u$, $p''u$ peuvent représenter les quartiques de première espèce; ici, deux cônes au moins doivent être réels, sauf recours encore à des coordonnées imaginaires, quand aucun des cônes n'est réel. Le cas de quatre cônes réels prêterait à discussion.

Plus récemment, A. Enders (⁵) a distingué, dans cette question, les trois sous-groupes φ_4^1, φ_4^2, φ_4^3 et paraît avoir employé des tétraèdres réels, mais les formules qu'il donne sont compliquées d'imaginaires dont la présence n'est pas justifiée pour les quartiques des sous-groupes φ_4^1, φ_4^2. Les fonctions employées pour la représentation paramétrique sont celles de Jacobi.

Chacun de ces auteurs enfin se préoccupe plutôt de montrer la *possibilité* de représenter les quartiques φ_4 par les fonctions elliptiques et d'indiquer des formes générales de représentations paramétriques, que de réaliser les transformations permettant d'écrire les équations paramétriques en fonction des données qui figurent dans les équations tétraédriques ou cartésiennes. Aussi leurs résultats ne permettent pas d'aborder certains problèmes importants, par exemple celui, non encore étudié, et d'un grand intérêt, de la description des diverses quartiques constituant chaque groupe ou sous-groupe : les formes géométriques de ces courbes ne nous sont connues que dans des cas particuliers.

(¹) W. KILLING, *Diss. Berlin*, 1872, p. 11.

(²) H. LÉAUTÉ, *Journal de l'École Polytechnique*, XLVIᵉ cahier, 1879, p. 65.

(³) G. LORIA, *Atti R. Acad. Lincei, Rendiconti*, 6ᵉ série, t. II, 1890, p. 179.

(⁴) H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II. Paris, 1880, p. 450. Voir aussi D'ESCLAIBES, *Thèse*, 1880, p. 97.

(⁵) A. ENDERS, *Nova Acta Acad. Leop.*, 85, 1906, p. 401.

J'obtiens dans ce Mémoire la représentation par les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ des quartiques définies par leurs équations tétraédriques, en partant pour chaque sous-groupe φ_4^1, φ_4^2, φ_4^3 de coordonnées *réelles*. Ces fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ ont toujours leur module k réel et compris entre -1 et $+1$. Dans un cas, un seul, il s'introduit des imaginaires, c'est à propos des quartiques φ_4^3 (1).

Je donne ensuite la solution de la représentation paramétrique des quartiques définies par trois cylindres : ici tous les éléments sont réels. Ce problème n'avait pas encore été abordé : il présente de grandes difficultés (2).

Je montre aussi que les quartiques φ_4', qui sont de genre zéro, doivent être partagées en deux sous-groupes.

Comme conclusion, j'établis une classification nouvelle des quartiques gauches de première espèce.

Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ n'ont pas été choisies au hasard. Leur intérêt, pour la représentation de courbes réelles, vient de ce qu'elles rendent aisée la distinction du réel de l'imaginaire et aussi de ce que ce sont les seules fonctions elliptiques dont on ait construit des Tables numériques, sous forme d'intégrales elliptiques (3).

Les calculs sont minutieux et offrent quelque difficulté; le lecteur ne devra point en être surpris : il semble que ce caractère soit inévitablement attaché à toutes les questions se rapportant aux courbes gauches (4).

Chapitre I. — Quartiques φ_4^1.

1. Les quartiques φ_4^1, pour lesquelles les quatre cônes sont réels, peuvent être représentées (5) par le système d'équations

$$(1)\qquad \alpha X^2+\beta Y^2+\gamma T^2=0, \qquad \delta X^2+\varepsilon Z^2+\zeta T^2=0,$$

(1) R. de Montessus de Ballore, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 166, 1918, p. 212.

(2) R. de Montessus de Ballore, *Ibid.*, p. 345.

(3) Des Tables étendues et interpolables des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce et de la fonction $\operatorname{Log} q$ sont actuellement sous presse (Paris, Gauthier-Villars et Cie).

(4) *Cf.* par exemple, à ce propos, H. Halphen, *Classification des courbes gauches algébriques* (*J. E. P.*, 1882), et R. de Montessus de Ballore, *Sur les courbes gauches algébriques* (*J. M. P. A.*, 1916).

(5) Painvin, *Nouv. Ann. Math.*, 1868, et R. de Montessus de Ballore, *Introduction à la Théorie des Courbes gauches algébriques*, Paris, Croville-Morant, 1918 (*Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris*), autographié.

où X, Y, Z, T représentent les coordonnées x, y, z, t de la courbe, prises dans un certain ordre (par exemple, $x = \mathrm{Y}$, $y = \mathrm{X}$, $z = \mathrm{Z}$, $t = \mathrm{T}$), le tétraèdre de référence ayant pour sommets les sommets des quatre cônes.

Parmi les coefficients α, β, γ, un, au moins, est négatif et deux, au plus, sont négatifs, sinon la courbe serait imaginaire. Un changement de signes ramène le second cas au premier. Il en est de même pour δ, ε, ζ.

Si nous mettons les signes *en évidence*, nous obtenons les neuf combinaisons que voici :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right. \qquad (2)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right. \qquad (4)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} -\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right. \qquad (6)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 &= 0,\\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ -\delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right. \qquad (8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 + \varepsilon Z^2 - \zeta T^2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha X^2 - \beta Y^2 + \gamma T^2 &= 0,\\ \delta X^2 - \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Nous allons réduire à trois les neuf systèmes d'équations qu'on vient d'écrire.

1° Échangeons X et T dans le système (2); il vient

$$-\gamma X^2 + \beta Y^2 + \alpha X^2 = 0, \qquad -\zeta X^2 + \varepsilon Z^2 + \delta X^2 = 0,$$

système équivalant à (1); la même transformation montre que (4) équivaut à (3) et que (6, 8) sont respectivement équivalents à (5, 7).

2° Le système (9) est réductible au système (5). En effet, éliminons d'abord X^2, puis T^2 entre les deux équations (9). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} -\beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) T^2 + \alpha\varepsilon Z^2 &= 0,\\ -\beta\zeta Y^2 - (\gamma\delta - \alpha\zeta) X^2 + \gamma\varepsilon Z^2 &= 0;\end{aligned}\right.$$

si $\gamma\delta - \alpha\zeta > 0$, nous écrirons ce système

$$\left\{\begin{aligned} -\beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) T^2 + \alpha\varepsilon Z^2 &= 0,\\ \beta\delta Y^2 + (\gamma\delta - \alpha\zeta) X^2 - \gamma\varepsilon Z^2 &= 0;\end{aligned}\right.$$

sa forme équivaut à celle de (5); si $\gamma\delta - \alpha\zeta < 0$, nous l'écrirons

$$\begin{cases} \beta\delta Y^2 + (\alpha\zeta - \gamma\delta)T^2 - \alpha\varepsilon Z^2 = 0, \\ -\beta\zeta Y^2 + (\alpha\zeta - \gamma\delta)X^2 + \gamma\varepsilon Z^2 = 0, \end{cases}$$

forme équivalant à (6), donc à (5), 1°.

3° Le système (7) est lui-même réductible à (5), par la même transformation. Éliminons en effet X^2, puis T^2; nous avons

$$\begin{cases} -\beta\delta Y^2 + \alpha\varepsilon Z^2 + (\gamma\delta + \alpha\zeta)T^2 = 0, \\ \beta\zeta Y^2 + \gamma\varepsilon Z^2 - (\gamma\delta + \alpha\zeta)X^2 = 0. \end{cases}$$

Il ne reste donc à étudier que les systèmes (1), (3), (5).

2. Ne précisons plus, *pour le moment*, les signes de α, β, γ, δ, ε, ζ. Revenons au système général

(10) $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2, \quad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0$ (signes de α, ..., ζ non précisés)

que nous écrirons

$$\alpha \frac{X^2}{T^2} + \beta \frac{Y^2}{T^2} + \gamma = 0, \qquad \delta \frac{X^2}{T^2} + \varepsilon \frac{Z^2}{T^2} + \zeta = 0.$$

1° Posons

(11) $$\frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u};$$

il vient

(12) $$\begin{cases} \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2(1 - \operatorname{sn}^2 u) + \gamma \operatorname{sn}^2 u = 0, \\ \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2 (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) + \zeta \operatorname{sn}^2 u = 0. \end{cases}$$

Exprimons que ces deux relations sont identiquement vérifiées. Nous aurons

(13) $\alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 = 0, \quad -\beta\mu^2 + \gamma = 0, \quad \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2 = 0, \quad -\varepsilon\nu^2 k^2 + \zeta = 0.$

Ces relations montrent que α et β d'une part, δ et ε d'autre part, sont de signes contraires et que β, γ, puis ε, ζ sont de mêmes signes. Les quatre combinaisons possibles

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
+	−	−	+	−	−
+	−	−	−	+	+
−	+	+	+	−	−
−	+	+	−	+	+

se réduisent, en changeant au besoin tous les signes de l'une des équations (10) ou même de ces deux équations, à la combinaison suivante, *où les signes sont mis en évidence :*

$$-\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma T^2=0, \qquad -\delta X^2+\varepsilon Z^2+\zeta T^2=0;$$

c'est le système (1).

Calculons k^2 au moyen des équations (13). Ces équations donnent

$$\gamma=\beta\mu^2, \qquad \lambda^2=-\frac{\beta}{\alpha}\mu^2=-\frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \varepsilon\nu^2=-\delta\lambda^2=\frac{\gamma\delta}{\alpha},$$

$$k^2=\frac{\zeta}{\varepsilon\nu^2}=\frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta};$$

$\frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta}$ est positif, comme il est nécessaire; cette quantité est moindre que 1 si $\alpha\zeta<\gamma\delta$; si l'on avait $\alpha\zeta>\gamma\delta$, il suffirait de poser, au lieu de (11),

$$\frac{X}{T}=\frac{\lambda}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Y}{T}=\frac{\mu \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \qquad \frac{Z}{T}=\frac{\nu \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u};$$

on trouverait un système analogue à (13), avec

$$0<k^2=\frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}<1.$$

2° Revenons au système (10) et posons

$$\frac{X}{T}=\frac{\lambda}{\operatorname{cn} u}, \qquad \frac{Y}{T}=\frac{\mu \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \qquad \frac{Z}{T}=\frac{\nu \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u};$$

le système (10) prendra la forme

$$\begin{cases} \alpha\lambda^2+\beta\mu^2\operatorname{sn}^2 u + \gamma(1-\operatorname{sn}^2 u)=0, \\ \delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)+\zeta(1-\operatorname{sn}^2 u)=0. \end{cases}$$

Exprimons que ces relations sont identiquement vérifiées :

$$\begin{cases} \alpha\lambda^2+\gamma=0, \qquad \beta\mu^2-\gamma=0, \\ \delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2+\zeta=0, \qquad \varepsilon\nu^2k^2+\zeta=0; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par élimination de ζ entre les deux dernières,

$$\delta\lambda^2+\varepsilon\nu^2(1-k^2)=0;$$

α et γ, ε et ζ, δ et ε devant être deux à deux de même signes, β et γ

devant être de signes contraires, nous avons à étudier les combinaisons suivantes :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
+	—	—	+	—	+
+	—	—	—	+	—
—	+	+	+	—	+
—	+	+	—	+	—

qui par des changements de signes convenables, se réduisent à celle-ci :

$$- \quad + \quad + \quad + \quad - \quad +$$

C'est le système (3). Ici,

$$\varepsilon\nu^2 = -\delta\lambda^2 - \zeta = \frac{\gamma\delta}{\alpha} \qquad = \frac{\gamma\delta - \alpha\zeta}{\alpha},$$

$$k^2 = -\frac{\zeta}{\varepsilon\nu^2} \qquad = \frac{\alpha\zeta}{\alpha\zeta - \gamma\delta} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}};$$

comme $\frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta}$ est *négatif*, k^2 est compris entre o et 1.

3° Posons en dernier lieu

$$\frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};$$

le système (10) devient

$$\begin{cases} \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2 \qquad \operatorname{sn}^2 u + \gamma(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = 0, \\ \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2(1 - \operatorname{sn}^2 u) + \zeta(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) = 0, \end{cases}$$

d'où

$$\alpha\lambda^2 + \gamma = 0, \qquad \beta\mu^2 - \gamma k^2 = 0, \qquad \delta\lambda^2 + \varepsilon\nu^2 + \zeta = 0, \qquad \varepsilon\nu^2 + \zeta k^2 = 0,$$

et, en éliminant $\varepsilon\nu^2$ entre les deux dernières équations,

$$\delta\lambda^2 + \zeta k'^2 = 0;$$

donc α et γ, puis ε et ζ, et δ, ζ sont respectivement de signes contraires, mais β et γ sont de même signe, ce qui se résume en

α.	β.	γ.	δ.	ε.	ζ.
—	+	+	+	+	—

et l'on trouve ainsi le système (5). On a

$$k'^2 = -\frac{\delta}{\zeta}\lambda^2 = \frac{\gamma\delta}{\alpha\zeta},$$

quantité positive.

Cette transformation suppose $\gamma\delta < \alpha\zeta$. Si $\gamma\delta > \alpha\zeta$, on écrit

$$\frac{X}{T} = \frac{\lambda}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Y}{T} = \frac{\mu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \frac{Z}{T} = \frac{\nu \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

et l'on obtient pour k'^2 :

$$k'^2 = \frac{\alpha\zeta}{\gamma\delta}.$$

3. Une quartique φ_4^1, définie par un système tel que (1), peut donc toujours être représentée paramétriquement au moyen des fonctions sn, cn, dn par un des systèmes

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{dn} u} = \frac{T}{\operatorname{sn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{dn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{T}{\operatorname{sn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{dn} u} = \frac{T}{\operatorname{cn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{T}{\operatorname{dn} u},$$
$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{Z}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{T}{\operatorname{dn} u},$$

où λ, μ, ν sont réels et $0 < k_2 < 1$.

En faisant correspondre convenablement x, y, z, t à X, Y, Z, T, il en résulte que *toute quartique φ_4^1 définie par un système d'équations*

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma T^2 = 0, \qquad \delta X^2 + \varepsilon Z^2 + \zeta T^2 = 0$$

peut être représentée par des équations paramétriques de la forme

$$(14) \qquad \frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u} \qquad (0 < k^2 \text{ arbitraire } < 1),$$

où λ, μ, ν sont réels. On peut ajouter que les expressions de λ, μ, ν en fonction de α, β, γ, δ, ε, ζ sont des plus faciles à obtenir.

Réciproquement, les équations (14) *représentent toujours une quartique* φ_4^1, *quels que soient* λ, μ, ν, k^2.

Éliminons en effet $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ entre les équations (14) et celles-ci

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1;$$

il vient

$$x^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} y^2 - \frac{\lambda^2}{\nu^2} z^2 = 0, \qquad x^2 - k^2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} y^2 t^2,$$

équations qui représentent la courbe dans le système de coordonnées où le tétraèdre a pour sommets les sommets de quatre cônes du faisceau ponctuel de quadriques correspondant à la courbe.

L'équation du faisceau de quadriques est

$$x^2(1+\Lambda) - \frac{\lambda^2}{\mu^2}(1+k^2\Lambda) y^2 - \frac{\lambda^2}{\nu^2} z^2 - \lambda^2 \Lambda t^2 = 0;$$

l'équation en Δ

$$\begin{vmatrix} 1+\Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2}{\mu^2}(1+k^2\Lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2}{\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1+\Lambda)(1+k^2\Lambda)\Lambda = 0$$

a une racine infinie (elle est, en principe du quatrième degré), une racine égale à -1, une racine réelle, une racine égale à $-\frac{1}{k^2}$.

Ces racines sont réelles et différentes les unes des autres, et cela correspond à la définition des quartiques φ_4^1.

Chapitre II. — Quartiques φ_4^2.

4. Ces quartiques peuvent être définies par les deux cônes [1]

$$y^2 + B(z^2 - t^2) + 2Dzt = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0.$$

---

[1] Painvin, etc., *loc. cit.*, p. 79, *Note* (5).

Posons

$$(2)\qquad t = \alpha z;$$

il vient

$$(3)\qquad y^2 + [B(1-\alpha^2) + 2D\alpha]z^2 = 0, \qquad x^2 + [B'(1-\alpha^2) + D'\alpha]z^2 = 0.$$

Ici encore, les signes de B, D, B′, D′ vont jouer un rôle fondamental.

5. I. Soit

$$B = -p^2 < 0, \qquad D = -q^2 < 0;$$

nous avons

$$y^2 + (p^2\alpha^2 - 2q^2\alpha - p^2)z^2 = 0,$$

ou

$$(4)\qquad y^2 - \frac{p^4+q^4}{p^2}\left[1 - \frac{(p^2\alpha - q^2)^2}{p^4+q^4}\right]z^2 = 0.$$

Nous avons

$$1 - \frac{(p^2\alpha - q^2)^2}{p^4+q^4} > 0,$$

sinon le premier membre de cette équation ne pourrait s'annuler pour des valeurs réelles de $\frac{y}{z}$; nous pouvons donc poser

$$\frac{p^2\alpha - q^2}{\sqrt{p^4+q^4}} = \sin\varphi,$$

et nous en tirons

$$\alpha = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}.$$

Il en résulte (2, 4),

$$(5)\qquad t = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}z, \qquad y = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}z\cos\varphi.$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} z^2 - t^2 &= z^2 - \frac{(\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2)^2}{p^4}z^2 \\ &= \frac{1}{p^4}\left[-(p^4+q^4)\sin^2\varphi - 2q^2\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + p^4 - q^4\right]z^2, \\ zt &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}z^2; \end{aligned}$$

portons dans (1^2); il vient, après réduction,

$$(6)\qquad x=\frac{1}{p^2}\sqrt{\begin{array}{l}B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi+2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2-D'p^2)\sin\varphi\\ -B'(p^4-q^4)-2D'p^2q^2z.\end{array}}$$

On remarquera que *le discriminant de la quantité sous le radical*

$$(7)\quad (p^4+q^4)[(B'q^2-D'p^2)^2+B'^2(p^4-q^4)+2B'D'p^2q^2]=(p^4+q^4)D'^2p^4$$

est toujours positif.

Les formules (5, 6) réalisent une représentation paramétrique des quartiques φ_4^2, dans l'hypothèse $B<0$, $D<0$.

II. Soit maintenant

$$B=-p^2<0,\qquad D=q^2>0.$$

La représentation paramétrique sera réalisée en changeant q^2 en $-q^2$ dans les formules (5, 6); *le discriminant* (7) *n'est pas modifié et reste positif.*

III. Soit

$$B=p^2>0,\qquad D=q^2>0.$$

Nous avons ici

$$y^2-(p^2\alpha^2-2q^2\alpha-p^2)z^2=0,$$

$$y^2-\frac{p^4+q^4}{p^2}\left[\frac{(p^2\alpha-q^2)^2}{p^4+q^4}-1\right]z^2=0,$$

avec nécessairement

$$\frac{(p^2\alpha-q^2)^2}{p^4+q^4}-1\geqq 0,$$

sinon $\frac{y}{z}$ serait imaginaire. Posons

$$(8)\qquad \frac{p^2\alpha-q^2}{\sqrt{p^4+q^4}}=\frac{1}{\sin\varphi};$$

nous aurons

$$y^2-\frac{p^4+q^4}{p^2}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-1\right)z^2=0,$$

$$(9)\qquad y=\frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,z.$$

La relation (8) donne ensuite

$$\alpha=\frac{q^2\sin\varphi+\sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi},$$

et il en résulte (2)

$$(10) \qquad t = \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4 + q^4}}{p^2 \sin\varphi} z.$$

Nous avons ensuite

$$z^2 - t^2 = z^2 \left[1 - \frac{(q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4})^2}{p^4 \sin^2\varphi} \right]$$
$$= \frac{(p^4 - q^4)\sin^2\varphi - 2q^2\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi - (p^4+q^4)}{p^4 \sin^2\varphi} z^2$$

et (10)

$$zt = \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2 \sin\varphi} z^2;$$

nous avons encore (1²)

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{-B'(p^4 - q^4)\sin^2\varphi + 2B'q^2\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + B'(p^4+q^4)}{p^4\sin^2\varphi}$$
$$- 2D' \frac{q^2 \sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2 \sin\varphi}$$

et, après réductions,

$$(11) \quad x = \frac{1}{p^2 \sin\varphi} \sqrt{\begin{aligned}&[-B'(p^4 - q^4) - 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ &+ 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4+q^4)\end{aligned}}\, z.$$

Les formules (9, 10, 11) donnent une représentation paramétrique, dans l'hypothèse actuellement faite.

Le discriminant de la quantité sous le radical

$$(p^4+q^4)\{(B'q^2 - D'p^2)^2 - [-B'(p^4 - q^4) - 2D'p^2q^2]B'\} = (p^4+q^4)(B'^2 + D'^2)p^4$$

est toujours positif, comme dans les cas précédents.

IV. Soit en dernier lieu

$$B = p^2 > 0, \qquad D = -q^2 < 0;$$

on obtiendra les formules voulues en changeant q^2 en $-q^2$ dans les relations (9, 10, 11); *le discriminant*

$$(p^4+q^4)(B'^2 + D'^2)p^4$$

reste positif.

En résumé, en distinguant quatre cas, les quartiques φ_4^2 *peuvent* *être représentées paramétriquement comme il suit, au moyen des fonctions circulaires :*

I.

$$y^2 - p^2(z^2 - t^2) - 2q^2zt = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0;$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{1}{p^2}\sqrt{\begin{aligned} &B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi \\ &\quad + 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi - B'(p^4 - q^4) - 2D'p^2q^2, \end{aligned}} \\ \frac{y}{z} &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p} z\cos\varphi, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi + q^2}{p^2}. \end{aligned} \right.$$

II.

$$y^2 - p^2(z^2 - t^2) + 2q^2zt = 0, \qquad x^2 + b'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0;$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{1}{p^2}\sqrt{\begin{aligned} &B'(p^4+q^4)\sin^2\varphi \\ &\quad - 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 + D'p^2)\sin\varphi - B'(p^4 - q^4) + 2D'p^2q^2, \end{aligned}} \\ \frac{y}{z} &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p} z\cos\varphi, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\sin\varphi - q^2}{p^2}. \end{aligned} \right.$$

III.

$$y^2 + p^2(z^2 - t^2) + 2q^2zt = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0;$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{1}{p^2\sin\varphi}\sqrt{\begin{aligned} &[- B'(p^4 - p^4) - 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ &\quad + 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 - D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4 + q^4), \end{aligned}} \\ \frac{y}{z} &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{q^2\sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi}. \end{aligned} \right.$$

IV.

$$y^2 + p^2(z^2 - t^2) - 2q^2zt = 0, \qquad x^2 + B'(z^2 - t^2) + 2D'zt = 0;$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{1}{p^2\sin\varphi}\sqrt{\begin{aligned} &[- B'(p^4 - q^4) + 2D'p^2q^2]\sin^2\varphi \\ &\quad - 2\sqrt{p^4+q^4}(B'q^2 + D'p^2)\sin\varphi + B'(p^4 + q^4), \end{aligned}} \\ \frac{y}{z} &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p}\,\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{-q^2\sin\varphi + \sqrt{p^4+q^4}}{p^2\sin\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Il est rappelé que les discriminants des trinomes en $\sin\varphi$ qui figurent dans les expressions de $\frac{x}{z}$ sont toujours positifs.

