JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Complément à un Mémoire du deuxième fascicule du Journal de Mathématiques pour 1912, sur la théorie géométrique des déplacements bien continus des corps déformables : remarques et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 291-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__291_0>

Complément à un Mémoire du deuxième fascicule du Journal de Mathématiques *pour 1912, sur la théorie géométrique des déplacements bien continus des corps déformables : remarques et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations;*

Par J. BOUSSINESQ.

I. A l'article IV du petit Mémoire cité (p. 225 à 227 du Volume), j'ai reconnu que, dans le cas de déplacements ξ, η, ζ corrélatifs à de *fortes* déformations d'une particule, les formules des neuf dérivées partielles premières de ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées primitives x, y, z y sont linéaires et homogènes en fonction des trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 de la particule, *quand le trièdre rectangulaire des trois fibres principales* (ou dont ∂_1, ∂_2, ∂_3 désignent les dilatations) *a gardé son orientation primitive;* d'où il suit que c'est *uniquement* la rotation du trièdre, dite *rotation moyenne* de la particule et censée, si l'on veut, se faire après la déformation, qui vient compliquer les formules de cette théorie, de manière à ne les laisser *linéaires*, par rapport à l'ensemble des rotations et des déformations, que pour des déformations et des rotations infiniment petites.

Afin de mieux apprécier le degré de complication que les rotations y introduisent, traitons le cas, de beaucoup le plus simple, où les deux coordonnées x, y, avec les deux déplacements ξ, η, sont seules à considérer, c'est-à-dire le cas des déplacements ξ, η d'un *feuillet* matériel, produits dans son propre plan.

Alors, s'il s'agit d'une *déformation pure* (ou sans rotation) d'un élément d'aire du feuillet, les dilatations principales se réduisent à ∂_1, ∂_2, et leurs cosinus directeurs respectifs, par rapport aux axes généraux et fixes des x et des y, à

$$\alpha_1 = \cos\varphi, \qquad \beta_1 = \sin\varphi, \qquad \alpha_2 = -\sin\varphi, \qquad \beta_2 = \cos\varphi,$$

φ, $\frac{\pi}{2} + \varphi$ désignant les deux *azimuts* respectifs, restés jusque-là invariables, de ∂_1 et de ∂_2, c'est-à-dire des deux fibres principales émanées d'un point central quelconque M de l'élément considéré de feuillet. D'ailleurs, d'après les formules du n° 8 du Mémoire (p. 219), les deux dérivées (*directes*) A, B de ξ en x et de η en y, y ont les expressions

$$(1) \quad \begin{cases} A = \alpha_1^2 \partial_1 + \alpha_2^2 \partial_2 = \partial_1 \cos^2\varphi + \partial_2 \sin^2\varphi = \dfrac{\partial_1 + \partial_2}{2} + \dfrac{\partial_1 - \partial_2}{2} \cos 2\varphi, \\ B = \beta_1^2 \partial_1 + \beta_2^2 \partial_2 = \partial_1 \sin^2\varphi + \partial_2 \cos^2\varphi = \dfrac{\partial_1 + \partial_2}{2} - \dfrac{\partial_1 - \partial_2}{2} \cos 2\varphi, \end{cases}$$

tandis que la valeur, alors commune et appelée F, des deux dérivées (*obliques*) de ξ en y et de η en x est

$$(2) \qquad F = \alpha_1 \beta_1 \partial_1 + \alpha_2 \beta_2 \partial_2 = (\partial_1 - \partial_2) \cos\varphi \sin\varphi = \frac{\partial_1 - \partial_2}{2} \sin 2\varphi.$$

II. Faisons passer, par le point matériel choisi M de l'élément (de feuillet) qui a pris sa nouvelle configuration, mais où les deux fibres principales ont gardé leurs directions primitives, deux axes rectangulaires des h et des k, constamment parallèles aux axes fixes des x et des y; et menons la fibre MK joignant cette origine mobile M à tout point matériel K de l'élément de feuillet. Soient h et k les deux coordonnées *primitives* du point K par rapport à ces axes, c'est-à-dire les accroissements élémentaires qu'éprouvaient x et y dans l'état primitif, quand on passait de M à K. Après la déformation (sans rotation), qui a changé MK en M'K', ces coordonnées auront évidemment crû de $Ah + Fk$, $Fh + Bk$; et, si l'on appelle h', k' les deux nouvelles projections, sur les axes des h et des k, de la fibre MK devenue M'K', projections que l'on peut dessiner ou matérialiser sur l'élément de feuillet ainsi parvenu à sa configuration définitive, on aura

$$(3) \qquad h' = (1 + A)h + Fk, \qquad k' = Fh + (1 + B)k,$$

avec A, B, F fonctions bien déterminées, d'après (1) et (2), des deux dilatations principales données ∂_1, ∂_2 et de l'angle φ de ∂_1 avec les x avant toute rotation de l'élément.

