JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 104-154.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__104_0>

Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies;

Par G. HUMBERT.

---

1. Ce travail est divisé en trois Parties :

Dans la première on expose une intéressante interprétation géométrique des fractions continues, analogue à celle que donne le Mémoire précédent pour les fractions d'Hermite; elle conduit à une démonstration très simple du théorème de Lagrange sur la périodicité et rend intuitives plusieurs propriétés des réduites.

La deuxième Partie traite du *nombre de certaines formes réduites* qui équivalent à une forme quadratique binaire indéfinie, f, à coefficients entiers; nous étudions successivement, à ce point de vue, des *réduites* auxquelles nous donnons le nom de *Stephen Smith* et *les réduites de M. Hurwitz;* nous retrouvons aussi le théorème célèbre de Dirichlet sur le nombre des réduites de Gauss.

La troisième Partie fait connaître le nombre des *réduites d'Hermite équivalentes à f.* Les résultats obtenus semblent nouveaux; ils s'énoncent très simplement et rattachent les nombres cherchés à la *période* qui se présente dans le développement en fraction continue d'une racine de la forme, mais d'une manière tout autre que ne fait le théorème de Dirichlet, puisqu'ils introduisent, non seulement le nombre des termes de la période, mais les valeurs de ces termes eux-mêmes.

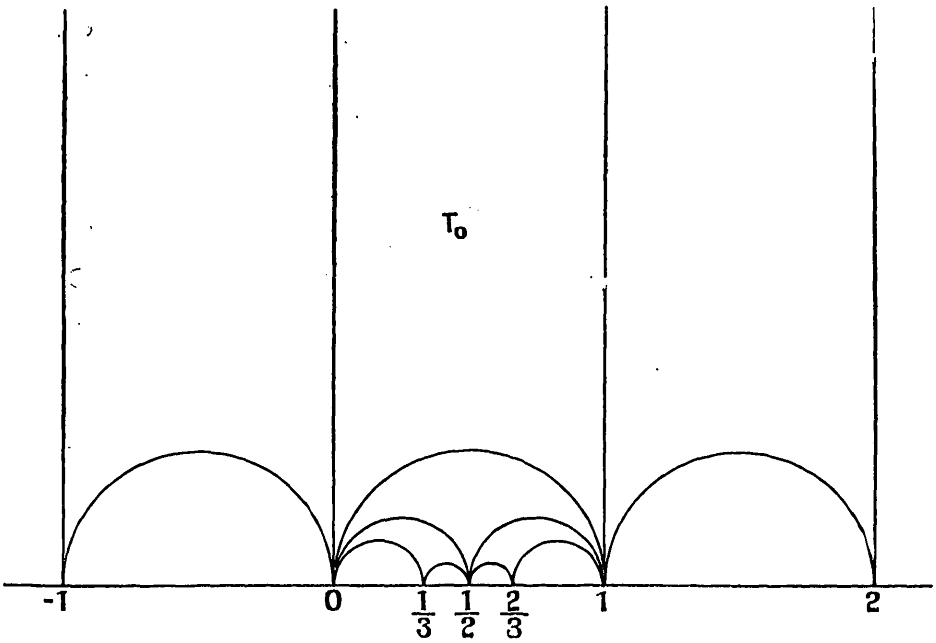
Enfin, après une étude de la période dans le développement hermitien d'une racine de la forme, on détermine le nombre des *réduites principales d'Hermite* équivalentes à celle-ci.

PREMIÈRE PARTIE.

Division de Stephen Smith.

2. Nous partirons de la division du demi-plan analytique en *triangles élémentaires* curvilignes, indiquée pour la première fois par Stephen Smith et étudiée (à un point de vue projectif) par M. Hurwitz (¹).

Fig. 1.



Soit T_0 (*fig.* 1) le triangle formé par les droites $x = 0$, $x = 1$, et la demi-circonférence décrite sur le segment 01 comme diamètre; on prend les *symétriques* de T_0 par rapport à ses trois côtés (²), et l'on

(¹) St. Smith, *Mémoire sur les équations modulaires* (*R. Acad. dei Lincei*, 1877, et *Œuvres*, t. II, p. 224). — Hurwitz, *Math. Annalen*, t. XLV, p. 85 et suiv.

(²) La symétrique d'une figure F par rapport à une circonférence c est l'*inverse* de F, quand on prend pour puissance et pour pôle le carré du rayon et le centre de c.

opère de même sur tous les triangles successivement obtenus. On divise ainsi la partie du plan au-dessus de Ox en une infinité de triangles circulaires, de côtés orthogonaux à Ox, et devenant infiniment petits, dans tous les sens, à mesure qu'on se rapproche de Ox.

Chaque triangle a ses trois angles nuls; les trois sommets sont sur Ox, sauf cependant dans la rangée supérieure, où un sommet est à l'infini.

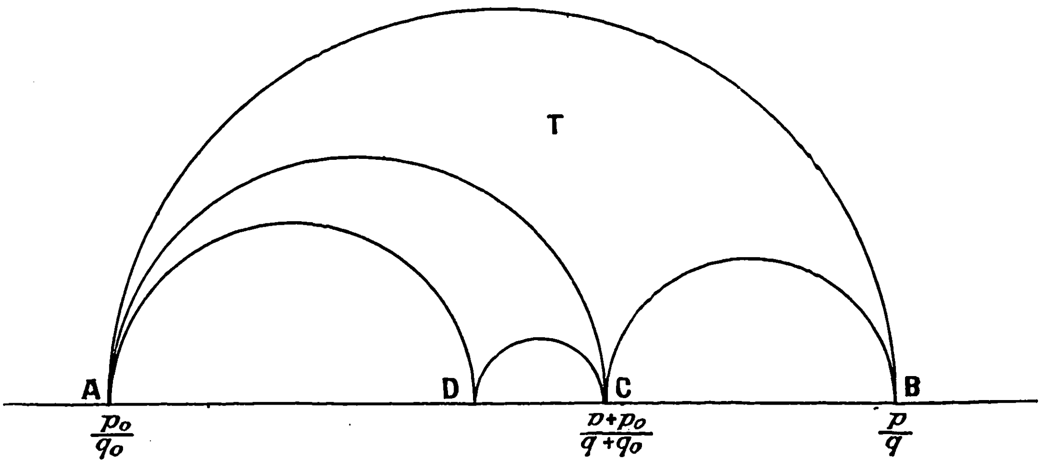
Toutes ces propriétés sont connues; les suivantes le sont également : nous en donnerons de brèves démonstrations en vue des lecteurs non familiarisés avec la figure modulaire, dont dérive celle de Smith.

3. Ne considérons d'abord que les triangles à droite de Oy; la symétrie de la division par rapport à cet axe étend d'elle-même les résultats à ceux de gauche.

Je dis que :

Les abscisses des sommets d'un triangle de Smith sont trois fractions irréductibles, de la forme

Fig. 2.



$$(1)\qquad \frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p}{q},\quad \frac{p+p_0}{q+q_0}\qquad (p,\, q,\, p_0,\, q_0 \geqq 0)$$

avec

$$(1\ bis)\qquad pq_0 - qp_0 = \pm 1.$$

La proposition est vraie pour T_0, de sommets $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$; il suffit donc, pour l'établir en général, de montrer que, si un triangle T de Smith (*fig.* 2) admet les trois sommets (1), soient A, B, C, ses symétriques par rapport à ses côtés ont aussi leurs sommets du type (1).

Or, on trouve aisément, pour les sommets des symétriques de T, par rapport à AC, BC et AB, les abscisses respectives

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p+p_0}{q+q_0},\quad \frac{p+2p_0}{q+2q_0},$$
$$\frac{p+p_0}{q+q_0},\quad \frac{p}{q},\quad \frac{2p+p_0}{2q+q_0},$$
$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p-p_0}{q-q_0},\quad \frac{p}{q} \qquad \text{ou [1]} \qquad \frac{p}{q},\quad \frac{p_0-p}{q_0-q},\quad \frac{p_0}{q_0};$$

d'où la proposition à établir.

4. *Réciproquement, si les trois sommets d'un triangle quelconque* Θ (*à côtés circulaires orthogonaux à* Ox) *sont du type* (1), Θ *est un triangle de Smith.*

Observons d'abord que des symétries faciles conduisent, à partir de T_0, au triangle de sommets $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, qui est dès lors de Smith.

Cela posé, on peut admettre, sans diminuer la généralité, que $p > p_0$, et, par suite, $q > q_0$; le symétrique de Θ, par rapport au côté qui contient les sommets $p_0 : q_0$ et $p : q$, a les sommets

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p}{q},\quad \frac{p-p_0}{q-q_0},$$

qui sont aussi du type (1); continuant les symétries, on arrive à un triangle, Θ_k, dont les sommets [toujours du type (1)] sont :

$$\frac{p_0}{q_0},\quad \frac{p-(k-1)p_0}{q-(k-1)q_0},\quad \frac{p-kp_0}{q-kq_0},$$

k désignant le quotient de la division de p par p_0; donc aussi de q par q_0, en vertu de $pq_0 - qp_0 = \pm 1$.

---

[1] Si $p > p_0$, ce qui entraîne, par (1 *bis*), $q > q_0$, on prendra $\frac{p-p_0}{q-q_0}$; si $p < p_0$, on prendra $\frac{p_0-p}{q_0-q}$, afin d'avoir toujours des numérateurs et dénominateurs > 0.

Si $p_1 = p - kp_0$, $q_1 = q - kq_0$, on a dès lors

$$p_1 < p_0, \quad q_1 < q_0 \quad \text{et} \quad p_0 q_1 - q_0 p_1 = \mp 1;$$

en sorte que les sommets de Θ_k sont

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{p_0 + p_1}{q_0 + q_1}.$$

On poursuivra les symétries, en faisant tenir à p_0, q_0 et p_1, q_1 les rôles que tenaient tout à l'heure p, q et p_0, q_0, et l'on finira par arriver à un triangle, Θ', dont un sommet sera $\frac{0}{1}$ ou $\frac{1}{0}$ (¹).

Dans le premier cas, les sommets de Θ', [toujours du type (1)] seront

$$\frac{r}{s}, \quad \frac{r'}{s'}, \quad \frac{r + r'}{s + s'} \quad \text{avec} \quad r' = 0, \quad s' = 1;$$

et, par $rs' - r's = \pm 1$, on aura $r = 1$, car tous les termes sont positifs. Donc enfin, Θ' a pour sommets

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s + 1};$$

il est donc triangle de Smith, comme on vient de l'observer et Θ, déduit de Θ' par des symétries successives, a la même propriété.

Dans le second cas, les sommets de Θ' sont

$$\frac{r}{s}, \quad \frac{r'}{s'}, \quad \frac{r + r'}{s + s'} \quad \text{avec} \quad r' = 1, \quad s' = 0,$$

d'où $s = 1$; Θ' a donc les sommets

$$\frac{1}{0}, \quad r, \quad r + 1$$

et coïncide dès lors avec un des triangles de Smith de la première rangée. De là, dans tous les cas, le théorème énoncé.

Remarque. — Soient $p'' : q''$ et $p' : q'$ deux fractions irréductibles

(¹) On n'écrit pas $\frac{0}{n}$ ou $\frac{n}{0}$, parce que $p_i : q_i$ se présente toujours sous forme d'une fraction irréductible.

telles que $p'q'' - q'p'' = \pm 1$; supposons $p' > p''$ et $q' > q''$. Il y a deux triangles de Smith qui ont pour côté la demi-circonférence décrite sur le segment des points $p'' : q''$ et $p' : q'$ comme diamètre ; l'un a pour troisième sommet le point $(p' + p'') : (q' + q'')$ et est *intérieur* à la demi-circonférence précédente ; l'autre lui est *extérieur* et a pour troisième sommet le point $(p' - p'') : (q' - q'')$.

5. *Application d'une substitution modulaire*. — 1° Soit T le triangle de sommets (1), avec $pq_0 - qp_0 = \eta$ $(\eta = \pm 1)$; la substitution *modulaire*

$$z = \frac{p\zeta + \eta p_0}{q\zeta + \eta q_0}$$

change $z = p : q$, $p_0 : q_0$, $(p + p_0) : (q + q_0)$ en $\zeta = \infty, 0, \eta$; la substitution modulaire $\zeta = \zeta' + \eta$ change $\zeta = \infty$, 0, η en $\zeta' = \infty$, $-\eta$, 0. Donc :

On peut toujours transformer un triangle donné, T, *de Smith en* T_0, *par une substitution modulaire*, S_0.

2° Appliquons à T une substitution modulaire quelconque, S ; mettons d'abord celle-ci sous la forme $S_0(S_0^{-1}S)$, et soit

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \qquad (ad - bc = 1) \tag{2}$$

la substitution modulaire $S_0^{-1}S$.

S_0 change T en T_0 ; $S_0^{-1}S$ change T_0 en un triangle Θ, de côtés circulaires et orthogonaux à Ox, et de sommets [transformés par (2) de $\zeta = \infty$, 0, 1]

$$z = \frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a + b}{c + d},$$

qui sont du type (1), en sorte que Θ est triangle de Smith. Donc :

Toute substitution modulaire échange entre eux les triangles de Smith, c'est-à-dire n'altère pas la division de Smith.

6. Le triangle T_0 est transformé en lui-même par les deux substitutions modulaires

$$z = \frac{1}{-\zeta + 1} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\zeta - 1}{\zeta},$$

qui, en effet, à $\zeta = \infty, 0, 1$ font correspondre respectivement

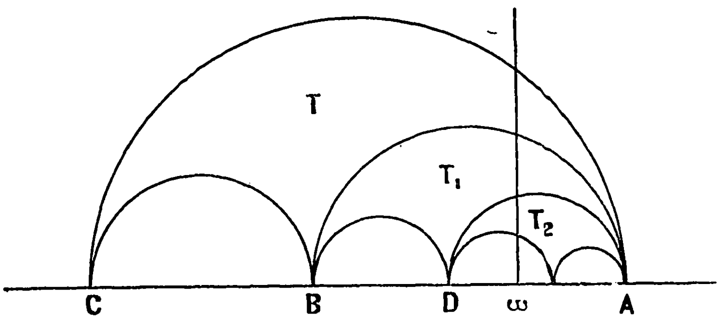
$$z = 0, 1, \infty \quad \text{et} \quad z = 1, \infty, 0.$$

Il en résulte aisément qu'on peut toujours trouver une et une seule substitution modulaire changeant un triangle T, de Smith, en T_0 et un sommet donné de T en un sommet donné de T_0.

