JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HARRIS HANCOCK

Problèmes de géométrie arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 3 (1917), p. 217-245.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1917_7_3__217_0>

Problèmes de Géométrie arithmétique;

PAR HARRIS HANCOCK,
Professeur à l'Université de Cincinnati (États-Unis).

1. Par *géométrie arithmétique* ou *géométrie des nombres* nous désignons la théorie où des théorèmes numériques sont inspirés, expliqués, illustrés ou dérivés moyennant des notions géométriques. La théorie peut se borner aux nombres naturels rationnels ou entiers, ou elle peut s'étendre aux nombres algébriques ou transcendants, y compris la théorie de Minkowski.

Dans la théorie des nombres de Gauss, les problèmes s'occupent de nombres entiers, que l'on considère généralement à l'égard d'un entier (un module), de sorte que la notion fondamentale est une comparaison de deux nombres. Ces nombres peuvent se représenter par les coordonnées de points dans un plan, l'une d'elles étant un entier fixe, l'autre un entier variable.

Une généralisation de cette idée, par laquelle le domaine général des nombres naturels est étendu, est une comparaison de trois entiers ou plus, d'une telle façon que les rapports entre plusieurs entiers (une théorie dont Kronecker s'est jusqu'à un certain point rapproché) peuvent s'exprimer par les coordonnées de points dans un espace de trois dimensions ou d'un nombre de dimensions encore plus élevé.

Les problèmes que nous proposerons dans ce Mémoire s'occupent des nombres naturels entiers. On peut souvent compter combien de fois un phénomène peut arriver dans une construction géométrique fixe. Quand ce calcul peut s'effectuer de deux manières sans aboutir à des formules identiques, l'équation qui égalise les deux procédés offre comme règle un théorème intéressant dans la théorie des nombres naturels. On regarde comme géométrie élémentaire arithmétique la méthode suivie pour aboutir à de tels résultats.

2. On emploie le symbole $(a, b, c, \ldots)$ pour désigner le diviseur commun, le plus grand des entiers $a, b, c, \ldots$. Il est clair que $(a, b, c, \ldots)$ reste invariable quand les éléments s'échangent les uns avec les autres; par exemple $(6, 9, 15)$ équivaut à 3 et peut s'écrire

$$(6, 9, 15) \sim 3 \sim (9, 6, 15) \sim (15, 9, 6) \sim (15, 6, 9).$$

Qu'on songe à l'infinité de nombres triples (ξ, η, ζ), où

$$\xi = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \eta = 1, 2, 3, \ldots; \qquad \zeta = 1, 2, 3, \ldots,$$

comme on les écrit dans la Table suivante :

$$\begin{array}{lllll}
(1, 1, 1), & (1, 1, 2), & (1, 1, 3), & (1, 1, 4), & \ldots, \\
(1, 2, 1), & (1, 2, 2), & (1, 2, 3), & (1, 2, 4), & \ldots, \\
(1, 3, 1), & (1, 3, 2), & (1, 3, 3), & (1, 3, 4), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\
(2, 1, 1), & (2, 1, 2), & (2, 1, 3), & (2, 1, 4), & \ldots, \\
(2, 2, 1), & (2, 2, 2), & (2, 2, 3), & (2, 2, 4), & \ldots, \\
(2, 3, 1), & (2, 3, 2), & (2, 3, 3), & (2, 3, 4), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\
(3, 1, 1), & (3, 1, 2), & (3, 1, 3), & (3, 1, 4), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Il est clair que si un octant dans un espace de trois dimensions, où les coordonnées sont toutes positives, est rempli de cubes-unités (c'est-à-dire de cubes dont les trois côtés ont une unité de longueur), les coordonnées des sommets de ces cubes résultent de la Table ci-dessus écrite.

Puisqu'il ne se trouve ni zéro ni fractions propres, posons $(1, 1, 1)$ comme coordonnées de l'origine. Quand on dit qu'un point est équivalent à t, et qu'on écrit $(\sim t)$, cela signifie que les trois coordonnées du point ont t comme plus grand commun diviseur; et l'on dira que les points sont équivalents quand leurs coordonnées ont le même plus grand commun diviseur.

Les sommets qui se trouvent à l'intérieur d'une construction géométrique et sur les faces de celle-ci peuvent s'appeler brièvement *des points de cette construction géométrique*.

3. Une des premières questions qui se soulèvent est celle-ci :

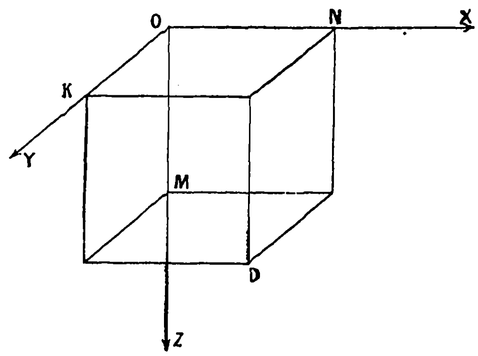
Combien de points y a-t-il dans un espace limité qui satisfont à des conditions données; par exemple, combien y a-t-il de points (ξ, η, ζ) *tels que*

$$(\xi, \eta, \zeta) \sim t,$$

où ξ, η, ζ *sont coordonnées d'un point, et où* t *est un entier fixe?*

Comme cas simple, prenons comme espace borné le parallélépipède rectangulaire OD, dont les côtés sont $\mathrm{ON} = n$, $\mathrm{OK} = k$, $\mathrm{OM} = m$,

Fig. 1.



les quantités n, k, m étant des nombres rationnels plus grands que 1, mais pas nécessairement des entiers.

Si N_t exprime le nombre des points, qui se trouvent au dedans du parallélépipède OD et sur ses faces, et qui sont équivalents à t, et si $\left[\frac{a}{b}\right]$ signifie le plus grand entier dans $\frac{a}{b}$, il est certain que

$$N_t = \left[\frac{n}{t}\right]\left[\frac{k}{t}\right]\left[\frac{m}{t}\right] - \sum_{p}\left[\frac{n}{pt}\right]\left[\frac{k}{pt}\right]\left[\frac{m}{pt}\right] + \sum_{p, p_1}\left[\frac{n}{pp_1t}\right]\left[\frac{k}{pp_1t}\right]\left[\frac{m}{pp_1t}\right] - \ldots,$$

où p, p_1, ... sont des entiers premiers qui diffèrent les uns des autres.

Nous pouvons écrire cette formule brièvement

$$N_t = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{dt}\right]\left[\frac{k}{dt}\right]\left[\frac{m}{dt}\right],$$

où ε_d sont des coefficients de Möbius (*voir* par exemple, le *Journal de Crelle*, t. 77, p. 289). Cette formule est donnée par Kronecker (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. I, p. 307) pour le cas de deux dimensions.