Imprimons maintenant à cet élément de feuillet, autour du point central M, une rotation ω quelconque (comptée positivement dans le sens *direct* allant des x positifs vers les y positifs), pour lui faire prendre l'orientation qu'il a effectivement après les déplacements ξ, η étudiés. Alors les *fibres* h' et k' ci-dessus, projections matérialisées de la droite M'K' devenue maintenant dans l'espace M''K'', dessineront, par rapport aux axes des h et des k, à orientation fixe, deux axes rectangulaires des h' et des k' faisant avec ces axes des h, k, l'un, celui des h', les deux angles $\omega, \frac{\pi}{2}-\omega$, l'autre, celui des k', les deux angles $\frac{\pi}{2}+\omega, \omega$. Si h'', k'' sont les nouvelles coordonnées de K, par rapport aux axes des h, k, on aura, par les formules usuelles des projections ou de la transformation des coordonnées,

$$h''=h'\cos\omega-k'\sin\omega, \qquad k''=h'\sin\omega+k'\cos\omega,$$

c'est-à-dire, vu les valeurs (3) de h' et de k',

$$(4)\quad \begin{cases} h''=[(1+A)\cos\omega-F\sin\omega]h+[F\cos\omega-(1+B)\sin\omega]k, \\ k''=[(1+A)\sin\omega+F\cos\omega]h+[F\sin\omega+(1+B)\cos\omega]k. \end{cases}$$

III. Identifions-les aux expressions évidentes

$$h''=\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)h+\frac{d\xi}{dy}k, \qquad k''=\frac{d\eta}{dx}h+\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)k,$$

qui doivent leur être égales quel que soit le rapport de h à k; et les quatre dérivées partielles premières de ξ, η en x et y, qui expriment la manière dont varient les déplacements dans le voisinage du point M, se trouveront déterminées en fonction des dilatations principales et de la rotation ω. Si, à l'inverse, ∂_1, ∂_2, φ et ω, ou A, B, F et ω, sont inconnus, on aura, pour les déterminer en fonction des quatre dérivées partielles de ξ, η, les quatre équations

$$(5)\quad \begin{cases} (1+A)\cos\omega-F\sin\omega=1+\dfrac{d\xi}{dx}, & (1+B)\cos\omega+F\sin\omega=1+\dfrac{d\eta}{dy}, \\ F\cos\omega-(1+B)\sin\omega=\dfrac{d\xi}{dy}, & F\cos\omega+(1+A)\sin\omega=\dfrac{d\eta}{dx}. \end{cases}$$

On voit qu'elles sont bien linéaires, par rapport à A, B, F (ou à ∂_1, ∂_2) et aux dérivées de ξ, η, mais transcendantes (trigonométriques) en ω; de sorte qu'elles ne deviennent, dans l'ensemble, *linéaires et* *homogènes*, c'est-à-dire simples, *que si la rotation* ω *est infiniment petite* (cas où l'on peut prendre $\cos\omega = 1$, $\sin\omega = \omega$) *et si*, *de plus*, A, B, F, *ou* ∂_1, ∂_2, *sont en même temps très petits*.

IV. La première (5) ajoutée à la seconde, et la troisième, retranchée de la quatrième, donnent respectivement

$$(2 + A + B)\cos\omega = 2 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}, \qquad (2 + A + B)\sin\omega = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy},$$

équations revenant à prendre, d'abord, par l'élimination de $2 + A + B$, ensuite par celle de ω, avec extraction d'une racine carrée et substitution finale de $\partial_1 + \partial_2$ à $A + B$ d'après (1),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\omega = \frac{\dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dy}}{2 + \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy}},\\ &\partial_1 + \partial_2 = -2 + \sqrt{\left(2 + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)^2}. \end{aligned}\right.$$

Il résulte, d'autre part, de la quatrième (5), ajoutée à la troisième, et de la seconde (5), retranchée de la première, les deux relations

$$2F\cos\omega + (A - B)\sin\omega = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx},$$
$$(A - B)\cos\omega - 2F\sin\omega = \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}.$$

Multiplions respectivement la première de celles-ci soit par $\sin\omega$, soit par $\cos\omega$, et la seconde, soit par $\cos\omega$, soit par $-\sin\omega$; puis, dans chaque cas, ajoutons. Il viendra, pour tenir lieu de ces équations et, en y joignant les deux (6) qui ont déjà fait connaître ω et $\partial_1 + \partial_2$, pour remplacer les quatre (5) :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} A - B &= \left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)\cos\omega + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\sin\omega,\\ 2F &= -\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)\sin\omega + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos\omega. \end{aligned}\right.$$