Fractions continues en général.

7. *Interprétation géométrique.* — Soit ω une quantité *irrationtionnelle et positive;* traçons, dans le demi-plan, la demi-droite $x = \omega$ (*fig.* 3), et suivons-la de ∞ à ω : dans ce mouvement, nous traversons

Fig. 3.



des triangles de Smith successifs ; nous appellerons *pointe* (par rapport à la droite) d'un triangle traversé, T, *le* sommet de ce triangle où aboutissent les deux côtés de T que coupe la droite. Par exemple, dans la figure 3, la droite traverse les triangles T, T_1, T_2, dont les *pointes* respectives sont A, A, D.

Le *premier* triangle T', traversé par la droite, est un de ceux de la première rangée ; ses sommets sont ∞, a et $a+1$, où *a est le plus grand entier contenu dans* ω ; et il y a ambiguïté sur la pointe : nous conviendrons de dire que *la pointe de* T' *est le sommet d'abscisse a.*

Pour les triangles suivants, il n'y aura plus aucune ambiguïté ; enfin, ω étant irrationnel, le nombre des triangles traversés sera infini, car tous les sommets ont des abscisses rationnelles et ω, dès lors, ne peut être un sommet.

Cela posé, considérons *les pointes des triangles successivement traversés* par la droite $x = \omega$, et *écrivons leurs abscisses successives;* si une pointe, d'abscisse $p : q$, se présente k fois *de suite*, au lieu d'écrire k fois de suite $p : q$, nous ne l'écrirons qu'une fois.

Enfin, en tête de cette liste des abscisses, plaçons $1 : 0$, ce qui rappellera le sommet ∞ de T', par lequel passe la droite.

Nous obtenons ainsi de suite

$$\text{(S)} \qquad \frac{1}{0}, \quad \frac{a}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \frac{p_3}{q_3}, \quad \ldots, \quad \frac{p''}{q''}, \quad \frac{p'}{q'}, \quad \frac{p}{q}, \quad \ldots$$

qui commence par $1 : 0$ et $a : 1$, comme la suite ordinaire des *réduites* de ω (déduites du développement de ω en fraction continue).

Or je dis que c'est là une loi générale, c'est-à-dire que la suite (S) *coïncide* avec celle des réduites successives de ω.

8. Il suffit de prouver que, si la proposition est vraie jusqu'au terme $p' : q'$, inclusivement, elle est vraie aussi pour le terme suivant, c'est-à-dire que $p : q$ est la réduite de ω qui suit $p' : q'$.

Observons d'abord que si la droite $x = \omega$ traverse un triangle de sommets $p_1 : q_1$, $p_2 : q_2$, $(p_1 + p_2) : (q_1 + q_2)$ et dont $p_1 = q_1$ est la *pointe*, ω est compris entre $p_1 : q_1$ et $(p_1 + p_2) : (q_1 + q_2)$; réciproquement, si cette condition est satisfaite, la droite traverse le triangle, avec la pointe $p_1 : q_1$ (les p_i, q_i sont supposés $\geqq 0$).

La droite, suivie de ∞ à ω, après avoir traversé un dernier triangle de pointe $p'' : q''$, pénètre dans un *premier* triangle, T'_1, *de pointe* $p' : q'$; le passage se fait à la traversée de la demi-circonférence γ décrite sur le segment $p'' : q''$ —— $p' : q'$ comme diamètre (*voir* figure 3, où la droite passe de T_1, triangle de pointe A, à T_2 triangle de pointe D).

Donc T'_1 est *le* triangle intérieur à γ, de sommets $p'' : q''$ et $p' : q'$; les abscisses de ses sommets sont donc (Remarque du n° 4)

$$(T'_1) \qquad \frac{p''}{q''}, \quad \frac{p' + p''}{q' + q''}, \quad \frac{p'}{q'};$$

et *ces quantités sont rangées soit dans l'ordre croissant, soit dans l'ordre décroissant*. De plus, en vertu d'une observation précédente, ω est nécessairement *entre les deux dernières quantités*.

Supposons que la droite traverse h triangles, T'_1, T'_2, ..., T'_h, de pointe $p' : q'$; on voit de suite que les sommets de T'_2 sont, dans un ordre croissant ou décroissant,

$$(T'_2) \qquad \frac{p'+p''}{q'+q''}, \quad \frac{2p'+p''}{2q'+q''}, \quad \frac{p'}{q'};$$

et ceux de T'_h, toujours dans un de ces deux ordres,

$$(T'_h) \qquad \frac{(h-1)p'+p''}{(h-1)q'+q''}, \quad \frac{hp'+p''}{hq'+q''}, \quad \frac{p'}{q'}.$$

Enfin, ω est entre les deux dernières quantités écrites. Mais il n'est pas entre

$$\frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{(h+1)p'+p''}{(h+1)q'+q''};$$

car, autrement, la droite traverserait encore un triangle de *pointe* $p' : q'$, à savoir celui qui aurait pour sommets les quantités de la ligne (T'_h), dans lesquelles on remplacerait h par $h+1$.

De là une définition algébrique de h : *c'est le plus grand entier (positif) tel que*

$$\frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{hp'+p''}{hq'+q''}$$

comprennent ω; et nous avons d'ailleurs appelé h le nombre des domaines de pointe $p' : q'$, traversés par la droite $x = \omega$.

Enfin, après la traversée de T'_h, la droite pénètre, par hypothèse, dans un triangle de pointe $p : q$; il est clair que cette pointe est le sommet milieu de T'_h (c'est-à-dire celui compris entre les deux autres), donc le sommet $(hp'+p'') : (hq'+q'')$, et l'on a dès lors (puisque p et q sont > 0 et premiers entre eux)

$$(3) \qquad p = hp'+p'', \qquad q = hq'+q'',$$

h étant l'entier ci-dessus défini.

D'autre part, par hypothèse, $p'' : q''$ et $p' : q'$ sont deux réduites consécutives de ω; la suivante, $P : Q$, est donnée par

$$(4) \qquad P = kp'+p'', \qquad Q = kq'+q'',$$

où k est le *quotient incomplet* qui *suit* la réduite $p' : q'$, c'est-à-dire que, pour calculer $p' : q'$, on s'arrête dans la fraction continue ω, au quotient incomplet k, *exclusivement*.

Mais c'est une propriété classique des réduites que ω est compris entre $P : Q$ et $(P + p') : (Q + q')$, c'est-à-dire entre

$$\frac{kp' + p''}{kq' + q''} \quad \text{et} \quad \frac{(k+1)p' + p''}{(k+1)q' + q''}, \tag{5}$$

et aussi entre $p' : q'$ et $P : Q$, c'est-à-dire entre

$$\frac{p'}{q'} \quad \text{et} \quad \frac{kp' + p''}{kq' + q''}. \tag{6}$$

Donc, évidemment, k est *le plus grand entier positif tel que ω soit compris entre les deux quantités* (6); car la seconde des quantités (5) est plus rapprochée de $p' : q'$ que la première.

Par suite, $k = h$; et les relations (4) et (3) donnent $P = p$, $Q = q$, c'est-à-dire que $p : q$, de la suite (S), est la réduite de ω qui vient après $p' : q'$. C. Q. F. D.

De là ces conséquences :

9. Théorème fondamental. — I. *Dans la division de Stephen Smith, les abscisses des pointes distinctes des triangles que traverse successivement la droite $x = \omega$, suivie de ∞ à ω, forment une suite qui coïncide avec celle des réduites successives de ω.*

II. *Le quotient incomplet qui suit une réduite $p : q$* (c'est-à-dire celui auquel on s'arrête, exclusivement, dans la fraction continue pour obtenir la réduite) *est égal au nombre de ceux des triangles de Smith traversés par la droite, qui ont $p : q$ pour pointe* (conséquence de $k = h$).

La seconde proposition, toutefois, ne s'applique pas au premier terme, $1 : 0$, de la suite des réduites.

10. *Cas où ω est négatif.* — Les conclusions subsistent, à cause de la symétrie de la division de Smith par rapport à Oy; il faut seulement mettre le signe $-$ devant la fraction continue qui donnerait $|\omega|$, ce qui conduit à des réduites négatives, les quotients incomplets continuant à être positifs.

11. *Cas où ω est rationnel.* — La théorie précédente subsiste encore, seulement la suite des pointes s'arrête à un dernier terme, qui est ω.

Faisons maintenant quelques applications à des questions connues, pour montrer combien notre interprétation facilite les raisonnements.

Applications générales.

12. Soient ω et Ω deux irrationnelles, telles que

$$(7) \qquad \Omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \qquad (a, b, c, d \text{ entiers et } ad - bc = \pm 1);$$

on sait que les fractions continues qui représentent ω et Ω *finissent* par avoir les mêmes quotients incomplets, et dans le même ordre [1].

L'interprétation rend le théorème évident.

Soit d'abord $ad - bc = +1$, et supposons ω et Ω positifs, pour simplifier le langage. Désignons par S la substitution modulaire (7), qui change ω en Ω, et, en général, si elle change a en A, écrivons $A = a\mathrm{S}$. Elle transforme la demi-droite $x = \omega$ en une demi-circonférence, C, orthogonale à Ox et passant par le point d'abscisse Ω sur Ox.

Si la droite, suivie de ∞ à ω, traverse successivement h_1 triangles de pointe $p_1 : q_1$; ...; h_n triangles de pointe $p_n : q_n$; ..., C, suivie dans le sens qui aboutit à Ω, traversera h_1 triangles de pointe $\frac{p_1}{q_1}\mathrm{S}$; ...; h_n triangles de pointe $\frac{p_n}{q_n}\mathrm{S}$; ..., *ces dernières pointes étant prises par rapport à* C [2].

D'autre part, il est *évident géométriquement* que, si l'on suit C et sa tangente au point Ω, en se dirigeant vers ce point, la tangente et C *finissent par traverser les mêmes triangles* de Smith, et *avec les mêmes pointes respectives* par rapport à C et par rapport à la tangente.

---

[1] *Voir*, par exemple, SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, n° 16.

[2] La pointe d'un T par rapport à C se définit comme la pointe par rapport à la droite : c'est le sommet de T où aboutissent *les deux* côtés de T que coupe C.

Il résulte dès lors de ce qui vient d'être dit que la demi-droite $x = \omega$ et la demi-droite $x = \Omega$, suivies de ∞ à ω et de ∞ à Ω, finiront par traverser, la première h_ν triangles de pointe $p_\nu : q_\nu$, $h_{\nu+1}$ triangles de pointe $p_{\nu+1} : q_{\nu+1}$, etc., et la seconde h_ν triangles de pointe $\frac{p_\nu}{q_\nu}$S, etc.; ou encore les h_ν *finissent* par être les mêmes pour les deux droites, ce qui établit le théorème, puisque ce sont aussi les quotients incomplets des fractions continues donnant ω et Ω (¹).

Soit ensuite $ad - bc = -1$; il suffit de poser $\Omega = -\Omega'$, et le théorème s'applique à ω et Ω'; comme d'ailleurs les quotients incomplets sont les mêmes pour Ω et Ω' (n° **10**), le théorème est vrai pour ω et Ω. C. Q. F. D.

13. PROBLÈME. — *Une fraction irréductible donnée, $p : q$, est-elle, ou non, une réduite de ω?*

Pour qu'elle soit une réduite, il faut et suffit que $p : q$ soit la pointe d'un triangle traversé par $x = \omega$; il faut et suffit donc (n° **8**) qu'on puisse trouver p' et q', entiers positifs premiers entre eux, tels que $pq' - pq' = \pm 1$, et que ω soit compris entre $p : q$ et $(p + p') : (q + q')$.

Donnons-nous à volonté $\eta = \pm 1$, et cherchons la solution générale, en p', q', de $pq' - qp' = \eta$. Soit q'_0 est *la* solution, comprise entre o et q, de la congruence $pq'_0 \equiv \eta \pmod{q}$; on peut écrire $pq'_0 - qp'_0 = \eta$, et p'_0 est évidemment positif; alors la solution générale cherchée est

$$p' = p'_0 + \lambda p, \qquad q' = q'_0 + \lambda q,$$

λ étant un entier, qui, en vertu de $o < q'_0 < q$, doit être *au moins zéro* pour que p' et q' soient positifs.

Écrivons maintenant que ω est entre $p : q$ et $(p + p') : (q + q')$;

(¹) La démonstration prouve que, à partir d'un certain rang, les réduites de Ω sont les transformées par S des réduites de ω, c'est-à-dire

$$\frac{P}{Q} = \frac{ap + bq}{cp + dq}.$$

cela donne l'inégalité

$$(8)\qquad \left(\omega - \frac{p}{q}\right)\left(\omega - \frac{p'_0 + \mu p}{q'_0 + \mu q}\right) < 0,$$

μ, égal à $\lambda + 1$, étant un entier *au moins égal à* 1.

D'autre part, posons

$$\omega = \frac{p}{q} - \frac{\theta\varepsilon}{q^2},$$

ε, égal à ± 1, étant du signe de $(p:q) - \omega$, en sorte que $\theta > 0$; en portant cette valeur de ω dans (8), on trouve, après suppression de facteurs *positifs*, et en utilisant $pq'_0 - qp'_0 = \eta$,

$$\frac{\theta}{q} - \frac{\varepsilon\eta}{q'_0 + \mu q} < 0.$$

Cela exige d'abord que $\varepsilon\eta$ (qui est ± 1) soit $+1$, ou $\eta = \varepsilon$; il vient donc

$$\theta(q'_0 + \mu q) < q,$$

et, pour qu'on puisse vérifier cette inégalité avec un entier μ, au moins égal à 1, *il faut et il suffit* qu'on ait

$$\theta < \frac{q}{q + q'_0}.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que $p:q$ (fraction irréductible) *soit une réduite de* ω; θ désigne $q^2\left|\frac{p}{q} - \omega\right|$, et q'_0 la plus petite solution positive [1] de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$, où ε, égal à ± 1, a le signe de $\frac{p}{q} - \omega$.