4. *La fonction eulérienne*. — Le nombre des entiers inférieurs à l'entier n et premiers à celui-là est une fonction de n introduite par Euler (*Petr. Comm.*, VIII, 1760, p. 74) et dénotée par le symbole $\varphi(n)$ (*voir* Gauss, *Disq. Arith.*, § 38). Ce nombre est le même que le nombre des systèmes

$$(n, 1), \quad (n, 2), \quad \ldots, \quad (n, n-1),$$

qui équivalent à l'unité. Il est clair que ces systèmes peuvent se représenter par les points dans le plan x, y, où $x = n$; $y = 1, 2, \ldots, n-1$.

On sait que

$$\varphi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n - \sum \frac{n}{p} + \sum \frac{n}{pp_1} - \ldots;$$

ou

$$\varphi(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right],$$

où chez Kronecker le symbole $\frac{d}{n}$ signifie que d est un diviseur de n et que la sommation s'étend à tous les diviseurs de n, y compris l'unité et n.

5. Nous désignons le nombre de points

$$(n, 1), \quad (n, 2) \quad (n, 3), \quad \ldots, \quad (n, \lambda),$$

qui équivalent à l'unité par le symbole $r_\lambda(n)$, où λ et n sont des entiers.

Puisque $(n, n+k) \sim (n, k)$, si $\lambda = m - n + \nu$, où $\nu < n$, il s'ensuit que

$$r_\lambda(n) = m\varphi(n) + r_\nu(n).$$

Il est clair que

$$r_n(1) = n \qquad \text{et} \qquad r_n(n) = \varphi(n).$$

On trouve facilement que

$$r_\nu(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{\nu}{d}\right].$$

6. *La fonction eulérienne généralisée* [1]. — Si i et k sont des entiers arbitraires, le nombre des systèmes

$$\text{(I)} \qquad (i, k, 1), \quad (i, k, 2), \quad (i, k, 3), \quad \ldots, \quad (i, k, i-1), \quad (i, k, i),$$

qui équivalent à l'unité, se dénote par $\Phi(i, k)$.

1° Si d est le plus grand commun diviseur de i et k, de sorte que $i = i_1 d$, $k = k_1 d$, où $(i_1, k_1) \sim 1$, la série des systèmes (I) peut s'écrire :

$$\begin{array}{lllll}
(d, 1), & (d, 2), & (d, 3), & \ldots, & (d, d), \\
(d, d+1), & (d, d+2), & (d, d+3), & \ldots, & (d, 2d), \\
(d, 2d+1), & (d, 2d+2), & (d, 2d+3), & \ldots, & (d, 3d), \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
[d, (i_1-1)d+1], & [d, (i_1-1)d+2], & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & (d, i_1 d).
\end{array}$$

Il est clair que $\varphi(d)$ est le nombre des systèmes équivalant à l'unité dans chacune des lignes qu'on vient d'écrire, de sorte que

$$\Phi(i, k) = i_1 \varphi(d),$$

où $i = i_1 d$ et $k = k_1 d$ et $d \sim (k, i)$.

De même

$$\Phi(k, i) = k_1 \varphi(d).$$

Il s'ensuit que

$$k_1 \Phi(i, k) = i_1 \Phi(k, i).$$

Si $(i, k) \sim 1$, nous avons $\Phi(i, k) = i$ et nous avons aussi

$$\Phi(i, i) = \varphi(i).$$

2° Si $k = n + \sigma$, où σ est un entier positif quelconque, puisque

$$(n, k, m) \sim (n, n+\sigma, m) \sim (n, \sigma, m),$$

il s'ensuit que

$$\Phi(n, k) = \Phi(n, \sigma).$$

[1] *Voir* aussi *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 138, février 1914, p. 469.

En général, si $k = qn + \tau$, où $\tau < n$, on a

$$\Phi(n, k) = \Phi(n, \tau).$$

3° Si $(n, k) \sim 1$, on a

$$\Phi(m\,n, k) = \Phi(m, k)\,\Phi(n, k).$$

Car si $m = m_1 d$ et $k = k_1 d$, $(m_1, k_1) \sim 1$, à cause de 1°, on a

$$\Phi(m\,n, k) = m_1 n \varphi(d),$$
$$\Phi(m, k) = m_1 \varphi(d),$$
$$\Phi(n, k) = n.$$

On arrive à un résultat semblable si $(m, k) \sim 1$.

4° Puisque

$$\Phi(i, k) = i_1 \varphi(d) \qquad \text{et} \qquad \varphi(d) = d \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

on voit que

$$\Phi(i, k) = i \prod \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{\frac{\delta}{d}} \varepsilon_\delta \left[\frac{i}{\delta}\right],$$

où p s'étend à tous les facteurs premiers de d et $d \sim (i, k)$; et δ s'étend à tous les diviseurs de d.

7. On dénote par $R_\lambda(n, k)$ le nombre des systèmes

$$(n, k, 1), \quad (n, k, 2), \quad \ldots, \quad (n, k, \lambda),$$

qui équivalent à l'unité, où n, k, λ sont des entiers arbitraires.

Puisque

$$(n, k, nm + \nu) \sim (n, k, \nu) \qquad [\nu < n],$$

il est clair que, si $\lambda = nm + n$,

$$R_\lambda(n, k) = m\Phi(n, k) + R_\nu(n, k).$$

Et encore, si d est le plus grand commun diviseur de n et k, il résulte que les systèmes

$$(n, k, n + 1), \quad (n, k, n + 2), \quad \ldots, \quad (n, k, n + \lambda)$$

équivalent à

$$(d, 1), \quad (d, 2), \quad \ldots, \quad (d, \lambda).$$

Il s'ensuit que

$$R_\lambda(n, k) = r_\lambda(d), \qquad \text{où} \qquad (n, k) \sim d.$$

D'où il résulte (*voir* n° **5**) que

$$R_\lambda(n, k) = \sum_{\frac{\delta}{(n,k)}} \varepsilon_\delta \left[\frac{\lambda}{\delta}\right],$$

où λ, n, k sont des entiers arbitraires.