6. Nous allons maintenant faire disparaître les radicaux des expressions de $\frac{x}{z}$, en introduisant les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Posons

$$\sin\varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}. \tag{16}$$

Dans les quatre cas (12-15), l'expression de $\frac{x}{z}$ comporte un radical de la forme

$$U = \sqrt{a\sin^2\varphi + 2b\sin\varphi + c} \qquad (b^2 - ac > 0),$$

qui devient

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{a\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^2 + 2b\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} + c} \\ &= \frac{1}{1+\beta^2}\sqrt{a(1-\beta^2)^2 + 2b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + c(1+\beta^2)^2}. \end{aligned}$$

Ici encore, plusieurs cas sont à distinguer :

1° $a > 0$. — On a

$$\begin{aligned} a(1+\beta^2)^2U^2 &= a^2(1-\beta^2)^2 + 2ab(1-\beta^2)(1+\beta^2) + ac(1+\beta^2)^2 \\ &= [a+b-(a-b)\beta^2]^2 - (b^2-ac)(1+\beta^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(1+\beta^2)^2U^2 = {} & \left[a+b+\sqrt{b^2-ac} - \left(a-b-\sqrt{b^2-ac}\right)\beta^2\right] \\ & \times \left[a+b-\sqrt{b^2-ac} - \left(a-b+\sqrt{b^2-ac}\right)\beta^2\right]. \end{aligned} \tag{17^1}$$

2° $a < 0$. — Écrivons, pour un instant, $-a_1$ au lieu de a. Si

$$\begin{aligned} (1+\beta^2)^2U^2 &= -a_1(1-\beta^2)^2 + 2b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + c(1+\beta^2)^2, \\ a_1(1+\beta^2)^2U^2 &= -a_1^2(1-\beta^2)^2 + 2a_1b(1-\beta^2)(1+\beta^2) + a_1c(1+\beta^2)^2 \\ &= -[a_1(1-\beta^2) - b(1+\beta^2)]^2 + b^2(1+\beta^2)^2 + a_1c(1+\beta^2)^2, \end{aligned}$$

ou, en revenant à a,

$$-a(1+\beta^2)^2U^2 = -[a(1-\beta^2) + b(1+\beta^2)]^2 + (b^2-ac)(1+\beta^2)^2,$$

$$\begin{aligned} -a(1+\beta^2)^2U^2 = {} & \left[\ a+b+\sqrt{b^2-ac} - \left(\ a-b-\sqrt{b^2-ac}\right)\beta^2\right] \\ & \times \left[-a-b+\sqrt{b^2-ac} - \left(-a+b-\sqrt{b^2-ac}\right)\beta^2\right]. \end{aligned} \tag{17^2}$$

Il en résulte, en épuisant les combinaisons de signes possibles, que $a(1+\beta^2)^2U^2$ ou $-a(1+\beta^2)U^2$ (on choisira celle de ces deux expressions qui est positive) appartient à l'une des cinq formes

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_1^2 = (\ j^2 + l^2\beta^2)(m^2 + n^2\beta^2), \tag{18}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_2^2 = (-j^2 + l^2\beta^2)(m^2 + n^2\beta^2), \tag{19}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_3^2 = (\ j^2 - l^2\beta^2)(m^2 + n^2\beta^2), \tag{20}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_4^2 = (\ j^2 - l^2\beta^2)(m^2 - n^2\beta^2), \tag{21}$$

$$\pm a(1+\beta^2)^2U^2 = V_5^2 = (-j^2 + l^2\beta^2)(m^2 - n^2\beta^2). \tag{22}$$

Les autres formes possibles se ramènent à celles-ci par des changements de signes; par exemple

$$(-j^2+l^2\beta^2)(-m^2+n^2\beta^2)=(j^2-l^2\beta^2)(m^2-n^2\beta^2),$$

ce qui est la forme (21).

Il est à remarquer cependant que *certaines de ces formes doivent être exclues*. Examinons en effet la forme V_4^2; (17) donne, par comparaison avec V_4^2,

$$j^2 = a+b+\sqrt{b^2-ac}, \qquad l^2 = a-b-\sqrt{b^2-ac},$$
$$m^2 = -a-b+\sqrt{b^2-ac}, \qquad n^2 = -a+b-\sqrt{b^2-ac},$$

d'où

$$(23)\qquad j^2+l^2=2a, \qquad m^2+n^2=-2a \qquad (a<0),$$

où l'égalité (23') ne peut pas avoir lieu. Rien n'exclut cependant *a priori* la forme V_4^2 si $a>0$; en effet, ici (16),

$$j^2 = a+b+\sqrt{b^2-ac}, \qquad l^2 = a-b-\sqrt{b^2-ac},$$
$$m^2 = a+b-\sqrt{b^2-ac}, \qquad n^2 = a-b+\sqrt{b^2-ac};$$

en fait, nous verrons que V_4^2 doit être exclue dans tous les cas, de même que V_1^2, V_3^2, sauf introduction d'imaginaires; et l'examen de ces cas sera loin d'être inutile (n^{os} **7**, 1°, 3° et 5°, puis **8**).

7. 1° *Considérons* V_4^2. — Nous avons

$$V_4^2 = j^2m^2\left(1-\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1-\frac{n^2}{m^2}\beta^2\right).$$

Admettons ici, et dans ce qui suit, jusqu'au n° **8**, pour plus de généralité, car il se présente des problèmes qui ont un certain intérêt, qu'il n'y ait aucune relation autre j, l, m, n; en fait, pour la question posée, certaines relations existent (23).

Soit

$$(24)\qquad \frac{l^2}{j^2}<\frac{n^2}{m^2} \quad \text{ou} \quad \frac{l^2m^2}{j^2n^2}<1;$$

posons

$$\frac{n}{m}\beta = \operatorname{sn} u;$$

nous aurons

$$V_4^2 = j^2 m^2\left(1 - \frac{l^2 m^2}{j^2 n^2} \times \frac{n^2}{m^2}\beta^2\right)(1 - \mathrm{sn}^2 u);$$

posons en outre (24)

$$\frac{l^2 m^2}{j^2 n^2} = k^2;$$

il viendra

$$V_4 = jm\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u;$$

d'où (21)

$$\sqrt{\pm a}(1+\beta^2)U = jm\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u,$$

(25)
$$U = \frac{jm}{\sqrt{\pm a}}\,\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u};$$

en outre (16)

$$\sin\varphi = \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u}, \qquad \cos\varphi = \frac{2\frac{m}{n}\mathrm{sn}\,u}{1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u}.$$

Les formules (12) donnent alors

(26)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{z} = \frac{1}{p^2}U = \frac{jm\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{p^2\sqrt{\pm a}\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{2\frac{j}{l}\sqrt{p^4+q^4}\,\mathrm{sn}\,u}{p\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)},\\ &\frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right) + q^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)}{p^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)};\end{aligned}\right.$$

on aura des résultats tout à fait analogues en partant des formules (13).

Les formules (14) donnent ensuite

(27)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{z} = \frac{U}{p^2\sin\varphi} = \frac{jm\,\mathrm{cn}\,u}{p^2\sqrt{\pm a}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)},\\ &\frac{y}{z} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p} \times \frac{2\frac{m}{n}\mathrm{sn}\,u}{1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u},\\ &\frac{t}{z} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right) - q^2\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)}{p^2\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\mathrm{sn}^2 u\right)};\end{aligned}\right.$$

$\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{t}{z}$ sont donc de la forme

$$(28)\qquad \frac{x}{z}=\frac{\lambda \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{sn}^2 u+\sigma}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\mu \operatorname{sn} u}{\omega \operatorname{sn}^2 u+\sigma}, \qquad \frac{t}{z}=\frac{\nu \operatorname{sn}^2 u+\rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u+\sigma}.$$

2° La transformation qu'on vient de faire est une conséquence des formules

$$\operatorname{cn}^2 u=1-\operatorname{sn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u=1-k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Exprimons $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u$, $\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u$ en fonction de $\operatorname{cn}^2 u$:

$$\operatorname{sn}^2 u=1-\operatorname{cn}^2 u,$$
$$\operatorname{dn}^2 u=k'^2+k^2 \operatorname{cn}^2 u,$$
$$\operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u=\frac{1}{k'^2}(1-\operatorname{cn}^2 u)\left(1+\frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 u\right).$$

Cette formule va convenir à V_3^2. En effet (20),

$$V_3^2=j^2 m^2\left(1-\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\beta^2\right)=j^2 m^2\left(1-\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(1+\frac{n^2}{m^2}\frac{j^2}{l^2}\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right);$$

posons

$$\frac{l}{j}\beta=\operatorname{cn} u$$

et déterminons k^2 par la condition

$$\frac{n^2 j^2}{m^2 l^2}=\frac{k^2}{k'^2}=\frac{k^2}{1-k^2},$$

d'où

$$k^2=\frac{n^2 j^2}{n^2 j^2+m^2 l^2};$$

V_3^2 pourra être écrit

$$V_3^2=j^2 m^2(1-k^2) \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u,$$

d'où

$$(29)\qquad V_3=jmk' \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u;$$

on pourra donc, dans le cas actuel, représenter $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{t}{z}$ par les fonctions $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

Il est bien évident que les formules finales sont les formules (28) où l'on change $\operatorname{sn} u$ en $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ en $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$; donc, ici,

$$(30)\qquad \frac{x}{z}=\frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{cn}^2 u+\sigma}, \qquad \frac{y}{z}=\frac{\mu \operatorname{cn} u}{\omega \operatorname{cn}^2 u+\sigma}, \qquad \frac{t}{z}=\frac{\nu \operatorname{cn}^2 u+\rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u+\sigma}.$$

3° Exprimons maintenant $\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u$ et $\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u$ en fonction de $\operatorname{dn}^2 u$. On a

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1-\operatorname{dn}^2 u}{k^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{-k'^2+\operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

$$\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u = \frac{(1-\operatorname{dn}^2 u)(-k'^2+\operatorname{dn}^2 u)}{k^2}.$$

V_5^2 peut, à son tour, être écrit

$$V_5^2 = \frac{l^2 m^4}{n^2}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\beta^2\right)\left(-\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2}+\frac{n^2}{m^2}\beta^2\right);$$

soit

$$\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} < 1;$$

nous pouvons poser

$$\frac{n}{m}\beta = \operatorname{dn} u, \qquad \frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} = k'^2,$$

et nous aurons

$$V_5 = \frac{l m^2}{n} k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

ce qui réalisera la transformation.

Si

$$\frac{j^2 n^2}{l^2 m^2} > 1,$$

nous écrirons

$$V_5^2 = \frac{j^4 n^2}{l^2}\left(1-\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right)\left(-\frac{m^2 l^2}{n^2 j^2}+\frac{l^2}{j^2}\beta^2\right),$$

$$\frac{l}{j}\beta = \operatorname{dn} u, \qquad \frac{m^2 l^2}{n^2 j^2} = k'^2,$$

d'où

$$V_5 = \frac{j^2 n}{l} k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Ici, les formules finales seront les formules (28) où l'on changera $\operatorname{sn} u$ en $\operatorname{dn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ en $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$; donc

$$(31) \qquad \frac{x}{z} = \frac{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{\mu \operatorname{dn} u}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}, \qquad \frac{t}{z} = \frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma}.$$

4° Pour V_2^2, nous avons

$$\pm a(1+\beta^2)^2 U_2^2 = V_2^2 = (-j^2+l^2\beta^2)(m^2+n^2\beta^2) = \beta^4\left(-\frac{j^2}{\beta^2}+l^2\right)\left(\frac{m^2}{\beta^2}+n^2\right)$$
$$= l^2 n^2 \beta^4\left(1-\frac{j^2}{l^2}\beta^2\right)\left(1+\frac{m^2}{n^2}\frac{1}{\beta^2}\right);$$

posons

$$\frac{j}{l}\frac{1}{\alpha}=\operatorname{cn}u,\qquad \frac{m^2l^2}{n^2j^2}=\frac{k^2}{1-k^2},\qquad \text{d'où}\qquad k^2=\frac{m^2l^2}{m^2l^2+n^2j^2};$$

il vient

$$\pm a(1+\beta^2)^2U_2^2=\frac{n^2j^4}{l^2}\frac{1}{\operatorname{cn}^4u}(1-\operatorname{cn}^2u)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2u\right),$$

d'où

$$U=\frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\sqrt{\pm a}\operatorname{cn}^2u(1+\beta^2)}=\frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\sqrt{\pm a}\operatorname{cn}^2u\left(1+\frac{j^2}{l^2}\frac{1}{\operatorname{cn}^2u}\right)},$$

$$U=\frac{nj^2}{l}\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\sqrt{\pm a}\left(\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2u\right)}.$$

Nous avons ensuite

$$\sin\varphi=\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{-\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2u}{\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2u},$$

$$\cos\varphi=\frac{2\frac{j}{l}\operatorname{cn}u}{\frac{j^2}{l^2}+\operatorname{cn}^2u};$$

si nous substituons dans les formules (12) à (15), nous retrouverons les expressions (30) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$.

5° *Étudions enfin* V_1^2. — Nous avons identiquement

$$V_1^2=j^2m^2\left[1-\frac{l^2}{j^2}(i\beta)^2\right]\left[1-\frac{n^2}{m^2}(i\beta)^2\right]\qquad(i^2=-1);$$

soit, pour fixer les idées,

$$\frac{l^2}{j^2}>\frac{n^2}{m^2};$$

écrivons

$$V_1^2=j^2m^2\left[1-\left(\frac{l}{j}i\beta\right)^2\right]\left[1-\frac{n^2}{m^2}\frac{j^2}{l^2}\left(\frac{l}{j}i\beta\right)^2\right]$$

et posons

$$\frac{l}{j}i\beta=\frac{\operatorname{sn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')},\qquad \frac{n^2j^2}{m^2l^2}=k^2;$$

on sait que

$$i\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')} = \operatorname{sn}(ui, k);$$

donc

$$\frac{l}{j}\beta = -\operatorname{sn}(ui, k)$$

et

$$V_1^2 = j^2 m^2[1-\operatorname{sn}^2(ui, k)][1-k^2\operatorname{sn}^2(ui, k)] = j^2 m^2 \operatorname{cn}^2(ui, k)\operatorname{dn}^2(ui, k),$$
$$V_1 = jm\operatorname{cn}(ui, k)\operatorname{dn}(ui, k).$$

Reportons-nous à V_4. Les résultats sont identiques, sauf que u est remplacé par ui; on obtiendra donc ici des formules du genre (28) avec ui au lieu de u, soit, en mettant k en évidence,

$$\frac{x}{z} = \frac{\lambda\operatorname{cn}(ui, k)\operatorname{dn}(ui, k)}{\omega\operatorname{sn}^2(ui, k)+\sigma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu\operatorname{sn}(ui, k)}{\omega\operatorname{sn}^2(ui, k)+\sigma}, \quad \frac{t}{z} = \frac{\nu\operatorname{sn}^2(ui, k)+\rho}{\omega\operatorname{sn}^2(ui, k)+\sigma};$$

or,

$$\operatorname{sn}(ui, k) = i\frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad \operatorname{cn}(ui, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \quad \operatorname{dn}(ui, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')};$$

substituons dans les expressions qu'on vient d'écrire pour $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$; ces rapport prendront la forme (31), *mais on devra supposer μ imaginaire : cela n'a aucune importance, car nous verrons tout à l'heure que les systèmes tels que* (31) *sont impropres à représenter les quartiques φ_4^2.*

En résumé, les quartiques φ_4^2 peuvent être représentées par l'un des systèmes (28, 30, 31) que nous écrivons à nouveau, pour en faire une étude complète,

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{\lambda\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\omega\operatorname{sn}^2u+\sigma}, & \dfrac{y}{z} = \dfrac{\mu\operatorname{sn}u}{\omega\operatorname{sn}^2u+\sigma}, & \dfrac{t}{z} = \dfrac{\nu\operatorname{sn}^2u+\rho}{\omega\operatorname{sn}^2u+\sigma}, \\ \dfrac{x}{z} = \dfrac{\lambda\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\omega\operatorname{dn}^2u+\sigma}, & \dfrac{y}{z} = \dfrac{\mu\operatorname{dn}u}{\omega\operatorname{dn}^2u+\sigma}, & \dfrac{t}{z} = \dfrac{\nu\operatorname{dn}^2u+\rho}{\omega\operatorname{dn}^2u+\sigma}, \\ \dfrac{x}{z} = \dfrac{\lambda\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{\omega\operatorname{cn}^2u+\sigma}, & \dfrac{y}{z} = \dfrac{\mu\operatorname{cn}u}{\omega\operatorname{cn}^2u+\sigma}, & \dfrac{t}{z} = \dfrac{\nu\operatorname{cn}^2u+\rho}{\omega\operatorname{cn}^2u+\sigma}. \end{cases}$$

Étude des systèmes (32).

8. *Système* (32^1). — Portons les valeurs (32^1) de $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{t}{z}$ dans les équations (1).

Il vient successivement

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu^2 \operatorname{sn}^2 u}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\frac{\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma} = 0,\\ &\frac{\lambda^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\frac{\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma} = 0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\mu^2 \operatorname{sn}^2 u + B\left[(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2\right]\\ &\qquad + 2D\,(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma) = 0,\\ &\lambda^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u + B'\left[(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)^2\right]\\ &\qquad + 2D'(\nu \operatorname{sn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{sn}^2 u + \sigma) = 0.\end{aligned}\right.$$

Exprimons que ces deux équations sont identiquement vérifiées, c'est-à-dire que les coefficients du terme indépendant de $\operatorname{sn} u$ et ceux des termes en $\operatorname{sn}^4 u$, $\operatorname{sn}^2 u$ sont nuls; nous obtenons les systèmes d'équations

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} B(\sigma^2 - \rho^2) + 2D\rho\sigma &= 0,\\ \mu^2 + 2B(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D(\nu\sigma + \rho\omega) &= 0,\\ B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega &= 0;\end{aligned}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda^2 + B'(\sigma^2 - \rho^2) + 2D'\rho\sigma &= 0,\\ -\lambda^2(1 + k^2) + 2B'(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D'(\nu\sigma + \rho\omega) &= 0,\\ \lambda^2 k^2 + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega &= 0,\end{aligned}\right.$$

où les inconnues sont λ, μ, ν, ρ, σ, ω, ou plutôt les rapports de cinq de ces quantités à la sixième, et le module k^2 de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Les équations $(33^1, 33^3)$ donnent

$$\frac{\sigma^2 - \rho^2}{\omega^2 - \nu^2} = \frac{\rho\sigma}{\nu\omega}$$

ou

$$(\sigma\omega + \nu\rho)(\nu\sigma - \rho\omega) = 0.$$

On ne peut supposer

$$\nu\sigma - \rho\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\nu}{\rho} = \frac{\omega}{\sigma} = \theta',$$

car cela conduirait à écrire l'équation (33^2)

$$\mu^2 + 2B(\sigma^2 - \rho^2)\theta' + 2D\rho\sigma\theta' = 0,$$

équation incompatible avec (33^1). Soit donc

$$\sigma\omega + \nu\rho = 0$$

ou

$$\frac{\sigma}{\nu} = \frac{-\rho}{\omega} = 0, \qquad \sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta;$$

substituons dans (34^1)

$$\lambda^2 + B'(\nu^2 - \omega^2)\theta^2 - 2D'\nu\omega\theta^2 = 0,$$

d'où (34^3)

$$k^2 = -\frac{1}{\theta^2};$$

il résulte de ceci que *l'emploi du système* (32^1) *introduit des imaginaires dans la représentation paramétrique des quartiques* φ_1^2.

En effet, si k est réel, θ est imaginaire, et réciproquement.

Système (32^2). — Portons maintenant les expressions (32^2) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu^2 \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma} = 0,\\ &\frac{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\,\frac{\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma} = 0;\end{aligned}\right.$$

ce système pourra être écrit, en vertu des relations

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2}; \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

$$\left\{\begin{aligned} &\mu^2 \operatorname{dn}^2 u\\ &\quad + B\,[(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2] + 2D\,(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma) = 0,\\ &\frac{\lambda^2}{k^2}(1 - \operatorname{dn}^2 u)(-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u)\\ &\quad + B'[(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)^2] + 2D'(\nu \operatorname{dn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{dn}^2 u + \sigma) = 0;\end{aligned}\right.$$

d'où, comme précédemment,

$$\left\{\begin{aligned} &B(\sigma^2 - \rho^2) + 2D\rho\sigma = 0,\\ &\mu^2 + 2B(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D(\nu\sigma + \rho\omega) = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu = 0,\end{aligned}\right.$$

et cela suppose, comme on l'a vu à propos du système (32¹),

$$\sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta, \tag{35}$$

puis

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{\lambda^2 k'^2}{k^4} + B'(\sigma^2 - \nu^2) + 2D'\rho\sigma = 0,\\ &\frac{\lambda^2}{k^4}(1 + k'^2) + 2B'(\sigma\omega - \nu\rho) + 2D'(\nu\sigma + \rho\omega) = 0,\\ &-\frac{\lambda^2}{k^4} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Remplaçons, dans (36¹), σ et ρ par leurs valeurs (35). Il vient

$$-\frac{\lambda^2 k'^2}{k^4} + B'(\nu^2 - \omega^2)\theta^2 - 2D'\nu\omega\,\theta = 0;$$

la comparaison avec (36³) donne

$$k'^2 = -\theta^2,$$

et *l'emploi du système* (32²) *introduit encore des imaginaires.*

Nous allons voir que *le système* (32³) *n'introduit pas d'imaginaires.* On peut donc dire, dans un certain sens, que *les systèmes* (32¹, 32²) *sont impropres à la représentation des quartiques* φ_1^2.

Étude spéciale du système (32³).

9. Nous avons ici, en portant les valeurs (32³) de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu^2 \operatorname{cn}^2 u}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2} + B\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D\,\frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma} = 0,\\ &\frac{\lambda^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2} + B'\left[1 - \frac{(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2}{(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2}\right] + 2D'\,\frac{\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma} = 0; \end{aligned}\right.$$

les relations

$$\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{cn}^2 u, \qquad \operatorname{dn}^2 u = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u$$

permettent d'écrire le système précédent

$$\left\{\begin{aligned} &\mu^2 \operatorname{cn}^2 u + B[(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2] + 2D(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma) = 0,\\ &\lambda^2(1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u)\\ &\quad + B'[(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma)^2 - (\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)^2] + 2D'(\nu \operatorname{cn}^2 u + \rho)(\omega \operatorname{cn}^2 u + \sigma) = 0; \end{aligned}\right.$$

d'où les deux systèmes d'équations

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &B(\sigma^2-\rho^2)+2D\rho\sigma=0,\\ &\mu^2+2B(\sigma\omega-\nu\rho)+2D(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ &B(\omega^2-\nu^2)+2D\nu\omega=0;\end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2k'^2+B'(\sigma^2-\rho^2)+2D'\rho\sigma=0,\\ &\lambda^2(k^2-k'^2)+2B'(\sigma\omega-\nu\rho)+2D'(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ &-\lambda^2k^2+B'(\omega^2-\nu^2)+2D'\nu\omega=0.\end{aligned}\right.$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, nous serons encore conduits à poser

$$(39)\qquad \sigma=\nu\theta,\qquad \rho=-\omega\theta;$$

$(37^1, 37^3)$ deviendront identiques, (38^1) deviendra

$$\frac{\lambda^2k'^2}{\theta^2}+2B'(\nu^2-\omega^2)-2D'\nu\omega=0,$$

d'où (38^3)

$$k^2=\frac{k'^2}{\theta^2},$$

c'est-à-dire

$$(40^1)\qquad k^2=\frac{1}{1+\theta^2};$$

nous allons trouver une valeur réelle pour θ : *le système* (32^3) *conviendra à la représentation des quartiques* φ_4^2.

Ici,

$$(40^2)\qquad k^2-k'^2=2k^2-1=\frac{2}{1+\theta^2}-1=\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2};$$

les systèmes $(37, 38)$ [où $(37^1, 37^3)$ sont devenues identiques, ainsi que $(38^1, 38^3)$ quand on a écrit les relations $(39, 40)$] se réduisent au système suivant, formé de $(37^2, 37^3, 38^2, 38^3)$,

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu^2+2B(\sigma\omega-\nu\rho)+2D(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ &B(\omega^2-\nu^2)+2D\nu\omega=0,\\ &\lambda^2(k^2-k'^2)+2B'(\sigma\omega-\nu\rho)+2D'(\nu\sigma+\rho\omega)=0,\\ &-\lambda^2k^2+B'(\omega^2-\nu^2)+2D'\nu\omega=0;\end{aligned}\right.$$

remplaçons k^2, k'^2 par leurs valeurs (40) et σ et ρ par leurs valeurs (39);

cela donne

$$\sigma\omega - \nu\rho = \nu\theta\omega + \nu\omega\theta = 2\nu\omega\theta,$$
$$\nu\sigma + \rho\omega = \nu^2\theta - \omega^2\theta = (\nu^2 - \omega^2)\theta,$$

puis

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu^2 + 4B\nu\omega\theta + 2D(\nu^2 - \omega^2)\theta = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega = 0,\\ &\lambda^2\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} + 4B'\nu\omega\theta + 2D'(\nu^2 - \omega^2)\theta = 0,\\ &-\lambda^2\frac{1}{1+\theta^2} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons λ entre les deux dernières équations. Nous aurons

$$[2D'\theta + B'(1-\theta^2)](\nu^2 - \omega^2) + 2[2B\theta + D'(1-\theta^2)]\nu\omega = 0.$$

La comparaison avec (42^2) donne

$$\frac{2D'\theta + B'(1-\theta^2)}{-B} = \frac{2B'\theta + D'(1-\theta^2)}{D}$$

ou bien

$$(B'D + BD')(\theta^2 - 1) - 2(DD' + BB')\theta = 0$$

ou encore

$$(BD' + B'D)\theta^2 - 2(BB' + DD')\theta - (BD' + B'D) = 0.$$

On en déduit

$$(43)\qquad \theta = \frac{BB' + DD' \pm \sqrt{(BB' + DD')^2 + (BD' + B'D)^2}}{BD' + B'D};$$

les deux valeurs θ_1, θ_2 de θ sont réelles : l'une est positive, l'autre est négative.