14. *Remarque.* — Si, au lieu de la pointe d'un T traversé par la droite $x = \omega$, on prenait l'abscisse du *sommet médian* de ce T (c'est-à-dire du sommet compris, sur Ox, entre les deux autres), on aurait une suite de fractions, tendant évidemment vers ω, et qui forment la

---

[1] *Voir* LEGENDRE, *Théorie des nombres*, n° 9, où la condition est donnée sous une forme équivalente.

suite de Farey, étudiée par M. Hurwitz (*Math. Ann.*, t. XLIV, p. 417).

Nombres quadratiques.

15. Nous insisterons principalement sur la réduction en fraction continue d'un nombre quadratique (positif), et nous retrouverons très simplement les propositions fondamentales de cette théorie.

Soit

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0 \tag{9}$$

une équation à coefficients a, b, c, entiers et sans facteur commun, ayant une racine, ω, réelle, irrationnelle et positive.

Si ω' est la seconde racine, considérons la demi-circonférence, C, décrite sur le segment $\omega\omega'$ comme diamètre; son équation est

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + c = 0. \tag{10}$$

Suivons C dans le sens qui aboutit au point ω (de Ox), et considérons les *triangles* T de Smith qu'elle traverse, ainsi que leurs *pointes par rapport à* C. Pour abréger le langage, nous appellerons *ordre d'une pointe* le nombre des T qui admettent cette pointe (par rapport à C) (¹). Le raisonnement fait au n° **12** montre que C et la droite $x = \omega$ (qui touche C en ω) *finissent*, quand on les suit en se dirigeant vers ω, par traverser *les mêmes* T, *avec les mêmes pointes* et *les mêmes ordres* pour ces pointes (par rapport à C et à la droite).

16. Or, je dis que, quand on considère C, *les ordres des pointes forment une suite périodique*.

Cela résulte de la théorie classique des formes quadratiques.

En effet, la forme *indéfinie* $aX^2 + 2bXY + cY^2$, ou (a, b, c), admet en elle-même une substitution (fondamentale) S, de déterminant 1, dont toutes les autres substitutions analogues sont des puissances positives ou négatives; la substitution modulaire correspondante, que nous désignerons aussi par S, change en elle-même la demi-circonférence C, qui est dite représentative de (a, b, c); nous achèverons de

(¹) Il est évident géométriquement que les T de pointe donnée traversés par C le sont l'un à la suite *immédiate* de l'autre.

préciser S, c'est-à-dire nous distinguerons entre S et S^{-1}, en prenant pour S celle de ces deux substitutions qui change un point m (d'ailleurs quelconque), de C, en un point compris, *sur* C, entre ω et m.

Cela rappelé, soit T_1 un triangle de Smith traversé par C (¹); comme S change les T en T et C en elle-même, on voit que C traversera $T_1 S$, triangle transformé de T_1 par S.

Soient alors $T_1, T_2, \ldots, T_r$ les triangles successifs, en nombre évidemment fini, que traverse C avant d'arriver à $T_1 S$; il est clair que C traversera ensuite les triangles $T_1 S$, $T_2 S$, ..., $T_r S$; puis les $T_1 S^2, \ldots, T_r S^2, \ldots$ et ainsi de suite.

Les triangles $T_1, \ldots, T_r$ donnent lieu (par rapport à C) à n pointes *distinctes*

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n} \qquad (n \leqq r), \tag{11}$$

avec les ordres respectifs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et la somme $h_1 + \ldots + h_n$ est évidemment égale à r (²).

De même les $T_1 S, \ldots, T_r S$ donnent les pointes *distinctes*

$$\frac{p_1}{q_1} S, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n} S, \tag{12}$$

avec les mêmes ordres, $h_1, h_2, \ldots, h_n$: car si C traverse h_1 triangles de pointe $p_1 : q_1$, il est évident que CS, qui est C, traverse h_1 triangles de pointe $\frac{p_1}{q_1} S$.

Il en résulte immédiatement la proposition énoncée, c'est-à-dire que les ordres des pointes des triangles traversés par C forment une suite périodique; *la période est* $h_1, h_2, \ldots, h_n$, et

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = r. \tag{13}$$

17. De là se déduit immédiatement le *théorème de Lagrange*. En effet : 1° les triangles traversés par C et par la droite $x = \omega$ finissent par être les mêmes, ainsi que les pointes et les ordres de

---

(¹) Pour éviter toute difficulté de langage, on supposera, ce qui est toujours possible, T_1 choisi de telle sorte que sa pointe (par rapport à C) ne soit pas la même que celle du dernier triangle que C traverse *avant* T_1.

(²) Car, en vertu de la note précédente, le triangle $T_1 S$, qui suit T_r, n'a pas la même pointe que T_r, par rapport à C.

celles-ci par rapport à ces deux lignes (n° **15**); 2° pour C, les ordres forment une suite périodique.

Donc, *pour la droite*, les ordres des pointes finissent (quand on tend vers ω sur la droite) par former une suite périodique, et, comme ces ordres des pointes sont (n^{os} **15** et **9**) les quotients incomplets de la fraction continue qui représente ω, on voit que :

Toute irrationnelle quadratique est développable en fraction continue périodique.

Nous reviendrons plus bas (n° **19**) sur l'équation (13), et, au n° **23**, sur les expressions (11) et (12) des pointes de la première et de la seconde période.

18. *Détermination de la période minima.* — Supposons d'abord que ω_1, développé en fraction continue, se présente sous une forme périodique simple, et mettons en évidence la période *minima :*

$$\omega = (\overline{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}; \overline{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}; \ldots).$$

Si $p_1 : q_1$, $p_2 : q_2$, ..., $p_\nu : q_\nu$ sont les ν premières réduites (en ne tenant pas compte de $1 : 0$), on a évidemment

$$\omega = \frac{p_\nu \omega + p_{\nu-1}}{q_\nu \omega + q_{\nu-1}} \tag{14}$$

et

$$p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = \pm 1. \tag{15}$$

Appelons Σ la substitution $\left| z, \dfrac{p_\nu z + p_{\nu-1}}{q_\nu z + q_{\nu-1}} \right|$.
Distinguons maintenant deux cas :

1° $p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = +1$, c'est-à-dire que Σ est *modulaire;* donc Σ *est une puissance de* S, puisque, en vertu de (14), elle change ω en ω, donc aussi ω' en ω', C en C, et la forme (a, b, c), qui a pour racines ω et ω', en elle-même. Mais évidemment S^2, considérée comme transformation de C en elle-même, conduirait à une période qui serait deux fois la période correspondant à S, en sorte que la période *minima* est celle qui correspond à S, c'est-à-dire celle trouvée au n° **16**; et l'on a $\Sigma = S^{\pm 1}$.

2° $p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = -1$, et Σ n'est pas *modulaire*. En ce cas,

ω admet donc en lui-même la transformation linéaire (14), à coefficients entiers, et *de déterminant* -1, c'est-à-dire que ω *équivaut modulairement à* $-\omega$.

On sait alors, par la théorie de l'équation de Pell, que toutes les transformations telles que (14) (quand elles existent) sont les puissances *impaires* de l'une d'entre elles, Σ_0; les puissances paires de Σ_0 ont le déterminant $+1$, et $S = \Sigma_0^2$.

Or je dis, inversement, que l'existence de Σ_0 entraîne pour ω une période, qui est alors *la moitié* de la période entraînée par S, c'est-à-dire de celle du n° **16**.

Reprenons en effet la demi-circonférence C, et les triangles successifs qu'elle traverse à partir de T_1, quand on la suit vers ω :

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{llll} T_1, & T_2, & \ldots, & T_r; \\ T_1 S, & \ldots, & \ldots, & T_r S; \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Il est clair que, si l'on fait suivre Σ_0 d'une symétrie par rapport à l'origine, on obtient une substitution modulaire; il en résulte que Σ_0 change la division de Smith en sa symétrique par rapport à o, ou, si l'on veut, en sa symétrique par rapport à l'axe Ox (car la division elle-même est symétrique par rapport à Oy).

Soit alors s l'opération Σ_0 suivie d'une symétrie par rapport à Ox (ce n'est pas une substitution automorphe); elle change en elle-même la division de Smith; elle change également ω en ω, par (14), donc aussi ω' en ω' et la demi-circonférence C en elle-même, et l'on reconnaît aisément que, si, *sur* C, elle rapproche ou éloigne un point m de ω, il en est de même de ses puissances positives et réciproquement. Mais $s^2 = S$, évidemment, en sorte que s, appliquée à C, *rapproche* de ω, *sur* C, tout point de C.

D'autre part, en vertu de ce qui précède, le transformé $T_1 s$ de T_1 est un triangle traversé par C; on le rencontre, en suivant C vers ω à partir de T_1, *après* T_1, mais *avant* $T_1 s^2$ ou $T_1 S$; donc $T_1 s$ est un des T de la première ligne (16), soit T_j. Même raisonnement pour T_2; mais, puisque T_1 et T_2 sont adjacents, il en sera de même de $T_1 s$ et $T_2 s$, c'est-à-dire que $T_2 s = T_{j+1}$, etc. On en conclut nécessairement que la première ligne de (16) s'écrit

$$T_1,\quad T_2,\quad \ldots,\quad T_\rho;\qquad T_1 s,\quad \ldots,\quad T_\rho s,$$

car on ne peut pas continuer par $T_1 \mathrm{S}^2$, puisque $\mathrm{S}^2 = \mathrm{S}$, et qu'on retomberait sur la seconde ligne. On reconnaît ensuite géométriquement, *comme au n° 16*, que la série des ordres des pointes successives [1] des triangles T_1, T_2, ..., T_ρ se reproduit exactement pour $T_1 \mathrm{S}$, ..., $T_\rho \mathrm{S}$; en sorte que la période trouvée au n° **16** n'est pas ici la *période minima*, mais le *double* de celle-ci.

19. Si ω ne se présente pas sous forme périodique simple, soit z le premier de ses quotients complets possédant cette propriété; on a

$$(17) \qquad \omega = \frac{Az + A'}{Bz + B'} \qquad (A, \ldots, B' \text{ entiers et } AB' - BA' = \pm 1),$$

et, par suite, il résulte de (17) que si z admet en lui-même une transformation homographique à coefficients entiers, de déterminant ε ($\varepsilon = \pm 1$), il en est de même de ω, et réciproquement. Donc, sans difficulté et d'une manière générale :

1° *Si ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, la période minima dans la fraction continue qui représente ω est celle trouvée au n°* **16**.

2° *Si ω équivaut modulairement à $-\omega$, la période minima est la moitié de celle du n°* **16**.

Rappelons que la période du n° **16** est formée par les *ordres des pointes* des triangles T_1, T_2, ... traversés successivement par C, qu'on suit de ω' vers ω, depuis le triangle initial T_1, jusqu'à son transformé par S (S est la substitution modulaire *fondamentale* qui change ω en ω).

Enfin, en appelant *arc* de C la portion découpée sur C par un T, et disant que les arcs découpés par T_1, T_2, ..., T_r, jusqu'à T_1 S *exclusivement*, forment *une période d'arcs dans le champ de Smith*, nous pouvons donner à l'équation (13) l'énoncé suivant :

Le nombre, r, des arcs d'une période, dans le champ de Smith, est

---

[1] Si $\frac{p}{q}$ est la pointe de T, celle de TS sera évidemment $\frac{p}{q}\Sigma_0$, puisque S n'est autre chose que Σ_0, suivie d'une symétrie par rapport à Ox.

égal à la somme des quotients incomplets de la période minima dans la fraction continue qui représente ω, *ou au double de cette somme, selon que* ω *n'équivaut pas ou équivaut modulairement à* $-\omega$.

Cette proposition sera fondamentale dans un problème traité ci-après (nº **24**).

20. *Remarque.* — En admettant toujours que ω vérifie l'équation

$$(9) \qquad a\omega^2 + 2b\omega + c = 0 \qquad (a,\ b,\ c \text{ premiers entre eux}),$$

en posant $D = b^2 - ac$, et désignant par σ le plus grand commun diviseur de a, $2b$, c, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que ω équivale modulairement à $-\omega$ est que l'équation $\tau^2 - D\theta^2 = -\sigma^2$ soit soluble en nombres entiers t et θ.

21. L'interprétation géométrique montre immédiatement que, si T est le *premier triangle* de Smith traversé à la fois par la demi-circonférence C et par la demi-droite, $x=\omega$, *avec la même pointe* $p:q$ pour les deux lignes, la *période*, dans la fraction continue ω, commence soit avec le quotient incomplet qui suit la réduite $p:q$, soit avec le quotient incomplet suivant.

Une étude plus précise conduit aisément à ces propositions :

1º *Pour que la fraction continue qui représente* ω *ne renferme qu'un terme non périodique* (lequel est alors l'entier maximum, a, contenu dans ω), il faut et il suffit que C *pénètre* dans le triangle qui a pour sommets ∞, a, $a+1$, *avec la pointe* a, et ait traversé un triangle au moins de pointe ∞ (ces pointes étant prises par rapport à C). Sous une autre forme, *il faut et il suffit* que ω' [seconde racine de (9)] soit inférieure à $a-1$, ou encore *qu'il y ait au moins deux entiers entre* ω' *et* ω.

Toutefois, si, entre ω' et ω, il y a exactement $a+1$ entiers, $a+1$ étant au moins égal à *deux*, c'est-à-dire a étant $\geqq 1$, *la fraction sera périodique simple*, et réciproquement.

Cela revient à dire que ω est > 1 et que ω' est compris entre -1 et 0, résultat bien connu.

2° Dans tous les autres cas, c'est-à-dire quand il y a moins de deux entiers entre ω' et ω, si T est le premier triangle traversé à la fois par C et la droite avec la même pointe, $p : q$, et si h est le quotient incomplet qui suit la réduite $p : q$, la période commence *avec* le quotient incomplet qui vient après h.

22. *Seconde racine.* — Si la seconde racine, ω', de (9) est positive, on aura son développement en suivant C en sens inverse, c'est-à-dire de ω vers ω'. On traverse alors les mêmes triangles de Smith, mais dans l'ordre inverse; la série des ordres de leurs pointes est donc la même que pour ω, *mais inversée*, c'est-à-dire que la période des quotients incomplets de ω' est la période analogue de ω, *retournée*. L'interprétation géométrique a rendu ainsi évidente cette proposition classique de Galois.

23. *Réduites homologues.* — Nous appellerons ainsi les réduites qui précèdent un même quotient incomplet de la période *minima*, dans les périodes successives à partir de la première.