8. Que l'on considère ensuite le nombre de points (~ 1) qui se trouvent dans le carré que voici :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{llllll} (1, 1), & (2, 1), & (3, 1), & \ldots, & (n, 1), \\ (1, 2), & (2, 2), & (3, 2), & \ldots, & (n, 2), \\ (1, 3), & (2, 3), & (3, 3), & \ldots, & (n, 3), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ (1, n), & (2, n), & (3, n), & \ldots, & (n, n). \end{array} \right.$$

Puisque $(i, k) \sim (k, i)$ on voit que le nombre de ces points, qui équivalent à l'unité, est

$$N = 2\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) - 1,$$

où il faut observer qu'il y a un nombre égal de ces points-là de l'un et de l'autre côté de la diagonale. Il faut remarquer aussi que, dans la sommation, on a compté $\varphi(1)$ deux fois, tandis que dans la sommation des points de la diagonale $\varphi(1)$ se trouve une fois seulement.

Si N_1 indique le nombre des points (~ 1) au-dessous de la diagonale, on voit que

$$N = 2N_1 + 1.$$

Et encore, puisque $(2, 1) \sim (1, 1)$, $(3, 1) \sim (2, 1)$ et en général $(i, j) \sim (i - j, j)$, où $i > j$, on peut écrire les points au-dessous de la diagonale de cette façon :

$$
\begin{array}{llllllll}
(1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & \ldots, & (1, n-3), & (1, n-2), & (1, n-1), \\
(2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & \ldots, & (2, n-3), & (2, n-2), & \\
(3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \ldots, & (3, n-3), & & \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & & & \\
(n-3, 1), & (n-3, 2), & (n-3, 3). & & & & \\
(n-2, 1), & (n-2, 2), & & & & & \\
(n-1, 1). & & & & & &
\end{array}
$$

Si N_2 indique le nombre de points (~ 1) au-dessous de la deuxième diagonale, on observe que $N_1 = 2N_2 + 1$. On peut écrire les points au-dessous de cette diagonale de cette manière :

$$
\begin{array}{lllll}
(1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), & \ldots\ldots, \\
(2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), & \ldots\ldots, \\
(3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
(4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\
(5, 1), & (5, 2), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
(6, 1), & (6, 2), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\
(7, 1), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
(8, 1), & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array}
$$

On observe que, quand $n = 4$,

$$N_2 = r_2(1);$$

quand $n = 6$,

$$N_2 = r_2(2) + r_4(1);$$

quand $n = 8$,

$$N_2 = r_2(3) + r_4(2) + r_6(1);$$

quand $n = 10$,

$$N_2 = r_2(4) + r_4(3) + r_6(2) + r_8(1);$$

. . . . ;

ou

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} r_{2+2\lambda}(r-\lambda), \qquad \text{où} \qquad 2\nu = n-2.$$

Ainsi on arrive à (*voir* n° **5**)

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \sum_{\frac{d}{\nu-\lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{2+2\lambda}{d}\right];$$

ou, si l'on écrit $\nu - \lambda = \mu$, il résulte que

$$N_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} \sum_{\frac{d}{\mu}} \varepsilon_d \left[\frac{n-2\mu}{d}\right] \qquad (2\nu = n-2).$$

De l'autre côté, quand $n = 3$,

$$N_2 = r_1(1);$$

quand $n = 5$,

$$N_2 = r_1(2) + r_3(1);$$

quand $n = 7$,

$$N_2 = r_1(3) + r_3(2) + r_5(1);$$

quand $n = 9$,

$$N_2 = r_1(4) + r_3(3) + r_5(2) + r_7(1);$$

. . . . ,

ou

$$N_2 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} r_{1+2\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\nu-1} \sum_{\frac{d}{\nu-\lambda}} \varepsilon_d \left[\frac{1+2\lambda}{d}\right] = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} \sum_{\frac{d}{\mu}} \varepsilon_d \left[\frac{n-2\mu}{d}\right] \qquad (2\nu = n-1).$$

Dans les deux cas, on voit que

$$N_2 = \sum_{i=1}^{i=d'} \varepsilon_d \left[\frac{n-2id}{d}\right], \qquad \text{où} \qquad 2dd' \leqq n;$$

ou

$$N_2 = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\}.$$

D'où il s'ensuit que

$$N = 3 + 4 \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\} = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^2 = 2 \sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) - 1.$$

D'où il résulte aussi que

$$\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) = 2 + 2 \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{2d}\right] \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] - \left[\frac{n}{2d}\right] - 1 \right\}.$$

Quand

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots,$$

on voit que

$$N = 1, 3, 7, 11, 19, 23, 35, 43, 55, 63, 83, 91, \ldots.$$

9. Si $k \neq n$ du paragraphe précédent, on écrit les points

$$\begin{array}{ccccc}
(1, 1), & (2, 1), & (3, 1), & \ldots, & (n, 1), \\
(1, 2), & (2, 2), & (3, 2), & \ldots, & (n, 2), \\
(1, 3), & (2, 3), & (3, 3), & \ldots, & (n, 3), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots, & \vdots\ldots\ldots, \\
(1, k), & (2, k), & (3, k), & \ldots, & (n, k).
\end{array}$$

Le nombre des points (~ 1) dans la ligne σ (où $\sigma \leqq k$) est $r_n(\sigma)$, tandis que ce nombre dans la colonne τ (où $\tau \leqq n$) est $r_k(\tau)$, de sorte que le nombre de points (~ 1) est

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=n} r_k(\tau) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} r_n(\sigma) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right] \left[\frac{k}{d}\right].$$

D'après le n° **5**, on arrive au théorème appartenant à la théorie des nombres exprimé par la formule

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=n} \sum_{\frac{d}{\tau}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} \sum_{\frac{d}{\sigma}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \left[\frac{n}{d}\right] \left[\frac{k}{d}\right].$$

Afin de vérifier cette formule, on remarque que le nombre des diviseurs, à savoir $\frac{d}{\nu}$ (où $\nu = 1, 2, \ldots, n$) se trouve de cette manière : qu'on écrive la série des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$.

On voit que 2 se trouve $\left[\frac{n}{2}\right]$ fois comme diviseur, et que 3 se trouve $\left[\frac{n}{3}\right]$ fois comme diviseur, etc.

D'où il résulte que le nombre des diviseurs est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left[\frac{n}{\nu}\right] = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{n}{\nu}\right].$$

La *somme* de ces diviseurs est

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{n}{\nu}\right]\nu.$$

De la même façon on peut arriver au nombre des diviseurs (n, μ), où $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Posons

$$n = p_1^{h_1}, p_2^{h_2}, p_3^{h_3}, \ldots,$$

où $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sont des entiers premiers. Puisque m acquiert les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots; \quad p_1 - 1, p_1, p_{1+1}, \ldots; \quad 2p_1, \ldots, 3p_1, \ldots; \quad \left[\frac{m}{p_1}\right] p_1,$$

on voit que le nombre des diviseurs dans lesquels se trouve p_1 comme facteur est $\left[\frac{m}{p_1}\right]$ et le nombre des diviseurs dans lesquels se trouve p_1^2 comme facteur est $\left[\frac{m}{p_1^2}\right]$, etc.