L'une quelconque de ces valeurs rend identiques les équations $(42^3, 42^4)$ et le système (42) se réduit au suivant, formé par les équations $(42^1, 42^2, 42^4)$:

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mu^2 + 4B\nu\omega\theta - 2D(\omega^2 - \nu^2)\theta = 0,\\ &B(\omega^2 - \nu^2) + 2D\nu\omega = 0,\\ &-\frac{\lambda^2}{1+\theta^2} + B'(\omega^2 - \nu^2) + 2D'\nu\omega = 0; \end{aligned}\right.$$

on écrira ces équations, en éliminant $\omega^2 - \nu^2$ entre la première et la deuxième, puis entre la deuxième et la troisième, et en écrivant d'abord, à nouveau l'équation (44^2)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\omega^2}{\nu^2}+2\frac{D}{B}\frac{\omega}{\nu}-1=0,\\ &B\frac{\mu^2}{\nu^2}+4(B^2+D^2)\frac{\omega}{\nu}\theta=0,\\ &-\frac{\lambda^2 B}{\nu^2(1+\theta^2)}+2(BD'-B'D)\frac{\omega}{\nu}=0. \end{aligned}\right.$$

On tire de ces équations

$$(45)\qquad \left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1=-\frac{D}{B}+\sqrt{1+\frac{D^2}{B^2}},\qquad \left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2=-\frac{D}{B}-\sqrt{1+\frac{D^2}{B^2}},$$

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_1\right]^2=2(1+\theta^2)\frac{BD'-B'D}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1,\\ &\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_2\right]^2=2(1+\theta^2)\frac{BD'-B'D}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2, \end{aligned}\right.$$

$$(47)\qquad \left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_1\right]^2=-4\frac{B^2+D^2}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1\theta,\qquad \left[\left(\frac{\mu}{\nu}\right)_2\right]^2=-4\frac{B^2+D^2}{B}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2\theta.$$

Quel que soit le signe de $\frac{BD'-B'D}{B}$, l'une des deux valeurs de $\frac{\lambda}{\nu}$ est réelle puisque $\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_1$, $\left(\frac{\omega}{\nu}\right)_2$ sont de signes contraires; le choix à faire entre $\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_1$ et $\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)_2$ précisera la valeur de $\frac{\omega}{\nu}$ qu'il faut prendre; on choisira ensuite pour θ l'une des deux valeurs (43), θ_1 ou θ_2, de telle manière que $\frac{\mu}{\nu}$, donné par l'une des équations (47), soit réel; θ étant déterminé, k^2 le sera, indépendamment d'ailleurs de la valeur de θ choisie.

On remarquera que *chacune des inconnues n'est susceptible que d'une seule détermination, quand on évite les imaginaires, et que cette détermination est toujours possible.*

Les équations (39) donnent ensuite $\frac{\sigma}{\nu}$ et $\frac{\rho}{\nu}\left(\frac{\rho}{\nu}=-\frac{\omega}{\nu}\theta\right)$.

En échangeant, s'il y a lieu, x et y, toutes les quartiques φ_4^2 représentées par les équations (1) *peuvent donc être représentées par un système de la forme*

$$(48)\qquad \frac{x}{z}=\frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u+\sigma},\qquad \frac{y}{z}=\frac{\mu\,\mathrm{cn}\,u}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u+\sigma},\qquad \frac{t}{z}=\frac{\nu\,\mathrm{cn}^2 u+\rho}{\omega\,\mathrm{cn}^2 u+\sigma},\qquad k^2=\frac{1}{1+\theta^2},$$

où $\theta, \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\rho}{\nu}, \frac{\omega}{\nu}, \frac{\sigma}{\nu}$ *sont réels et calculables en fonction de* B, D, B′, D′. *Si l'on exclut les éléments imaginaires, la représentation* (48) *est unique de son espèce.*

10. Théorème. — *Tout système de la forme* (48) *représente une quartique* φ_4^2, *pourvu qu'il existe entre* $\nu, \rho, \sigma, \omega$ *la relation*

$$\nu\rho + \sigma\omega = 0. \tag{49}$$

Revenons aux équations de condition (37, 38) et regardons B, D, B′, D′ comme les inconnues. Les conditions de compatibilité sont remplies si la relation (49) est vérifiée, ou bien si (39) σ et ρ sont respectivement de la forme

$$\sigma = \nu\theta, \qquad \rho = -\omega\theta,$$

puisque ces six équations se réduisent alors à quatre équations, qui sont celles constituant le système (41).

Les équations (48) peuvent ainsi être écrites

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \nu\theta} = \frac{t}{\nu \operatorname{cn}^2 u - \omega\theta},$$

ou bien

$$\frac{x}{\frac{\lambda}{\nu} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\frac{\mu}{\nu} \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\frac{\omega}{\nu} \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn}^2 u - \frac{\omega}{\nu}\theta},$$

ou encore, en écrivant λ, μ, ω pour $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\omega}{\nu}$,

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn}^2 u - \omega\theta} \qquad \left(k^2 = \frac{1}{1+\theta^2}\right); \tag{50}$$

les équations (50) *représentent donc les quartiques* φ_4^2 *et représentent toutes les quartiques* φ_4^2; *les éléments* $\lambda, \mu, \omega, \theta$ *sont réels et quelconques. On obtient deux autres représentations en échangeant* $\operatorname{cn} u$ *avec* $\operatorname{sn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *avec* $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$, *puis,* toujours dans les formules (50), $\operatorname{cn} u$ *avec* $\operatorname{dn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *avec* $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$, *mais ces deux représentations introduisent des imaginaires.*

Il n'existe pas d'autres représentations des quartiques φ_4^2 *par les fonctions* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Chapitre III. — Quartiques φ_4^3.

11. La caractéristique des quartiques φ_4^3 est que les quatre cônes sont imaginaires. Leurs sommets le sont aussi. Les équations de ces courbes peuvent être ramenées à la forme ([1])

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1(x^2-y^2)+c_1(z^2-t^2)+2b_1xy+2d_1zt=0, \\ a_2(x^2-y^2)+c_2(z^2-t^2)+2b_2xy+2d_2zt=0. \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre ce système par rapport à x^2-y^2, $2xy$ et le remplacer par celui-ci :

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2-y^2=b(z^2-t^2)+2dzt, \\ 2xy\quad=e(z^2-t^2)+2hzt. \end{cases}$$

Posons

$$(3)\qquad t=\alpha z \quad \text{ou} \quad \frac{t}{z}=\alpha;$$

les équations (2) deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2-y^2=[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]z^2=\mathrm{A}z^2, \\ 2xy\quad=[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]z^2=\mathrm{B}z^2, \end{cases}$$

d'où

$$(5)\qquad x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\,z^2;$$

x^2 et y^2 sont ainsi déterminés par les deux équations (4', 5) qui donnent

$$\sqrt{2}\,\frac{x}{z}=\sqrt{\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}, \qquad \sqrt{2}\,\frac{y}{z}=\sqrt{-\mathrm{A}+\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}.$$

Remplaçons A, B par leurs valeurs (4); il vient, en écrivant à nouveau la relation (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,\dfrac{x}{z}=\sqrt{b(1-\alpha^2)+2d\alpha+\sqrt{[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]^2+[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]^2}}, \\ \sqrt{2}\,\dfrac{y}{z}=\sqrt{-[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]+\sqrt{[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]^2+[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]^2}}, \\ \dfrac{t}{z}=\alpha, \end{cases}$$

([1]) Painvin, *loc. cit.*

relations qui réalisent une représentation paramétrique de x, y, z, t. Il n'y figure pas d'imaginaires.

12. Nous avons aussi $(4^2, 5)$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{z}+\frac{y}{z} &= \sqrt{B+\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B+iA}{2}}+\sqrt{\frac{B-iA}{2}}, \\ i\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) &= \sqrt{B-\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B+iA}{2}}-\sqrt{\frac{B-iA}{2}}, \end{aligned}\right.$$

ou, en remplaçant A et B par leurs valeurs (4),

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right) = {} & \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]+i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]} \\ & + \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]-i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]}, \\ i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) = {} & \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]+i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]} \\ & - \sqrt{[e(1-\alpha^2)+2h\alpha]-i[b(1-\alpha^2)+2d\alpha]}; \end{aligned}\right.$$

effectuant les réductions, il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right) = {} & \sqrt{-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib} \\ & + \sqrt{(-e+ib)\alpha^2+2(h-id)\alpha+e-ib}, \\ i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right) = {} & \sqrt{-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib} \\ & - \sqrt{(-e+ib)\alpha^2+2(h-id)\alpha+e-ib}. \end{aligned}\right.$$

Soit α_0 une racine de l'équation

$$-(e+ib)\alpha^2+2(h+id)\alpha+e+ib=0;$$

posons

$$(8)\qquad \beta.\beta=\beta^2=-(e+ib)\alpha^2+2(b+id)\alpha+e+ib;$$

nous avons, d'après la définition de α_0,

$$(9)\qquad 0=-(e+ib)\alpha_0^2+2(h+id)\alpha_0+e+ib,$$

et (8, 9)

$$(10)\qquad \beta.\beta=-(e+ib)(\alpha^2-\alpha_0^2)+2(h+id)(\alpha-\alpha_0);$$

posons encore

$$\beta = \rho(\alpha - \alpha_0);$$

l'équation (10) devient

$$\beta\rho = -(e + ib)(\alpha + \alpha_0) + 2(h + id).$$

Les quantités α, β sont ainsi déterminées en fonction de ρ par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \rho\alpha - \beta &= \rho\alpha_0,\\ (e+ib)\alpha + \rho\beta &= -(e+ib)\alpha_0 + 2(h+id)\end{aligned}\right.$$

et sont de la forme

$$\alpha = \frac{C\rho^2 + D}{\rho^2 + E}, \qquad \beta = \frac{F\rho}{\rho^2 + E}, \tag{11}$$

de telle sorte que (7, 8)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) &= \beta + \sqrt{(-e+ib)\alpha^2 + 2(h+id)\alpha + e - ib}\\ &= \frac{F\rho}{\rho^2+E} + \sqrt{(-e+ib)\left(\frac{C\rho^2+D}{\rho^2+E}\right)^2 + 2(h+id)\frac{C\rho^2+D}{\rho^2+E} + e - ib},\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned}\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) &= \frac{F\rho + \sqrt{(-e+ib)(C\rho^2+D)^2 + 2(h+id)(C\rho^2+D)(\rho^2+E) + (e-ib)(\rho^2+E)^2}}{\rho^2+E},\\ i\sqrt{2}\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) &= \frac{F\rho - \sqrt{(-e+ib)(C\rho^2+D)^2 + 2(h+id)(C\rho^2+D)(\rho^2+E) + (e-ib)(\rho^2+E)^2}}{\rho^2+E}.\end{aligned}\right. \tag{12}$$

13. En prenant pour ω un facteur de proportionnalité convenable, nous pourrons écrire, comme pour les quartiques φ_1^2, l'un des trois systèmes

$$\text{(I)} \quad \omega\rho = \operatorname{sn} u, \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p\operatorname{sn} u + 2q\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s}, \quad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p\operatorname{sn} u - 2q\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s},$$

$$\text{(II)} \quad \omega\rho = \operatorname{cn} u, \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p\operatorname{cn} u + 2q\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}{r\operatorname{cn}^2 u + s}, \quad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p\operatorname{cn} u - 2q\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s},$$

$$\text{(III)} \quad \omega\rho = \operatorname{dn} u, \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{2p\operatorname{dn} u + 2q\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u}{r\operatorname{dn}^2 u + s}, \quad i\left(\frac{x}{z} - \frac{y}{z}\right) = \frac{2p\operatorname{dn} u - 2q\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u}{r\operatorname{sn}^2 u + s},$$

sous condition, en raison de la présence d'imaginaires, de justifier *a posteriori* cette introduction des fonctions sn, cn, dn.

Étude du système (I).

14. Le système (I) donne

$$\frac{x}{z}-\frac{y}{z}=\frac{-2ip\,\mathrm{sn}\,u+2iq\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2u+s};$$

par conséquent,

$$(13^{1,2})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{z}&=\frac{p(1-i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1+i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2u+s},\\ \frac{y}{z}&=\frac{p(1+i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1-i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{r\,\mathrm{sn}^2u+s}; \end{aligned}\right.$$

de plus, (3, 11′), $\frac{t}{z}$ est lui-même de la forme

$$(13^3)\qquad \frac{t}{z}=\frac{m\,\mathrm{sn}^2u+n}{r\,\mathrm{sn}^2u+s}.$$

Portons ces valeurs de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (2). Il vient successivement

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{z^2}-\frac{y^2}{z^2}&=\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}\right)=-4i\frac{(p\,\mathrm{sn}\,u+q\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)(p\,\mathrm{sn}\,u-q\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}\\ &=\frac{-4ip^2\,\mathrm{sn}^2u+4iq^2\,\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}^2u}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\frac{x}{z}\frac{y}{z}&=2\frac{[p(1-i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1+i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u][p(1+i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1-i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u]}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}\\ &=\frac{4p^2\,\mathrm{sn}^2u+4q^2\,\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}^2u}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{-4ip^2\,\mathrm{sn}^2u+4iq^2\,\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}^2u}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}&=b\left[1-\frac{(m\,\mathrm{sn}^2u+n)^2}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}\right]+2d\frac{m\,\mathrm{sn}^2u+n}{r\,\mathrm{sn}^2u+s},\\ \frac{4p^2\,\mathrm{sn}^2u+4q^2\,\mathrm{cn}^2u\,\mathrm{dn}^2u}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}&=e\left[1-\frac{(m\,\mathrm{sn}^2u+n)^2}{(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2}\right]+2h\frac{m\,\mathrm{sn}^2u+n}{r\,\mathrm{sn}^2u+s}; \end{aligned}$$

d'où, en réduisant,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &-4ip^2\,\mathrm{sn}^2u+4iq^2(1-\mathrm{sn}^2u)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2u)\\ &\quad-b[(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2-(m\,\mathrm{sn}^2u+n)^2]-2d(m\,\mathrm{sn}^2u+n)(r\,\mathrm{sn}^2u+s)=0,\\ &4p^2\,\mathrm{sn}^2u+4q^2(1-\mathrm{sn}^2u(1-k^2\,\mathrm{sn}^2u)\\ &\quad-e[(r\,\mathrm{sn}^2u+s)^2-(m\,\mathrm{sn}^2u+n)^2]-2h(m\,\mathrm{sn}^2u+n)(r\,\mathrm{sn}^2u+s)=0. \end{aligned}\right.$$

Exprimons que ces équations sont des identités. Il vient

$$(15)\quad \begin{cases} 4iq^2 - b(s^2-n^2) - 2dns = 0, \\ -4ip^2 - 4iq^2(1+k^2) - 2b(rs-mn) - 2d(ms+nr) = 0, \\ 4iq^2k^2 - b(r^2-m^2) - 2dmr = 0; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} 4q^2 - e(s^2-n^2) - 2h\,ns = 0, \\ 4p^2 - 4q^2(1+k^2) - 2e(rs-mn) - 2h(ms+nr) = 0, \\ 4q^2k^2 - e(r^2-m^2) - 2h\,mr = 0, \end{cases}$$

équations qui vont déterminer m, n, p, q, r, s et k^2.

Éliminons q^2 entre (15^1, 15^3), puis entre (16^1, 16^3); il vient

$$b[(s^2-n^2)k^2 - (r^2-m^2)] + 2d(ns\,k^2 - mr) = 0,$$
$$e[(s^2-n^2)k^2 - (r^2-m^2)] + 2h(ns\,k^2 - mr) = 0,$$

équations qui nécessitent

$$ns\,k^2 - mr = 0, \qquad (s^2-n^2)k^2 - (r^2-m^2) = 0;$$

la première équation donne

$$(17)\qquad k^2 = \frac{mr}{ns},$$

puis, en portant cette valeur de k^2 dans la seconde,

$$(s^2-n^2)\frac{mr}{ns} - (r^2-m^2) = 0,$$

ou bien

$$(ms-nr)(mn+rs) = 0.$$

1° Soit

$$ms - nr = 0,$$

ce qu'on écrira

$$(18)\qquad n = m\theta', \qquad s = r\theta';$$

ces valeurs, attribuées à n, s, rendent identiques les équations (15^1, 15^3) et (16^1, 16^3); de plus (17, 18),

$$k^2 = \frac{1}{\theta'^2};$$

les systèmes (15, 16) se réduisent dès lors à celui-ci :

$$(19)\quad \begin{cases} 4iq^2k^2 - b(r^2-m^2) - 2d\,mr = 0, \\ -4ip^2 - 4iq^2(1+k^2) - 2b(r^2-m^2)\frac{1}{k} - 4d\,mr\frac{1}{k} = 0, \\ 4q^2k^2 - e(r^2-m^2) - 2h\,mr = 0, \\ 4p^2 - 4q^2(1+k^2) - 2e(r^2-m^2)\frac{1}{k} - 4h\,mr\frac{1}{k} = 0. \end{cases}$$

Les équations (19^1, 19^2) donnent, en retranchant de la première la seconde multipliée par $\frac{k}{2}$,

$$4iq^2k^2 = k[-2ip^2 - 2iq^2(1+k^2)],$$

$$2q^2k + p^2 + q^2(1+k^2) = 0,$$

$$p^2 + q^2(1+k)^2 = 0; \tag{20}$$

les équations (19^3, 19^4) donnent de même

$$4q^2k^2 = [2p^2 - 2q^2(1+k^2)]k$$

ou

$$-p^2 + q^2(1+k^2) = 0,$$

relation incompatible avec (20). *Nous ne pouvons donc pas faire l'hypothèse* (18).

15. 2° Par conséquent,

$$mn + rs = 0 \quad \text{ou} \quad m = r\theta, \quad s = -n\theta. \tag{21}$$

Ici, (17, 21)

$$k^2 = -\frac{r^2}{n^2}, \tag{22}$$

et les systèmes (15, 16) se réduisent encore aux équations (15^1, 15^2, 16^1, 16^2); comme (21)

$$s^2 - n^2 = n^2(\theta^2 - 1), \qquad ns = -n^2\theta,$$

$$rs - mn = -2nr\theta, \qquad ms + nr = -nr(\theta^2 - 1),$$

ces équations (15^1, 15^2, 16^1, 16^2) s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} &4iq^2 - bn^2(\theta^2-1) + 2dn^2\theta = 0, \\ &-2ip^2 - 2iq^2(1+k^2) + 2bnr\theta + dn^2(\theta^2-1) = 0, \\ &4q^2 - en^2(\theta^2-1) + 2hn^2\theta = 0, \\ &2p^2 - 2q^2(1+k^2) + 2enr\theta + hnr(\theta^2-1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Les équations (23^1, 23^3) donnent, en éliminant q^2,

$$-b(\theta^2-1) + 2d\theta = -ie(\theta^2-1) + 2ih\theta, \tag{24}$$

$$(-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \tag{25}$$

équation qui détermine θ et peut remplacer (23^1). Dans les autres équations (23), nous remplacerons (24) $\theta^2 - 1$ par $2\frac{d-ih}{b-ie}\theta$ et il viendra

$$\left\{\begin{array}{c} -ip^2-iq^2(1+k^2)+bnr\theta+dnr\dfrac{d-ih}{b-ie}\theta=0,\\ 2q^2-en^2\dfrac{d-ih}{b-ie}\theta+hn^2\theta=0,\\ p^2-q^2(1+k^2)+enr\theta+hnr\dfrac{d-ih}{b-ie}\theta=0,\end{array}\right.$$

ou, en réunissant les termes en θ,

$$(26)\qquad\left\{\begin{array}{c} -ip^2-iq^2(1+k^2)+nr\left(b+d\dfrac{d-ih}{b-ie}\right)\theta=0,\\ 2q^2-\dfrac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta=0,\\ p^2-q^2(1+k^2)+nr\left(e+h\dfrac{d-ih}{b-ie}\right)\theta=0.\end{array}\right.$$

Éliminons p^2 entre (26^1) et (26^3); nous aurons

$$-2iq^2(1+k^2)+nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta=0$$

ou

$$-2i\frac{q^2}{n^2}(1+k^2)+\frac{r}{n}\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta=0;$$

si nous remplaçons $2\frac{q^2}{n^2}$ par sa valeur tirée de (26^2), il vient

$$-i(ed-bh)(1+k^2)+\frac{r}{n}(b^2+e^2+d^2+h^2)=0,$$

ou (22), en remplaçant $\frac{r}{n}$ par ik,

$$(ed-bh)(1+k^2)-k(b^2+e^2+d^2+h^2)=0,$$

$$(27)\qquad (ed-bh)k^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k+(ed-bh)=0.$$

Cette équation, qui détermine k, est *fondamentale*.

Elle donne pour k une valeur *réelle*, puisqu'on en peut écrire le discriminant

$$\begin{aligned}&(b^2+e^2+d^2+h^2)^2-4(ed-bh)^2\\ &\quad=(b^2+e^2+d^2+h^2+2ed-2bh)(b^2+e^2+d^2+h^2-2ed+2bh).\\ &\quad=[(d+e)^2+(b-h)^2][(d-e)^2+(b+h)^2];\end{aligned}$$

de plus, une des deux valeurs de k est comprise entre -1 et $+1$, puisque

$$f(-1)f(+1)=[2(ed-bh)+b^2+e^2+d^2+h^2][2(ed-bh)-(b^2+e^2+d^2+h^2)]$$
$$=-[(d+e)^2+(b-h)^2][(d-e)^2+(b+h)^2].$$

Les fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ *seront donc bien dans les conditions ordinaires* ($0<k^2$ réel <1).

Nous pouvons maintenant calculer $\frac{p^2}{n^2}$, en éliminant q^2 entre (26^1, 26^3) :

$$2ip^2-nr\left[(b-ie)+(d-ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta=0,$$

$$2i\frac{p^2}{n^2}=\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta\frac{r}{n},$$

ou, en remplaçant encore $\frac{r}{n}$ par ik (22),

(28) $$\frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k;$$

on a aussi (26^2)

(29) $$\frac{q^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta.$$

Enfin (22)

(30) $$\frac{r^2}{n^2}=-k^2$$

et (21)

(31) $$\frac{m}{n}=\frac{r}{n}\theta=ik\theta,$$

(32) $$\frac{s}{n}=-\theta;$$

il est rappelé que k, θ sont respectivement déterminés par les équations (27, 25).

Les problèmes de la représentation des quartiques φ_4^3 *pour les fonctions* $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ *est donc résolu par les formules* (13, p. 107) : *mais* $\frac{p}{n}$, $\frac{q}{n}$, $\frac{r}{n}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{s}{n}$ *sont des quantités complexes* (28 à 32). *Par contre, le module* k^2 *de* $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ *est compris entre* 0 *et* 1.

16. Invariant des quartiques φ_4^3. — Le rapport

$$\pm\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{ed-bh},$$

qui définit k (27), joue, dans un certain sens, le rôle d'*invariant* relativement aux quartiques φ_4^3.

1° Revenons en effet aux équations (9) et formons les transformées que voici :

a. Échangeons x et y; le système devient

$$x^2 - y^2 = -b(z^2 - t^2) - 2dzt, \qquad 2xy = e(z^2 - t^2) + 2hzt;$$

b. Échangeons z et t; il vient

$$x^2 - y^2 = -b(z^2 - t^2) + 2dzt, \qquad 2xy = -e(z^2 - t^2) + 2hzt;$$

c. Changeons x en $-x$; nous aurons

$$x^2 - y^2 = b(z^2 - t^2) + 2dzt, \qquad 2xy = -e(z^2 - t^2) - 2hzt;$$

d. Changeons t en $-t$:

$$x^2 - y^2 = b(z^2 - t^2) - 2dzt, \qquad 2xy = e(z^2 - t^2) - 2hzt, \qquad \ldots;$$

pour tous ces systèmes, et pour tous ceux qu'on peut déduire semblablement de (1), $\pm k$ est donné par l'équation (27), donc dépend encore de $\pm \dfrac{b^2 + e^2 + d^2 + h^2}{ed - bh}$.