Supposons d'abord ω *non équivalent modulairement à* $-\omega$; il résulte de la comparaison des lignes (11) et (12) que, si $p : q$ est une réduite précédant un quotient incomplet de la première période, ses homologues successives sont $\frac{p}{q}S$, $\frac{p}{q}S^2$, ..., c'est-à-dire se déduisent de $p : q$ par la substitution modulaire S.

On précise S comme il suit (afin de la distinguer de S^{-1}). Soit t_0, u_0, la plus petite solution positive de l'équation de Pell,

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2 \quad \text{(notations du n° 20)};$$

ω est de la forme

$$\omega = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a};$$

nous poserons $t' = t_0$ si ω correspond au signe $+$ devant $\sqrt{D}$, et $t' = -t_0$ s'il correspond au signe $-$. Alors S sera la substitution qui change z en $(\lambda z + \mu) : (\nu z + \rho)$, étant posé

$$\lambda = \frac{t' - bu_0}{\sigma}, \quad \mu = -\frac{cu_0}{\sigma}, \quad \nu = \frac{au_0}{\sigma}, \quad \rho = \frac{t' + bu_0}{\sigma}.$$

Si ω *équivaut modulairement à* $-\omega$, on a un résultat analogue (n° **18** et note de ce numéro) en remplaçant S par Σ_0, et la substitution (de déterminant -1) Σ_0 se définit ainsi :

Soit t_0, u_0 la plus petite solution positive de

$$t^2 - \mathrm{D}u^2 = -\sigma^2;$$

on posera $t' = t_0$ ou $t' = -t_0$ selon que ω correspond au signe $+$ ou au signe $-$ devant $\sqrt{\mathrm{D}}$, comme ci-dessus; Σ_0 sera la substitution changeant z en $(\lambda z + \mu) : (\nu z + \rho)$, où

$$\lambda = \frac{t' - bu_0}{\sigma}, \qquad \mu = -\frac{cu_0}{\sigma}, \qquad \nu = \frac{au_0}{\sigma}, \qquad \rho = \frac{t' + bu_0}{\sigma}.$$

Dès lors, λ, μ, ν, ρ étant ainsi définis dans l'un et l'autre cas, la première réduite, $\mathrm{P}:\mathrm{Q}$, homologue de $p:q$, sera $(\lambda p + \mu q):(\nu p + \rho q)$, ...

Là encore, la Géométrie donne de suite un résultat connu ([1]).

Nous n'insisterons pas davantage sur les applications de notre interprétation géométrique; nous avons eu surtout en vue de montrer combien elle simplifie certaines théories et de préparer ce qui suit.

DEUXIÈME PARTIE.

Réduites de Stephen Smith.

24. Rappelons quelques définitions classiques.

Étant donnée l'équation *à racines réelles et irrationnelles*

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0,$$

([1]) *Voir*, par exemple, Serret, *Algèbre supérieure*. t. I, n^{os} **27** et suivants. Il est évident aussi, géométriquement, que si l'on considère les fractions

$$\frac{p}{q}, \qquad \frac{p}{q}\mathrm{S}^{-1}, \qquad \frac{p}{q}\mathrm{S}^{-2}, \qquad \ldots,$$

ce sont les pointes de triangles traversés par C, *suivie de* ω *vers* ω'; cette suite de fractions a donc pour limite ω', et, à partir d'un certain rang, est une suite de réduites homologues pour ω' (*Ibid.*, n^{os} **29-31**).

où a, b et c sont premiers entre eux, nous appellerons *première et seconde racine* respectivement les quantités

$$\omega' = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}, \quad \omega = \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad (b^2-ac \text{ positif et non carré}),$$

et nous attacherons à la demi-circonférence

$$a(x^2+y^2)+2bx+c=0,$$

représentative de la forme indéfinie (a, b, c), *le sens de la première à la seconde racine*. Il s'ensuit qu'à une forme indéfinie primitive répond une demi-circonférence de sens déterminé et unique, et, réciproquement, à une demi-circonférence donnée avec son sens, répond une et une seule forme indéfinie primitive (c'est-à-dire telle que a, b et c soient premiers entre eux).

Les deux formes (a, b, c) et $(-a, -b, -c)$ ont la même demi-circonférence représentative, mais avec des *sens différents*.

Cela posé, appelons *réduites de Smith* (bien qu'elles n'aient pas été introduites par cet auteur, mais parce qu'elles se rattachent à sa division du demi-plan) les formes quadratiques binaires indéfinies *dont la circonférence représentative coupe les deux côtés rectilignes du triangle initial*, T_0, c'est-à-dire les droites $x=0$ et $x=1$.

Il est aisé, en répétant un raisonnement classique de Smith, de trouver les réduites équivalentes à une forme donnée, φ.

Soit en effet C la demi-circonférence représentative de φ, *suivie de* ω' *à* ω; soit α_1 l'arc, de sens ainsi connu, qu'intercepte sur C un triangle, T_1, de la division de Smith; appelons *arc réduit* l'arc intercepté par T_0 sur une demi-circonférence orthogonale à Ox : il est clair que α_1 équivaut modulairement à un arc réduit, α'_1, et à un seul, qu'on obtient en faisant subir à α_1 *la* substitution modulaire qui change T_1 en T_0, et la pointe de T_1 (par rapport à C) en le sommet ∞ de T_0 (n° **6**). Dès lors, le sens de α'_1 est défini par celui de α_1, et la forme (a'_1, b'_1, c'_1), représentée par la demi-circonférence qui porte l'arc α'_1, et dont le sens est celui de cet arc, est proprement équivalente à φ.

De plus, pour obtenir ainsi *toutes* les réduites analogues, il suffit de considérer sur C *les arcs d'une période* (n° **19**), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, dans le champ de Smith, car les suivants leur sont modulairement équivalents par S, S^2, ... (et les précédents par S^{-1}, S^{-2}, ...), et donneraient lieu, dès lors, aux mêmes arcs réduits, sens compris.

Le nombre des réduites de Smith proprement équivalentes à φ est ainsi celui des arcs d'une période sur C, dont nous avons donné l'expression au n° **19**; donc :

Théorème. — *Le nombre des réduites de Stephen Smith équivalentes à une forme binaire indéfinie* (a, b, c) *est la somme des quotients incomplets de la période minima, dans la fraction continue ordinaire qui représente une quelconque*, ω, *des racines de la forme*, ou *deux fois cette somme, selon que* ω *n'équivaut pas ou équivaut modulairement à* $-\omega$.

C'est-à-dire : selon que l'équation $\tau^2 - D\theta^2 = -\sigma^2$ (n° **20**) n'est pas ou est soluble en entiers τ et θ.

25. *Remarque.* — Il est à peu près évident que si ω équivaut modulairement à $-\omega$, la forme (a, b, c) équivaut à la forme $(-a, b, -c)$. Car l'hypothèse entraîne que (a, b, c) se transforme, par une substitution *de déterminant* -1, en elle-même ou en elle-même changée de signe : mais une telle substitution, comme on sait, change la première racine de la forme en la seconde et inversement; donc, ici, elle changera (a, b, c) en $(-a, -b, -c)$. Si on la fait suivre de la substitution $|X, Y; -X, Y|$, on aura, au total, une substitution de déterminant $+1$, qui changera (a, b, c) en $(-a, b, -c)$.

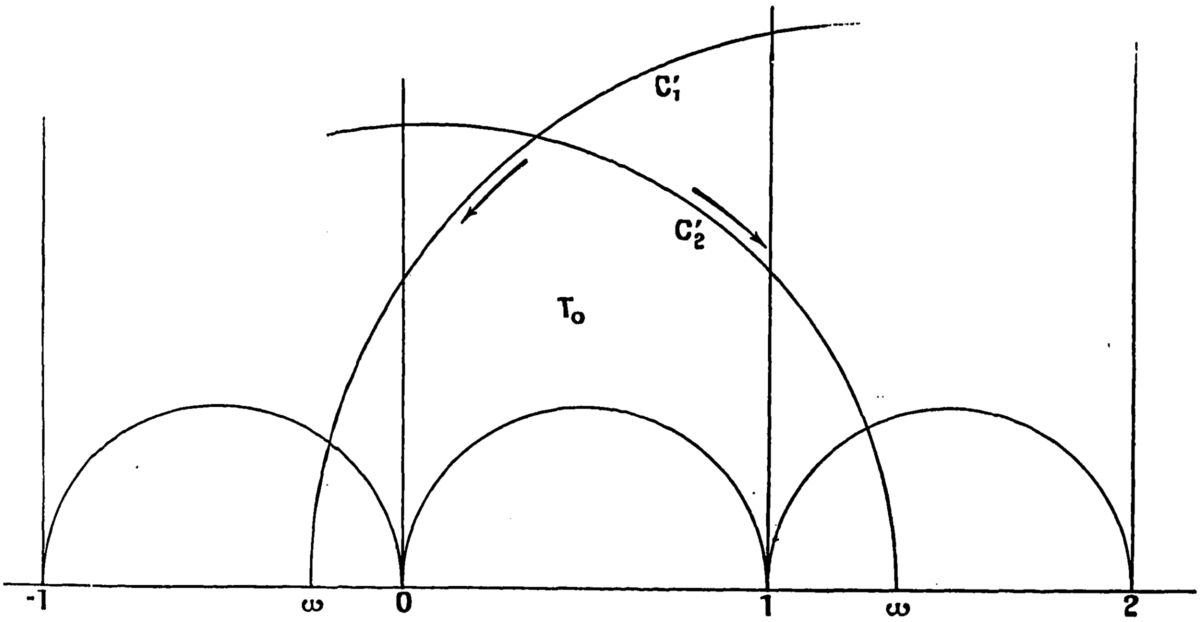
Réciproquement, si les formes (a, b, c) et $(-a, b, -c)$ sont équivalentes, ω, seconde racine de la première, sera modulairement équivalente à la seconde racine de la deuxième, laquelle est évidemment $-\omega$.

26. *Réduites principales de Smith.* — Nous appellerons ainsi les réduites de Smith dont la demi-circonférence, C', suivie avec son sens, coupe *le* côté curviligne du triangle (nécessairement de sommet ∞) dans lequel elle pénètre au sortir de T_0.

En d'autres termes (*figure* 4, où l'on a marqué C' dans deux positions différentes), pour une réduite principale, en suivant C' dans le sens voulu, on passe de T_0, où la pointe (par rapport à C') est $+\infty$, à un triangle où la pointe est soit 1, soit 0; cela revient à dire que *la pointe change* quand on passe de T_0 au triangle suivant.

Cherchons maintenant les réduites principales équivalentes à la forme (a, b, c), dont la demi-circonférence est C : pour que l'arc

Fig. 4.



réduit α'_1, qu'on déduit d'un *arc* α_1, découpé sur C par un triangle T_1 (n° **24**), corresponde à une réduite principale, il faut et il suffit, évidemment, d'après ce qui précède, que le triangle T_2, qui découpe sur C l'arc *suivant*, α_2, *n'ait pas la même pointe* que T_1 par rapport à C.

En d'autres termes, aux réduites principales correspondent les changements de pointe dans les triangles successifs traversés par C pendant une période d'arcs, et inversement; c'est-à-dire que :

Le nombre des réduites principales équivalentes à (a, b, c) est celui des pointes DISTINCTES *des triangles de Smith traversés par* C *dans l'intervalle d'une période d'arcs.*

C'est donc le nombre que nous avons appelé n au n° **16**; ou encore celui des $h_1, h_2, \ldots, h_n$, qui sont les quotients incomplets de la période qui, dans la fraction continue ω, répond à une période d'arcs. Par suite, enfin :

THÉORÈME. — *Le nombre des réduites principales de Smith équivalentes à (a, b, c) est égal au nombre des termes de la période minima dans la fraction continue qui représente une racine, ω, de la forme, ou à deux fois ce nombre, selon que (a, b, c) n'équivaut pas ou équivaut à $(-a, b, -c)$.*

On reconnaît là la belle proposition qu'a donnée Dirichlet [1] pour le *nombre des réduites de Gauss;* nous allons la retrouver en montrant que les réduites principales de Smith correspondent, chacune à chacune, à celles de Gauss.

27. Celles-ci, en effet, par définition, sont les formes (a, b, c) pour lesquelles, *les racines étant de signes contraires, la première en valeur absolue est > 1, et la seconde < 1.*

Or la réduite de Smith, qui correspond à l'arc C'_1 de la figure 4, est bien une réduite de Gauss, car la première racine, ω', est supérieure à 1, et la seconde, ω, comprise entre -1 et 0.

Pour l'arc C'_2 de la même figure, ce ne serait plus vrai, car ω' est < 0 et ω entre 1 et 2; mais il suffit de déplacer parallèlement à Ox, de -1, vers la gauche, l'arc C'_2, ce qui revient à remplacer la forme correspondante par une forme équivalente. Alors, pour cette nouvelle forme, ω' est négatif, et, en valeur absolue, > 1; ω est entre 0 et 1.

De même à une réduite de Gauss correspond une, et une seule, réduite principale de Smith.

Le théorème final du n° **26** est donc identique à celui de Dirichlet; la démonstration que nous en donnons paraît plus rapide et, surtout, plus intuitive.

Réduites de M. Hurwitz [2].

28. Ce sont les formes (a', b', c') pour lesquelles $a' > 0$ et $c' < 0$; le nombre de celles qui équivalent à la forme donnée (a, b, c) de

(1) *Zahlentheorie*, § 83.

(2) HURWITZ, *Math. Annalen*, t. XLV, p. 99 et suiv.

déterminant D, est fini, en vertu même de $D = b'^2 - a'c'$. Je dis que leur nombre est égal à celui des réduites de Smith équivalentes à (a, b, c).

Désignons en effet, d'une manière générale, par ψ les formes indéfinies (α, β, γ) pour lesquelles $\alpha\gamma$ est *négatif;* si $\alpha > 0$ et $\gamma < 0$, ψ est une réduite de M. Hurwitz; si $\alpha < 0$ et $\gamma > 0$, la substitution $|X, Y; -Y, X|$ change ψ en une telle réduite : on en conclut immédiatement que le nombre des ψ équivalentes à la forme (a, b, c) est *double* de celui des réduites de Hurwitz équivalentes à la même forme.