Il résulte de là que le nombre de diviseurs désiré est

$$\sum\left[\frac{m}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} p_3^{\lambda_3}\ldots}\right]$$

$$(\lambda_1 = 0, 1, 2, \ldots, h_1; \ \lambda_2 = 0, 1, 2, \ldots, h_2; \ \lambda_3 = 0, 1, 2, \ldots, h_3; \ \ldots).$$

Si $m = n$, ce nombre est

$$\sum p_1^{h_1-\lambda_1} p_2^{h_2-\lambda_2} p_3^{h_3-\lambda_3} \ldots$$
$$(\lambda_i = 0, 1, 2, \ldots, h_i).$$

Et de même on voit que la somme de ces diviseurs-là est

$$S = \sum \left\{ \left[\frac{m}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots} \right] p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots \right\}$$
$$= (\text{si } m = n),\ n(h_1+1)(h_2+1)\ldots.$$

Par exemple, la somme des diviseurs de $(10, \mu)$, où $\mu = 1, 2, \ldots, 9)$, est 22; tandis que si $\mu = 10$, cette somme est $10.2.2 = 40$ (*voir* aussi Cesàro, *Liége Soc. R. Mém.*, 2[e] série, t. X, 1883, p. 1 et suiv., Note 8).

10. D'une façon semblable, que l'on considère les points

$$\begin{array}{lllll}
(1, \lambda, 1), & (1, \lambda, 2), & (1, \lambda, 3), & \ldots, & (1, \lambda, n), \\
(2, \lambda, 1), & (2, \lambda, 2), & (2, \lambda, 3), & \ldots, & (2, \lambda, n), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
(m, \lambda, 1), & (m, \lambda, 2), & (m, \lambda, 3), & \ldots, & (m, \lambda, n),
\end{array}$$

où λ, m, n sont des entiers arbitraires.

Le nombre des points (~ 1) dans la ligne $\mu (\mu \overline{\gtrless} m)$ est $R_n(\mu, \lambda)$, tandis que le nombre de points dans la colonne $\nu (\nu \overline{\gtrless} n)$ est $R_m(\nu, \lambda)$.

Il en résulte tout de suite

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} R_n(\mu, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} R_m(\nu, \lambda).$$

Si d'ailleurs nous supposons que λ varie de 1 à k, nous voyons que le système des points ainsi exposé consiste en les points du parallélépipède du n° **3**.

De là il résulte (d'après le n° **7**) que

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right] \left[\frac{k}{d}\right] \left[\frac{m}{d}\right] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\frac{d}{(\nu, \lambda)}} \varepsilon_d \left[\frac{m}{d}\right] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\frac{d}{(\mu, \lambda)}} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right].$$

11. Ensuite on peut exprimer avec les fonctions φ et Φ le nombre de points (~ 1) qui appartiennent à un cube. Dans la figure du n° **3**, supposons égaux les trois côtés du parallélépipède OD de manière que $ON = n = OK = OM$.

Le plan parallèle au plan xz à la distance $y = k$ (où k est un entier $\overline{\gtrless} n$) contient les points

$$\begin{array}{lllll}
(1, k, 1), & (1, k, 2), & (1, k, 3), & \ldots, & (1, k, n), \\
(2, k, 1), & (2, k, 2), & (2, k, 3), & \ldots, & (2, k, n), \\
(3, k, 1), & (3, k, 2), & (3, k, 3), & \ldots, & (3, k, n), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
(n, k, 1), & (n, k, 2), & (n, k, 3), & \ldots, & (n, k, n).
\end{array}$$

Puisque $(l, k, m) \sim (m, k, l)$, où m, k, l sont des entiers, on voit que les points de l'un ou de l'autre côté de la diagonale sont équivalents.

En prenant les points dans la ligne $i\,(i \overline{\gtrless} n)$, et en y ajoutant les points (~ 1) de la diagonale, on a

$$(i, k, 1), \quad (i, k, 2), \quad \ldots, \quad (i, k, i).$$

Le nombre de ces points (~ 1) est $\Phi(i, k)$ (*voir* n° **6**). Il en résulte que le nombre des points (~ 1) qui se trouvent dans le plan que nous venons de mentionner est

$$2\sum_{i=1}^{i=n} \Phi(i, k),$$

moins les points de la diagonale, puisque ces points-ci se comptent deux fois dans la sommation double.

Et encore, puisque $(l, k, l) \sim (l, k)$, les points de la diagonale peuvent s'écrire

$$(1, k), \quad (2, k), \quad (3, k), \quad \ldots, \quad (n, k).$$

D'où il résulte que le nombre des points (~ 1) de ce cube-là est

$$2\sum \Phi(i, k)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

moins le nombre de points (~ 1) qui se trouvent sur les diagonales.

Ces points de la diagonale sont ceux qu'on a donnés dans le schéma (A) du n° **8**.

Par conséquent, le nombre des points cherché est

$$2\sum \Phi(i, k) - 2\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) + 1$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce nombre est (*voir* n° **5**)

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^3.$$

Par conséquent, on a

$$2\sum \Phi(i, k) - 2\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(j) + 1 = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^3.$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on donne encore à

$$\sum_{=1}^{j=n} \varphi(j) - 1$$

sa valeur, comme on la trouve dans le n° **5**, on a

$$2\sum \Phi(i, k) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^2 \left\{ \left[\frac{n}{d}\right] + 1 \right\}$$
$$(i, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Si b dénote le nombre des points (~ 1) d'un cube, on a pour les valeurs de

$$n=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad \ldots,$$
$$b=1,\quad 7,\quad 25,\quad 55,\quad 115,\quad 181,\quad 307,\quad 439,\quad 637,\quad 841,\quad \ldots.$$

On remarque que

$$(a,\, b,\, c) \sim (a,\, c,\, b) \sim (b,\, a,\, c) \sim (b,\, c,\, a) \sim (c,\, a,\, b) \sim (c,\, b,\, a)$$

et que

$$(a,\, a,\, b) \sim (a,\, b,\, a) \sim (b,\, a,\, a) \sim (b,\, b,\, a) \sim (b,\, a,\, b) \sim (a,\, b,\, b),$$

et encore que $(a,\, a,\, a) \sim a$ est équivalent à l'unité quand $a=1$. Tous ces points font partie du cube pour les valeurs $a \overline{\gtrless} n$, $b \overline{\gtrless} n$, $c \overline{\gtrless} n$.