2° Nous retrouvons encore cette quantité si nous transformons comme il suit les équations (2). Posons

$$x - y = \xi, \qquad x + y = \eta,$$

d'où

$$x^2 - y^2 = \xi\eta, \qquad 2xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),$$

ce qui permet d'écrire les équations (1)

$$\xi^2 - \eta^2 = 2e(z^2 - t^2) + 4hzt, \qquad 2\xi\eta = 2b(z^2 - t^2) + 4dzt;$$

soit

$$\xi^2 - \eta^2 = b''(z^2 - t^2) + 2d''zt, \qquad 2\xi\eta = e''(z^2 - t^2) + 2h''zt;$$

l'invariant relatif à ce dernier système est

$$\pm \frac{b''^2 + e''^2 + d''^2 + h''^2}{e''d'' - b''h''} = \mp \frac{e^2 + b^2 + h^2 + d^2}{bh - ed}.$$

3° Revenons maintenant aux équations (1). Résolvons-les, d'abord par rapport à $x^2 - y^2$ et $2xy$, ensuite par rapport à $z^2 - t^2$ et $2zt$.

On a

$$\left\{\begin{aligned} x^2-y^2 &= \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}(z^2-t^2)+2\,\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}zt,\\ 2xy &= \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}(z^2-t^2)+2\,\frac{a_2d_1-a_1d_2}{a_1b_2-a_2b_1}zt,\end{aligned}\right.$$

d'où (2)

$$b=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad d=\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad e=\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad h=\frac{a_2d_1-a_1d_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Ensuite,

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} z^2-t^2 &= \frac{a_2d_1-a_1d_2}{c_1d_2-c_2d_1}(x^2-y^2)+2\,\frac{b_2d_1-b_1d_2}{c_1d_2-c_2d_1}xy,\\ 2zt &= \frac{a_1c_2-a_2c_1}{c_1d_2-c_2d_1}(x^2-y^2)+2\,\frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_1d_2-c_2d_1}xy;\end{aligned}\right.$$

si nous écrivons

$$z^2-t^2=b'(x^2-y^2)+2d'xy,\qquad 2zt=e'(x^2-y^2)+2h'xy,$$

il est visible (2) que

$$b'=h,\qquad d'=-d,\qquad e'=-e,\qquad h'=b.$$

Il en résulte que l'équation (*cf.* avec 27) qui donne $\pm k$ pour le système (33) est identique avec celle qui donne k pour le système (2).

Étude du système (II).

17. Nous avons ici

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \frac{p(1-i)\operatorname{cn}u+q(1+i)\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{r\operatorname{sn}^2u+s},\\ \frac{y}{z} &= \frac{p(1+i)\operatorname{cn}u+q(1-i)\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{r\operatorname{sn}^2u+s},\qquad \frac{t}{z}=\frac{m\operatorname{sn}^2u+n}{r\operatorname{sn}^2u+s}.\end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{t}{z}$ dans les équations (1); il vient, en remplaçant dn^2u par $k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u$ et sn^2u par $1-\operatorname{cn}^2u$,

$$\left\{\begin{aligned} &-4ip^2\operatorname{cn}^2u+4iq^2(1-\operatorname{cn}^2u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u)\\ &\quad-b[(r\operatorname{cn}^2u+s)^2-(m\operatorname{cn}^2u+n)^2]-2d(m\operatorname{cn}^2u+n)(r\operatorname{cn}^2u+s)=0,\\ &4p^2\operatorname{cn}^2u+4q^2(1-\operatorname{cn}^2u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2u)\\ &\quad-e[(r\operatorname{cn}^2u+s)^2-(m\operatorname{cn}^2u+n)^2]-2h(m\operatorname{cn}^2u+s)(r\operatorname{cn}^2u+s)=0,\end{aligned}\right.$$

et, en exprimant que ces équations sont des identités,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &4iq^2k'^2 - b(s^2 - n^2) - 2dns = 0,\\ -&4ip^2 + 4iq^2(k^2 - k'^2) - 2b(rs - mn) - 2d(ms + nr) = 0,\\ -&4iq^2k^2 - b(r^2 - m^2) - 2dmr = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &4q^2k'^2 - e(s^2 - n^2) - 2e\,ns = 0,\\ &4p^2 + 4q^2(k^2 - k'^2) - 2e(rs - mn) - 2h(ms + nr) = 0,\\ -&4q^2k^2 - e(r^2 - m^2) - 2hmr = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces systèmes sont analogues aux systèmes (15, 16) et nous allons les traiter de façon semblable, en *nous préoccupant surtout de former l'équation qui donne* k, ou plutôt $\frac{k}{k'}$; nous verrons qu'*ici* k *est imaginaire*, contrairement à ce qui a lieu pour la représentation par les fonctions $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$.

Éliminons q^2 entre (35^1, 35^3), puis entre (40^1, 40^3). Il vient

$$\left\{\begin{aligned} &-b[k^2(s^2 - n^2) + k'^2(r^2 - m^2)] - 2d(ns\,k^2 + mr\,k'^2) = 0,\\ &-e[k^2(s^2 - n^2) + k'^2(r^2 - m^2)] - 2h(ns\,k^2 + mr\,k'^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

ce qui suppose

$$k^2(s^2 - n^2) + k'^2(r^2 - m^2) = 0, \qquad ns\,k^2 + mr\,k'^2 = 0,$$

ou bien

$$(37)\qquad -\frac{k^2}{k'^2} = \frac{r^2 - m^2}{s^2 - n^2} = \frac{mr}{ns}.$$

1° Nous pouvons vérifier les équations (37) en écrivant

$$(38)\qquad \frac{n}{m} = \frac{s}{r} = \theta' = i\frac{k'}{k};$$

les équations (35^1, 35^3) se réduisent à l'une d'entre elles, (35^3) par exemple, et, semblablement, il est inutile d'écrire (36^1), si l'on écrit (36^3), ce qui réduit (38) les systèmes (35, 36) à celui-ci :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &-4iq^2k^2 - b(r^2 - m^2) - 2d\,mr = 0,\\ &-2ip^2 + 2iq^2(k^2 - k'^2) - b(r^2 - m^2)i\frac{k'}{k} - 2d\,mr\,i\frac{k'}{k} = 0,\\ &-4q^2k^2 - e(r^2 - m^2) - 2h\,mr = 0,\\ &2p^2 + 2q^2(k^2 - k'^2) - e(r^2 - m^2)i\frac{k'}{k} - 2h\,mr\,i\frac{k'}{k} = 0;\end{aligned}\right.$$

(39^1, 39^2) donnent

$$\left\{\begin{aligned} -b(r^2-m^2)-2dmr &= 4iq^2k^2, \\ [-b(r^2-m^2)-2dmr]\frac{k'}{k} &= 2p^2-2q^2(k^2-k'^2), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$2iq^2kk' = p^2-q^2(k^2-k'^2). \tag{40}$$

D'autre part, (39^3, 39^4) donnent

$$2q^2k^2 = -i[p^2+q^2(k^2-k'^2)]\frac{k}{k'},$$

d'où

$$2iq^2kk' = p^2+q^2(k^2-k'^2),$$

relation incompatible avec (40).

2° Nous pouvons aussi vérifier les équations (37) en écrivant

$$m = r\theta, \qquad s = -n\theta, \tag{41}$$

d'où

$$\frac{k^2}{k'^2} = -\frac{m^2}{ns} = \frac{n^2}{r^2} \tag{42}$$

et

$$k^2 = \frac{n^2}{r^2+n^2}. \tag{43}$$

Ici, les systèmes (35, 36), où il n'y a plus lieu d'écrire (35^3, 36^3), si l'on tient compte de (41, 42 *ou* 43), se réduisent à (35^1, 35^2, 36^1, 36^2); on a ainsi le systéme réduit

$$\left\{\begin{aligned} 4iq^2k'^2-b(s^2-n^2)-2dns &= 0, \\ -2ip^2+2iq^2(k^2-k'^2)-b(rs-mn)-d(ms+nr) &= 0, \\ 4q^2k'^2-e(s^2-n^2)-2hns &= 0, \\ 2p^2+2q^2(k^2-k'^2)-e(rs-mn)-h(ms+nr) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

Nous avons (41), comme au n° **15**,

$$s^2-n^2 = n^2(\theta^2-1), \qquad ns = -n^2\theta, \qquad rs-mn = -2nr\theta,$$
$$ms+nr = nr(1-\theta^2),$$

et les équations (44) deviennent

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &4iq^2k'^2 + bn^2(1-\theta^2) + 2dn^2\theta = 0,\\ &-2ip^2 + 2iq^2(k^2-k'^2) + 2bnr\theta - dnr(1-\theta^2) = 0,\\ &4q^2k'^2 + en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ &2p^2 + 2q^2(k^2-k'^2) + 2enr\theta - hnr(1-\theta^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Éliminons q^2 entre $(45^1, 45^3)$; nous aurons

$$b(1-\theta^2) + 2d\theta = ie(1-\theta^2) + 2ih\theta,$$

$$(46)\quad (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0,$$

équation qui donne θ (*cf.* avec 25). Le système (45) peut, dès lors, être réduit à celui-ci, où $(45)^1$ est remplacé par (46) :

$$\left\{\begin{aligned} &-2ip^2 + 2iq^2(k^2-k'^2) + 2bnr\theta - dnr(1-\theta^2) = 0,\\ &4q^2k'^2 + en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ &2p^2 + 2q^2(k^2-k'^2) + 2en^2\theta - hnr(1-\theta^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

où nous allons remplacer $1-\theta^2$ par $2\dfrac{d-ih}{-b+ie}$ (46), ce qui donne

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &-ip^2 + iq^2(k^2-k'^2) + nr\left(b - d\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0,\\ &2q^2k'^2 + \left(e\frac{d-ih}{-b+ie} + h\right)n^2\theta = 0,\\ &p^2 + q^2(k^2-k'^2) + nr\left(e - h\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0.\end{aligned}\right.$$

Éliminons p^2 entre $(47^1, 47^3)$; nous aurons

$$2iq^2(k^2-k'^2) + nr\left[b + ie + (d+ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta = 0,$$

ou bien

$$(48)\quad 2iq^2(k^2-k'^2) + nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0;$$

maintenant (47^2) peut s'écrire

$$2q^2k'^2 - \frac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta = 0,$$

et, de l'élimination de q^2 entre cette équation et (48), il résultera

$$i\left(\frac{k^2}{k'^2} - 1\right)(ed-bh)\frac{n}{r} + b^2 + e^2 + d^2 + h^2 = 0;$$

remplaçons $\frac{n}{r}$ par $\frac{k'}{k}$ (42); nous obtiendrons l'équation qui détermine $\frac{k'}{k}$:

$$(49) \qquad (ed - bh)\frac{k^2}{k'^2} - i(b^2 + e^2 + d^2 + h^2)\frac{k}{k'} - (ed - bh) = 0;$$

ici, $\frac{k^2}{k'^2}$ *se trouve être égal à* $-k^2$ *de la représentation par* $\operatorname{sn} u$ et $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ (27).

La valeur de $\frac{r}{n}$ est donnée ici (42, 49) par

$$(ed - bh)\frac{r^2}{n^2} - i(b^2 + e^2 + d^2 + h^2)\frac{r}{n} - (ed - bh) = 0;$$

$\frac{r^2}{n^2}$ *a donc les mêmes valeurs dans la représentation par* $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ (27) *et dans la représentation par* $\operatorname{cn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

On a vu qu'il en est de même de θ (46, 25).

Mais l'intérêt de la représentation qu'on vient d'étudier par $\operatorname{cn} u$ *et* $\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$ *est médiocre, puisque* (49) $\frac{k}{k'}$, *donc aussi* k, *est imaginaire.*

Étude du système (III).

18. Nous avons ici

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} & -4ip^2 \operatorname{dn}^2 u + 4iq^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \\ & \quad - b[(r \operatorname{dn}^2 u + s)^2 - (m \operatorname{dn}^2 u + n)^2] - 2d(m \operatorname{dn}^2 u + n)(r \operatorname{dn}^2 u + s) = 0, \\ & 4p^2 \operatorname{dn}^2 u + 4q^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \\ & \quad - e[(r \operatorname{dn}^2 u + s)^2 - (m \operatorname{dn}^2 u + n)^2] - 2h(m \operatorname{dn}^2 u + n)(r \operatorname{dn}^2 u + s) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{1 - \operatorname{dn}^2 u}{k^2}, \qquad \operatorname{cn}^2 u = \frac{-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u}{k^2},$$

ce qui permet d'écrire les formules (50)

$$\left\{ \begin{aligned} & -4ip^2 \operatorname{dn}^2 u + \frac{4iq^2}{k^4}(1 - \operatorname{dn}^2 u)(-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u) \\ & \quad - b[(r \operatorname{dn}^2 u + s)^2 - (m \operatorname{dn}^2 u + n)^2] - 2d(m \operatorname{dn}^2 u + n)(r \operatorname{dn}^2 u + s) = 0, \\ & 4p^2 \operatorname{dn}^2 u + \frac{4q^2}{k^4}(1 - \operatorname{dn}^2 u)(-k'^2 + \operatorname{dn}^2 u) \\ & \quad - e[(r \operatorname{dn}^2 u + s)^2 - (m \operatorname{dn}^2 u + n)^2] - 2h(m \operatorname{dn}^2 u + n)(r \operatorname{dn}^2 u + s) = 0. \end{aligned} \right.$$

Exprimons que ces équations sont des identités; nous aurons

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &-4iq^2\frac{k'^2}{k^4} && -\ b(s^2-n^2) && -2dns=0,\\ -4ip^2+&4iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} && -2b(rs-mn) && -2d(ms+nr)=0,\\ &-\frac{4iq^2}{k^4} && -\ b(r^2-m^2) && -2dmr=0;\end{aligned}\right.$$

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &-4q^2\frac{k'^2}{k^4} && -\ e(s^2-n^2) && -2hns=0,\\ 4p^2+&4q^2\frac{1+k'^2}{k^4} && -2e(rs-mn) && -2h(ms+nr)=0,\\ &-\frac{4q^2}{k^4} && -\ e(r^2-m^2) && -2hmr=0.\end{aligned}\right.$$

Éliminons q^2 entre $(51^1, 51^3)$, puis entre $(52^1, 52^3)$:

$$b[(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2)]+2d(mrk'^2-ns)=0,$$
$$e[(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2)]+2h(mrk'^2-ns)=0,$$

équations qui supposent

$$(r^2-m^2)k'^2-(s^2-n^2)=0,\qquad mrk'^2-ns=0,$$

ou

$$(53)\qquad k'^2=\frac{s^2-n^2}{r^2-m^2}=\frac{ns}{mr}.$$

1° Ces équations sont vérifiées si l'on pose

$$n=m\theta',\qquad s=r\theta',\qquad k'^2=\theta'^2,$$

mais il est facile de voir, comme pour les systèmes (I, II), que cela conduit à deux relations contradictoires, qui seraient

$$q(1+k')=pk^2,\qquad q(1+k')=ipk^2.$$

2° Nous pouvons aussi vérifier les relations (53) en prenant, comme précédemment,

$$(54)\qquad m=r\theta,\qquad s=-n\theta;$$

ici (53, 54),

$$(55)\qquad k'^2=-\frac{n^2}{r^2},$$

et les équations (51, 52), où il n'y a plus lieu d'écrire (51^3, 52^3), se réduisent (54) à

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} -4iq^2\frac{k'^2}{k^4} \qquad\qquad &+ bn^2(1-\theta^2) + 2dn^2\theta = 0,\\ -2ip^2+2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ 2bnr\theta \qquad -dnr(1-\theta^2) = 0,\\ -4q^2\frac{k'^2}{k^4} \qquad\qquad &+ en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ 2p^2+2q^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ 2enr\theta \qquad -hnr(1-\theta^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons q^2 entre (56^1, 56^3); nous aurons

$$(57)\qquad (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0,$$

équation qui donne θ : θ *a la même valeur que pour les systèmes* (I, II). Le système (56) se réduit à

$$\left\{\begin{aligned} -2ip^2+2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ 2bnr\theta \qquad -dnr(1-\theta^2) = 0,\\ -4q^2\frac{k'^2}{k^4} \qquad\qquad &+ en^2(1-\theta^2) + 2hn^2\theta = 0,\\ 2p^2+2q^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ 2enr\theta \qquad -hnr(1-\theta^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

où nous allons remplacer $1-\theta^2$ par $2\dfrac{d-ih}{-b+ie}\theta$ (57), ce qui donne

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} -ip^2+iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ nr\left(b-d\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0,\\ -2q^2\frac{k'^2}{k^4} \qquad &+ \left(e\frac{d-ih}{-b+ie}+h\right)n^2\theta = 0,\\ p^2+q^2\frac{1+k'^2}{k^4} &+ nr\left(e-h\frac{d-ih}{-b+ie}\right)\theta = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons p^2 entre (58^1, 58^3); nous aurons

$$2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\left[b+ie+(d+ih)\frac{d-ih}{b-ie}\right]\theta = 0,$$

ou bien

$$(59)\qquad 2iq^2\frac{1+k'^2}{k^4} + nr\frac{b^2+e^2+d^2+h^2}{b-ie}\theta = 0;$$

(58^2) peut s'écrire maintenant

$$(60)\qquad -2q^2\frac{k'^2}{k^4}-\frac{ed-bh}{b-ie}n^2\theta=0$$

et de l'élimination de q^2 entre cette équation et (59), il résulte, en remplaçant $i\frac{n}{r}$ par k' (55),

$$(61)\qquad (ed-bh)k'^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k'+ed-bh=0,$$

équation qui donne pour k' deux valeurs réelles, dont une comprise entre 0 *et* 1.

Nous avons ensuite (54, 55, 60)

$$(62)\qquad \frac{m}{n}=\frac{i\theta}{k'},\qquad \frac{r}{n}=\frac{i}{k'},\qquad \frac{s}{n}=-\theta,\qquad \frac{q^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{k^4}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta,$$

et nous obtiendrons $\frac{p^2}{n^2}$ en éliminant q^2 entre (58^1, 58^3), ce qui donne

$$\frac{p^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta\frac{ir}{n};$$

remplaçons $\frac{ir}{n}$ par $-\frac{1}{k'}$, (55), il vient

$$(63)\qquad \frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k'}.$$

Résumé concernant les quartiques φ_4^3.

19. Il résulte de ce qui a été dit (**14** à **18**) que, *en imposant à k la condition d'être réel et compris entre* -1 et $+1$, *les quartiques* φ_4^3, qui ont pour équation

$$\begin{cases} x^2-y^2=b(z^2-t^2)+2dzt,\\ 2xy\quad=e(z^2-t^2)+2hzt,\end{cases}$$

peuvent être représentées : 1° *par les équations*

$$\frac{x}{p(1-i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1+i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}=\frac{y}{p(1+i)\,\mathrm{sn}\,u+q(1-i)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}=\frac{z}{r\,\mathrm{sn}^2u+s}=\frac{t}{m\,\mathrm{sn}^2u+n},$$

où θ et k étant déterminés par les équations

$$\begin{cases} (-b+ie)\theta^2+2(d-ih)\theta+b-ie=0, \\ (ed-bh)k^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k+(ed-bh)=0, \end{cases}$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ *le sont à leur tour comme il suit :*

$$\begin{cases} \frac{p^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k, \qquad \frac{q^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{ed-bh}{e-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2}=-k^2, \qquad \frac{m}{n}=i\theta k, \qquad \frac{s}{n}=-\theta \end{cases}$$

et 2° peuvent l'être aussi par les équations

$$\frac{x}{p(1-i)\operatorname{dn}u+q(1+i)\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u} = \frac{y}{p(1+i)\operatorname{dn}u+q(1-i)\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}=\frac{z}{r\operatorname{dn}^2u+s}=\frac{t}{m\operatorname{dn}^2u+n},$$

où θ et k' étant déterminés par les équations

$$\begin{cases} (-b+ie)\theta^2+2(d-ih)\theta+b-ie=0, \\ (ed-bh)k^2-(b^2+e^2+d^2+h^2)k'(ed-bh)=0; \end{cases}$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ *le sont à leur tour par :*

$$\begin{cases} \frac{p^2}{n^2}=\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k'}, \qquad \frac{q^2}{n^2}=-\frac{1}{2}\frac{k^4}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \frac{r^2}{n^2}=-\frac{1}{k'^2}, \qquad \frac{m}{n}=\frac{i\theta}{k'}, \qquad \frac{s}{n}=-\theta, \end{cases}$$

et que les quartiques φ_4^3 n'admettent pas d'autre représentation paramétrique, en fonction de $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$.

Il existe une troisième représentation paramétrique, et une seule (**17**), si l'on n'impose plus à k la condition d'être réel.

Théorème. — *Il n'est pas possible de faire disparaître les imaginaires par un changement du tétraèdre de référence.*

Prenons, par exemple, la représentation par $\operatorname{dn}u$ et $\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$ qu'on vient d'écrire dans cette même page; chacun des rapports écrits est égal à celui-ci

$$\frac{z+\varkappa t}{\left(\frac{r}{n}+\varkappa\frac{m}{n}\right)\mathrm{dn}^2u+\frac{s}{n}+\varkappa},$$

qu'on peut écrire, si $\theta=\theta_1+\theta_2 i$, θ_1 et θ_2 réels,

$$\frac{z+\varkappa t}{[\pm i+\varkappa i(\theta_1+i\theta_2)]\frac{\mathrm{dn}^2u}{k'}+\varkappa-\theta_1-\theta_2 i}.$$

Nous n'avons qu'une seule solution possible : $\varkappa=\theta_2 i$ et ce rapport devient

$$\frac{z+\varkappa t}{[-\theta_1\theta_2-i(\pm 1-\theta_2^2)]\frac{\mathrm{dn}^2u}{k'}-\theta_1},$$

où les imaginaires subsistent.

Chapitre IV. — Cas où trois des cônes du faisceau de quadriques deviennent des cylindres.

20. Nous ne pouvons plus employer les coordonnées tétraédriques quand trois des cônes deviennent des cylindres puisque, dans tous les cas que nous avons étudiés, les sommets du tétraèdre de référence sont liés aux sommets des cônes faisant partie du faisceau de quadriques.

Il est donc nécessaire de reprendre complètement la question : *et l'on verra que les résultats sont essentiellement différents de ceux obtenus jusqu'ici.*

Nous allons faire choix d'un système de coordonnées cartésiennes; nous prendrons Ox, Oy, Oz respectivement parallèles aux génératrices des trois cylindres du faisceau et nous placerons l'origine en un point, quelconque, de la courbe.

On sait [1] que les cylindres (C_1), (C_2), (C_3) ont des équations de

[1] R. de Montessus de Ballore, *Introduction à la théorie des courbes gauches algébriques* (*Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris*), p. 49. Paris, Croville-Morant, 1918.

la forme

$$(1)\quad \begin{cases} (C_1) & cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z = 0, \\ (C_2) & ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \\ (C_3) & ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0. \end{cases}$$

L'un au moins de ces cylindres est hyperbolique, puisque

$$(2)\qquad (-c\gamma)(a\gamma)(ac) = -a^2c^2\gamma^2 < 0,$$

ce qui nécessite que l'un au moins des trois facteurs du premier membre soit négatif.

Dans ce qui suit, jusqu'au n° **24**, *nous supposerons que le cylindre* (C_2) *est hyperbolique*, c'est-à-dire que

$$a\gamma < 0.$$

21. 1° Les équations (1^3, 1^2)

$$(3)\quad \begin{cases} ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey = 0, \\ ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \end{cases}$$

suffisent à définir la quartique.