D'autre part, les racines d'une ψ sont de signes contraires, par définition même des ψ; il en résulte que la demi-circonférence, C, d'une ψ, coupe Oy et pénètre dans T_0.

Si C coupe le second côté rectiligne $(x = 1)$ de T_0, la ψ est une réduite de Smith; sinon C coupe nécessairement, avec Oy, le côté curviligne de T_0, c'est-à-dire que l'origine O est, par rapport à C, la *pointe* de T_0. Nous pouvons alors transformer T_0 en lui-même (n° 6) par une substitution modulaire, Σ, qui change le sommet O en le sommet ∞, et C devient, par Σ, une demi-circonférence C', coupant les deux côtés rectilignes de T_0; la substitution à deux variables correspondantes, Σ', change donc la ψ en une réduite de Smith.

En d'autres termes, à chaque ψ, nous faisons ainsi correspondre *une* réduite de Smith équivalente; réciproquement, à une réduite de Smith équivalent *deux* ψ, à savoir cette réduite elle-même et sa transformée par la substitution inverse de Σ'.

Donc, parmi les formes équivalentes à (a, b, c), le nombre des ψ est *double* de celui des réduites de Smith, et, dès lors, ce dernier nombre est aussi celui des réduites de M. Hurwitz.

Par suite :

Le nombre des réduites de M. Hurwitz équivalentes à une forme (a, b, c) est donné par le théorème final du n° **24**.

29. *Exemples.* — Nous les emprunterons au Mémoire même de M. Hurwitz cité plus haut :

1° Soit la forme

$$62X^2 - 2 \times 95XY + 145Y^2, \qquad D = 35, \qquad \sigma = 1.$$

M. Hurwitz trouve *sept* réduites, dont $5X^2 - 7Y^2$, que nous pouvons prendre pour (a, b, c). Alors $\omega = \frac{\sqrt{35}}{5}$, et, en fraction continue, on a

$$\frac{\sqrt{35}}{5} = (1, \overline{5, 2}, \overline{5, 2}, \ldots).$$

La période minima est 5,2; d'autre part ω n'équivaut pas à $-\omega$ parce que $\tau^2 - 35\theta^2 = -1$ est insoluble (-1 n'étant pas résidu quadratique de 7), en sorte que, par le n° **24**, le nombre des réduites doit être $5+2$, ou 7, comme l'a trouvé M. Hurwitz.

2° Soit la forme

$$7X^2 - 8XY - 3Y^2, \qquad D = 37, \qquad \sigma = 1.$$

Ici $\tau^2 - 37\theta^2 = -1$ est soluble, car D est premier et $\equiv 1 \pmod 4$; on a d'ailleurs la solution $\tau = 6$, $\theta = 1$.

Une racine de la forme est $\frac{4+\sqrt{37}}{7}$, qui donne la fraction continue

$$\frac{4+\sqrt{37}}{7} = (\overline{1, 2, 3}, \overline{1, 2, 3}, \ldots),$$

d'où la période minima 1, 2, 3. La somme $1+2+3$, ou 6, doit être *doublée* (n° **24**) pour donner le nombre des réduites; celles-ci sont donc en nombre *douze*, comme M. Hurwitz l'obtient par calcul direct.

TROISIÈME PARTIE.

Réduites d'Hermite.

30. On nomme ainsi [1] les formes indéfinies, (α, β, γ), dont la demi-circonférence pénètre dans le domaine fondamental classique, D_0, *du groupe modulaire*.

---

[1] *Voir*, par exemple, KLEIN et FRICKE, *Fonctions modulaires*, t. I, p. 258.

La *division modulaire* du demi-plan va donc jouer maintenant le rôle que jouait jusqu'ici la division de Stephen Smith.

Soit (a, b, c) une forme indéfinie; appelons *arc* sur sa demi-circonférence, C, tout arc intercepté sur C par un domaine modulaire (c'est-à-dire par un domaine de la division modulaire); il est clair, en vertu d'un raisonnement connu (n° **24**), que le nombre des réduites d'Hermite équivalentes à (a, b, c) est celui des *arcs d'une période* sur C. On appellera ainsi les arcs *successifs* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$, découpés sur C par des domaines modulaires $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$, dont le premier est arbitraire; quant à l'arc suivant, $\alpha_{\rho+1}$, il serait découpé par le domaine $D_1 S$, en désignant toujours par S la substitution fondamentale de la forme (a, b, c) en elle-même, précisée comme au n° **16**.

Le nombre cherché des réduites d'Hermite est donc ρ, et c'est cet entier ρ que nous nous proposons de déterminer directement.

31. Un domaine modulaire a *un* sommet d'angle nul, que, dans le Mémoire précédent [1], nous avons appelé sa *pointe*, et qui est situé sur Ox (sauf pour les domaines de la rangée supérieure, où la pointe est à l'infini dans la direction de Oy). Les ρ domaines $D_1, \ldots, D_\rho$, traversés par C, dans une période d'arcs, ont des pointes *distinctes* en nombre ν, au plus égal à ρ; appelons encore *ordre d'une pointe* le nombre des domaines *traversés par* C qui admettent cette pointe, et soient $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ les ordres respectifs des ν pointes; on aura évidemment [2], comme au n° **16**,

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu = \rho. \tag{18}$$

Si l'on prenait, sur C, *la période suivante* d'arcs, c'est-à-dire ceux découpés par les domaines $D_1 S, D_2 S, \ldots, D_\rho S$, ceux-ci auraient pour pointes *distinctes* les transformées par S des pointes distinctes précédentes, et les ordres seraient toujours respectivement $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, parce que, si C traverse k domaines de pointe $\frac{p}{q}$, CS, qui est C, traverse aussi k domaines de pointe $\frac{p}{q}$S.

---

(1) Dans ce qui suit, nous désignerons ce Mémoire par I.

(2) On supposera, ce qui est toujours possible, D_1 choisi de telle sorte que sa pointe ne coïncide pas avec celle du dernier domaine modulaire que C traverse *avant* D_1.

On peut donc dire que *les ordres des pointes* distinctes des domaines traversés successivement par C forment *une suite périodique;* la période, $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, *correspond à la période d'arcs.*

Nous allons maintenant lier les $k_1, \ldots, k_\nu$ au développement hermitien de ω.

32. Soit toujours ω (n° **24**) la seconde racine [1] de (a, b, c); cherchons son développement hermitien (I, n° **22**). Il faut pour cela suivre la demi-droite $x = \omega$ de ∞ à ω, et prendre les ordres, $1 + \theta_i$, des pointes *distinctes* des domaines successivement traversés par elle : le premier, θ_0, des *entiers positifs* θ_i correspond à la pointe ∞ du premier domaine et est pris égal à l'entier le plus voisin de ω. On a alors, en désignant par ε_i une unité ± 1 qu'on sait définir, et qui correspond à θ_i, le développement

$$\omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \ddots}} \tag{19}$$

Si l'on s'arrête, dans la fraction second membre, au terme θ_{i-1}, inclus, on obtient une *fraction d'Hermite*, $p_i : q_i$, et $1 + \theta_i$ est le nombre des domaines modulaires de pointe $p_i : q_i$ traversés par la demi-droite $x = \omega$ (I, n° **26**). On obtient ainsi, dans leur ordre, les pointes distinctes des domaines traversés *successivement* par la droite.

Or je dis que, si l'on suit la demi-circonférence C et la demi-droite $x = \omega$ *en se dirigeant vers le point* ω, les deux lignes *finissent* par traverser exactement les mêmes domaines modulaires : la proposition était évidente dans la division de Smith, parce que les triangles de Smith avaient leurs trois sommets sur Ox; elle ne l'est pas dans la division modulaire, dont les domaines ont *un* sommet sur Ox et *deux* au-dessus.

Appelons, comme dans le Mémoire I, *sommets* d'un domaine

[1] Il n'est pas nécessaire de supposer $\omega > 0$; car, si $\omega < 0$, on n'aura qu'à faire précéder le développement hermitien de $-\omega$ du signe $-$, ce qui ne change pas les quotients incomplets.

modulaire les deux sommets autres que la pointe; *base*, le côté qui joint les *sommets; côtés*, les deux côtés qui aboutissent à la pointe : *nous supposerons d'abord qu'il n'y a, sur* C, *aucun sommet de domaine modulaire* (¹).

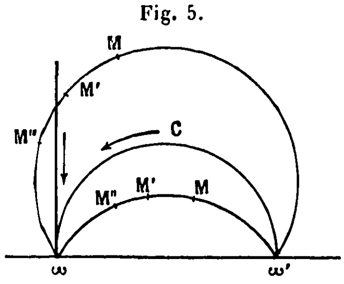
33. Soient toujours $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$ les domaines successivement traversés par C dans une période d'arcs; leur nombre, ρ, est évidemment fini. Je dis d'abord que je puis trouver un entier positif, m, tel que les domaines $D_1 S^m, D_2 S^m, \ldots, D_\rho S^m$, transformés des précédents par S^m, et qui correspondent aussi à une période d'arcs, n'aient aucun *sommet* entre la demi-circonférence C et la demi-droite $x = \omega$ (qui touche C au point ω); et je dis aussi que la même propriété appartiendra à *tous* les domaines traversés suivants :

$$D_1 S^{m+1}, \quad D_2 S^{m+1}, \quad \ldots, \quad D_1 S^{m+2}, \quad \ldots.$$

Observons en effet que, si nous appliquons à un point M du demi-plan les substitutions modulaires $S, S^2, \ldots$, les points M, $M' = MS$, $M'' = MS^2$, ... sont sur un arc de circonférence qui passe par M et par les *points doubles*, ω et ω' de S, lesquels sont les points où C coupe Ox'. De plus, les points, M, M', M'', ..., *sur leur arc*, sont de plus en plus proches de ω. Tout cela résulte des propriétés classiques des substitutions fuchsiennes *hyperboliques*, et S est une telle substitution.

Donc, si M est intérieur à C, les points M, M', M'', ... se rapprochent

Fig. 5.



de ω sur un arc qui reste *intérieur* à C; si M est extérieur à C, ces points se rapprochent de ω sur un arc *extérieur* à C (*fig*. 5), et qui,

(¹) Il n'y en a aucun sur la droite $x = \omega$ (I, n° **3**, *Rem.*), puisque ω est supposé essentiellement irrationnel (n° **24**).

dans sa partie voisine du point ω, *n'est pas du même côté de la demi-droite* $x = \omega$ *que* C. De là résulte aisément la proposition énoncée au commencement du présent numéro.

Raisonnons en effet, pour simplifier, dans le cas que représente la figure 5, c'est-à-dire $\omega < \omega'$ (le raisonnement serait analogue si $\omega > \omega'$); et appliquons S, S^2, ..., aux domaines D_1, D_2, ..., D_ρ. En vertu de ce qui précède, on pourra trouver m assez grand pour que les ρ domaines $D_1 S^m$, ..., $D_\rho S^m$ aient leurs 2ρ sommets, les uns *au voisinage de* ω, *à l'intérieur* de C, les autres, *également au voisinage de* ω, mais *à gauche* de la droite $x = \omega$; et les sommets de $D_i S^{m+1}$, $D_i S^{m+2}$, ... seront placés comme ceux de $D_i S^m$, mais plus près de ω.

C. Q. F. D.

Les $D_i S^m$ (qui sont tous traversés par C) ne peuvent se partager qu'en trois catégories :

1° Ceux qui ont leurs deux sommets à l'intérieur de C : si l'on se rappelle que les domaines modulaires deviennent infiniment petits, dans tous les sens, à mesure qu'ils se rapprochent de l'axe Ox, il est clair que les domaines 1° ne peuvent être traversés par C que si leurs pointes respectives sont extérieures à C et *à gauche* de ω; alors la droite $x = \omega$, suivie de ∞ à ω, traverse chacun d'eux, et *de la même manière que* C, suivie de ω' à ω, c'est-à-dire que C et la droite y *pénètrent* par un même *côté* et en *sortent* par l'autre.

2° Ceux qui ont leurs deux sommets à l'extérieur de C, *donc à gauche de la droite* $x = \omega$. Pour que C les traverse, il faut et il suffit que leurs pointes respectives soient intérieures à C, et alors la droite $x = \omega$ les traverse aussi, et de la même manière que C, entrant, avec C, par un côté et sortant par l'autre.

3° Ceux qui ont un sommet à l'intérieur de C, l'autre à l'extérieur, et à gauche de $x = \omega$. Alors C et la droite les traversent nécessairement entrant tous deux par un même côté et sortant par la base, ou inversement.

Il résulte de là que la droite $x = \omega$ *finit* par traverser tous les domaines que traverse C, et *de la même manière*, c'est-à-dire qu'au sortir d'un domaine traversé par C, la droite pénètre dans le domaine *suivant* que traverse C. Sous une autre forme, *la droite finit par* *traverser les mêmes domaines que* C; c'est le théorème énoncé au n° **32**, et qu'il s'agissait d'établir.

34. *Périodicité du développement hermitien.* — De là se déduisent de nombreuses conséquences.

A partir du moment où C et la droite traversent les mêmes domaines, soient D_1, D_2, ..., D_ρ ceux successifs traversés par C pendant une période d'arcs; désignons leurs pointes distinctes par $p_1 : q_1$, $p_2 : q_2$, ..., $p_\nu : q_\nu$, par k_1, ..., k_ν leurs ordres (n° **31**); pour la période suivante, on aura les domaines $D_1 S$, ..., $D_\rho S$; les pointes $\frac{p_1}{q_1} S$, ..., $\frac{p_\nu}{q_\nu} S$; et les ordres k_1, ..., k_ν; etc. Pour la droite, domaines, pointes distinctes et ordres seront les mêmes; c'est-à-dire que si C traverse k_i domaines de pointe $p_i : q_i$, il en sera de même de la droite, qui traversera également k_i domaines de pointe $\frac{p_i}{q_i} S$, etc.

D'autre part, reprenons le développement hermitien (19),

$$\omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \ddots}} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1), \tag{19}$$

les pointes des domaines traversés par la droite sont *les fractions d'Hermite successives* θ_0, $\theta_0 + \frac{\varepsilon_1}{\theta_1}$, etc., et le nombre des domaines traversés, de pointe $p_i : q_i$, est $1 + \theta_i$, en désignant par θ_i le quotient incomplet qui *suit* la fraction $p_i : q_i$ (n° **32**).