On voit que dans tous ces cas

$$b \equiv 1 \pmod 6.$$

Les six points s'arrangent deux à deux, trois de l'un et de l'autre côté du plan diagonal qui traverse l'origine et les deux sommets les plus éloignés.

12. D'après les nos **9** et **11**, on peut voir que le nombre de points (~ 1) d'un parallélépipède dont les côtés sont (*voir* n° **3**) $\mathrm{ON}=n$, $\mathrm{OK}=m$, $\mathrm{OM}=n$, est

$$2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{t=1}^{t=m}\Phi(i,\, t) - \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} r_n(\sigma) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^2 \left[\frac{m}{d}\right];$$

et, d'après le n° **9**, ou arrive au théorème intéressant appartenant à la théorie des nombres

$$2\sum \Phi(i,\, t) = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{n}{d}\right]^2 \left[\frac{m}{d}\right] \left\{ 1 + \left[\frac{n}{d}\right] \right\}$$
$$(i=1,\, 2,\, \ldots,\, n;\; t=1,\, 2,\, \ldots,\, m).$$

Si, de la même manière, on considère un parallélépipède où $\mathrm{ON}=n+\nu$, $\mathrm{OK}=m$, $\mathrm{OM}=n$, on peut dériver un nombre d'autres formules arithmétiques intéressantes; et naturellement, les mêmes procédés appliqués à tout autre solide régulier produisent des résultats arithmétiques analogues.

Dans ce qui suit, nous allons fournir des applications importantes des résultats déjà établis.

15. *Généralisation d'un théorème prouvé par Liouville* (¹) *et par Dedekind* (²). — Soient n et k deux entiers arbitraires et f une fonction arbitraire de ses variables. Soit h un entier quelconque qui prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Supposons encore que $\rho(n, k, h) = 0$, excepté quand $(n, k, h) \sim 1$; dans ce cas, posons $\rho(n, k, h) = 1$.

Soient $p_1, p_2, \ldots$ les diviseurs premiers de d, où $d \sim (k, h)$. On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{h=n} \rho(n, k, h) f(n, k, h) &= \sum_{h=1}^{h=n} f(n, k, h) - \sum_{h_i=1}^{h_i=\frac{n}{p_i}} f(n, k_i p_i, h_i p_i) \\ &+ \sum_{h_{ij}=1}^{h_{ij}=\frac{n}{p_i p_j}} f(n, k_{ij} p_i p_j, h_{ij} p_i p_j) - \sum_{h_{ijl}=1}^{h_{ijl}=\frac{n}{p_i p_j p_l}} f(n, k_{ijl} p_i p_j p_l, h_{ijl} p_i p_j p_l) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

où

$$k = k_i p_i = k_{ij} p_i p_j = k_{ijl} p_i p_j p_l = \ldots$$
$$(i, j, l, \ldots = 1, 2, 3, \ldots; \; i \neq j \neq l \ldots).$$

Par conséquent,

$$\text{(I)} \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \rho(n, k, h) f(n, k, h) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \sum_{\frac{d}{(n, k)}} f(n, d, k_d, \mu d),$$

où

$$dk_d = k \quad \text{et} \quad dd' = n.$$

Ensuite, définissons deux fonctions nouvelles par les formules

$$\mathrm{F}(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} f(n, dk_d, \mu_d),$$

$$\mathrm{G}(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \rho(d', k, \mu) f(n, dk_d, \mu d),$$

(¹) LIOUVILLE, *Journal de Liouville*, 2ᵉ série, t. II, p. 110.

(²) DEDEKIND, *Journal de Crelle*, Bd. 54, p. 1. *Voir* aussi KRONECKER, *loc. cit.*, p. 246.

où

$$dk_d = d \quad \text{et} \quad dd' = n.$$

Il s'ensuit que

$$G(n, k, 1) = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \rho(n, k, \mu) f(n, k, \mu),$$

et cette formule [*voir* (I)] équivaut à

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d f(n, dk_d, \mu d),$$

où

(II) $$G(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F(n, k, d).$$

Et encore on voit que

$$\sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \rho(d', k, \mu) f(n, dk_d, \mu d).$$

A l'égard d'un diviseur défini d, le nombre de termes qui se trouvent à droite (*voir* n° **6**) est $\Phi(d', k)$, de sorte que le nombre de termes à droite est

$$\sum_{\frac{d'}{n}} \Phi(d', k);$$

lequel nombre est n.

Puisque aucun de ces termes ne se répète, on a

(III) $$\sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = f(n, k, 1) + f(n, k, 2) + \ldots + f(n, k, n) = F(n, k, 1).$$

Sont à noter les rapports réciproques qui existent entre les deux équations (II) et (III).

14. Pour appliquer le théorème qu'on vient de prouver :

1° Posons la fonction arbitraire $f(n, k, h) = h$. Par conséquent, on a

$$G(n, k, 1) = \sum \tau,$$

où la sommation s'étend à tous les entiers $\tau(\leqq n)$ tels que

$$(n, k, \tau) \sim 1,$$

et

$$F(n, k, d) = \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} (\mu d), \qquad \text{où} \qquad dd' = n.$$

D'après (II), il résulte que

$$\sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1\\(\tau\leqq n)}} \tau = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \mu d = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d \sum_{\mu=1}^{\mu=d'} \mu$$
$$= \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d d' \frac{d'+1}{2} = \frac{n}{2}\left[\sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d' + \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d\right].$$

2° Posons $f(n, k, h) = 1$; on a alors

$$G(n, k, 1) = \Phi(n, k), \qquad F(n, k, d) = d',$$

de sorte que, d'après (II),

$$\Phi(n, k) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d d' = n \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \frac{\varepsilon_d}{d} \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ \mathbf{6}).$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^{k=m} \Phi(n, k) = n \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \frac{\varepsilon_d}{d} = n \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{m}{d}\right] \frac{\varepsilon_d}{d}.$$

Par exemple, posons $n = 6$, et considérons les systèmes

$$(6, k, 1), \quad (6, k, 2), \quad (6, k, 3), \quad (6, k, 4), \quad (6, k, 5), \quad (6, k, 6).$$

Le nombre de ces points (~ 1) est

$$6, \quad 3, \quad 4, \quad 3, \quad 6, \quad 2, \quad 6$$

quand

$$k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7.$$

La somme des nombres de la première ligne est 30, et l'on voit que

$$30 = 6\left[\frac{7}{1} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right].$$