Posons

$$(4)\qquad y = \lambda x;$$

l'équation (3^1) devient

$$ax + c\lambda^2 x + 2d + 2e\lambda = 0,$$

d'où

$$(5^1, 5^2)\qquad x = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}, \qquad y = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}\lambda;$$

portons cette valeur de x dans l'équation (3^2), préalablement écrite

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - \gamma(ax^2 + dx)};$$

il viendra

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - 4\gamma a\frac{(d + e\lambda)^2}{(a + c\lambda^2)^2} - 4d\gamma\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}},$$

$$(5^3)\quad \gamma z + \varepsilon = \frac{1}{a + c\lambda^2}\sqrt{\varepsilon^2(a + c\lambda^2)^2 - 4d\gamma(d + e\lambda)(a + c\lambda^2) - 4a\gamma(d + e\lambda)^2};$$

l'expression qui figure sous le radical peut s'écrire

$$\left[\varepsilon(a+c\lambda^2)-\frac{2d\gamma}{\varepsilon}(d+\varepsilon\lambda)\right]^2-\left(\frac{4d^2\gamma^2}{\varepsilon^2}+4a\gamma\right)(d+\varepsilon\lambda^2)^2;$$

elle peut donc être mise sous forme d'une différence de carré si

$$(6)\qquad \gamma(d^2\gamma+a\varepsilon^2)>0.$$

2° Les équations (1^1, 1^3)

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} cy^2-\gamma z^2+2ey-2\varepsilon z=0,\\ ax^2+\gamma z^2+2dx+2\varepsilon z=0 \end{array}\right.$$

suffisent, tout comme les équations (3), à définir la quartique. Posons

$$(8)\qquad y=\lambda' z;$$

il vient (7^1)

$$c\lambda'^2 z+\gamma z+2e\lambda'-2\varepsilon=0,$$

d'où nous tirons

$$z=-2\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2},\qquad y=-2\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2}\lambda';$$

portons dans (7^2), préalablement écrite,

$$ax+d=\sqrt{d^2-a(\gamma z^2+2\varepsilon z)};$$

il vient

$$ax+d=\sqrt{a^2-4a\gamma\left(\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\lambda-c\lambda'^2}\right)^2-4a\varepsilon\frac{\varepsilon-e\lambda'}{\gamma-c\lambda'^2}},$$

$$ax+d=\frac{1}{\gamma-c\lambda'^2}\sqrt{d^2(\gamma-c\lambda'^2)-4a\varepsilon(\varepsilon-e\lambda')(\gamma-c\lambda'^2)-4a\gamma(\varepsilon-c\lambda'^2)^2};$$

ici, l'expression sous le radical est une différence de carrés si

$$(9)\qquad a(d^2\gamma+a\varepsilon^2)>0.$$

L'inégalité (2) montre que *l'une, et une seule, des deux relations* (6) *ou* (9) *est toujours vérifiée.*

22. Admettons, *pour fixer les idées*, que l'inégalité (6) soit vérifiée. Dans ce cas, l'expression qui figure sous le radical de l'équation (5^3) est une différence de carrés et nous pouvons écrire

$$(10)\qquad \gamma z + \varepsilon = \frac{1}{a + c\lambda^2}\sqrt{(P\lambda^2 + Q\lambda + R)(P'\lambda^2 + Q'\lambda + R')},$$

x et y étant déterminés en fonction de λ par les équations (5^1) (5^2)

$$(11)\qquad x = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}, \qquad y = -2\frac{d + e\lambda}{a + c\lambda^2}\lambda.$$

Posons

$$(12)\qquad Y^2 = P\lambda^2 + Q\lambda + R,$$

et soit λ_0 une racine du second membre de cette équation, de telle sorte que

$$0 = P\lambda_0^2 + Q\lambda_0 + R;$$

nous aurons, en soustrayant l'une de l'autre les deux équations qu'on vient d'écrire

$$Y.Y = P(\lambda + \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + Q(\lambda - \lambda_0);$$

posons encore

$$Y = \rho(\lambda - \lambda_0);$$

il vient, en portant dans l'équation qui précède,

$$Y\rho = P(\lambda + \lambda_0) + Q,$$

et nous avons, pour déterminer Y et λ en fonction de ρ, le système

$$\begin{cases} Y - \rho\lambda = -\lambda_0\rho, \\ \rho Y - P\lambda = P\lambda_0 + Q, \end{cases}$$

qui donne pour λ et Y des expressions de la forme

$$(13)\qquad \lambda = \frac{S_1 + S_2\rho^2}{P - \rho^2}, \qquad Y = \frac{S_3\rho}{P - \rho^2}.$$

Portons ces valeurs de λ et Y dans (10), que la relation (12) permet d'écrire

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{1}{a + c\lambda^2} Y\sqrt{P'\lambda^2 + Q'\lambda + R'};$$

il vient

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{1}{a + c\left(\dfrac{S_1 + S_2\rho^2}{P - \rho^2}\right)^2}\,\frac{S_3\rho}{P - \rho^2}\sqrt{P'\left(\frac{S_1 + S_2\rho^2}{P - \rho^2}\right)^2 + Q'\frac{S_1 + S_2\rho^2}{P - \rho^2} + R'},$$

ou

$$(14)\quad \gamma z+\varepsilon = \frac{S_3\rho}{a(P-\rho^2)^2+c(S_1+S_2\rho^2)^2}$$
$$\times\sqrt{P'(S_1+S_2\rho^2)^2+Q'(S_1+S_2\rho^2)(P-\rho^2)+R'(P-\rho^2)^2}.$$

23. Exprimer ρ et la racine carrée du polynome qui figure sous le radical par les fonctions elliptiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ est un problème analogue à celui qui a été étudié au n° **6**.

On y parviendra en écrivant, selon les cas,

$$\rho = h\operatorname{sn} u,\qquad \rho = h_1\operatorname{cn} u,\qquad \rho = h_2\operatorname{dn} u,$$

et en choisissant h ou h_1, ou h_2 convenablement.

La suite de cette étude (n^{os} **24-37**) *indiquera les modalités du calcul.*

Soit d'*abord*

$$\rho = h\operatorname{sn} u;$$

$\gamma z+\varepsilon$ et λ seront de la forme (14), (13)

$$(15)\quad \gamma z+\varepsilon = \frac{S_3 h'\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u}{a(P-h^2\operatorname{sn}^2 u)+c(S_1+S_2h^2\operatorname{sn}^2 u)},\qquad \lambda = \frac{S_1+S_2h^2\operatorname{sn}^2 u}{P-h^2\operatorname{sn}^2 u};$$

en second lieu, si

$$\rho = h_1\operatorname{cn} u,$$

$\gamma z+\varepsilon$ et λ sont de la forme

$$\gamma z+\varepsilon = \frac{S_3 h'_1\operatorname{cn} u\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u}{a(P-h^2\operatorname{sn}^2 u)+c(S_1+S_2h^2\operatorname{cn}^2 u)},\qquad \lambda = \frac{S_1+S_2h_1^2\operatorname{cn}^2 u}{P-h^2\operatorname{cn}^2 u};$$

la relation

$$\operatorname{cn}^2 u = 1-\operatorname{sn}^2 u$$

rend ces expressions identiques aux expressions (15).

De même si

$$\rho = h_2\operatorname{dn} u.$$

Les expressions (15) *de* $\gamma z+\varepsilon$ *et de* λ *sont donc les seules qu'il y ait lieu de considérer. Il en résulte que* x, y (11) *et* $\gamma z+\varepsilon$ *sont de la* *forme*

$$(16)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \quad y = \dfrac{\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \gamma z + \varepsilon = \dfrac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}. \end{cases}$$

Je vais établir, dans la suite de ce Chapitre, la correspondance entre les quantités π, χ, ω, le module k et a, c, d, e, γ, ε. Elle ne nécessite pas l'introduction d'imaginaires.

Réduction du système (16) *et conditions de réalité de* $\dfrac{\pi_1}{\omega_1}, \dfrac{\pi_3}{\omega_3}, \dfrac{\chi_1}{\omega_1}, \dfrac{\chi_3}{\omega_3}$.

24. Les valeurs (16) de x, y, z comportent dix paramètres : le module k et le rapport de neuf des quantités τ,

$$\pi_1, \quad \pi_2, \quad \pi_3, \quad \chi_1, \quad \chi_2, \quad \chi_3, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

à la dixième, qui sera ω_2. Les quantités à déterminer sont ainsi

$$k, \quad \frac{\tau}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

Nous calculerons d'abord

$$\frac{\pi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_3}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_3}.$$

Après avoir déterminé $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}, \dfrac{\omega_3}{\omega_2}$, il nous suffira d'écrire

$$\frac{\pi_1}{\omega_2} = \frac{\pi_1}{\omega_1} \times \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad \frac{\pi_3}{\omega_2} = \frac{\pi_3}{\omega_3} \times \frac{\omega_3}{\omega_2}, \qquad \frac{\chi_1}{\omega_2} = \frac{\chi_1}{\omega_1} \times \frac{\omega_1}{\omega_2}, \qquad \frac{\chi_3}{\omega_2} = \frac{\chi_3}{\omega_3} \times \frac{\omega_3}{\omega_1}$$

pour connaître les expressions de

$$\frac{\pi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_3}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_1}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_3}.$$

Nous pouvons remarquer que les inconnues $k, \dfrac{\tau}{\omega_2}, \ldots, \dfrac{\omega_3}{\omega_2}$ sont au nombre de 10, tandis que les équations (1) ou (3) ne comportent que six paramètres.

Remplaçons x, y, $\gamma z + \varepsilon$ par leurs valeurs (16) dans les équations (3), après avoir écrit l'équation (3^2) comme suit

$$\frac{1}{\gamma}(\gamma z + \varepsilon)^2 + ax^2 + 2dx - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.$$

Il vient, en remplaçant $\mathrm{cn}^2 u$, $\mathrm{dn}^2 u$ par $1 - \mathrm{sn}^2 u$, $1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u$,

$$\left\{\begin{aligned}
& a(\pi_1 \mathrm{sn}^4 u + \pi_2 \mathrm{sn}^2 u + \pi_3)^2 + c(\chi_1 \mathrm{sn}^4 u + \chi_2 \mathrm{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\
& \quad + 2d(\pi_1 \mathrm{sn}^4 u + \pi_2 \mathrm{sn}^2 u + \pi_3)(\omega_1 \mathrm{sn}^4 u + \omega_2 \mathrm{sn}^2 u + \omega_3) \\
& \quad + 2e(\chi_1 \mathrm{sn}^4 u + \chi_2 \mathrm{sn}^2 u + \chi_3)(\omega_1 \mathrm{sn}^4 u + \omega_2 \mathrm{sn}^2 u + \omega_3) = 0, \\
& \frac{1}{\gamma}\tau^2 \mathrm{sn}^2 u(1 - \mathrm{sn}^2 u)(1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u) + a(\pi_1 \mathrm{sn}^4 u + \pi_2 \mathrm{sn}^2 u + \pi_3)^2 \\
& \quad + 2d(\pi_1 \mathrm{sn}^4 u + \pi_2 \mathrm{sn}^2 u + \pi_3)(\omega_1 \mathrm{sn}^4 u + \omega_2 \mathrm{sn}^2 u + \omega_3) \\
& \quad - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_1 \mathrm{sn}^4 u + \omega_2 \mathrm{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Exprimons que ces équations sont identiquement vérifiées, c'est-à-dire que les coefficients des diverses puissances de $\mathrm{sn}\, u$ sont nulles; nous obtenons les deux systèmes

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
& a\pi_1^2 + c\chi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 + 2e\chi_1\omega_1 = 0, \\
& a\pi_1\pi_2 + c\chi_1\chi_2 + d(\pi_1\omega_2 + \pi_2\omega_1) + e(\chi_1\omega_1 + \chi_2\omega_1) = 0, \\
& a(\pi_2^2 + 2\pi_1\pi_3) + c(\chi_2^2 + 2\chi_1\chi_3) \\
& \quad + 2d(\pi_1\omega_3 + \pi_3\omega_1 + \pi_2\omega_2) + 2e(\chi_1\omega_3 + \chi_3\omega_1 + \chi_2\omega_2) = 0, \\
& a\pi_2\pi_3 + c\chi_2\chi_3 + d(\pi_2\omega_3 + \pi_3\omega_2) + e(\chi_2\omega_3 + \chi_3\omega_2) = 0, \\
& a\pi_3^2 + c\chi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 + 2e\chi_3\omega_3 = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
& a\pi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_1^2 = 0, \\
& \frac{1}{2\gamma}\tau^2 k^2 + a\pi_1\pi_2 + d(\pi_1\omega_2 + \pi_2\omega_1) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_1\omega_2 = 0, \\
& -\frac{1}{\gamma}\tau^2(1 + k^2) + a(\pi_2^2 + 2\pi_1\pi_3) + 2d(\pi_1\omega_3 + \pi_3\omega_1 + \pi_2\omega_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3) = 0, \\
& \frac{1}{2\gamma}\tau^2 + a\pi_2\pi_3 + d(\pi_2\omega_3 + \pi_3\omega_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_2\omega_3 = 0, \\
& a\pi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\omega_3^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
& \pi_1 = l_1\omega_1, \qquad \pi_2 = l_2\omega_2, \qquad \pi_3 = l_3\omega_3, \\
& \chi_1 = m_1\omega_1, \qquad \chi_2 = m_2\omega_2, \qquad \chi_3 = m_3\omega_3;
\end{aligned}\right.$$

les équations (17), (18) deviennent

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
& a l_1^2 + c m_1^2 + 2 d l_1 + 2 e m_1 = 0, \\
& a l_1 l_2 + c m_1 m_2 + d(l_1 + l_2) + e(m_1 + m_2) = 0, \\
& a(l_2^2 \omega_2^2 + 2 l_1 l_3 \omega_1 \omega_3) + c(m_2^2 \omega_2^2 + 2 m_1 m_3 \omega_1 \omega_3) \\
& \quad + 2d(l_1 \omega_1 \omega_3 + l_3 \omega_1 \omega_3 + l_2 \omega_2^2) + 2e(m_1 \omega_1 \omega_3 + m_3 \omega_1 \omega_3 + m_2 \omega_2^2) = 0, \\
& a l_2 l_3 + c m_2 m_3 + d(l_2 + l_3) + e(m_2 + m_3) = 0, \\
& a l_3^2 + c m_3^2 + 2 d l_3 + 2 e m_3 = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
& a l_1^2 + 2 d l_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \\
& \frac{1}{2\gamma} \tau^2 k^2 + a l_1 l_2 \omega_1 \omega_2 + d(l_1 + l_2)\omega_1 \omega_2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \omega_1 \omega_2 = 0, \\
& -\frac{\tau^2}{\gamma}(1 + k^2) + a(l_2^2 \omega_2^2 + 2 l_1 l_3 \omega_1 \omega_3) \\
& \quad + 2d(l_1 \omega_1 \omega_3 + l_3 \omega_1 \omega_3 + l_2 \omega_2^2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_3) = 0, \\
& \frac{1}{2\gamma} \tau^2 + a l_2 l_3 \omega_2 \omega_3 + d(l_2 + l_3)\omega_2 \omega_3 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \omega_2 \omega_3 = 0, \\
& a l_3^2 + 2 d l_3 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.
\end{aligned}\right.$$

25. Les équations (21^1), (21^5) déterminent l_1, l_3, à cela près que l_1, l_3 sont simplement assujettis à être racines de

$$(22^1)\qquad a l^2 + 2 d l - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0;$$

la discussion de ce point prendra plus tard une large place de cette étude.

De (20^1) retranchons (21^1), et de (20^5) retranchons (21^5); il en résulte que m_1, m_2 doivent vérifier l'équation

$$(22^2)\qquad c m^2 + 2 e m + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0;$$

à ce propos encore une discussion importante aura lieu.

Les conditions de réalité de l_1 et l_2, m_1 et m_2 sont (22^1), (22^2)

$$(23)\qquad d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} > 0, \qquad a^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.$$

Reportons-nous aux équations (1) qui définissent la quartique. Écrivons-les

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\gamma(cy+e)^2+c(\gamma z+\varepsilon)^2+\Delta_1=0,\\ &\gamma(ax+d)^2+a(\gamma z+\varepsilon)^2+\Delta_2=0,\\ &c(ax+d)^2+a(cy+e)^2+\Delta_3=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$(25)\qquad \Delta_1=\gamma e^2-c\varepsilon^2,\qquad \Delta_2=-a\varepsilon^2-\gamma d^2,\qquad \Delta_3=-cd^2-ae^2;$$

on sait que Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les discriminants des coniques (24). *Ils vont jouer un rôle fondamental dans ce Chapitre.*

Dès maintenant, ils s'introduisent dans les conditions de réalité (23) qui peuvent être écrites, en les multipliant par γ^2,

$$\gamma(\gamma\delta^2+a\varepsilon^2)>0,\qquad \gamma(\gamma e^2-c\varepsilon^2)>0$$

ou

$$(26)\qquad -\gamma\Delta_2>0,\qquad \gamma\Delta_1>0.$$

Montrons que ces conditions de réalité (23) *sont vérifiées si*

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &a>0\quad \text{avec}\quad c<0\quad \text{et}\quad \gamma>0,\\ &\textit{ou bien}\\ &a<0\quad \text{avec}\quad c>0\quad \text{et}\quad \gamma<0;\end{aligned}\right.$$

en effet, les équations (24^1, 24^2) peuvent être écrites

$$\left\{\begin{aligned} &-\gamma^2(cy+e)^2+c\gamma(\gamma z+\varepsilon)^2+\gamma\Delta_1=0,\\ &\gamma^2(ax+d)^2+a\gamma(\gamma z+\varepsilon)^2+\gamma\Delta_2=0;\end{aligned}\right.$$

la *réalité* des cylindres représentés par ces équations, qui va de pair avec la réalité de la quartique, exige :

1° *Si*

$$a>0,\qquad c<0,\qquad \gamma>0,\qquad \text{d'où}\qquad c\gamma<0,\qquad a\gamma>0,$$

que

$$\gamma\Delta_1>0,\qquad \gamma\Delta_2<0;$$

2° *Si*

$$a<0,\qquad c>0,\qquad \gamma<0,\qquad \text{d'où encore}\qquad c\gamma<0,\qquad a\gamma>0,$$

que, à nouveau,

$$\gamma\Delta_1>0,\qquad \gamma\Delta_2<0;$$

ce sont les conditions (26).

26. *Mais, a, c, γ peuvent avoir d'autres signes que ceux indiqués (27) et il nous est nécessaire, à ce propos, d'envisager non seulement les formules (16), mais aussi les formules obtenues par permutation qui vont suivre.*

1° Posons, au lieu de (16),

$$(28)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad cy + e = \dfrac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ z = \dfrac{\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} \end{cases}$$

et portons ces valeurs de x, $cy+e$, z dans les équations (1^2, 1^3), qui sont

$$\begin{cases} ax^2 + \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z = 0, \\ \dfrac{1}{c}(cy+e)^2 + ax^2 + 2dx - \dfrac{e^2}{c} = 0; \end{cases}$$

il vient

$$(29)\quad \begin{cases} a(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 + \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\ \quad + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\ \quad + 2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) = 0, \\ \dfrac{1}{c}\tau^2 \operatorname{sn}^2 u(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\ \quad + a(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 + 2d(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \\ \quad \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) - \dfrac{e^2}{c}(\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Égalons à zéro les coefficients de $\operatorname{sn}^8 u$ et les termes indépendants de $\operatorname{sn} u$; il vient

$$\begin{cases} a\pi_1^2 + \gamma\chi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 + 2\varepsilon\chi_1\omega_1 = 0, \\ a\pi_1^2 + 2d\pi_1\omega_1 - \dfrac{e^2}{c}\omega_1^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\pi_3^2 + \gamma\chi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 + 2\varepsilon\chi_3\omega_3 = 0. \\ a\pi_3^2 + 2d\pi_3\omega_3 - \dfrac{e^2}{c}\omega_3^2 = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'en posant, comme précédemment (19),

$$\begin{cases} \pi_1 = l_1\omega_1, \qquad \pi_2 = l_2\omega_2, \qquad \pi_3 = l_3\omega_3, \\ \chi_1 = m_1\omega_1, \qquad \chi_2 = m_2\omega_2, \qquad \chi_3 = m_3\omega_3, \end{cases}$$

l_1, l_3, m_1, m_3 seront déterminés par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} al^2 + 2dl - \dfrac{e^2}{c} = 0, \\ al^2 + \gamma m^2 + 2dl + 2\varepsilon m = 0 \end{array}\right.$$

ou

$$al^2 + 2dl - \frac{e^2}{c} = 0, \qquad \gamma m^2 + 2\varepsilon m + \frac{e^2}{c} = 0. \tag{30}$$

Ici, les conditions de réalité sont

$$d^2 + \frac{ae^2}{c} > 0, \qquad \varepsilon^2 - \gamma\frac{e^2}{c} > 0,$$

ou

$$c(cd^2 + ae^2) > 0, \qquad c(c\varepsilon^2 - \gamma e^2) > 0,$$

ou encore (25)

$$-c\Delta_3 > 0, \qquad -c\Delta_1 > 0. \tag{31}$$

Écrivons les équations (24^1, 24^3)

$$\left\{\begin{array}{l} -\gamma c(cy + e)^2 + c^2(\gamma z + \varepsilon)^2 + c\Delta_1 = 0, \\ c^2(ax + d)^2 + ac(cy + e)^2 + c\Delta_3 = 0. \end{array}\right.$$

Si $\gamma c < 0$, $ac > 0$, la réalité des deux cylindres exige que les conditions (31) soient vérifiées.

Les formules (28) *conviendront par conséquent, à l'exclusion des formules* (16), *si*

$$a > 0 \quad \textit{avec} \quad c > 0 \quad \textit{et} \quad \gamma < 0 \qquad \text{ou} \qquad a < 0, \quad c < 0, \quad \gamma > 0. \tag{32}$$

2° Posons, au lieu de (16) ou de (28),

$$\left\{\begin{array}{l} cx + d = \dfrac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega^2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \dfrac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ z = \dfrac{\chi_2 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \end{array}\right. \tag{33}$$

et portons ces valeurs de $cx + d$, y, z dans les équations (1^1, 1^2), qui sont

$$\left\{\begin{array}{l} cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z = 0, \\ \dfrac{1}{a}(ax + d)^2 + \gamma z^2 + 2\varepsilon z - \dfrac{d^2}{a} = 0; \end{array}\right.$$

il vient

$$\left\{\begin{aligned}
&c(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3)^2 - \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 \\
&+2c(\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) \\
&-2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) = 0; \\
&\frac{1}{a}\operatorname{sn}^2 u(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u) \\
&\quad + \gamma(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3)^2 + 2\varepsilon(\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3) \\
&\quad \times (\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3) - \frac{d^2}{a}(\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3)^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Exprimons encore que les coefficients de $\operatorname{sn}^8 u$ et les termes indépendants de $\operatorname{sn} u$ sont nuls :

$$\left\{\begin{aligned}
&c\pi_1^2 - \gamma\chi_1^2 + 2c\pi_1\omega_1 - 2\varepsilon\chi_1\omega_1 = 0, \\
&c\pi_3^2 - \gamma\chi_3^2 + 2c\pi_3\omega_3 - 2\varepsilon\chi_3\omega_3 = 0, \\
&\gamma\chi_1^2 + 2\varepsilon\chi_1\omega_1 - \frac{d^2}{a}\omega_1^2 = 0, \\
&\gamma\chi_3^2 + 2\varepsilon\chi_3\omega_1 - \frac{d^2}{a}\omega_3^2 = 0;
\end{aligned}\right.$$

ici, m_1, m_3 d'une part, l_1, l_3 d'autre part, sont racines des équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\gamma m^2 + 2\varepsilon m - \frac{d^2}{a} = 0, \\
&c l^2 + 2e l - \frac{d^2}{a} = 0;
\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, comme conditions de réalité,

$$\varepsilon^2 + \gamma\frac{d^2}{a} > 0, \qquad e^2 + c\frac{d^2}{a} > 0,$$

ou

$$a(a\varepsilon^2 + \gamma d^2) > 0, \qquad a(ae^2 + cd^2) > 0,$$

ou encore (25)

(34) $$-a\Delta_2 > 0, \qquad -a\Delta_3 > 0.$$

Les équations (24^2, 24^3), écrites

$$\left\{\begin{aligned}
&a\gamma(ax+d)^2 + a^2(\gamma z + \varepsilon)^2 + a\Delta_2 = 0, \\
&ac(ax+d)^2 + a^2(cy+e)^2 + a\Delta_3 = 0,
\end{aligned}\right.$$

exigent, pour la réalité des cylindres qu'elles représentent, que

$$a\Delta_2 < 0 \quad \text{si} \quad a\gamma > 0 \qquad \textit{et} \qquad a\Delta_3 < 0 \quad \text{si} \quad ac > 0;$$

donc les conditions (33) *sont vérifiées si*

$$a\gamma > 0 \qquad \textit{ou} \qquad ac > 0,$$

ou bien si

$$(35) \quad a > 0 \quad \text{avec} \quad c > 0 \quad \text{et} \quad \gamma > 0 \qquad \textit{ou} \qquad a < 0, \quad c < 0, \quad \gamma < 0.$$

Par conséquent, *la représentation* (32), à l'exclusion des représentations (16) et (28), *convient si les conditions* (34) *sont vérifiées.*

27. Formons le Tableau des différents signes que peuvent avoir a, c, γ et indiquons dans chaque cas les formules à employer et qui sont, en se reportant à (27) pour les formules (16), à (32) pour les formules (28), à (35) pour les formules (33) :

(36)

	Signes de a.	Signes de c.	Signes de γ.	Formules à employer.
1.....	+	+	+	(33)
2.....	+	+	—	(28)
3.....	+	—	+	(16)
4.....	+	—	—	Voir form. (37_a)
5.....	—	+	+	Voir form. (37_b) (1)
6.....	—	+	—	(16)
7.....	—	—	+	(28)
8.....	—	—	—	(33)

Rien n'est spécifié pour les cas 4 et 5.