Il résulte de ce qui précède que *les* $1 + \theta_i$ *forment une suite périodique, dont la période est* k_1, k_2, ..., k_ν; donc aussi que *les* θ_i *forment une suite périodique.*

Il en est de même des unités ε_i, dans (19); en effet, nous savons (I, n° **25**, *Nota*) que ε_i est $+1$ si ω est entre $p_{i-1} : q_{i-1}$ et $p_i : q_i$, et -1 dans le cas contraire. Dans la période suivante, $\frac{p_i}{q_i}$ est devenu $\frac{p_i}{q_i} S$, et, si ω est (ou non) entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ et $\frac{p_i}{q_i}$, ωS, qui est ω, est (ou non) entre $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} S$ et $\frac{p_i}{q_i} S$; donc *il y a, pour les* ε_i, *une période qui correspond à celle des* θ_i.

De plus $p_i : q_i$ étant toujours la fraction qu'on déduit de (19) quand on s'arrête, dans le second membre, à $\varepsilon_i : \theta_i$, *exclus*, la fraction *homologue* suivante, c'est-à-dire celle qui précède le terme $\varepsilon_i : \theta_i$ de la période suivante, est $\frac{p_i}{q_i}$S.

Enfin, le nombre ρ des arcs d'une période, c'est-à-dire (18) la somme $k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$, est égal à la somme

$$(1+\theta_1)+(1+\theta_2)+\ldots+(1+\theta_\nu),$$

étendue aux quotients incomplets, θ_i, *d'une période*, dans le développement hermitien de ω.

35. Nous allons transformer cette dernière somme, en introduisant la *fraction continue* qui représente ω.

Nous savons (I, n° **15**) que toute fraction d'Hermite est une réduite de ω; désignons par $p_1 : q_1$ une telle fraction *appartenant à la partie périodique des deux développements.*

Les fractions d'Hermite suivantes, pour ω, pourront s'écrire

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{p_1}{q_1}, & \dfrac{p_2}{q_2} & \ldots, & \dfrac{p_\nu}{q_\nu}; \\[2mm] \dfrac{p_1}{q_1}\mathrm{S}, & \dfrac{p_2}{q_2}\mathrm{S}, & \ldots, & \dfrac{p_\nu}{q_\nu}\mathrm{S}; \\[2mm] \dfrac{p_1}{q_1}\mathrm{S}^2, & \dfrac{p_2}{q_2}\mathrm{S}^2, & \ldots. & \dfrac{p_\nu}{q_\nu}\mathrm{S}^2; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right.$$

De même les réduites suivantes de ω s'écriront

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{p_1}{q_1}, & \dfrac{p'_2}{q'_2}, & \ldots, & \dfrac{p'_n}{q'_n}; \\[2mm] \dfrac{p_1}{q_1}\mathrm{S}, & \dfrac{p'_2}{q'_2}\mathrm{S}, & \ldots, & \dfrac{p'_n}{q'_n}\mathrm{S}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}\right.$$

S désignant, dans les deux tableaux, la même substitution, définie précédemment et n étant $\geqq \nu$, puisque toute réduite n'est pas nécessairement une fraction d'Hermite.

Il résulte de là que, si $p'_i : q'_i$ figure au Tableau I (et c'est nécessairement dans la première ligne) (1), les $\frac{p'_i}{q'_i}\mathrm{S}^m (m > 0)$ y figureront également; de plus si $p'_i : q'_i$ ne figure pas à ce tableau, *aucun* des $\frac{p'_i}{q'_i}\mathrm{S}^m$ n'y figurera : ce dernier point résulte de ce que les lignes du Tableau I renferment le même nombre de termes que la première.

On peut donc dire que, pour savoir quelles réduites sont des fractions d'Hermite, il suffira de se borner aux réduites d'une même période, répondant à une période d'arcs, c'est-à-dire aux réduites qui vont de l'une d'elles, $\frac{p_1}{q_1}$, à sa transformée, $\frac{p_1}{q_1}\mathrm{S}$, par S.

D'autre part, reprenons le procédé (I, n° **22**) par lequel on déduit de la fraction continue le développement hermitien.

Les réduites qui n'appartiennent pas à la suite d'Hermite précèdent nécessairement (I, n° **22**) le quotient incomplet 1; soit h_m un quotient 1, tel que la réduite précédente ne soit pas fraction d'Hermite : pour obtenir le développement hermitien, on remplace, dans la fraction continue, la portion

$$(20)\qquad h_{m-1} + \cfrac{1}{h_m + \cfrac{1}{h_{m+1} + \cfrac{1}{h_{m+2}}}} \quad \text{par} \quad (1 + h_{m-1}) + \cfrac{-1}{(1 + h_{m+1}) + \cfrac{1}{h_{m+2}}},$$

et ainsi de suite pour tous les h_m analogues, en commençant par celui du plus petit indice m.

L'opération partielle (20) substitue aux *trois* quotients incomplets h_{m-1}, h_m, h_{m+1}, de la fraction continue, *deux* quotients

$$\theta = 1 + h_{m-1} \qquad \text{et} \qquad \theta' = 1 + h_{m+1}$$

du développement; or la somme

$$(1 + h_{m-1}) + (1 + h_m) + (1 + h_{m+1}),$$

qui porte sur les *trois* quotients modifiés dans la fraction continue, est égale à la somme analogue, $(1 + \theta) + (1 + \theta')$, étendue aux *deux*

(1) Il faut ne pas oublier que les dénominateurs vont en croissant, aussi bien dans la suite d'Hermite que dans celle des réduites; il s'ensuit que $p'_i : q'_i$ ne peut figurer au premier Tableau que dans la première ligne.

quotients substitués : car ces deux sommes ont pour valeur commune $h_{m-1} + h_{m+1} + 4$, à cause de $h_m = 1$.

Dès lors, si l'on effectue le changement (20), sur *la fraction continue*, dans l'étendue d'une période ([1]), on substitue aux quotients incomplets $h_1, h_2, \ldots, h_n$ de cette période les $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ d'une période correspondante du développement hermitien, et l'on a

$$(21) \qquad (1+h_1)+(1+h_2)+\ldots+(1+h_n)=(1+\theta_1)+\ldots+(1+\theta_\nu).$$

Or le dernier membre de (21) est (n° **34**) le nombre cherché ρ des réduites d'Hermite équivalentes à (a, b, c) ; ρ *est donc égal* aussi au premier membre, c'est-à-dire *à la somme* $\Sigma(1+h_i)$, *étendue aux quotients incomplets d'une période*, dans la fraction continue ω. Et cette période est, soit la période minima, soit son double (n^{os} **18** et **25**), selon que la forme (a, b, c) n'équivaut pas, ou équivaut, à $(-a, b, -c)$. D'autre part, il est clair que si (α, β, γ) est une réduite d'Hermite, équivalente à (a, b, c), la forme $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sera aussi une réduite d'Hermite ([2]), équivalente à $(-a, b, -c)$; donc, si la forme (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$, les réduites d'Hermite correspondantes se répartissent en couples de deux réduites, évidemment distinctes ([3]), (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

Dès lors, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

36. Théorème. — *Le nombre des réduites d'Hermite équivalentes à une forme indéfinie* (a, b, c), *de déterminant non carré, s'obtient ainsi : on réduira en fraction continue ordinaire une quelconque,* ω, *des racines de la forme, et l'on prendra, dans cette fraction, les quotients incomplets* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *de la période minima; le nombre*

([1]) Il s'agit de la période comprise entre les réduites $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_1}{q_1}S$ (n° **16**) qui n'est pas nécessairement la période minima des quotients incomplets (n^{os} **18** et **19**).

([2]) Car les demi-circonférences des formes (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sont symétriques par rapport à Oy; si l'une pénètre dans D_0, il en est dès lors de même de l'autre.

([3]) Car si $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, le déterminant de (α, β, γ) serait carré parfait, cas exclu.

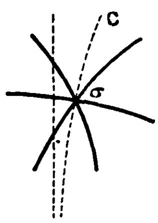
cherché sera $\Sigma(1+h_i)$. *On ne regardera pas comme distinctes deux réduites telles que* (α, β, γ) *et* $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

$\Sigma(1+h_i)$ est la somme des quotients incomplets de la période minima, augmentée du nombre de ces quotients.

37. *Cas d'exception.* — Nous avons supposé essentiellement (nº **32**) qu'il n'y a, sur la demi-circonférence C, de la forme (a, b, c), *aucun sommet modulaire;* dans le cas contraire, les raisonnements du nº **33** cesseraient d'être exacts.

Soit alors σ un sommet de domaine modulaire par lequel passe C, dans l'intervalle d'une période d'arcs : au point σ aboutissent *six* domaines modulaires, qui, autour de σ, présentent la disposition ci-dessous, et l'on voit, sur la figure, que la demi-circonférence C (marquée

Fig. 6.



en pointillé) traverse, aux environs de σ, *deux* domaines modulaires de moins que la droite $x=\omega$ (également pointillée).

En d'autres termes, le nombre $\Sigma(1+\theta_i)$, des domaines traversés par la droite dans un certain intervalle, n'est plus le nombre ρ des arcs d'une période sur C; il dépasse ρ de *deux* unités pour *chaque* point σ situé sur C dans l'intervalle d'une période d'arcs. Pour rétablir l'exactitude, il faudrait compter pour deux chacun des deux arcs de C qui ont σ pour une de leurs extrémités; alors ρ ainsi calculé serait encore $\Sigma(1+\theta_i)$, ou, d'après (21), encore valable ici, $\Sigma(1+h_i)$. Par suite :

L'énoncé du théorème du nº **36** *subsiste toujours, pourvu que l'on convienne de compter pour* DEUX *toute réduite d'Hermite dont la circonférence représentative passe par un des sommets (à distance finie) du domaine fondamental,* D_0, *du groupe modulaire.*

Ces sommets sont les points $\pm\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Pour que la circonférence représentative d'une réduite (α, β, γ) d'Hermite passe par l'un d'eux, il faut et il suffit que $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$.

Dans ce qui suit, nous dirons, pour abréger, que les formes (α, β, γ) et $(-\alpha, \beta, -\gamma)$ sont *inversement opposées*.

38. *Exemples.* — 1° Soit $(a, b, c) = X^2 - 14Y^2$. On trouve en tout *quatorze* réduites d'Hermite, non deux à deux inversement opposées; à savoir :

$$(1, 0, -14);\quad (1, \pm 1, -13);\quad (1, \pm 2, -10);\quad (1, \pm 3, -5);$$
$$(1, \pm 4, 2);\quad (2, \pm 4, 1);\quad (2, \pm 2, -5);\quad (2, 0, 7);$$

et, pour aucune, $\alpha \pm \beta + \gamma$ n'est nul.

D'autre part, en fraction continue,

$$\sqrt{14} = (3, \overline{1, 2, 1, 6,}\ \overline{1, 2, 1, 6,}\ \ldots);$$

la période est 1, 2, 1, 6, et l'on a bien

$$(1+1) + (1+2) + (1+1) + (1+6) = 14.$$

2° Soit $(a, b, c) = X^2 - 13Y^2$. — On trouve *vingt-deux* réduites, deux à deux inversement opposées, à savoir :

$$\pm(1, 0, -13);\quad \pm(1, \pm 1, -12);\quad \pm(1, \pm 2, -9);\quad \pm(1, \pm 3, -4);$$
$$\pm(3, \pm 2, -3):\quad \pm(3, \pm 1, -4);$$

nous devons n'en conserver que la moitié, celles par exemple, au nombre de *onze*, où le premier coefficient est positif.

Parmi celles-là, *quatre* vérifient $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$, à savoir :

$$(1, \pm 3, -4) \quad \text{et} \quad (3, \pm 1, -4);$$

elles doivent donc être comptées deux fois, c'est-à-dire qu'il faut, à *onze*, ajouter *quatre*, ce qui donne *quinze*.

En fraction continue, on a

$$\sqrt{13} = (3, \overline{1, 1, 1, 1, 6,}\ \overline{1, 1, 1, 1, 6,}\ \ldots),$$

et l'on constate bien que

$$(1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+1) + (1+6) = 15.$$

3° Soit

$$(a, b, c) = 2X^2 - 6XY - 2Y^2, \qquad D = 13, \qquad \sigma = 2.$$

On trouve les *huit* réduites (inversement opposées deux à deux) :

$$\pm(2, \pm 3, -2), \quad \pm(2, \pm 1, -6),$$

qui doivent compter pour *quatre;* aucune ne vérifiant $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$, *quatre* est le nombre définitif.

D'ailleurs

$$\omega = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = (3, 3, 3, \ldots);$$

la période est 3, et l'on a bien $1 + 3 = 4$.

39. *Période du développement hermitien.* — Nous avons vu (n° **34**) que ce développement est périodique, quand C ne passe par aucun sommet modulaire; on pourrait, en reprenant les raisonnements des n^{os} **34** et **18**, montrer que le fait est général, et que :

Le développement hermitien de ω, *racine de la forme* (a, b, c), *est toujours périodique; la période* $\mathfrak{P}$, qui se présente ainsi, n'est pas toujours la période minima; elle est telle qu'une fraction d'Hermite, $p_i : q_i$, et son *homologue* $p'_i : q'_i$, de la période suivante, sont liées par

$$\frac{p'_i}{q'_i} = \frac{p_i}{q_i} S,$$

S étant la substitution fondamentale précisée au n° **23**.

Lorsque (a, b, c) n'équivaut pas à $(-a, b, -c)$, $\mathfrak{P}$ est la période minima.

Lorsque (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$ et que C ne passe par aucun sommet modulaire, $\mathfrak{P}$ est la période minima répétée deux fois; alors une fraction d'Hermite $p_i : q_i$, et son homologue $p''_i : q''_i$, de la période (minima) suivante, sont liées par

$$\frac{p''_i}{q''_i} = \frac{p_i}{q_i} \Sigma_0,$$

Σ_0 étant la substitution définie au n° **23**.

Enfin, si (a, b, c) équivaut à $(-a, b, -c)$ et si C passe par des sommets modulaires, $\mathfrak{P}$ est soit la période minima, soit son double.

Nous allons reprendre la question directement, d'une manière générale, en étudiant l'existence et la formation de la période hermitienne, à partir de la fraction continue.