Dans le n° **12**, on a montré que

$$2\sum_{k=1}^{k=m}\ \sum_{t=1}^{t=n}\Phi(t, k) = \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{m}{d}\right]\left[\frac{n}{d}\right]\left\{1 + \left[\frac{n}{d}\right]\right\};$$

d'où il résulte un théorème intéressant appartenant à la théorie des nombres exprimé par la formule

$$\sum_{t=1}^{t=n} t \sum_{\substack{d \\ \overline{t}}}\left[\frac{m}{d}\right]\frac{\varepsilon_d}{d} = \sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{m}{d}\right]\left[\frac{n}{d}\right]\left\{1 + \left[\frac{n}{d}\right]\right\}.$$

Il s'ensuit encore (*voir* 1°) que

$$\sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1 \\ (\tau \leqq n)}} \tau = \frac{n}{2}\left[\Phi(n, k) + \sum_{\substack{d \\ \overline{(n,k)}}}\varepsilon_d\right];$$

et l'on voit aussi que

$$(\mathrm{A})\qquad 2\sum_{k=1}^{k=m}\ \sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1 \\ (\tau \leqq n)}} \tau - n\sum_{k=1}^{k=w}\left[\Phi(m, k) + \sum_{\substack{d \\ \overline{(n,k)}}}\varepsilon_d\right] = n^2\sum_{\substack{d \\ \overline{n}}}\left[\frac{m}{d}\right]\frac{\varepsilon_d}{d} + n\sum_{\substack{d \\ \overline{n}}}\left[\frac{m}{d}\right]\varepsilon_d.$$

Par exemple, posons $n = 6$, $m = 4$.

Les valeurs de τ sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, quand $k = 1$; et ces valeurs sont 1, 3, 5 quand $k = 2$; 1, 2, 4, 5 quand $k = 3$; 1, 3, 5 quand $k = 4$. Il en résulte que la somme de τ est 51, ce qui vérifie que

$$2.51 = 36\left[4 - \frac{2}{2} - \frac{1}{3}\right] + 6[4 - 2 - 1].$$

On arrive à ce résultat aussi que

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{2}{\nu}\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\substack{(\nu,k,\tau)\sim 1\\(\tau\overline{\gtrless}\nu)}}\tau=\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=m}\Big[\Phi(\nu,k)+\sum_{\frac{d}{(\nu,k)}}\varepsilon_d\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\frac{3}{2}+\left[\frac{n}{d}\right]\right\},$$

puisque

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\frac{d}{(\nu,k)}}\varepsilon_d=\sum_{d=1}^{d=\infty}\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right].$$

On peut arriver à des résultats semblables pour les puissances plus élevées de τ.

3° Posons $f(n, k, \nu)=\log\nu$, d'où il résulte que

$$G(n,k,1)=\sum_{\substack{(n,k,\nu)\sim 1\\(\nu\overline{\gtrless}n)}}\log\nu,$$

$$F(n,k,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}\log(\mu,d)\qquad(dd'=n).$$

Par conséquent, d'après (II),

$$\sum_{\substack{(n,k,\nu)\\(\nu\overline{\gtrless}n)}}\log\nu=\sum_{\frac{d}{(n,k)}}\varepsilon_d\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}\log(\mu.d)$$

$$=\sum_{\frac{d}{(n,k)}}\varepsilon_d\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}(\log\mu+\log d)\qquad=\sum_{\frac{d}{(n,k)}}\varepsilon_d[d'\log d+\log d'!)]$$

$$=\sum_{\frac{d}{(n,k)}}\varepsilon_d\left[\log d^{\frac{n}{d}}+\log\left(\frac{n}{d}!\right)\right]=\sum_{\frac{d}{(n,k)}}\log\left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d}.$$

Il en résulte aussi que

$$e^{\sum\log\nu}=e^{\sum\log\left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d}},$$

ou

$$\prod_{\substack{(n,k,\nu)\sim 1\\(\nu \leqq n)}} \nu = \prod_{\frac{d}{(n,k)}} \left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d}.$$

On a aussi

$$\prod_{k=1}^{k=\mathrm{K}} \prod_{\substack{(n,k,\nu)\\ \nu \leqq n}} \nu = \prod_{k=1}^{k=\mathrm{K}} \prod_{\frac{d}{(n,k)}} \left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d} = \prod_{\frac{d}{n}} \left[d^{\frac{n}{d}}\left(\frac{n}{d}!\right)\right]^{\varepsilon_d\left[\frac{\mathrm{K}}{d}\right]}.$$

Par exemple, on voit que le produit des nombres mentionnés page 235 est

$$\frac{(6!)^4}{[2^3.(3!)]^2\,[3^2.(2!)]} = 2.3.4.5.6.3.5.2.4.5.3.5.$$

De la même manière, on voit aussi que

$$\prod_{n=1}^{n=\mathrm{N}} \prod_{k=1}^{k=\mathrm{K}} \prod_{\substack{(n,k,\nu)\sim 1\\(\nu \leqq n)}} \nu = \prod_{d=1}^{d=\mathrm{N}} \left\{ d^{\frac{d'(d'+1)}{2}} (1!\,2!\ldots d'!) \right\}^{\varepsilon_d\left[\frac{\mathrm{K}}{d}\right]},$$

où $dd' \leqq \mathrm{N}$.

15. Dans les formules

$$\mathrm{F}(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \mathrm{G}(n, k, d),$$

$$\mathrm{G}(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d \mathrm{F}(n, k, d),$$

supposons que k varie de 1 à K, et formons les fonctions

$$\mathrm{F}_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=\mathrm{K}} \mathrm{F}(n, k, 1),$$

$$\mathrm{G}_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=\mathrm{K}} \mathrm{G}(n, k, 1).$$

Si l'on observe que $(n, k_1 d, d) \sim (n, d)$, il s'ensuit que [*voir* (III) et (II)]

$$F_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=K} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{K}{d}\right] G(n, d).$$

Puisque

$$G_1(n, k, d) = \sum_{k=1}^{k=K} G(n, k, d) = \left[\frac{K}{d}\right] G(n, d),$$

où d est un diviseur de n et de k, on a

$$\text{(IV)} \qquad F_1(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} G_1(n, k, d).$$

On a aussi

$$\text{(V)} \qquad G_1(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=K} G(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{k=K} \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F(n, k, d)$$

$$= \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{K}{d}\right] F(n, d) = \sum_{\frac{d}{(n,k)}} \varepsilon_d F_1(n, k, d).$$

Exemple. — Si $f(n, k, h) = 1$, on a

$$F(n, k, d) = d' = \frac{n}{d},$$

où d est ici un diviseur de n et de k,

$$G(n, k, 1) = \Phi(d', k), \qquad G(n, k, 1) = \Phi(n, k).$$

Il s'ensuit que [*voir* (V)]

$$\sum_{k=1}^{n=K} G(n, k, 1) = \sum_{k=1}^{n=K} \Phi(n, k) = \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{K}{d}\right] \frac{n}{d},$$

ce qui vérifie la formule (p. 237).