1° *Cas de*

(37_a)

			Formules à employer.
1. Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$,	on a	$\gamma\Delta_1 > 0$, $\gamma\Delta_2 < 0$	(16)
2. Si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$,	on a	$-c\Delta_1 > 0$, $-c\Delta_3 > 0$	(28)
3. Si $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0$,	on a	$-a\Delta_2 > 0$, $-a\Delta_3 > 0$	(33)

(1) Les formules (37_b) sont placées dans le texte après les formules (39).

Il ne peut pas se présenter de combinaisons autres que $(37_a^1, 37_a^2, 37_a^3)$. Formons en effet le Tableau des signes de Δ_1, Δ_2, Δ_3 et inscrivons dans la dernière colonne la combinaison (37_a) correspondante :

(38)

	Signes de Δ_1.	Δ_2.	Δ_3.	Combinaison (37_a) correspondante.
1	+	+	+	(37_a^2)
2	+	+	—	»
3	+	—	+	(37_a^2)
4	+	—	—	(37_a^3)
5	—	+	+	(37_a^1)
6	—	+	—	(37_a^1)
7	—	—	+	»
8	—	—	—	(37_a^3)

Il subsiste, *semble-t-il*, les combinaisons $(38^2, 38^7)$.

Or, ces combinaisons ne peuvent pas se présenter. En effet, Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont liés (25) par la relation

$$a\Delta_1 - c\Delta_2 + \gamma\Delta_3 = 0 \tag{39}$$

et, puisque $a > 0$, $c < 0$, $\gamma < 0$, on aurait (38^2)

$$a\Delta_1 > 0, \qquad -c\Delta_2 > 0, \qquad \gamma\Delta_3 > 0,$$

ce qui est incompatible avec (39).

La combinaison (38^7) donnerait de son côté

$$a\Delta_1 < 0, \qquad -c\Delta_2 < 0, \qquad \gamma\Delta_3 < 0,$$

ce qui est encore incompatible avec (39).

2° *Examinons maintenant le cas de* $a < 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$ (36^5). Nous remarquons que :

			Formules à employer.
(37_b) 1. Si	$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$,	on a $\gamma\Delta_1 > 0$, $\gamma\Delta_2 < 0$	(16)
2. Si	$\Delta_1 < 0$, $\Delta_3 < 0$,	on a $-c\Delta_1 > 0$, $-c\Delta_3 > 0$	(29)
3. Si	$\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$,	on a $-a\Delta_1 > 0$, $-a\Delta_3 > 0$	(32)

Formons encore le Tableau des signes de Δ_1, Δ_2, Δ_3 et inscrivons dans la dernière colonne la combinaison (37_b) correspondante :

(40)

	Signes de Δ_1.	Signes de Δ_2.	Signes de Δ_3.	Combinaison (37_b) correspondante.
1	+	+	+	(37_b^3)
2	+	+	—	»
3	+	—	+	(37_b^1)
4	+	—	—	(37_b^1)
5	—	+	+	(37_b^3)
6	—	+	—	(37_b^2)
7	—	—	+	»
8	—	—	—	(37_b^2)

Il reste les combinaisons (40^2) et (40^7); *puisque* (39)

$$a\Delta_1 - c\Delta_2 + \gamma\Delta_3 = 0,$$

ces combinaisons ne peuvent se présenter; on le verrait comme tout à l'heure, en répétant ce qui a été dit à propos du Tableau (38).

28. Conclusion pour l_1, l_3, m_1, m_3. — *Ces quantités sont toujours réelles, sous condition de choisir celles des formules* (16, 28, 33) *qui sont spécifiées dans le Tableau* (36), *complété pour les cas* $(36^4, 36^5)$ *par les Tableaux* $(37_a, 37_b)$.

Il est évident que sous condition de permuter convenablement entre elles les lettres x, y, z, on peut toujours s'arranger de manière à ce que ce soient les formules (16) qui conviennent : *Nous supposerons qu'il en est ainsi dans tout ce qui suit.*

Détermination de $\frac{\pi_1}{\omega_1}, \frac{\pi_2}{\omega_2}, \frac{\pi_3}{\omega_3}, \frac{\chi_1}{\omega_1}, \frac{\chi_2}{\omega_2}, \frac{\chi_3}{\omega_3}$.

29. Les quantités (19)

$$\frac{\pi_2}{\omega_2} = l_2, \qquad \frac{\chi_2}{\omega_2} = m_2$$

sont déterminées par les relations $(20^2, 20^4)$, n° **28**. Écrivons à nouveau les formules (20^2, 20^4) en les mettant sous la forme

$$(41) \qquad \begin{cases} (al_1+d)l_2+(cm_1+e)m_2+dl_1+em_1=0, \\ (al_3+d)l_2+(cm_3+e)m_2+dl_3+em_3=0. \end{cases}$$

Nous obtiendrons, en les ajoutant ensemble, et en les retranchant l'une de l'autre, deux équations qui vont être *fondamentales* pour ce qui suit

$$(42) \qquad \begin{aligned} &[a(l_1+l_3)+2d]l_2+[c(m_1+m_3)+2e]m_2 \\ &\quad +d(l_1+l_3)+e(m_1+m_3)=0, \end{aligned}$$

$$(43) \qquad (al_2+d)(l_1-l_3)+(cm_2+e)(m_1-m_3)=0.$$

D'autre part, *nous supposons essentiellement que les équations* (22^1, 22^2), *dont* l_1, l_3 *et* m_1, m_3 *sont respectivement racines, ont chacune leurs deux racines distinctes;* car si les racines de (21^1) sont égales l'une à l'autre,

$$d^2+a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \quad \text{ou} \quad (25)\ \Delta_2$$

est nul, ce qui fait que le cylindre (1^2) se décompose en deux plans, et la quartique en deux coniques, cas dépourvu d'intérêt.

De même si l'équation (22^2) a ses deux racines égales, c'est le cylindre (1^1) qui se décompose en deux plans.

1° *On ne peut avoir*

$$l_1 \neq l_3 \quad \text{avec} \quad m_1 \neq m_3.$$

Dans cette hypothèse en effet (22^1),

$$l_1+l_3=-\frac{2d}{a}, \qquad m_1+m_3=-\frac{2e}{c},$$

et l'équation (42) se réduit à

$$-\frac{2d^2}{a}-\frac{2e^2}{c}=0,$$

ou (25)

$$\Delta_3=0;$$

ce serait alors le cylindre (1^3) qui se décomposerait en deux plans :

2° l_1 *et* l_3 *ne peuvent être égaux à une même racine de l'équation* (22^1), *si* m_1 *et* m_3 *sont aussi égaux à une même racine de* (22^2); *autrement dit, les racines de* (22^1) *étant distinctes l'une de l'autre,* *ainsi que les racines de* (22^2), selon l'hypothèse faite, $\left(d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0,\ e^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0\right)$, *on ne peut avoir*

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 = m_3.$$

Nous allons voir que, *s'il en était ainsi,* Δ_3 *serait encore nul.*

L'équation (20^3) peut en effet être écrite

$$2[al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3)]\omega_1\omega_3 + (al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2)\omega_2^2 = 0;$$

si

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 = m_3 \qquad \left(d^2 + a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0,\ e^2 - c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} \neq 0\right),$$

on a

$$al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) = (al_1^2 + 2dl_1) + (cm_1^2 + 2em_1)$$

ou (22^1, 22^2)

$$al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) = 0;$$

l'équation (20^3) devient alors

$$(al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2)\omega_2^2 = 0;$$

$\omega_2 = 0$ impliquerait $\tau = 0$ (21^4) et $\gamma z + \varepsilon = 0$ (16); donc, dans notre hypothèse,

$$al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = 0. \tag{44}$$

A cette équation nous allons adjoindre celles-ci (22^1, 22^2, 41^1) :

$$\left\{\begin{aligned} &al_1^2 + 2dl_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0,\\ &cm_1^2 + 2cm_1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0,\\ &(al_1 + d)l_2 + (cm_1 + e)m_2 + dl_1 + em_1 = 0.\end{aligned}\right. \tag{45}$$

a. Combinons d'abord les équations (44, 45^1, 45^2) en ajoutant ensemble (45^1, 45^2), ce qui donne

$$al_1^2 + 2dl_1 + cm_1^2 + 2em_1 = 0,$$

et en retranchant l'équation (44) de celle-ci; il vient

$$[a(l_1 + l_2) + 2d](l_1 - l_2) + [c(m_1 + m_2) + 2e](m_1 - m_2) = 0. \tag{46}$$

b. Combinons ensuite les équations (45^1, 45^2, 45^3), dont la dernière n'est pas encore intervenue, en retranchant de (45^3) l'équation (46), combinaison de (44, 45^1, 45^2), ce qui donne (44)

$$[(al_1+d)l_2 - al_1^2] + [(cm_1+e)m_2 - cm_1^2] - dl_1 - em_1 = 0,$$

ou

$$a(l_1 l_2 - l_1^2) + c(m_1 m_2 - m_1^2) + d(l_2 - l_1) + e(m_2 - m_1) = 0.$$

ou encore

$$(47) \qquad (al_1+d)(l_2-l_1) + (cm_1+e)(m_2-m_1) = 0.$$

c. Nous pouvons écrire l'équation (46) *de la manière suivante :*

$$(al_1+d)(l_2-l_1) + (al_2+d)(l_2-l_1)$$
$$+ (cm_1+e)(m_2-m_1) + (cm_2+e)(m_2-m_1) = 0);$$

donc (47)

$$(48) \qquad (al_2+d)(l_2-l_1) + (cm_2+e)(m_2-m_1) = 0.$$

Retranchons (47) de (48); il vient

$$a(l_2-l_1)^2 + c(m_2-m_1)^2 = 0.$$

d'où nous tirons

$$\left(\frac{l_1-l_2}{m_1-m_2}\right)^2 = -\frac{c}{a};$$

portons dans (47), écrite préalablement,

$$(al_1+d)^2(l_2-l_1)^2 = (cm_1+e)^2(m_2-m_1)^2;$$

il vient

$$(a^2 l_1^2 + 2adl_1 + d^2)c + (c^2 m_1^2 + 2cem_1 + e^2)a = 0,$$
$$[a(al_1^2 + 2dl_1) + d^2]c + [c(cm_1^2 + 2em_1) + e^2]a = 0.$$

ou (45)

$$\left(a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} + d^2\right)c + \left(-c\frac{\varepsilon^2}{\gamma} + e^2\right)a = 0.$$

ou encore (25)

$$d^2 c + e^2 a = \Delta_3 = 0.$$

Nous avons remarqué qu'alors le cylindre (1^3), dont Δ_3 est le discriminant, se décompose en deux plans.

3° *Il ne reste donc* (43) *que deux hypothèses possibles : ou bien*

$$l_1 \neq l_3, \qquad m_1 = m_3,$$

ou bien

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 \neq m_3.$$

Nous allons les étudier et *nous verrons que l'une ou l'autre convient, suivant les cas.*

30. *a. Cas de*

$$(49) \qquad l_1 \neq l_3, \qquad m_1 = m_3;$$

ici (45)

$$(50) \qquad l_1 + l_3 = -\frac{2d}{a}, \qquad l_1 l_3 = -\frac{\varepsilon^2}{a\gamma}, \qquad c m_1^2 + 2 e m_1 + \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 1.$$

L'équation (43) donne

$$a l_2 + d = 0,$$

d'où

$$(51) \qquad l_2 = -\frac{d}{a}.$$

Portons cette valeur de l_2 dans l'équation (41'); il vient

$$-(a l_1 + d)\frac{d}{a} + (c m_1 + e) m_2 + d l_1 + e m_1 = 0,$$

$$-d^2 + a(c m_1 + e) m_2 + a e m_1 = 0,$$

$$(52) \qquad m_2 = \frac{d^2 - a e m_1}{a(c m_1 + e)}.$$

b. Cas de

$$l_1 = l_3, \qquad m_1 \neq m_3;$$

ici (45)

$$(53) \qquad a l_1^2 + 2 e l_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0, \qquad m_1 + m_3 = -\frac{2e}{c}, \qquad m_1 m_3 = \frac{\varepsilon^2}{c\gamma}.$$

L'équation (43) donne

$$c m_2 + e = 0,$$

d'où

$$(54) \qquad m_2 = -\frac{e}{c};$$

portons cette valeur de m_2 dans l'équation (41^1); nous aurons

$$(al_1+d)l_2-(cm_1+e)\frac{e}{c}+dl_1+em_1=0,$$

$$c(al_1+d)l_2-e^2+dcl_1=0,$$

$$l_2=\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}. \tag{55}$$

31. RÉSUMÉ *concernant* l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 *ou* $\frac{\pi_1}{\omega_1}, \ldots, \frac{\chi_3}{\omega_3}$:

1° *Ou bien* l_1 et l_3 sont les deux racines *différentes* de l'équation

$$al^2+2dl-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0$$

et alors m_1, m_3 sont égaux à une *même* racine m_1 de l'équation

$$cm^2+2em+\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0;$$

dans ce cas

$$l_2=-\frac{d}{a}, \qquad m_2=\frac{d^2-aem_1}{a(cm_1+e)}; \tag{56¹}$$

mais on peut prendre aussi (41^2)

$$m_2=\frac{d^2-aem_3}{a(cm_3+e)};$$

2° *Ou bien* m_1 et m_3 sont les deux racines *différentes* de l'équation

$$cm^2+2em+\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0$$

et alors l_1, l_3 sont égaux à une *même* racine l_1 de l'équation

$$al^2+2dl-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0;$$

dans ce cas

$$l_2=\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}, \qquad m_2=\frac{e}{c}, \tag{56²}$$

et l'on peut prendre aussi (41, 2)

$$l_2=\frac{e^2-cdl_3}{c(al_3+d)}.$$

Calcul de $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, $\frac{\omega_3}{\omega_2}$.

52. *Revenons aux équations* (20, 21). Multiplions les équations (21^2, 21^4) par 2 et ajoutons-les à (21^3), de manière à éliminer τ^2 et k^2. Il vient

$$
\begin{aligned}
(57)\qquad & 2\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\omega_1\omega_2 \\
& +a(l_2^2\omega_2^2+2l_1l_3\omega_1\omega_3)+2d[(l_1+l_3)\omega_1\omega_3+l_2\omega_2^2] \\
& -\frac{\varepsilon^2}{\gamma}(\omega_2^2+2\omega_1\omega_3)+2\left[al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\omega_2\omega_3=0.
\end{aligned}
$$

D'autre part, écrivons (20^3) comme il suit :

$$
\begin{aligned}
(58)\qquad & 2[al_1l_3+cm_1m_3+d(l_1+l_3)+2(m_1+m_3)]\omega_1\omega_3 \\
& \qquad +(al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2em_2)\omega_2^2=0.
\end{aligned}
$$

Les équations (58, 57) équivalent au système

$$
(59)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \omega_1=\nu\omega_2, \qquad \omega_3=\sigma\omega_2, \\
& 2[al_1l_3+cm_1m_3+d(l_1+l_3)+e(m_1+m_3)]\nu\sigma \\
& \qquad +al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2em_2=0, \\
& 2\left[al_1l_3+d(l_1+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu\sigma+2\left[al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu \\
& \qquad +2\left[al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\sigma \\
& \qquad +al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous allons éliminer l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3 *de ces équations*, en distinguant les deux cas spécifiés au n° **51**.

PREMIER CAS (n° **51**). — Calculons les coefficients de $\nu\sigma$, ν, σ, ... figurant dans les équations (59).

Tout d'abord (nº **31**, 1º)

$$(a) \quad \begin{aligned} & al_1 l_3 + cm_1 m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) \\ & = al_1 l_3 + d(l_1 + l_3) + [cm_1 m_3 + e(m_1 + m_3)] \\ & = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2d^2}{a} + (cm_1^2 + 2em_1) \\ & = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2d^2}{a} - \left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right) \\ & = -\frac{2}{a\gamma}(a\varepsilon^2 + \gamma d^2) \end{aligned}$$

ou (25)

$$(60) \qquad al_1 l_3 + cm_1 m_3 + d(l_1 + l_3) + e(m_1 + m_3) = \frac{2\Delta_2}{a\gamma}.$$

Ensuite

$$(b) \quad \begin{aligned} & al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 \\ & = \frac{c(d^2 - aem_1)^2 - ad^2(cm_1 + e)^2 + 2ae(d^2 - aem_1)(cm_1 + e)}{a^2(cm_1 + e)^2}; \end{aligned}$$

le *numérateur* du second membre peut être écrit successivement

$$\begin{gathered} -ac(ae^2 + cd^2)m_1^2 - 2ae(ae^2 + cd^2)m_1 + d^2(ae^2 + cd^2), \\ -[a(cm_1^2 + 2em_1) - d^2](ae^2 + cd^2), \\ -\left(-a\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - d^2\right)(ae^2 + cd^2) \end{gathered}$$

ou (25)

$$\frac{\Delta_2 \Delta_3}{\gamma};$$

le dénominateur a pour expression

$$\begin{aligned} a^2(cm_1 + e)^2 &= a^2(c^2 m_1^2 + 2cm_1 + e^2) \\ &= a^2\left[c\left(-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right) + e^2\right] \\ &= \frac{a^2}{\gamma}(\gamma\varepsilon - c\varepsilon^2) \\ &= \frac{a^2 \Delta_1}{\gamma}; \end{aligned}$$

par conséquent

$$(61) \qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = \frac{\Delta_2 \Delta_3}{a^2 \Delta_1}.$$

Passons aux coefficients de l'équation (59^2); ici

$$(c)\qquad a l_1 l_3 + d(l_1 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - 2\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$
$$= -\frac{2}{a\gamma}(a\varepsilon^2 + \gamma d^2),$$

$$(62)\qquad a l_1 l_3 + d(l_1 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{2\Delta_2}{a\gamma}.$$

Nous avons

$$(d)\qquad a l_1 l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -l_1 d + d\left(l_1 - \frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$
$$= -\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(63)\qquad a l_1 l_2 + d(l_1 + l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma}.$$

$$(e)\qquad a l_2 l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = -l_3 d + d\left(l_3 - \frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(64)\qquad a l_2 l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta^2}{a\gamma}.$$

$$(f)\qquad a l_2^2 + 2 d l_2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{d^2}{a} + 2d\left(-\frac{d}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$
$$= -\frac{d^2}{a} - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(65)\qquad a l_2^2 + 2 d l_2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma}.$$

Il résulte de ces formules que les équations (59) s'écrivent

$$\frac{4\Delta_2}{a\gamma}\nu\sigma + \frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1} = 0, \qquad \frac{4\Delta_2}{a\gamma}\nu\sigma + \frac{2\Delta_2}{a\gamma}(\nu + \sigma) + \frac{\Delta_2}{a\gamma} = 0;$$

comme nous supposons que Δ_2 (discriminant de la conique 1^2) n'est pas nul, elles se réduisent à

$$\frac{4}{\gamma}\nu\sigma + \frac{\Delta_3}{a\Delta_1} = 0, \qquad (2\nu + 1)(2\sigma + 1) = 0,$$

et admettent les deux systèmes de solutions *réelles*

$$(66^1)\qquad \begin{cases} \nu' = -\dfrac{1}{2}, & \sigma' = \dfrac{\gamma}{2a}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}, \\[2mm] \nu'' = \dfrac{\gamma}{2a}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}, & \sigma'' = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ces formules correspondent au premier cas du n° **31**.

Deuxième cas (n° **31**). — Reprenons le calcul des coefficients $\nu\sigma$, ν, ..., qui figurent dans les équations (59) en partant des données (56^2).

On a

$$(a)\qquad al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3) = al_1^2 + 2dl_1^2 + [cm_1m_3 + e(m_1+m_3)],$$

$$(67)\qquad al_1l_3 + cm_1m_3 + d(l_1+l_3) + e(m_1+m_3) = \frac{\varepsilon^2}{\gamma} + \left(\frac{\varepsilon^2}{\gamma} - \frac{2e^2}{c}\right) = \frac{2}{c\gamma}(c\varepsilon^2 - \gamma e^2) = -\frac{2\Delta}{\gamma}.$$

$$(b)\qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = \frac{a(e^2 - cdl_1)^2 - ce^2(al_1+d)^2 + 2cd(e^2 - cdl_1)(al_1+d)}{c^2(al_1+d)^2};$$

écrivons le numérateur

$$-ac(ae^2+cd^2)l_1^2 - 2cd(ae^2+cd^2)l_1 + e^2(ae^2+cd^2)$$

ou

$$[-c(al_1^2+2dl_1)+e^2](ae^2+cd^2),$$

$$\left(-\frac{c\varepsilon^2}{\gamma}+e^2\right)(ae^2+cd^2);$$

on voit qu'il a pour expression (25),

$$-\frac{\Delta_1\Delta_3}{\gamma};$$

quant au dénominateur, il n'est autre que

$$c^2(al_1^2+d^2)^2 = c^2[a(al_1^2+2dl_1)+d^2] = c^2\left(a\frac{\varepsilon^2}{\gamma}+d^2\right) = \frac{c^2}{\gamma}(-\Delta_2);$$

ainsi,

$$(68)\qquad al_2^2 + cm_2^2 + 2dl_2 + 2em_2 = \frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}.$$

$$(c)\qquad al_1l_3 + d(l_1+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = al_1^2 + 2dl_1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(69)\qquad al_1l_3 + d(l_1+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = 0.$$

$$(d)\quad al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=al_1\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}+d\left[l_1+\frac{e^2-cdl_1}{c(al_1+d)}\right]-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{al_1(e^2-cdl_1)+cdl_1(al_1+d)+d(e^2-cdl_1)}{c(al_1+d)}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{(al_1+d)e^2}{c(al_1+d)}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{e^2}{c}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$(70)\qquad al_1l_2+d(l_1+l_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c\gamma}.$$

$$(e)\qquad al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=al_2l_1+d(l_2+l_1)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

ou (70)

$$(71)\qquad al_2l_3+d(l_2+l_3)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c\gamma}.$$

$$(f)\qquad al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=(al_2^2+cm_2^2+2dl_2+2em_2)-(cm_2^2+2em_2)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

ou (68)

$$al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}-\left(\frac{e^2}{c}-2e\frac{e}{c}\right)-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{e^2}{c}-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{1}{c\gamma}(\gamma e^2-c\varepsilon^2)$$

$$=\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}+\frac{\Delta_1}{c\gamma},$$

$$(72)\qquad al_2^2+2dl_2-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=\frac{\Delta_1}{c}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{\gamma c\Delta_2}.$$

Portons dans les équations (59). Nous aurons

$$-\frac{4\Delta_1}{c\gamma}\nu\sigma+\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}=0,\qquad 2\frac{\Delta_1}{c\gamma}(\nu+\sigma)+\frac{\Delta_1}{c}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{\gamma c\Delta_2}=0$$

ou ($\Delta_1\neq 0$),

$$4\nu\sigma-\frac{\gamma}{c}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0,\qquad 2(\nu+\sigma)+\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{c\Delta_2}=0;$$

ν et σ sont donc les racines de l'équation

$$\Sigma^2+\frac{1}{2}\,\frac{\gamma\Delta_3+c\Delta_2}{c\Delta_2}\Sigma+\frac{\gamma}{4c}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0$$

qu'on peut écrire

$$4c\Delta_2\Sigma^2+2(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)\Sigma+\gamma\Delta_3=0.$$

On en tire

$$\Sigma = \frac{-(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)\pm\sqrt{(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)^2-4c\gamma\Delta_2\Delta_3}}{4c\Delta_2} = \frac{-(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)\pm(\gamma\Delta_3-c\Delta_2)}{4c\Delta_2},$$

$$\Sigma_1 = \frac{-(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)+(\gamma\Delta_3-c\Delta_2)}{4c\Delta_2} = -\frac{1}{2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{-(\gamma\Delta_3+c\Delta_2)-(\gamma\Delta_3-c\Delta_2)}{4c\Delta_2} = -\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2};$$

Nous avons ainsi deux *nouveaux* systèmes de valeurs pour ν et σ, qui sont :

$$(66^2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \nu''' = -\dfrac{1}{2}, & \sigma''' = -\dfrac{\gamma}{2c}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}, \\ \nu^{\text{IV}} = -\dfrac{\gamma}{2c}\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}, & \sigma^{\text{IV}} = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ces formules correspondent au deuxième cas du n° **31**.

Détermination de $\dfrac{\tau^2}{\omega_2^2}$.