40. *Formation de la période*. — *Si, dans la fraction continue* ω, *la période minima ne renferme aucun quotient incomplet égal à* 1, il est clair, en vertu même de la formation du développement hermitien à partir de la fraction continue (I, n° **22**), que *la période minima hermitienne existe et coïncide avec celle de la fraction continue.*

Tout revient ainsi à voir si, étant donné dans la période minima π_0, de la fraction continue, un quotient incomplet 1, ce quotient subsiste ou non dans le développement hermitien; donc, en désignant par $p : q$ la réduite qui précède ce quotient 1, le problème est de reconnaître si les réduites homologues de $p : q$ (n° **23**) *finissent* ou non par subsister dans la suite des fractions d'Hermite.

Soient $p_1 : q_1, \ldots, p_m : q_m, \ldots$ ces réduites; nous savons (n° **23**) que

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}\Sigma^m,$$

Σ désignant soit S, soit Σ_0, selon que (a, b, c) n'équivaut pas ou équivaut à $(-a, b, -c)$. En s'appuyant sur la théorie classique des substitutions semblables de (a, b, c), on en conclut :

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p\dfrac{t_m}{\sigma} - (bp + cq)\dfrac{u_m}{\sigma}}{q\dfrac{t_m}{\sigma} + (ap + bq)\dfrac{u_m}{\sigma}}, \tag{22}$$

étant posé

$$\frac{t_m - u_m\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{t_0 - \eta u_0\sqrt{D}}{\sigma}\right)^m; \tag{23}$$

σ est 1 ou 2 selon que (a, b, c) est proprement ou improprement primitive;

t_0, u_0 est la plus petite solution positive de $t^2 - Du^2 = \pm\sigma^2$, où l'on prend au second membre + ou − selon que (a, b, c) n'équivaut pas ou équivaut à $(-a, b, -c)$; enfin on suppose que la racine, ω, qu'on a développée en fraction continue, est

$$\omega = \frac{-b + \eta\sqrt{D}}{a} \qquad (\eta = \pm 1),$$

ce qui définit η dans (23).

On reconnaît aisément que le numérateur et le dénominateur, dans le second membre de (22), sont des entiers premiers entre eux; il s'ensuit que p_m et q_m sont respectivement égaux à ces deux termes, *au même signe près*, c'est-à-dire qu'on a

$$(22\ bis)\qquad \begin{cases} \pm p_m = p\dfrac{t_m}{\sigma} - (bp+cq)\dfrac{u_m}{\sigma}, \\ \pm q_m = q\dfrac{t_m}{\sigma} + (ap+bq)\dfrac{u_m}{\sigma}, \end{cases}$$

les signes se correspondant.

On sait (I, n° **17**) que, si l'on nomme z le quotient *complet* qui suit la réduite $p_m : q_m$ (et par la périodicité, c'est aussi celui qui suit $p:q$) *la condition nécessaire et suffisante pour que $p_m : q_m$ soit fraction, d'Hermite* est qu'on ait, en désignant par $p'_m : q'_m$ la réduite précédente,

$$z > \frac{2q_m + q'_m}{q_m + 2q'_m},$$

c'est-à-dire

$$(24)\qquad q'_m(2z-1) > q_m(2-z).$$

C'est toujours vérifié si $z \geqq 2$; mais ici, par l'hypothèse faite sur le quotient *incomplet* qui suit $p:q$, le plus grand entier contenu dans z est 1; en sorte que

$$2-z>0 \quad \text{et} \quad 2z-1>0.$$

L'inégalité (24) s'écrit donc

$$\frac{q'_m}{q_m} > \frac{2-z}{2z-1};$$

d'où, en vertu de (22 *bis*) et puisque q'_m et q_m sont essentiellement positifs,

$$(25)\qquad \left|\frac{q'\,t_m + (ap'+bq')u_m}{q\,t_m + (ap+bq)u_m}\right| > \frac{2-z}{2z-1},$$

$p':q'$ étant la réduite qui précède $p:q$.

Il s'agit de reconnaître si (25) est vérifiée ou non pour toutes les valeurs de m supérieures à une limite finie.

Le premier membre, abstraction faite du signe de valeur absolue, c'est-à-dire la quantité

$$(26)\qquad \frac{q' t_m + (ap' + bq')u_m}{q\, t_m + (ap + bq\,)u_m},$$

a pour limite, quand m tend vers ∞, la quantité

$$(26\ bis)\qquad \frac{q' \eta\sqrt{D} + (ap' + bq')}{q\, \eta\sqrt{D} + (ap + bq\,)},$$

parce que, pour $m = \infty$, la limite de $t_m : u_m$, par (23), est $\eta\sqrt{D}$ (¹).

Or la quantité (26 *bis*) a une expression très simple. On a posé en effet

$$\omega = \frac{-b + \eta\sqrt{D}}{a}, \qquad \omega' = \frac{-b - \eta\sqrt{D}}{a};$$

en s'appuyant sur l'équation

$$(27)\qquad \omega = \frac{pz + p'}{qz + q'}$$

que donne la théorie des réduites, et sur l'équation analogue pour z', irrationnelle conjuguée de z,

$$(27\ bis)\qquad \omega' = \frac{pz' + p'}{qz' + q'},$$

on voit de suite que (26 *bis*) est $-z'$.

Donc la limite de la quantité (26) est $-z'$; d'autre part, z, quotient complet de la partie périodique de ω, est périodique simple, en sorte (n° **21**) que z' est compris entre -1 et 0. Alors $-z'$ est *positif*, et dès lors (26), pour m assez grand, est *positive;* on peut donc, au premier membre de (25), supprimer le signe $|\ \ |$ de valeur absolue.

Trois cas sont à distinguer :

1° $-z' > \frac{2 - z}{2z - 1}$. Alors l'inégalité (25) est toujours vérifiée pour m dépassant une certaine limite; les réduites homologues, $p_m : q_m$, de $p : q$, *finissent* donc par être toutes des fractions d'Hermite.

(¹) Car, si $\eta = 1$, on écrit (23) :

$$(t_m - u_m\sqrt{D}) : (t_m + u_m\sqrt{D}) = (\pm\,\sigma^2)^m : (t_0 + u_0\sqrt{D})^m;$$

d'où la limite indiquée. Calcul analogue pour $\eta = -1$.

$2^o \quad -z' < \frac{2-z}{2z-1}$. Ces réduites finissent par n'être jamais des fractions d'Hermite.

$3^o \quad -z' = \frac{2-z}{2z-1}$. Il faut revenir à (25), en y remplaçant $(2-z):(2z-1)$ par $-z'$, et en y supprimant, au premier membre, *le signe de valeur absolue*.

L'inégalité (25) s'écrit ainsi :

$$\frac{ap'+q'\left(b+\frac{t_m}{u_m}\right)}{ap+q\left(b+\frac{t_m}{u_m}\right)} > -z'.$$

Mais $-z'$ est aussi, par ce qui précède, égal à la quantité (26 *bis*), en sorte qu'il vient

$$(28) \qquad \frac{ap'+q'\left(b+\frac{t_m}{u_m}\right)}{ap+q\left(b+\frac{t_m}{u_m}\right)} > \frac{ap'+q'(b+\eta\sqrt{D})}{ap+q(b+\eta\sqrt{D})}.$$

Le dénominateur du premier membre a pour limite ($m=\infty$) celui du second, qui est fixe et évidemment non nul; ces deux dénominateurs sont donc de même signe pour m assez grand, en sorte que dans (28), on peut chasser les dénominateurs, et l'on a alors, après réductions,

$$(29) \qquad a(pq'-qp')\left(\frac{t_m}{u_m}-\eta\sqrt{D}\right) > 0.$$

On vérifie facilement, par (23), que $\frac{t_m}{u_m}-\eta\sqrt{D}$ a le signe de $\eta(t_0-u_0\sqrt{D})^m$, et (29) s'écrit finalement

$$(30) \qquad \eta a(pq'-qp')(t_0-u_0\sqrt{D})^m > 0.$$

De là *deux sous-cas :*

1° ω *n'équivaut pas à* $-\omega$, c'est-à-dire qu'on a $t_0^2-Du_0^2=\sigma^2$; donc $t_0-u_0\sqrt{D}$ est >0; dès lors, toutes les réduites $p_m:q_m$ finissent par être, ou ne pas être, des fractions d'Hermite selon que

$$(31) \qquad \eta a(pq'-qp') > 0 \quad \text{ou} \quad \eta a(pq'-qp') < 0.$$

D'ailleurs $p' : q'$ et $p : q$ étant réduites consécutives de ω, on a $pq' - qp' = \pm 1$.

2° ω *équivaut à* $-\omega$, c'est-à-dire qu'on a $t_0^2 - D u_0^2 = -\sigma^2$; alors $t_0 - u_0\sqrt{D}$ est < 0 et (30) s'écrit

$$\eta a(pq' - qp')(-1)^m > 0. \tag{32}$$

Donc, des deux réduites homologues $p_m : q_m$ et $p_{m+1} : q_{m+1}$, l'*une* est fraction d'Hermite, et l'autre non; il faut donc ici doubler la période *minima* de ω, pour en déduire la période hermitienne *minima*.

L'*existence* de celle-ci résulte de cette analyse.

41. Sa *formation* en résulte aussi, car on sait voir, *dans tous les cas*, si un quotient incomplet 1, figurant dans la période π_0 (n° **40**), subsiste *ou* non dans la période hermitienne : il suffit de reconnaître, par les règles qu'on vient de donner, si les réduites homologues de celle, $p : q$, qui précède ce quotient, finissent par être, *ou* ne pas être, des fractions d'Hermite.

On peut d'ailleurs simplifier ces règles, en introduisant, au lieu de z ou de z', les réduites $p' : q'$ et $p : q$, grâce à (27) et (27 *bis*). On arrive ainsi à l'*énoncé final :*

Soit $p : q$ la réduite de ω [racine de la forme (a, b, c)] *qui précède un quotient incomplet,* 1, *de la période minima; soit $p' : q'$ la réduite qui précède $p : q$.*

Ce quotient 1 *sera conservé ou non dans la période du développement hermitien, selon que les deux quantités*

$$ap^2 + 2bpq + cq^2, \tag{33}$$

$$a(p^2 + pp' + p'^2) + b(2pq + 2p'q' + pq' + qp') + c(q^2 + qq' + q'^2) \tag{34}$$

sont, ou non, de signes contraires.

Dans le cas où la seconde quantité serait nulle : 1° si ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, le quotient 1 considéré sera conservé, ou non, selon que

$$a(a\omega + b)(pq' - qp') \quad \text{sera} > 0 \text{ ou } < 0; \tag{35}$$

2° si ω équivaut modulairement à $-\omega$, il faudra doubler la période minima de ω pour en déduire celle du développement, et la règle précédente (35) s'appliquera encore ([1]).

Remarques. — 1° Quand, dans la période de la fraction continue ω, on supprime un quotient incomplet 1, il va sans dire qu'on fait subir à cette fraction la modification (20) du n° **35**.

2° On établirait facilement que, si la quantité (34) s'annule, la demi-circonférence C passe par des sommets modulaires.

3° Dans l'usage des formules (33) à (35), il faut, puisqu'on a appliqué (22) à $p' : q'$ et à $p : q$, que ces deux réduites précèdent des quotients incomplets appartenant à la partie périodique de ω.

42. *Réduites principales d'Hermite.* — On appellera ainsi les réduites dont la circonférence représentative coupe *le côté curviligne* du domaine fondamental modulaire, D_0.

Il est évident qu'un arc, découpé par le domaine D, sur la circonférence C, représentative de (a, b, c), donnera naissance à une réduite principale s'il coupe la *base* de D; dès lors, si $p : q$ est pointe de domaines traversés par C, il correspond à $p : q$ deux arcs de cette nature, découpés sur C, l'un par le premier, l'autre par le dernier domaine de pointe $p : q$, que traverse C (I, n° **5**).

Dès lors, d'une manière générale :

Le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des pointes distinctes des domaines modulaires traversés par C, *pendant une période d'arcs.*

Si C *ne passe par aucun sommet modulaire*, il résulte des n^os^ **33** et **34** que le nombre des pointes distinctes considérées est le même pour C et pour la droite $x = \omega$; donc que :

Le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des termes (quotients incomplets) de la période $\mathfrak{P}$ (n° **39**), *dans le développement hermitien de* ω ([2]).

([1]) Cela résulte aisément de (32) et de ce que, quand ω équivaut à $-\omega$, le nombre des termes de la période *minima*, dans la fraction continue ω, est *impair*.

([2]) Par le n° **39**, $\mathfrak{P}$ est la période minima, ou son double, selon que ω n'équivaut pas, ou équivaut, à $-\omega$.

Pour traiter le cas où C passe par des sommets modulaires, supposons que nous choisissions pour ω la *seconde* racine de la forme (a, b, c),

$$\omega = \frac{-b+\sqrt{D}}{a};$$

la difficulté provient, comme au n° **37**, des réduites équivalentes à (a, b, c), dont la circonférence représentative passe par un des sommets, A ou B (I, *fig.* 1, n° **2**), du domaine fondamental D_0.

Si C désigne toujours la demi-circonférence de (a, b, c), suivie de ω' à ω, soit Λ l'*arc* de C qui aboutit à un sommet modulaire, σ, situé sur C : il lui correspond un arc réduit, λ_1, qui traverse D_0 et *aboutit* à A ou à B; supposons que ce soit à B. Cet arc, *prolongé* au delà de B, ira évidemment couper Ox en un point ω_1, situé entre les points $\frac{1}{2}$ et 1; au sortir de D_0 il pénètre donc dans un domaine de pointe $+1$.

De plus, si (α, β, γ) est la réduite (principale) d'Hermite, équivalente à (a, b, c), représentée par C_1, demi-circonférence qui porte l'arc λ_1, ω_1 sera la *seconde* racine de cette forme,

$$\omega_1 = \frac{-\beta+\sqrt{D}}{\alpha},$$

et il est clair géométriquement que ω_1 est la plus grande racine de la forme (α, β, γ); d'où $\alpha > 0$.