16. Nous définissons deux fonctions nouvelles par les formules

$$\text{(VI)} \qquad F_2(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} F_1(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\frac{d}{n}} \left[\frac{K}{d}\right] G(n, d)$$
$$= \sum_{i=1}^{i=d'} \left[\frac{K}{d}\right] G(di, d),$$

$$\text{(VII)} \qquad G_2(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} G_1(n, k, 1) = \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{\frac{d}{n}} \varepsilon_d \left[\frac{K}{d}\right] F(n, d)$$
$$= \sum_{i=1}^{i=d'} \varepsilon_d \left[\frac{K}{d}\right] F(di, d),$$

où

$$dd' \leqq N; \qquad d = 1, 2, \ldots, N.$$

On arrive aussi aux résultats que voici :

$$\text{(VIII)} \qquad F_2(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{n}} \sum_{n=1}^{n=N} \left[\frac{K}{d}\right] G(n, d)$$
$$= \sum_{\frac{d}{(n, k, d)}} \sum_{n=1}^{n=N} G_1(n, k, d) = \sum_{\frac{d}{(n, k)}} G_2(n, k, d);$$

et semblablement

$$\text{(IX)} \qquad G_2(n, k, 1) = \sum_{\frac{d}{(n, k)}} \varepsilon_d F_2(n, k, d).$$

Exemple I. — Si, comme dans le paragraphe précédent,

$$F(n, k, d) = \frac{n}{d}, \qquad F(di, d) = \frac{di}{d} = i,$$
$$G(n, k, d) = \Phi(d', k), \qquad G(n, k, 1) = \Phi(n, k),$$

il en résulte que

$$\sum_{n=1}^{n=N}\sum_{k=1}^{k=K}\Phi(n,k)=\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right]i=\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right]\frac{d'(d'+1)}{2}$$
$$=\sum_{d=1}^{d=\infty}\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right]\left[\frac{N}{d}\right]\left\{\frac{\left[\frac{N}{d}\right]+1}{2}\right\},$$

ce qui est une vérification du n° **12.**

Exemple II. — Si $f(n, k, d) = d$, on a

$$F(n,k,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}f(n,k_d d,\mu d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=d'}\mu d\qquad(k=k_d d).$$
$$F(di,d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=i}f(di,\mu d)=\sum_{\mu=1}^{\mu=i}\mu d=\frac{i(i+1)}{2}d,$$
$$G(n,k,1)=\sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1\\(\tau\leqq n)}}\tau.$$

Il s'ensuit (*voir* VII) que

$$(B)\quad\sum_{n=1}^{n=N}\sum_{k=1}^{k=K}\sum_{\substack{(n,k,\tau)\sim 1\\(\tau\leqq n)}}\tau=\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right]\frac{i(i+1)}{2}d=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=d'}\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right](d(i^2+i)$$
$$=\frac{1}{6}\sum\varepsilon_d\left[\frac{K}{d}\right]dd'(d'+1)(d'+2)\qquad(dd'\leqq n).$$

Exemple. — Pour appliquer la formule susnommée, posons

$$N=12,\qquad K=7.$$

La formule (A) du n° **14** donne pour

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

les valeurs

14	30	72	104	200	198	378	384	558	560	924	756

La somme des nombres de la deuxième ligne est 4178, et ce nombre divisé par 2 donne ce résultat :

$$2089 = \frac{1}{6}\left[7.1.12.13.14 - 3.2.6.7.8 - 2.3.4.5.6 - 1.5.2.3.4 + 1.6.2.3.4 - 1.7.1.2.3\right],$$

qui est une vérification de la formule (B).

On peut dériver des résultats semblables pour les puissances de τ.

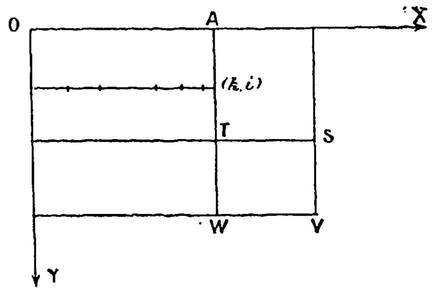
16. *Une application à la théorie analytique des nombres.* — Le nombre des points (~ 1) du système

$$(1, i), \quad (2, i), \quad (3, i), \quad \ldots, \quad (k, i)$$

a été dénoté par le symbole $r_k(i)$.

En d'autres termes, $r_k(i)$ est le nombre des points (~ 1) le long de

Fig. 2.



la ligne $y = i$, qui part de l'axe y et qui s'étend jusqu'au point (k, i) inclusivement. Ce nombre est (*voir* n° 5)

$$\sum_{\frac{d}{i}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right].$$

Si les coordonnées de T sont (k, m), on voit que le nombre des points (~ 1) du rectangle OT est

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{\frac{d}{i}} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{k}{d}\right] \left[\frac{m}{d}\right].$$

Par exemple, si $k = 10$ et $m = 7$, le nombre des points (~ 1) du rectangle sur ces deux côtés est

$$70 - 15 - 6 - 2 + 1 - 1 = 47.$$

Si les coordonnées de V sont (k_1, m_1), le nombre des points (~ 1) du rectangle AV est

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left\{ \left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right] \right\},$$

duquel nombre est exclu le nombre des points (~ 1) de la ligne AW. Le nombre des points (~ 1) du rectangle TV est

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left\{ \left[\frac{m_1}{d}\right] - \left[\frac{m}{d}\right] \right\} \left\{ \left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right] \right\},$$

où ne sont pas comptés les points (~ 1) des lignes TS et TW.

17. D'une façon analogue, le nombre des points (~ 1) du système

$$(k, m, 1), \quad (k, m, 2), \quad \ldots, \quad (k, m, n_1)$$

se dénote par

$$R_{n_1}(k, m),$$

ce qui est le nombre des points (~ 1) de la ligne TH de la figure, où les coordonnées de H_1 sont (k, m, n_1).

Ce nombre (*voir* n° **7**) est

$$R_{n_1}(k, m) = \sum_{\frac{d}{(k, m)}} \varepsilon_d \left[\frac{n_1}{d}\right].$$

Il est clair aussi que le nombre des points (~ 1) de la face AE_1 est

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} R_{n_1}(k, \mu) = \sum_{\mu=1}^{\mu=m_1} \sum_{\frac{d}{(k, \mu)}} \varepsilon_d \left[\frac{n_1}{d}\right] = \sum_{\frac{d}{k}} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right],$$

où les coordonnées de E_1 sont (k_1, m_1, n_1).