33. L'équation (21^4) donne

$$(73)\qquad \frac{1}{27}\frac{\tau^2}{\omega_2^2} + \left[al_2l_3 + d(l_2+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\frac{\omega_3}{\omega_2} = 0$$

ou

$$(74)\qquad \frac{1}{27}\frac{\tau^2}{\omega_2^2} = -\left[al_2l_3 + d(l_2+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\sigma.$$

Pour σ', σ'', nous avons (64)

$$al_2l_3 + d(l_2+l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

ainsi (66^1),

$$\frac{1}{27}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\sigma', \qquad \frac{1}{27}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\sigma'';$$

il en résulte, en remplaçant σ' et σ'' par leurs valeurs (66^1),

$$(75)\qquad \frac{1}{27}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1} = -\frac{\Delta_2\Delta_3}{2a^2\Delta_1}, \qquad \frac{1}{27}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_2}{2a\gamma}$$

et

$$(76)\qquad \frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = -\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}, \qquad \frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_2}{a},$$

valeurs de $\frac{\tau^2}{\omega^2}$ *qui correspondent, comme* σ', σ'', *au premier cas du* n° **11**.

34. Nous avons ensuite, pour σ''', σ^{IV} (71),

$$a l_2 l_3 + d(l_2 + l_3) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{\Delta_1}{c\gamma}$$

et (74)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\sigma''', \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\sigma^{\text{IV}},$$

$$(77)\quad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{\Delta_1\Delta_3}{2c^2\Delta_2}, \qquad \frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta_1}{2c\gamma},$$

$$(78)\quad \frac{\tau'''^2}{\omega_2^2} = \frac{\gamma_1\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2} = \frac{(\gamma\Delta_1)\Delta_3}{c^2\Delta_2}, \qquad \frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2} = \frac{\Delta_1}{c}.$$

35. *Réalité de* $\frac{\tau}{\omega_2}$. — On peut écrire (76, 26)

$$\frac{\tau'^2}{\omega_2^2} = \frac{(-\gamma\Delta_2)\Delta_3}{a^2\Delta_1}, \qquad (-\gamma\Delta_2) > 0;$$

$\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}$ *est donc positif si* Δ_3 *et* Δ_1 *sont de même signe, donc si* $\gamma\Delta_3$ *est positif, puisque* (26) $\gamma\Delta_1$ *est positif;*

$\frac{\tau''^2}{\omega_2^2}$ *est positif si* a *et* Δ_2 *sont de même signe, ou bien si* $a\gamma$ *et* $\gamma\Delta_2$ *sont de même signe, ou encore, puisque* (26) $\gamma\Delta_2$ *est positif, si* $a\gamma$ *est négatif;*

$\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}$ *est positif si* Δ_3 *et* Δ_2 *sont de même signe, ou si* $\gamma\Delta_3$ *et* $\gamma\Delta_2$ *sont de même signe, donc si* $\gamma\Delta_3 < 0$;

$\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$ *est positif si* $\frac{\gamma\Delta_1}{c\gamma}$ *est positif, ou si* $c\gamma$ *est positif* (26).

Il est essentiel de noter ici que les valeurs négatives de $\frac{\tau^2}{\omega_2^2}$ *doivent être acceptées, et que cela ne contredit pas la condition de réalité imposée à tous les éléments.*

Soit en effet

$$(79)\qquad \frac{\tau}{\omega} = i\tau_1 \qquad (i = \sqrt{-1},\ \tau_1 \text{ réel}).$$

On sait que

$$(80)\quad \operatorname{sn}(vi, k) = i\frac{\operatorname{sn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad \operatorname{cn}(vi, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(v, k')}, \quad \operatorname{dn}(vi, k) = \frac{\operatorname{dn}(v, k')}{\operatorname{cn}(v, k')};$$

il en résulte que, si $\frac{\tau}{\omega}$ *a la forme* (79), *le changement de* u *en* vi

dans les formules (16) *donne des formules tout à fait analogues, mais d'où les imaginaires sont exclues.* Nous aurons à faire usage tout à l'heure de cette remarque.

Ajoutons que *le signe* $\pm$ *dont* $\frac{\tau}{\omega}$ *est toujours affecté ne donne pas deux formes à* $\gamma z + \varepsilon$ (16), *mais une seule;* en effet,

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u;$$

donc le changement de u en $-u$ dans les formules (16) ramène l'une à l'autre les deux formules (16) correspondant respectivement à $+\frac{\tau}{\omega_2}$, $-\frac{\tau}{\omega_2}$.

Détermination de k^2.

56. Nous avons maintenant (21^2, 59^1)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2}k^2 = -\left[al_1l_2 + d(l_1+l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^2}{\omega_2^2}k^2 = -\left[al_1l_2 + d(l_1+l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right]\nu. \tag{81}$$

1° *Pour* ν' et ν'' (63)

$$-\left[al_1l_2 + d(l_1+l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right] = -\frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

donc (79, 66, 75)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}(k^2)' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\nu' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta_2}{2a\gamma},$$

$$-\frac{\Delta_2\Delta_3}{2a^2\Delta_1}(k^2)' = \frac{\Delta_2}{2a\gamma},$$

$$(k^2)' = -\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3}. \tag{82}$$

Ensuite

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau''^2}{\omega_2^2}(k^2)'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\nu'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right),$$

ou (75)

$$\frac{\Delta_2}{2a\gamma}(k^2)'' = -\frac{\Delta_2}{a\gamma}\left(\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right),$$

$$(k^2)'' = -\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}. \tag{83}$$

2° *Passons à* $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$. Ici, où ce sont ν''' et ν^{IV} qui interviennent, on a (70)

$$-\left[al_1 l_2 + d(l_1+l_2) - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right] = -\frac{\Delta_2}{a\gamma};$$

donc (81)

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}(k^2)''' = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\nu''' = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Delta_1}{2c\gamma},$$

$$\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}(k^2)''' = \frac{\Delta_1}{c}$$

et (78)

$$\frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}(k^2)''' = \frac{\Delta_1}{c}, \qquad \frac{\gamma}{c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}(k^2)''' = 1,$$

$$(84) \qquad (k^2)''' = \frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3}.$$

En dernier lieu,

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}(k^2)^{\text{IV}} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\nu^{\text{IV}} = -\frac{\Delta_1}{c\gamma}\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}\right) = \frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{2c^2\gamma\Delta_2},$$

ou (77)

$$\frac{\Delta_1}{2c\gamma}(k^2)^{\text{IV}} = \frac{\gamma\Delta_1\Delta_3}{2c^2\gamma\Delta_2};$$

donc

$$(85) \qquad (k^2)^{\text{IV}} = \frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2}.$$

57. *Réalité de k.* — Il n'en est plus ici comme pour $\frac{\tau}{\omega}$; k doit être réel et de plus compris entre -1 et $+1$:

1° $(k^2)' = -\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3}$ est positif si $-\frac{a(\gamma\Delta_1)}{\gamma^2\Delta_3} > 0$ ou (26) si $a\Delta_3 < 0$;

2° $(k^2)'' = -\frac{\gamma\Delta_3}{a\Delta_1} = \frac{-\gamma^2\Delta_3}{a(\gamma\Delta_1)}$, où (26) $\gamma\Delta_1 > 0$, est positif si $a\Delta_3 < 0$;

3° $(k^2)''' = \frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3} = \frac{c(\gamma\Delta_2)}{\gamma^2\Delta_3}$, où (26) $\gamma\Delta_2 < 0$, est positif si $c\Delta_3 < 0$;

4° $(k^2)^{\text{IV}} = \frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2}$ est positif si $c\Delta_3 < 0$.

Construisons le Tableau des signes de $\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}, \frac{\tau''^2}{\omega_2^2}, \frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}, \frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$ *et des valeurs positives de* $(k^2)'$, $(k^2)''$, $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$, en fonction des signes de γ, a, c, Δ_3 :

	γ.	a.	c.	Δ_3.	$\frac{\tau'^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\tau''^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\tau'''^2}{\omega_2^2}$.	$\frac{\tau^{\text{IV}2}}{\omega_2^2}$.	$(k^2)'$.	$(k^2)''$.	$(k^2)'''$.	$(k^2)^{\text{IV}}$.
1.......	+	−	−	+	+	+	−	−	+	+	+	+
2.......	+	−	+	−	−	+	+	+			+	+
3.......	+	+	−	−	−	−	+	−	+	+		
4.......	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+		
5.......	+	+	−	+	+	−	−	−			+	+
6.......	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+
7.......	−	−	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+
8.......	−	−	+	−	+	−	−	−			+	+
9.......	−	+	−	−	+	+	−	+	+	+		
10.......	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+		
11.......	−	+	−	+	−	+	+	+			+	+
12.......	−	+	+	−	+	+	−	−	+	+	+	+

Nous allons voir qu'en fait les deux ou même quatre valeurs de k^2 correspondant aux divers cas se réduisent toujours à une seule.

Nous remarquons en premier lieu que (82 à 85)

$$(86) \qquad (k^2)' \times (k^2)'' = 1, \qquad (k^2)''' \times (k^2)^{\text{IV}} = 1.$$

Une seule des deux valeurs $(k^2)'$ ou $(k^2)''$ est donc acceptable, et une seule des deux valeurs $(k^2)'''$ ou $(k^2)^{\text{IV}}$ est donc acceptable, ce qui fait que k^2 n'a qu'une seule valeur acceptable dans les cas 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 *et ne peut en avoir plus de deux dans les cas* 1, 6, 7, 12.

Nous allons montrer que *si $(k^2)'$ et $(k^2)'''$, qui sont liés par la relation* (82, 84, 38)

$$(87) \qquad (k^2)' + (k^2)''' = -\frac{a\Delta_1}{\gamma\Delta_3} + \frac{c\Delta_2}{\gamma\Delta_3} = 1,$$

sont l'un et l'autre acceptables (ils le sont ou ne le sont pas, en même temps), *ce qui peut se présenter dans les cas* 1, 6, 7, 12, *il en résulte deux expressions* (16) *de x, y, $\gamma z + \varepsilon$ identiques l'une à l'autre.*

En conséquence de la relation (87), nous écrirons :

$$(88) \qquad k^2 \text{ pour } (k^2)' \quad \text{et} \quad k'^2 \text{ pour } (k^2)''' \quad \text{ou bien} \quad k \text{ et } k' \; (k'^2 = 1 - k^2).$$

Nous ferons le calcul pour l'un des deux cas 6, 7. Le calcul pour les cas 1, 12 serait tout à fait semblable.

1° Nous avons

$$\gamma z+\varepsilon=\frac{\tau'\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\omega_1\operatorname{sn}^4u+\omega_2\operatorname{sn}^2u+\omega_3}=\frac{\frac{\tau'}{\omega_2}\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{sn}^4u+\operatorname{sn}^2u+\frac{\omega_3}{2}}\quad(\operatorname{mod}k)$$

$$=\frac{\frac{\tau'}{\omega_2}\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\nu'\operatorname{sn}^4u+\operatorname{sn}^2u+\sigma'}\quad(\operatorname{mod}k);$$

puisque ν' et σ' correspondent à $\frac{\tau'}{\omega_2}$.

Remplaçons ν', σ' par leurs valeurs (66) et $\frac{\tau'}{\omega_2}$ par sa valeur (76); nous aurons

$$\gamma z+\varepsilon=\sqrt{-\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a\Delta_1}}\,\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4u+\operatorname{sn}^2u+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}\quad(\operatorname{mod}k);$$

posons maintenant

$$u=vi;$$

il viendra

$$\gamma z+\varepsilon=\sqrt{-\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}}\,\frac{\operatorname{sn}vi\operatorname{cn}vi\operatorname{dn}vi}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4vi+\operatorname{sn}^2vi+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}\quad(\operatorname{mod}k)$$

ou (80)

$$\gamma z+\varepsilon=\sqrt{+\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}}\,\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4v-\operatorname{sn}^2v\operatorname{cn}^2v+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\operatorname{cn}^4v}\quad(\operatorname{mod}k')$$

$$=\sqrt{\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}}\,\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\operatorname{sn}^4v-\left(1+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\operatorname{sn}^2v+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}\quad(\operatorname{mod}k');$$

or (38)

$$1+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}=\frac{a\Delta_1+\gamma\Delta_3}{a\Delta_1}=\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1};$$

donc

$$\gamma z+\varepsilon=\sqrt{\gamma\frac{\Delta_2\Delta_3}{a^2\Delta_1}}\,\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{\frac{1}{2}\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}\operatorname{sn}^4v-\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}\operatorname{sn}^2v+\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}\quad(\operatorname{mod}k').$$

ou en multipliant les deux termes de la fraction par $-\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}$,

$$(89)\qquad \gamma z+\varepsilon=-\sqrt{\gamma\frac{\Delta_1\Delta_3}{c^2\Delta_2}}\,\frac{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4v+\operatorname{sn}^2v-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}\quad(\operatorname{mod}k').$$

D'autre part, si nous partons de $(k^2)'''$, au lieu de $(k^2)'$, c'est-à-dire (88) de k', nous avons

$$\gamma z + \varepsilon = \frac{\tau''' \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} = \frac{\frac{\tau'''}{\omega_2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \frac{\omega_3}{2}} \qquad [\operatorname{mod}(k)''' \text{ ou } k'].$$

$$= \frac{\frac{\tau'''}{\omega^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\nu''' \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \sigma'''}$$

ou (78, 73)

$$\gamma z + \varepsilon = \sqrt{\gamma \frac{\Delta_1 \Delta_3}{c^2 \Delta_2}} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{-\frac{1}{2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c} \frac{\Delta_3}{\Delta_2}} \qquad (\operatorname{mod} k').$$

Si nous changeons u en $-u$, nous retrouvons l'expression (89) de $\gamma z + \varepsilon$.

2° Nous avons aussi (16), dans les mêmes hypothèses que pour $\gamma z + \varepsilon$,

$$x = \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3} = \frac{\frac{\pi_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \frac{\pi_2}{\omega_2} \operatorname{sn}^2 u + \frac{\pi_3}{\omega_2}}{\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \frac{\omega_3}{\omega_2}}$$

$$= \frac{\frac{\pi_1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \frac{\pi_2}{\omega_2} \operatorname{sn}^2 u + \frac{\pi_3}{\omega_3} \frac{\omega_3}{\omega_2}}{\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \frac{\omega_3}{\omega_2}} = \frac{l_1 \nu' \operatorname{sn}^4 u + l_2 \operatorname{sn}^2 u + l_3 \sigma'}{\nu' \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \sigma'}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 u + l_2 \operatorname{sn}^2 u + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}}{-\frac{1}{2} \operatorname{sn}^4 u + \operatorname{sn}^2 u + \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k).$$

Posons, comme tout à l'heure, $u = vi$; il viendra (80)

$$x = \frac{-\frac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 vi + l_2 \operatorname{sn}^2 vi + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}}{-\frac{1}{2} \operatorname{sn}^4 vi + \operatorname{sn}^2 vi + \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k),$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} l_1 \operatorname{sn}^4 v - l_2 \operatorname{sn}^2 v (1 - \operatorname{sn}^2 v) + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^4 v)}{-\frac{1}{2} \operatorname{sn}^4 v - \operatorname{sn}^2 v (1 - \operatorname{sn}^2 v) + \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} (1 - 2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{sn}^4 v)} \qquad (\operatorname{mod} k'),$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2} l_1 + l_2 + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^4 v - \left(l_2 + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right) \operatorname{sn}^2 v + l_3 \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}}{\left(\frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} + \frac{1}{2}\right) \operatorname{sn}^4 v - \left(\frac{\gamma}{a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1} + 1\right) \operatorname{sn}^2 v + \frac{\gamma}{2a} \frac{\Delta_3}{\Delta_1}} \qquad (\operatorname{mod} k'),$$

ou, en remplaçant (38) $1+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}$ par $\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}$,

$$x=\frac{\left(\frac{1}{2}l_1-l_2-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}\operatorname{sn}^4 v+\left(l_2+l_3\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}-l_3\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{sn}^2 v-\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}\quad(\operatorname{mod} k');$$

l_1, l_2, l_3 ont les valeurs indiquées au n° **11**, 1°, comme correspondant à ν', σ'; en particulier

$$l_2=-\frac{d}{a},$$

d'où

$$(90)\quad x=\frac{\left(\frac{1}{2}l_1+\frac{d}{a}-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}\operatorname{sn}^4 v+\left(-\frac{d}{a}+l_3\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}-l_3\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{sn}^2 v-\frac{\gamma\Delta_3}{2c\Delta_2}}\quad(\operatorname{mod} k').$$

D'autre part, en partant de $(k^2)'''$, nous avons (16)

$$x=\frac{\frac{\pi_1}{\omega_1}\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{sn}^4 u+\frac{\pi_2}{\omega_2}\operatorname{sn}^2 u+\frac{\pi_3}{\omega_3}\frac{\omega_3}{\omega_2}}{\frac{\omega_1}{\omega_2}\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{sn}^2 u+\frac{\omega_3}{\omega_2}}\quad[\operatorname{mod}(k)'''\text{ ou } k']$$

ou, puisqu'ici il faut prendre, en correspondance avec $(k^2)'''$ (73),

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\nu'''=-\frac{1}{2},\qquad \frac{\omega_3}{\omega_2}=\sigma'''=-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

$$x=\frac{-\frac{1}{2}l_1\operatorname{sn}^4 u+l_2\operatorname{sn}^2 u-l_3\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{sn}^2 u-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}\quad(\operatorname{mod} k').$$

Les quantités l_1, l_2, l_3 ont les valeurs indiquées au n° **11**, 2°, ce qui permet d'écrire, en prenant l'une de celles-ci,

$$(91)\qquad x=\frac{-\frac{1}{2}l_3\operatorname{sn}^4 u+\frac{e^2-cdl_3}{c(al_3+d)}\operatorname{sn}^2 u-l_3\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}}{-\frac{1}{2}\operatorname{sn}^4 u+\operatorname{sn}^2 u-\frac{\gamma}{2c}\frac{\Delta_3}{\Delta_2}}\quad(\operatorname{mod} k').$$

Il faut montrer l'identité des formules (90, 91).

a. Coefficients de $\mathrm{sn}^4 u$. — Vérifions que (56')

$$-\frac{1}{3}l_3=\left(\frac{1}{2}l_1+\frac{d}{a}-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)\frac{a}{c}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Le second membre se rapportant à **11**, 1°, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l_1+\frac{d}{a}-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}&=\frac{1}{2}\left(-l_3-\frac{2d}{a}\right)+\frac{d}{a}-l_3\frac{\gamma}{2a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\\&=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)l_3\end{aligned}$$

ou (38)

$$=-\frac{1}{2}\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}l_3.$$

Il faut donc montrer que

$$-\frac{1}{2}l_3=-\frac{1}{2}\frac{c\Delta_2}{a\Delta_1}l_3\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2},$$

et cela est évident.

b. Coefficients de $\mathrm{sn}^2 u$. — Vérifions que

$$\begin{aligned}\frac{e^2-cdl_3}{c(al_3+d)}&=-\frac{d}{a}\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}+\frac{\gamma}{a}\frac{\Delta_3}{\Delta_1}\frac{a\Delta_1}{c\Delta_2}l_3,\\&=-\frac{d\Delta_1}{c\Delta_2}+\frac{\gamma\Delta_3}{c\Delta_2}l_3,\end{aligned}$$

ou

$$(e^2-cdl_3)l_3=(l_3\gamma\Delta_3-d\Delta_1)(al_3+d),$$

$$(l_3\gamma\Delta_3-d\Delta_1)(al_3+d)-(e^2-cdl_3)\Delta_2=0.$$

$$a\gamma\Delta_3l_1^2+d(-a\Delta_1+\gamma\Delta_3+c\Delta_2)l_1-(e^2\Delta_2+d^2\Delta_1)=0;$$

on a (38)

$$-a\Delta_1+\gamma\Delta_3+c\Delta_2=2\gamma\Delta_3$$

et (25)

$$\begin{aligned}e^2\Delta_2+d^2\Delta_1&=e^2(-a\varepsilon^2-\gamma d^2)+d^2(\gamma e^2-c\varepsilon^2)\\&=\varepsilon^2\Delta_3,\end{aligned}$$

et il faut, en conséquence, montrer que

$$a\gamma\Delta_3l_1^2+2d\gamma\Delta_3l_1-\varepsilon^2\Delta_3=0,$$

ou

$$al_1^2+2dl_1-\frac{\varepsilon^2}{\gamma}=0;$$

or il en est bien ainsi (**11**).

Ainsi, la formule (91) *est identique à la formule* (90).

38. Nous venons d'examiner la combinaison $[(k^2)', (k^2)''']$ du Tableau du nº **37**.

Examinons les autres combinaisons possibles.

1º Nous avons vu (86) que *les combinaisons*

$$[(k^2)', (k^2)''], \quad [(k^2)''', (k^2)^{\text{IV}}]$$

sont inacceptables, c'est-à-dire qu'on ne peut prendre *ensemble* $(k^2)'$, $(k^2)''$, non plus que $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$.

2º *Combinaison* $[(k^2)', (k^2)^{\text{IV}}]$. — On a (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)';$$

donc (86)

$$\frac{1}{(k^2)^{\text{IV}}} = 1 - (k^2)', \qquad (k^2)^{\text{IV}} = \frac{1}{1 - (k^2)'};$$

si $(k^2)'$ convient, c'est-à-dire si $(k^2)' < 1$, on a

$$(k^2)^{\text{IV}} > 1;$$

la combinaison

$$[(k^2)', (k^2)^{\text{IV}}]$$

est donc inacceptable : on ne peut prendre *ensemble* $(k^2)'$, $(k^2)^{\text{IV}}$.

3º *Combinaison* $[(k^2)'', (k^2)''']$. — Nous avons (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)'$$

ou (86)

$$(k^2)''' = 1 - \frac{1}{(k^2)''},$$

$$\frac{1}{(k^2)''} = 1 - (k^2)''';$$

si $(k^2)'''$ convient, c'est-à-dire si

$$0 < (k^2)''' < 1 \qquad \text{ou} \qquad 0 < 1 - (k^2)''' < 1,$$

$(k^2)''$ est plus grand que 1 et ne convient pas. *La combinaison* $[(k^2)'', (k^2)''']$ *est donc encore inacceptable.*

4º *Combinaison* $[(k^2)'', (k^2)^{\text{IV}}]$. — Nous avons (87)

$$(k^2)''' = 1 - (k^2)',$$

d'où (86)

$$\frac{1}{(k^2)^{\text{IV}}} = 1 - \frac{1}{(k^2)''}, \qquad (k^2)^{\text{IV}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(k^2)''}} = \frac{(k^2)''}{(k^2)'' - 1}.$$

Si $(k^2)''$ convient, $(k^2)'' - 1$ est négatif, donc $(k^2)^{\text{IV}}$ ne convient pas.
La combinaison $[(k^2)'', (k^2)^{\text{IV}}]$, *elle aussi, est inacceptable.*

39. En résumé, *les valeurs* $(k^2)'$, $(k^2)''$, $(k^2)'''$, $(k^2)^{\text{IV}}$ *du Tableau du n°* **28** *ne peuvent conduire qu'à une seule forme*

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\pi_1 \operatorname{sn}^4 u + \pi_2 \operatorname{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \frac{\chi_1 \operatorname{sn}^4 u + \chi_2 \operatorname{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \gamma z + \varepsilon &= \frac{\tau \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\omega_1 \operatorname{sn}^4 u + \omega_2 \operatorname{sn}^2 u + \omega_3}, \end{aligned}\right.$$

des coordonnées x, y, z, *mais ce qui a été dit au n°* **11** *montre que soit* l_1, l_3, *soit* m_1, m_3 $\left(l_1 = \frac{\pi_1}{\omega_1}, l_3 = \frac{\pi_3}{\omega_3}, m_1 = \frac{\chi_1}{\omega_1}, m_3 = \frac{\chi_3}{\omega_3}\right)$ peuvent avoir deux systèmes *de valeurs distinctes.*

Il existe donc toujours deux séries de formules (16), *irréductibles l'une à l'autre, et deux seulement; tous leurs éléments sont réels et s'expriment très simplement en fonction des éléments qui définissent la quartique.*

40. Supposons maintenant que a soit nul (1). Les équations des trois cylindres (C_1), (C_2), (C_3) se réduisent à

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} cy^2 - \gamma z^2 + 2ey - 2\varepsilon z &= 0, \\ \gamma z^2 + 2dx + 2\varepsilon z &= 0, \\ cy^2 + 2dx + 2ey &= 0. \end{aligned}\right.$$

L'équation (92^3) nous donne

$$(93)\qquad x = -cy^2 - 2ey,$$

et nous tirons de (92^1)

$$(94)\qquad z = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma(cy^2 + 2ey)}}{\gamma},$$

soit

$$Y^2 = \varepsilon^2 + \gamma(cy^2 + 2ey);$$

on sait que Y et y peuvent être mis sous la forme

$$y = \frac{p\,t^2 + q\,t + s}{p''t^2 + q''t + s''}, \qquad Y = \frac{p'\,t^2 + q'\,t + s'}{p''t^2 + q''t + s''}.$$

Il en résulte (93, 94) que la quartique est unicursale.