Enfin C_1 passant par B et contenant A à son intérieur, on aura

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad \text{et} \qquad \alpha-\beta+\gamma<0, \qquad \text{d'où} \qquad \beta>0.$$

Inversement, λ_1 équivaut modulairement à une infinité d'*arcs* de C : si T est la substitution modulaire qui transforme λ_1 en Λ, et S celle, si souvent introduite, qui transforme C en C, les arcs cherchés seront les $\lambda_1 TS^m$. Prenons $m > 0$; nous pouvons le choisir assez grand pour que les $\lambda_1 TS^m$ s'approchent de ω, sur C, autant qu'on le voudra (n° **35**). Cherchons l'effet de la substitution $S^{-m}T^{-1}$, inverse de TS^m, sur la demi-droite $x=\omega$. D'abord S^{-m}, n'altérant pas ω, la change en une demi-circonférence, C', tangente à C en ω, et extérieure à C (*ibid.*); on peut évidemment prendre m assez grand pour que C' soit aussi voisine de C qu'on voudra. Cela résulte, soit du n° **33**, soit de ce que S^{-m} transforme le point ∞ en un point de Ox, qui tend évidemment vers ω' pour $m = +\infty$. Alors la demi-droite $x = \omega$, qui va de ω au point ∞ devient bien une demi-circonférence, aussi voisine qu'on veut de C. Effectuant ensuite T^{-1}, on voit que $S^{-m}T^{-1}$ change C en C_1 et $x = \omega$ en une demi-circonférence, C'_1, *voisine* de C_1 et touchant C_1 en ω_1.

Distinguons maintenant deux cas :

1° C'_1 *est extérieure à* C_1. — Alors, en faisant la figure, on voit que C'_1, aux environs de B, traverse deux domaines modulaires que ne traverse pas C_1 (n° **37**) et de pointes respectives ∞ et $+1$: mais ces pointes sont pointes d'autres domaines traversés à la fois par C_1 et C'_1.

Enfin, à la région comprise entre C_1, C'_1 et l'axe des x, répond modulairement celle (infinie) comprise entre la demi-droite $x = \omega$, C et l'axe des x, à partir de ω' jusqu'à l'infini : or, en suivant C_1 vers ω_1, on laisse la première région à sa gauche; donc, en suivant C dans le sens correspondant, c'est-à-dire vers ω, on laissera aussi la seconde région à gauche, ce qui exige que ω soit plus grand que ω', donc que a soit *positif*. Comme déjà $\alpha > 0$, on aura $a\alpha > 0$.

2° C'_1 *est intérieure à* C_1. — On voit que C'_1, aux environs de B, traverse deux domaines modulaires que ne traverse pas C_1, et tous deux de pointe 0; de plus C_1 ne traverse aucun domaine de pointe 0.

Enfin, on reconnaît qu'ici ω est plus petit que ω', donc $a\alpha < 0$.

Mêmes conclusions, quand l'arc réduit λ_1 passe par A, pour les domaines traversés par C_1 et C'_1 aux environs de A, et pour le signe correspondant de $a\alpha$, c'est-à-dire que $a\alpha$ est > 0 ou < 0 selon que C'_1 ne traverse pas ou traverse des domaines de pointe 0 (non traversés par C_1).

Cela posé, rappelons (n° **42**) que les réduites principales d'Hermite équivalentes à (a, b, c) correspondent, par couple de deux, à chacun des changements de pointe dans la suite des domaines modulaires traversés par C, ou par C_1, dans l'intervalle d'une période d'arcs : les deux réduites d'un couple ont pour arcs les arcs réduits respectivement équivalents aux deux arcs de C (ou de C_1) qui précèdent et suivent immédiatement le changement de pointe.

C_1 étant toujours supposée passer par B, les deux réduites principales qui correspondent au changement de pointe dû à la traversée de B sont d'abord (α, β, γ), puis sa transformée par la substitution $|X, Y; X, X+Y|$, laquelle correspond à la substitution modulaire qui réduit l'arc faisant suite à λ_1 sur C_1. Cette seconde forme $(\alpha+2\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma)$ a son premier coefficient *du même signe que* α, car, en vertu de $\alpha+\beta+\gamma=0$, il est égal à β, qui est positif; et sa circonférence représentative passe par A.

Appliquons les principes précédents au changement de pointe qu'entraîne la traversée du point B par C_1.

Dans les deux cas 1° et 2°, on passe de la pointe ∞ à la pointe $+1$. Mais, dans le cas 1°, la suite des domaines traversés par C'_1 présente (aux environs de B) le même changement de pointe; dans le cas 2° elle présente deux changements de pointe (de ∞ à 0 et de 0 à 1) : sous une autre forme, dans la suite d'Hermite que constituent les pointes des domaines traversés par $x=\omega$, correspondra à la traversée de B, dans le cas 1°, *le* passage d'une fraction (transformée de ∞ par TS^m) à la suivante (transformée de $+1$); et, dans le cas 2°, *deux* passages, celui d'une fraction (transformée de ∞) à la suivante (transformée de 0), et celui de cette dernière à la suivante (transformée de $+1$).

Les deux cas se distinguent l'un de l'autre par $a\alpha > 0$ (premier cas) et $a\alpha < 0$ (second cas).

Dès lors, si l'on veut maintenir la règle du n° **42**, à savoir que le nombre des réduites principales d'Hermite est double de celui des fractions d'Hermite (ou des quotients incomplets du développement hermitien) dans l'intervalle d'une période d'arcs, on voit, en s'appuyant aussi sur ce que les deux réduites principales qui correspondent à la traversée de B (ou de A) par C_1 ont leurs premiers coefficients de même signe, et leurs circonférences passant par B ou A, qu'il faudra compter pour *une* ou pour *deux* toute réduite principale (α, β, γ), dont l'arc représentatif passe par B ou A, selon que $a\alpha$ sera >0 ou <0.

De là l'énoncé *général* définitif suivant :

Soit (a, b, c) une forme indéfinie dont le déterminant n'est pas carré. Le nombre des réduites principales d'Hermite équivalentes à (a, b, c) est deux fois le nombre des quotients incomplets dans la période du développement hermitien de ω, seconde racine de la *forme*, $[\omega = (-b+\sqrt{D}) : a]$, *à la condition de compter pour* DEUX *toute réduite* (α, β, γ) *pour laquelle le produit* $a\alpha$ *est négatif* ET *dont la demi-circonférence représentative passe par un des sommets à distance finie* A, B, *du domaine fondamental modulaire*, D_0. *Toute autre réduite compte pour une, et l'on regarde comme distinctes les réduites telles que* (α, β, γ) *et* $(-\alpha, \beta, -\gamma)$.

La période hermitienne dont il est ici question est celle qui est déduite (n^os **40-41**) *de la période minima de la fraction continue* ω, *lorsque* ω *n'équivaut pas modulairement à* $-\omega$; *c'est celle qui est déduite du double de la période minima, dans le cas contraire* [1].

La condition pour que la demi-circonférence de (α, β, γ) passe par A ou B est $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$.

44. *Corollaire.* — Quand il y a des réduites principales (α, β, γ) à compter pour deux, c'est que C'_1, entre un domaine de pointe ∞ et un domaine de pointe ± 1, traverse *deux* domaines de pointe o : il y aura donc, dans la période hermitienne, le quotient incomplet $2-1$ (I, n° **26**), ou 1.

Dès lors, s'il n'y a pas de quotient incomplet 1 dans cette période, chaque réduite principale comptera pour *une*.

Donnons maintenant des exemples, où l'on rencontrera les diverses circonstances qui peuvent se présenter.

45. *Exemples.* — 1° *Forme* $X^2 - 14Y^2$. — Remplaçons-la par la forme équivalente $(X-3Y)^2 - 14Y^2$, où

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -5 \quad \text{et} \quad \omega = 3+\sqrt{14}.$$

Formons d'abord la période hermitienne pour ω. En fraction continue (ici périodique *simple*),

$$\omega = (\overline{6, 1, 2, 1}, \overline{6, 1, 2, 1}, \ldots)$$

et ω n'équivaut pas à $-\omega$.

---

[1] Il serait aisé aussi d'établir une liaison entre les quotients *complets* de la période hermitienne et les réduites principales d'Hermite.

La période à considérer est donc

$$6, \quad 1, \quad 2, \quad 1,$$

et contient deux termes 1.

Le premier 1 suit la réduite $6:1$, que précède $1:0$; on a donc

$$p=6, \qquad q=1; \qquad p'=1, \qquad q'=0.$$

Avec ces valeurs, et celles ci-dessus de (a, b, c), les quantités (33) et (34) sont -5 et -1, donc de même signe, et le terme 1 est dès lors à supprimer.

Pour le second 1, on aurait

$$\frac{p}{q}=\frac{20}{3}, \qquad \frac{p'}{q'}=\frac{7}{1},$$

d'où p, q, p', q'; les quantités (33) et (34) sont encore -5 et -1, et le second 1 est aussi à supprimer.

Le développement hermitien de ω a donc pour quotients successifs

$$\ldots, \quad 7, \quad 4, \quad 8, \quad 4, \quad 8, \quad 4, \quad \ldots;$$

la période est 8, 4 et a *deux* termes; c'est ici celle à considérer (et non son double) pour évaluer le nombre des réduites principales, lequel est dès lors 2×2 ou *quatre*.

Parmi les réduites d'Hermite, données au n° **38**, 1°, les *principales* sont $(1, \pm 4, 2)$ et $(2, \pm 4, 1)$, et leurs demi-circonférences ne passent par aucun des *sommets* de D_0; leur nombre est *quatre*, comme le veut le théorème général.

2° *Forme* $X^2 - 13Y^2$. — Nous lui substituerons son équivalente, pour laquelle $a=1$, $b=-3$, $c=-4$; $\omega = 3+\sqrt{13}$ et

$$\omega = (\overline{6, 1, 1, 1, 1,}\, \overline{6, 1, 1, 1, 1,} \ldots),$$

fraction périodique *simple*.

Ici ω équivaut à $-\omega$; nous devrons doubler la période minima.

Considérons d'abord celle-ci, 6, 1, 1, 1, 1; il y a quatre 1. Le premier 1 suit $p:q=6:1$, que précède $p':q'=1:0$. Alors la quantité (34) est nulle; (35) est -1; donc le 1 est à supprimer dans la première période minima et à conserver dans la seconde [n° 40, éq. (32)].

Le deuxième 1 suit $p : q = 7 : 1$, et l'on a

$$\frac{p'}{q'} = \frac{6}{1};$$

alors (33) et (34) sont $+3$ et -2, donc de signes contraires, et le 1 est à garder dans toutes les périodes.

Le troisième 1 suit $p : q = 13 : 2$, et l'on a $p' : q' = 7 : 1$; les quantités (33) et (34) sont -3 et $+2$; donc encore, le 1 se garde dans toutes les périodes.

Enfin le quatrième 1 suit $p : q = 20 : 3$, et l'on a $p' : q' = 13 : 2$; la quantité (34) est nulle; (35) est $+1$; donc le 1 se conserve dans la première période et se supprime dans la seconde.

Les quotients incomplets successifs du développement de ω sont donc, après les modifications dues aux suppressions de 1,

$$\ldots,\ 7,\ 2,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 2,\ 8,\ 2,\ 1,\ 1,\ 6,\ \ldots;$$

la période hermitienne est, abstraction faite de tout signe,

$$2,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 2,\ 8;$$

elle comprend *huit* termes, et c'est bien celle qu'on déduit de la période minima de la fraction continue, répétée deux fois.

Donc le nombre des réduites principales d'Hermite est $8 \times 2 = 16$.

Ces réduites, formées directement, sont :

$$(3, \pm 2, -3),\quad (-3, \pm 2, 3),$$
$$(1, \pm 3, -4),\quad (3, \pm 1, -4),\quad (-1, \pm 3, 4),\quad (-3, \pm 1, 4).$$

Les quatre, (α, β, γ), de la première ligne ne satisfont pas à $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$; les huit de la seconde y satisfont, c'est-à-dire que leurs circonférences passent par un sommet de D_0. Parmi ces huit, quatre ont leur premier coefficient < 0, et comptent dès lors chacune pour 2; *toutes* les autres réduites, au nombre de $4 + 4$, ou 8, comptent respectivement pour une; donc le total est $4.2 + 8$ ou *seize*, ce qui vérifie le théorème.

3° *Forme* $X^2 - 3Y^2$; $\omega_1 = \sqrt{3}$, *non équivalent à* $-\omega_1$. — Prenons

$\omega = 1 + \sqrt{3}$, d'où $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$; on a

$$\omega = (\overline{2, 1}, \overline{2, 1}, \ldots),$$

et la période est 2, 1. Le premier 1 suit la réduite $p : q = 2 : 1$, et $p' : q'$ est $1 : 0$. On trouve que la quantité (34) est nulle et que (35) est < 0; dès lors 1 se supprime dans toutes les périodes, et les quotients incomplets successifs du développement hermitien sont 3, 4, 4, ...; la période est 4 et n'a qu'un terme; il y aura donc *deux* réduites principales. On trouve effectivement que les réduites principales sont ici $(1, -1, -2)$ et $(1, 1, -2)$; leurs demi-circonférences passent par un sommet de D_0, car $\alpha \pm \beta + \gamma$ est nul pour chacune. D'autre part, les deux α sont positifs, comme a, de sorte que les deux réduites principales obtenues comptent respectivement pour une, d'où le nombre voulu, *deux*.

4° *Forme* $X^2 - 19Y^2$. — Prenons $\omega = 4 + \sqrt{19}$, d'où $a = 1$, $b = -4$, $c = -3$ et

$$\omega = (\overline{8, 2, 1, 3, 1, 2}, \ldots);$$

ω non équivalent à $-\omega$.

Le premier 1 de la période suit $p : q = 17 : 2$ et $p' : q' = 8 : 1$; la quantité (34) est nulle, et (35) est > 0, en sorte que le 1 se conserve dans toutes les périodes. On verrait qu'il en est de même du second 1. La période hermitienne est donc

$$8,\quad 2,\quad 1,\quad 3,\quad 1,\quad 2$$

et renferme *six* termes.

Les réduites principales sont ici

$$\begin{array}{ll} (\ \ 1, \pm 4, -3), & (-3, \pm 4, 1), \\ (-3, \pm 2, \ \ 5), & (-2, \pm 3, 5); \end{array}$$

les quatre de la seconde ligne vérifient seules $\alpha \pm \beta + \gamma = 0$; d'autre part leurs α étant négatifs, chacune doit compter pour *deux*. Le nombre total est donc $4 + 2.4$, ou *douze*, qui est bien le double du nombre, *six*, des termes de la période hermitienne.