

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

S.-B. KELLEHER

**Des limites des zéros d'un polynôme**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7<sup>e</sup> série*, tome 2 (1916), p. 169-171.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1916\\_7\\_2\\_169\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2_169_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Des limites des zéros d'un polynome ;*

**PAR S.-B. KELLEHER,**

Trinity College, Dublin.

I. Soit  $1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  un polynome dont les coefficients peuvent être réels ou imaginaires.

Si l'on pose

$$\frac{1}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n} = A_0 + A_1 z + \dots + A_p z^p + \frac{R}{1 + a_1 z + \dots + a_n z^n},$$

où  $p$  est un nombre entier  $> 2n$ , on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + A_0, \\ 0 &= A_0 a_1 + A_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ 0 &= A_0 a_{q-1} + A_1 a_{q-2} + \dots + A_{q-2} a_1 + A_{q-1}, \\ 0 &= A_q + A_0 a_q + A_1 a_{q-1} + \dots + A_{q-2} a_2 + A_{q-1} a_1, \end{aligned}$$

où les coefficients  $a_q, \dots$  sont nuls pour  $q > n$ .

Donc

$$A_q = (-1)^q \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1} & a_{q-2} & \dots & \dots & a_1 & 1 \\ a_q & a_{q-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

$$-R = z^{p+1}(A_p a_1 + A_{p-1} a_2 + \dots + A_{p-n+1} a_n) + \dots + z^{p+n} A_p a_n.$$

Par le théorème de M. Hadamard sur la limite supérieure d'un

déterminant

$$|A_q| \gg \alpha (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{q-n-1}{2}} \quad \text{pour } q > n,$$

où

$$\alpha = [ (1 + |a_1|^2)(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2) \dots \\ \times (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2) ]^{\frac{1}{2}};$$

donc si

$$|z| < \frac{1}{(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a

$$|R| \gg \frac{n(n+1)}{1.2} \alpha \beta (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{p-n-1}{2}} |z|^{p+1},$$

où  $\beta$  est la plus grande des quantités  $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$ .

$|R|$  peut donc devenir aussi petit que nous voulons en prenant  $p$  assez grand. On a aussi

$$|A_0 + A_1 z + \dots + A_p z^p| \gg |A_0| + |A_1| |z| + \dots + |A_n| |z|^n \\ + \alpha |z|^{n+1} \frac{1 - [ |z| (1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} ]^{p-n}}{1 - |z| (1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$|A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p|$  est donc borné.

Mais on a identiquement

$$1 - R = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n) (\Lambda_0 + \Lambda_1 z + \dots + \Lambda_p z^p),$$

donc

$$|1 - R| = |1 + a_1 z + \dots + a_n z^n| |\Lambda_0 + \Lambda_1 z + \dots + \Lambda_p z^p|;$$

mais

$$|1 - R| > 1 - |R| > 0 \quad \text{pour } |z| < \frac{1}{(1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et  $|A_0 + A_1 z + \dots + A_p z^p|$  ne peut devenir infini; donc

$$|1 + a_1 z + \dots + a_n z^n|$$

ne peut devenir nul pour

$$|z| < \frac{1}{(1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

II. En posant  $z' = \frac{1}{z}$  dans le polynôme  $1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ , on obtient le polynôme

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z' + \frac{a_{n-2}}{a_n} z'^2 + \dots + \frac{1}{a_n} z'^n$$

qui ne peut devenir nul pour

$$|z'| < \frac{|a_n|}{(1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Le polynôme

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

n'a donc pas de zéros à l'extérieur du cercle de rayon

$$\frac{(1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{|a_n|}$$

III. Le même raisonnement montre que la fonction entière

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + \text{ad. inf.}$$

n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle de rayon

$$\frac{1}{(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + \text{ad. inf.})^{\frac{1}{2}}}$$

si la série  $1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + \text{ad. inf.}$  est convergente.