CHAPITRE V. — Quartiques φ''_4 et φ'_4.

41. Il n'y a que peu de chose à dire des quartiques φ''_4.

Rappelons ceci, qui résume la question de leur représentation paramétrique.

Les équations des quartiques φ''_4, qui correspondent au cas où le discriminant de l'équation en λ du faisceau ponctuel de quadriques a trois racines égales, peuvent être mises sous la forme, les coordonnées étant tétraédriques et le tétraèdre de référence étant réel (¹),

$$\begin{cases} ay^2 + 2xt \quad + bz^2 + 2cyt = 0, \\ k(ay^2 + 2xt) + bz^2 + 2cyt = 0. \end{cases}$$

La quartique est donc l'intersection des deux cônes

$$(1) \qquad ay^2 + 2xt = 0, \qquad bz^2 + 2cyt = 0.$$

Éliminons t entre les équations (1). Il vient

$$acy^3 - bxz^2 = 0.$$

Si l'on pose

$$y = \mu z,$$

on a

$$x = \frac{ac}{b}\mu^3 z,$$

d'où

$$\frac{x}{2a^2c\mu^4} = \frac{y}{2bc\mu^2} = \frac{z}{2bc\mu} = \frac{t}{-b^2}.$$

Réciproquement, un système de la forme

$$(2) \qquad \frac{x}{a'\mu^4} = \frac{y}{b'\mu^2} = \frac{z}{c'\mu} = t$$

(¹) PAINVIN, *loc. cit.* — *Voir* aussi R. DE MONTESSUS DE BALLORE. *Introduction*, etc., *loc. cit.*

représente une quartique de l'espèce φ''_1. En effet, ces relations peuvent être écrites

$$x = a'\mu^4, \qquad y = b'\mu^2 t, \qquad z = c'\mu t;$$

éliminons μ entre les équations

$$x = a'\mu^4 t \qquad \text{et} \qquad y^2 = b'^2\mu^4 t^2,$$

d'une part, et entre

$$y = b'\mu^2 t \qquad \text{et} \qquad z^2 = c'^2\mu^2 t^2,$$

d'autre part; cela donne

$$a'y^2 - b'^2 x t = 0, \qquad b'z^2 - c'^2 y t = 0,$$

qui sont les équations tétraédriques de la quartique (2).

L'équation du faisceau ponctuel de quadriques défini par ces deux cônes,

$$a'y^2 + \lambda b'z^2 - b'^2 x t - \lambda c'^2 y t = 0,$$

a pour discriminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{b'^2}{2} \\ 0 & a' & 0 & -\dfrac{\lambda c'^2}{2} \\ 0 & 0 & \lambda b' & 0 \\ -\dfrac{b'^2}{2} & -\dfrac{\lambda c'^2}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a'b'^5}{4}\lambda,$$

et trois racines sont infinies, donc égales.

42. *Passons aux quartiques* φ'_1. — Il est bien connu que ces courbes, qui correspondent au cas où le discriminant de l'équation en λ a deux racines égales, elles aussi, sont unicursales. Mais *nous allons montrer*, en précisant leurs représentations paramétriques, *qu'elles se divisent en deux sous-groupes, irréductibles l'un à l'autre*, ce qui n'a pas encore été remarqué.

Les quartiques φ'_1 sont représentées, en coordonnées tétraédriques, par deux équations de la forme [1]

$$(3) \qquad y^2 = et^2 + fxt, \qquad z^2 = gt^2 + hxt;$$

---

[1] *Cf.* la note du n° **41**.

posons

$$(4^1) \qquad t = \alpha z;$$

l'équation (2^2) devient

$$z = g\alpha^2 z + h\alpha x,$$

d'où

$$(4^2) \qquad x = \frac{1 - g\alpha^2}{h\alpha} z;$$

l'équation (3^1) peut être écrite, en remplaçant x et t par leurs valeurs (4),

$$y^2 = \left(e\alpha^2 + f\,\frac{1 - g\alpha^2}{h}\right) z^2;$$

on a ainsi

$$(5^1) \qquad \frac{x}{1 - g\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{h}\sqrt{(eh - fg)\alpha^2 + f}} = \frac{z}{h\alpha} = \frac{t}{h\alpha^2}.$$

Réciproquement, un système d'équations de la forme

$$(5^2) \qquad \frac{x}{a + b\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{c\alpha^2 + d}} = \frac{z}{e\alpha} = \frac{t}{f\alpha^2},$$

où α est un paramètre variable, représente une quartique φ_4.

Égalons en effet ces rapports à une quantité μ; on aura

$$(6) \qquad \begin{cases} x = \mu(a + b\alpha^2), & y^2 = \mu^2\alpha^2(c\alpha^2 + d), \\ z = \mu e\alpha, & t = \mu f\alpha^2, \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{cases} fx = \mu fa + \mu fb\alpha^2, & f^2y^2 = \mu f\alpha^2(\mu fc\alpha^2 + \mu fd), \\ fz^2 = f\mu^2e^2\alpha^2 \end{cases}$$

ou (6^1)

$$(7) \qquad fx = \mu fa + bt, \qquad fz^2 = e^2\mu t, \qquad f^2y^2 = t(ct + \mu fd);$$

le paramètre α est ainsi éliminé.

Pour éliminer μ, il suffit de multiplier la première équation (7) par e^2t, la deuxième par e^2, et de remplacer $e^2\mu t$ par fz^2; on a ainsi

$$\begin{aligned} e^2fxt &= \mu fae^2t + be^2t^2 = af^2z^2 + be^2t^2, \\ e^2f^2y^2 &= ce^2t^2 + \mu fde^2t = ce^2t^2 + df^2z^2; \end{aligned}$$

les équations de la quartique sont donc

$$(8)\qquad af^2z^2+be^2t^2-e^2fxt=0,\qquad -e^2f^2y^2+df^2z^2+ce^2t^2=0.$$

Formons l'équation en λ

$$-\lambda e^2f^2y^2+(a+d\lambda)f^2z^2+(b+c\lambda)e^2t^2-e^2fxt=0;$$

son discriminant

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -e^2f \\ 0 & -\lambda e^2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a+d\lambda)f^2 & 0 \\ -e^2f & 0 & 0 & (b+c\lambda)e^2 \end{vmatrix} = e^6f^6\lambda(a+d\lambda)$$

a deux racines λ infinies, donc deux racines égales. La quartique est donc bien de l'espèce φ'_4.

Les équations (5^2) *se prêtent particulièrement bien à la description des quartiques* φ'_4.

45. Revenons au système (5^2). Nous allons le rendre rationnel. Posons à cet effet

$$(10)\qquad u^2=c\alpha^2+d,$$

et soient α_0, u_0 les coordonnées d'un point de la courbe plane (10), de telle sorte que

$$u_0^2=c\alpha_0^2+d;$$

on a

$$(11)\qquad u^2-u_0^2=c(\alpha^2-\alpha_0^2).$$

Introduisons un nouveau paramètre β, défini par

$$(12)\qquad u-u_0=\beta(\alpha-\alpha_0),$$

ce qui permet d'écrire (11)

$$(u+u_0)\beta(\alpha-\alpha_0)=c(\alpha^2-\alpha_0^2),$$

$$(13)\qquad \beta(u+u_0)=c(\alpha+\alpha_0),$$

d'où (12, 13)

$$u-\beta\alpha=u_0-\beta\alpha_0,\qquad \beta u-c\alpha=-\beta u_0+c\alpha_0;$$

on en tire

$$u = \frac{-u_0\beta^2 + 2c\alpha_0\beta - cu_0}{\beta^2 - c}, \qquad \alpha = \frac{\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0}{\beta^2 - c},$$

et les formules (5²) deviennent, β étant un paramètre variable,

$$\begin{aligned}&\frac{x}{a(\beta^2 - c)^2 + b(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}\\ &= \frac{y}{(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)(-u_0\beta^2 + 2c\alpha_0\beta - cu_0)}\\ &= \frac{z}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2} = \frac{t}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}.\end{aligned}$$

44. *Représentation paramétrique des quartiques φ'_4 au moyen des fonctions circulaires.* — Les équations (3) sont une réduction, immédiate d'ailleurs, des équations suivantes obtenues par Painvin [1]:

$$(14) \qquad by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0, \qquad b_1y^2 + c_1z^2 + d_1t^2 + 2xt = 0,$$

qui donnent, par élimination de $2xt$,

$$(b - b_1)y^2 + (c - c_1)z^2 + (d - d_1)t^2 = 0,$$

ou

$$(15) \qquad \frac{b - b_1}{d_1 - d}y^2 + \frac{c - c_1}{d_1 - d}z^2 - t^2 = 0.$$

Premier cas :

$$\frac{b - b_1}{d_1 - d} > 0, \qquad \frac{c - c_1}{d_1 - d} > 0.$$

Nous pouvons poser

$$y = \sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\,t\sin\varphi, \qquad z = \sqrt{\frac{d_1 - d}{c - c_1}}\,t\cos\varphi,$$

et la première équation (14) devient

$$b\frac{d_1 - d}{b - b_1}t\sin^2\varphi + c\frac{d_1 - d}{c - c_1}t\cos^2\varphi + dt + 2x = 0,$$

---

[1] Painvin, *loc. cit.*

ce qui conduit au système d'équations

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}\left(b\frac{d_1-d}{b-b_1}\sin^2\varphi+c\frac{d_1-d}{c-c_1}\cos^2\varphi+d\right)}$$
$$=\frac{y}{\sqrt{\frac{d_1-d}{b-b_1}}\sin\varphi}=\frac{z}{\sqrt{\frac{d_1-d}{c-c_1}}\cos\varphi}=t,$$

qui se trouve être de la forme

$$\frac{x}{\lambda\sin^2\varphi+\mu}=\frac{y}{\nu\sin\varphi}=\frac{z}{\rho\cos\varphi}=t. \tag{16}$$

On voit sans peine, et cela est *important*, que tout système de la forme (16) représente une quartique de l'espèce φ'_1. En effet, nous en tirons

$$\sin\varphi=\frac{y}{\nu t},\qquad \cos\varphi=\frac{z}{\rho t},\qquad x=(\lambda\sin^2\varphi+\mu)t; \tag{17}$$

éliminons φ entre les équations (17^1, 17^3) et (17^2, 17^3); il vient

$$\lambda y^2+\mu\nu t^2=\nu^2 xt,\qquad (\lambda+\mu)\rho^2 t^2-\lambda z^2=\rho^2 xt.$$

équation (1) de la forme (3).

Deuxième cas. — Revenons à l'équation (15) et supposons que les coefficients de y^2, z^2 soient de signes contraires : la réalité de la courbe empêche qu'ils soient tous deux négatifs. Soit, par exemple,

$$\frac{b-b_1}{d_1-d}>0,\qquad \frac{c-c_1}{d_1-d}<0.$$

Écrivons l'équation (15), en mettant les signes en évidence,

$$\frac{b-b_1}{d_1-d}y^2-\frac{c_1-c}{d_1-d}z^2-t^2=0$$

ou

$$\frac{c_1-c}{d_1-d}z^2+t^2=\frac{b-b_1}{d_1-d}y^2,$$

ou encore

$$\frac{c_1-c}{d_1-d}\,\frac{d_1-d}{b-b_1}z^2+\frac{d_1-d}{b-b_1}t^2=y^2,$$

ou encore, en remarquant que le coefficient de y^2 est et va rester positif,

$$\frac{c_1-c}{b-b_1}z^2+\frac{d_1-d}{b_1-b}t^2=y^2;$$

nous pouvons poser

$$\sqrt{\frac{c_1-c}{b-b_1}}z=y\sin\varphi,\qquad \sqrt{\frac{d_1-d}{b-b_1}}t=y\cos\varphi,$$

ou

$$(18)\qquad z=y\sqrt{\frac{b-b_1}{c_1-c}}\sin\varphi,\qquad t=y\sqrt{\frac{b-b_1}{d_1-d}}\cos\varphi,$$

et l'équation (14') devient

$$(19)\quad by+cy\frac{b-b_1}{c_1-c}\sin^2\varphi+dy\frac{b-b_1}{d_1-d}\cos^2\varphi+2x\sqrt{\frac{b-b_1}{d_1-d}}\cos\varphi=0.$$

On conclut de (18, 19)

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_1-d}{b-b_1}}\left(c\frac{b-b_1}{c_1-c}\sin^2\varphi+d\frac{b-b_1}{d_1-d}\cos^2\varphi+b\right)}=\frac{y}{\cos\varphi}=\frac{z}{\sqrt{\frac{b-b_1}{c_1-c}}\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{t}{\sqrt{\frac{b-b_1}{d_1-d}}\cos^2\varphi}.$$

Réciproquement, tout système d'équations de la forme

$$(20)\qquad \frac{x}{\lambda\cos^2\varphi+\mu}=\frac{y}{\nu\cos\varphi}=\frac{z}{\rho\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{t}{\pi\cos^2\varphi}$$

représente une quartique φ'_4.

En effet, ces équations donnent

$$(21)\qquad \sin\varphi=\frac{\nu}{\rho}\frac{z}{y},\qquad \cos\varphi=\frac{\nu}{\pi}\frac{t}{y},$$

d'où l'équation d'une première quadrique contenant la quartique

$$(22)\qquad S=y^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}z^2-\frac{\nu^2}{\pi^2}t^2=0.$$

Nous avons ensuite

$$\nu x\cos\varphi-(\lambda\cos^2\varphi+\mu)y=0,$$

ou (21)

$$\frac{\nu^2}{\pi}\frac{tx}{y}-\left(\frac{\lambda^2\nu^2}{\pi^2}\frac{t^2}{y^2}+\mu\right)y=0,$$

ce qui conduit à l'équation d'une seconde quadrique, contenant encore la quartique

$$\mathrm{T} = \frac{\nu^2}{\pi} t x - \frac{\lambda^2 \nu^2}{\pi^2} t^2 - \mu y^2 = 0;$$

T est de la forme (3^1); $b\mathrm{S} + \mathrm{T}$ est de la forme (3^2) : la quartique est donc bien de l'espèce φ'_4. M. A. Vogt (¹) a mis sous une forme élégante les équations paramétriques des quartiques de ce sous-groupe, en posant

$$y = \sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\, t.\mathrm{sh}\,\varphi, \qquad z = \sqrt{\frac{d_1 - d}{c_1 - c}}\, t.\mathrm{ch}\,\varphi;$$

la première équation (14) devient

$$b\frac{d_1 - d}{b - b_1} t.\mathrm{sh}^2\varphi + c\frac{d_1 - d}{c_1 - c} t.\mathrm{ch}^2\varphi + dt + 2x = 0,$$

d'où le système

$$\frac{y}{\sqrt{\frac{d_1 - d}{b - b_1}}\mathrm{sh}\,\varphi} = \frac{z}{\sqrt{\frac{d_1 - d}{c_1 - c}}\mathrm{ch}\,\varphi}$$
$$= \frac{x}{-\frac{1}{2}\left[b\frac{d_1 - d}{b - b_1}\mathrm{sh}^2\varphi + c\frac{d_1 - d}{c_1 - c}\mathrm{ch}^2\varphi + d\right]} = t;$$

la quartique est ainsi représentée par un système de la forme

$$(23) \qquad \frac{x}{\lambda\,\mathrm{sh}^2\varphi + \mu} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{sh}\,\varphi} = \frac{z}{\rho\,\mathrm{ch}\,\varphi} = t,$$

qui offre une analogie remarquable avec le système (16).

Les équations (16, 20) définissent deux sous-groupes de quartiques φ'_4 irréductibles l'un à l'autre.

Chapitre VI. — Résumé. — Classification.

45. *Les notations φ''_4, φ'_4, φ_4 paraissent être insuffisantes. On pourrait adopter celles que nous allons indiquer, en désignant par*

(¹) R. de Montessus de Ballore, *Introduction, etc.* (*loc. cit.*), note, p. 122.

la lettre φ une quartique quelconque de première espèce (et par la lettre ψ une quartique quelconque de deuxième espèce).

1. φ_1^4. — Le discriminant de l'équation en λ a ses quatre racines réelles et distinctes et les quatre cônes du faisceau ponctuel de quadriques sont réels, particularité que rappelle l'indice 4. Les quartiques sont de genre 1.

Représentation paramétrique en coordonnées tétraédriques :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u},$$

les éléments λ, μ, ν, k^2 sont réels et arbitraires.

2. φ_1^2. — Le discriminant a deux racines réelles distinctes et deux racines imaginaires; deux cônes réels, deux cônes imaginaires, particularité que rappelle l'indice 2. Les quartiques sont de genre 1.

Représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\mu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\omega \operatorname{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\operatorname{cn} u - \omega\theta}, \qquad k^2 = \frac{1}{1+\theta^2},$$

les éléments λ, μ, ω, θ sont réels et arbitraires.

3. φ_1^0. — Le discriminant a ses quatre racines imaginaires; les quatre cônes sont imaginaires, particularité que rappelle l'indice 0. Les quartiques sont de genre 1.

Représentations paramétriques :

$$1^\circ \quad \frac{x}{p(1-i)\operatorname{sn} u + q(1+i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}$$

$$= \frac{y}{p(1+i)\operatorname{sn} u + q(1-i)\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{z}{r \operatorname{sn}^2 u + s} = \frac{t}{m \operatorname{sn}^2 u + n};$$

θ, k sont déterminés par les équations $(0 < k^2 < 1)$

$$\left\{\begin{aligned} &(-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \\ &(ed-bh)k^2 - (b^2+e^2+d^2+h^2)k + ed - bh = 0; \end{aligned}\right.$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ le sont à leur tour comme il suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{p^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\theta k, \qquad \frac{q^2}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \qquad \frac{r^2}{n^2} = -k^2, \qquad \frac{m}{n} = i\theta k, \qquad \frac{s}{n} = -\theta; \end{array}\right.$$

2° $$\frac{x}{p(1-i)\,\mathrm{dn}\,u + q(1+i)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}$$
$$= \frac{y}{p(1+i)\,\mathrm{dn}\,u + q(1-i)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{z}{r\,\mathrm{dn}^2 u + s} = \frac{t}{m\,\mathrm{dn}^2 u + n},$$

où θ, k' sont déterminés par les équations $(0 < k'^2 < 1)$,

$$\left\{\begin{array}{l} (-b+ie)\theta^2 + 2(d-ih)\theta + b - ie = 0, \\ (ed-bh)k'^2 - (b^2+e^2+d^2+h^2)k' + ed - bh = 0; \end{array}\right.$$

$\frac{p^2}{n^2}, \frac{q^2}{n^2}, \frac{r^2}{n^2}, \frac{m}{n}, \frac{s}{n}$ le sont par

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{p^2}{n^2} = \frac{1}{2}\frac{(b-ie)^2+(d-ih)^2}{b-ie}\frac{\theta}{k'}, \qquad \frac{q^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\frac{k'^4}{k'^2}\frac{ed-bh}{b-ie}\theta, \\ \qquad \frac{r^2}{n^2} = -\frac{1}{k'^2}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{i\theta}{k'}, \qquad \frac{s}{n} = -\theta; \end{array}\right.$$

b, d, e, h sont arbitraires.

4. φ'_1. — Courbes de genre 1, communes à trois cylindres réels. Représentation paramétrique (coordonnées cartésiennes) :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi_1\,\mathrm{sn}^4 u + \pi_2\,\mathrm{sn}^2 u + \pi_3}{\omega_1\,\mathrm{sn}^4 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}, \qquad y = \frac{\chi_1\,\mathrm{sn}^4 u + \chi_2\,\mathrm{sn}^2 u + \chi_3}{\omega_1\,\mathrm{sn}^4 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}, \\ \qquad \lambda z + \varepsilon = \frac{\tau\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\omega_1\,\mathrm{sn}^4 u + \omega_2\,\mathrm{sn}^2 u + \omega_3}; \end{array}\right.$$

les quantités

$$\frac{\pi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\pi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_1}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_2}{\omega_2}, \quad \frac{\chi_3}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \frac{\omega_3}{\omega_2}, \quad \frac{\tau}{\omega_2}, \quad k^2 \qquad (0 < k^2 < 1)$$

s'expriment très simplement, et par des relations réelles, au moyen de six paramètres arbitraires a, c, d, e, γ, ε (nos **20** à **40**).

La représentation qu'on vient d'indiquer est susceptible de deux formes complètement distinctes l'une de l'autre, représentant l'une et l'autre la même quartique.

5. φ_0^1. — Courbes de genre o, ayant un point de rebroussement. Représentation paramétrique en coordonnées tétraédriques :

$$\frac{x}{a\mu^4} = \frac{y}{b\mu^2} = \frac{z}{c\mu} = t,$$

a, b, μ quelconques.

6. φ_0^2. — Courbes de genre o, ayant un point double. Représentations paramétriques :

1°
$$\frac{x}{a + b\alpha^2} = \frac{y}{\alpha\sqrt{c\alpha^2 + d}} = \frac{z}{e\alpha} = \frac{t}{f\alpha^2},$$

a, b, c, d, e, f arbitraires;

2°
$$\begin{aligned}&\frac{x}{a(\beta^2 - c) + b(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2}\\ &= \frac{y}{(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)(-u_0\beta^2 + 2\alpha_0\beta - cu_0)}\\ &= \frac{z}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2} = \frac{t}{f(\alpha_0\beta^2 - 2u_0\beta + c\alpha_0)^2},\end{aligned}$$

a, b, c, f arbitraires, x_0 et u_0 liés par une relation

$$u_0^2 = c\alpha_0^2 + d,$$

où c et d sont arbitraires.

3° Ces quartiques comprennent deux sous-groupes :

A. *Sous-groupe* φ_0^{21}; représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda\sin^2\mu + \beta} = \frac{y}{\nu\sin\varphi} = \frac{z}{\rho\cos\varphi} = t$$

(λ, μ, ν, ρ arbitraires);

B. *Sous-groupe* φ_0^{22}; représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\lambda\,\mathrm{sh}^2\varphi + \mu} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{sh}\,\varphi} = \frac{z}{\rho\,\mathrm{ch}\,\varphi} = t$$

(λ, μ, ν, ρ arbitraires).

7. φ_0^3. — Courbes de genre o, par lesquelles passent trois cylindres; les quartiques φ_0^1, φ_0^2 ne possèdent pas cette propriété.

TABLE DES MATIÈRES.

(*Les indications se rapportent aux numéros du texte et non aux pages.*)

ERRATA

(*Journal de Mathématiques*, 1916).

Page.	Ligne.	*Au lieu de :*	*Lire :*
205	10	*ont un*	*ont chacune un*
205	11	*ordre;*	*ordre avec* φ;
208	21	concerne φ	concerne χ.
209	3	$(x-\alpha)$	$(x-a)$
211	4	où se trouve ψ.	où se trouve x, y.
211	9	$2\gamma_1$	$2\gamma_1'\xi$
214	18	$\beta_1(y-b)$	$\alpha_1(y-b)$
217	25	(x, z)	(x, y)
222	8	φ, χ	ψ, χ
222	18	$\gamma_{21}(x-\lambda)^2$	$\gamma_{21}(x-\alpha)^2$
224	3 en rem.	$A_2B_1 - A_2B_2$	$A_2B_1 - A_1B_2$
224	4 en rem.	$A_2B_3 - B_1A_3$	$A_2B_3 - B_2A_3$
224	6 en rem.	b_2	B_2
225	6, 7, 10	$A_2B_3 - B_1A_3$	$A_2B_3 - B_2A_3$
227	2	$H[a(t), b(t)], \psi[a(t), b(t)]$	$H[a(t), b(t)] \times \psi[a(t), b(t)]$
228	6	χ	ψ
228	23	$-\lambda(x, y)]\varphi$.	$-\lambda(x, y)\psi]\varphi$.
229	19	$(x-\alpha_2)^{p_2-1)(q_2-1)}$	$(x-\alpha_2)^{(p_2-1)(q_2-1)}$
232	1	Ces	Les
232	4 et 6 en rem.	$= \ldots =$	$\ldots =$
232	5 en rem.	$-\lambda(x, y)]\varphi$.	$-\lambda(x, y)\psi]\varphi$.
236	15	q_1'' q_2'' ε_1 ε_2	$r_1'' \cdot r_2''$ r_1 r_2
237	2 et 5	q_1'' q_2''	r_1'' r_2''
237	12	q_1''	r_1''
237	19	Q	P'
238	7 et 13	$(x-\varepsilon_2)^{r_2}\psi Q_1$	$(x-\varepsilon_2)^{r_2}\ldots\psi Q_1$
239	5 en rem.	p_1'''	p_1''
241	4 en rem.	(II, III)	(I, II)
241	11	$(Q_1 x_1 y)$	$Q_1(x, y)$