Si les coordonnées de D sont (k_1, m_1, n_1), nous trouverons sans difficulté de la même manière que le nombre de points (~ 1) du parallélépipède rectangulaire OD est

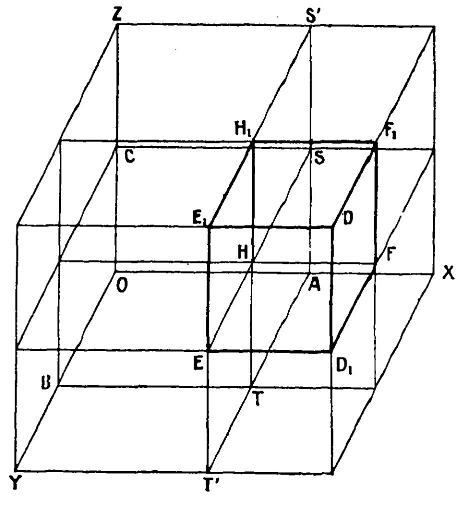
$$N_1 = \sum_{k=1}^{k=k_1} \sum_{\frac{d}{k_1}} \varepsilon_d \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right] = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left[\frac{k_1}{d}\right] \left[\frac{m_1}{d}\right] \left[\frac{n_1}{d}\right]$$

et, pour le parallélépipède HD, ce nombre est

$$N = \sum_{d=1}^{d=\infty} \varepsilon_d \left\{ \left[\frac{k_1}{d}\right] - \left[\frac{k}{d}\right] \right\} \left\{ \left[\frac{m_1}{d}\right] - \left[\frac{m}{d}\right] \right\} \left\{ \left[\frac{n_1}{d}\right] - \left[\frac{n}{d}\right] \right\},$$

où les coordonnées de H sont (k, m, n) et où les points (~ 1) des faces HD_1, HE_1, HF_1 sont exclus du calcul.

Fig. 3.



Si g est le moindre des nombres k_1, m_1, n_1, on peut écrire

$$N = \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \left\{ \frac{k_1 - k}{d} - \rho_d \right\} \left\{ \frac{m_1 - m}{d} - \sigma_d \right\} \left\{ \frac{n_1 - n}{d} - \tau_d \right\},$$

où ρ_d, σ_d, τ_d sont des quantités chacune moindre que 1.

Si encore on pose

$$k_1 - k = \kappa, \qquad m_1 - m = \mu, \qquad n_1 - n = \nu,$$

on a

$$\mathrm{N} = \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \left\{ \frac{k}{d} - \rho_d \right\} \left\{ \frac{\mu}{d} - \sigma_d \right\} \left\{ \frac{\nu}{d} - \tau_d \right\}$$

ou

$$\mathrm{N} = k\mu\nu \sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} - \mathrm{R},$$

où

$$\mathrm{R} = k\mu\nu \sum_{d=g+1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} + \sum_{d=1}^{d=g} \frac{\varepsilon_d}{d^2} \left\{ \tau_d k\mu + \sigma_d k\nu + \rho_d \mu\nu \right\}$$

$$- \sum_{d=1}^{d=g} \frac{\varepsilon_d}{d} \left\{ \mu\rho_d\tau_d + \nu\rho_d\sigma_d + k\sigma_d\tau_d \right\} + \sum_{d=1}^{d=g} \varepsilon_d \rho_d \sigma_d \tau_d.$$

Dans la discussion présente, nous ne désirons que les limites en dedans desquelles se trouve R et nous n'arriverons pas à la valeur exacte. Voilà pourquoi nous poserons tous les signes comme positifs.

Et encore qu'on observe que (*voir* par exemple Kronecker, *loc. cit.*, p. 258)

$$\sum_{i=a+1}^{i=b} f(i) < \int_{x=a}^{x=b} f(x)\, d\varphi,$$

où $f(\varphi)$ est une fonction qui décroît quand augmente la variable x.

Il est clair que

$$\mathrm{R} < \frac{k\mu\nu}{g^2} + \frac{k\mu + k\nu + \nu\mu}{g} + (k + \mu + \nu)(1 + \log g) + g,$$

où

$$\mathrm{R} < g\left[\frac{k}{g} + 1\right]\left[\frac{\mu}{g} + 1\right]\left[\frac{\nu}{g} + 1\right] + (\mu + \nu + k)\log g.$$

Si g est le plus grand des nombres k, μ, ν, on a

$$\mathrm{R} < g\left(\frac{\mathrm{G}}{g} + 1\right)^3 + 3\mathrm{G}\log g.$$

Et encore, puisque

$$\sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{\varepsilon_d}{d^3} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{d=1}^{d=\infty}},$$

on aura

$$N = \frac{k\mu\nu}{\sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{1}{d^3}} + \lambda \left[\frac{(G+g)^3}{g^2} + 3G \log g \right],$$

où la valeur de λ se trouve située entre $+1$ et -1. De ceci on voit que

$$\frac{1}{\sum_{d=1}^{d=\infty} \frac{1}{d^3}} = \frac{1}{1.202\ldots}$$

est la valeur asymptotique de $\frac{N}{k\mu\nu}$; c'est-à-dire pour des valeurs grandes de k, μ, ν la limite de $\frac{N}{k\mu\nu}$ est presque $\frac{5}{6}$; ou, autrement exprimé, $\frac{5}{6}$ est la probabilité que le plus grand commun diviseur de trois entiers quelconques l, m, n soit l'unité.

Pour une discussion de valeurs semblables asymptotiques de deux variables, *voir* Dirichlet, *Werke*, t. II, p. 97, et aussi Lebesgue, *Journ. de Math.*, 2e série, t. I, 1856, p. 377.

Le théorème qui exprime la probabilité que deux nombres soient relativement premiers l'un à l'autre est fourni par Sylvester (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCVI, 1883, p. 409), un théorème que revendiquait comme sien Cesàro (*Johns Hopkins Circular*, 2e série, 1883, p. 85). *Voir* aussi la discussion entre Cesàro et Jensen (*Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 1651). On renvoie le lecteur à une série d'articles de J. Liouville sous le titre : *Sur quelques fonctions numériques* (*Journ. de Math.*, 2e série, t. II et suiv.), et aussi à plusieurs œuvres de Cesàro (*Ann. di Mat.*, 2e série, t. XIII).

Moyennant l'introduction de la géométrie des nombres de trois dimensions ou plus, les généralisations et extensions des théorèmes trouvés dans ces Mémoires et d'autres offrent beaucoup d'intérêt.