V. On portera ces valeurs de $A - B$ et de $2F$ dans les deux équations, résultant immédiatement de (1) et (2),

$$(8)\qquad (\partial_1 - \partial_2)\cos 2\varphi = A - B, \qquad (\partial_1 - \partial_2)\sin 2\varphi = 2F.$$

et qui donnent alors

$$(9)\qquad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2F}{A-B}, \qquad (\partial_1 - \partial_2)^2 = (A-B)^2 + 4F^2.$$

On voit en particulier que, de l'expression de $\operatorname{tang} 2\varphi$, se déduiront bien, pour φ, des valeurs distantes de $\frac{\pi}{2}$ et, par conséquent, les directions *rectangulaires* prévues, pour les deux dilatations principales ∂_1, ∂_2.

A part le cas de dérivées de ξ, η très petites, dont on puisse négliger les carrés et produits, toutes ces formules (5) à (9) restent un peu compliquées, sauf quand on annule la rotation ω, en posant $\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx}$ et, par suite, dans (5),

$$A = \frac{d\xi}{dx}, \qquad B = \frac{d\eta}{dy}, \qquad F = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx};$$

cas où il vient

$$\partial_1 + \partial_2 = A + B = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}.$$

En résumé, même quand les déplacements sont plans, la théorie des rotations *finies* reste notablement plus complexe que celle des *déformations pures*.

VI. Toutefois, certains éléments sont relativement simples. Tel est d'abord le carré de la différence $\partial_1 - \partial_2$, lequel donne, d'après (7) et la seconde (9),

$$(10)\qquad \partial_1 - \partial_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)^2}.$$

Les nouvelles valeurs $1 + \partial_1$, $1 + \partial_2$, par unité de longueur primitive, des deux fibres principales auront donc pour somme le radical figurant au second membre de la dernière formule (6) et, pour différence, le radical du second membre de (10). Ces deux valeurs, demi-somme et demi-différence des deux radicaux, s'obtiennent donc indépendamment des deux angles ω, φ; et leur produit, nouvelle aire de l'élément de feuillet, rapportée, elle aussi, à l'unité d'aire primitive, est simplement, après des réductious immédiates,

$$(11)\qquad (1+\partial_1)(1+\partial_2) = \left(1 + \frac{d\xi}{dx}\right)\left(1 + \frac{d\eta}{dy}\right) - \frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx},$$

expression bien connue, que l'on utilise dans la théorie de la *houle*.

Quand les trois coordonnées x, y, z et les trois déplacements ξ, η, ζ sont en jeu, le produit analogue

$$(1+\partial_1)(1+\partial_2)(1+\partial_3),$$

nouvelle valeur de l'unité de volume primitif d'une particule, a également une expression rationnelle assez simple, bien connue aussi; savoir, le déterminant

$$\text{(12)} \qquad \begin{vmatrix} 1+\frac{d\xi}{dx}, & \frac{d\xi}{dy}, & \frac{d\xi}{dz} \\ \frac{d\eta}{dx}, & 1+\frac{d\eta}{dy}, & \frac{d\eta}{dz} \\ \frac{d\zeta}{dx}, & \frac{d\zeta}{dy}, & 1+\frac{d\zeta}{dz} \end{vmatrix} \quad (^1).$$

Enfin, si l'on remplace, au second membre de la première (9), $2F$ et $A-B$ par leurs valeurs (7), où l'on aura substitué à $\cos\omega$ et à $\sin\omega$ les quantités proportionnelles

$$2+\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy},$$

il vient, pour déterminer les azimuts φ des fibres principales dont les dilatations sont ∂_1, ∂_2, la formule, plus complexe que les trois autres (6) et (10),

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}+\frac{d\xi}{dx}\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\frac{d\eta}{dy}}{\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dy}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dx^2}-\frac{d\xi^2}{dy^2}+\frac{d\eta^2}{dx^2}-\frac{d\eta^2}{dy^2}\right)}.$$

Le discernement des valeurs de φ, convenant soit à ∂_1, soit à ∂_2, se ferait par la considération des équations (8).

(1) On peut voir par exemple, à ce sujet, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, Tome I[er] (*Calcul différentiel*), fascicule II (*Compléments*), p. 90*. Les notations y sont seulement différentes : nos variables indépendantes actuelles x, y, z s'y appellent ξ, η, ζ et les fonctions représentées ici par $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ s'y appellent x, y, z. De plus, la quantité qu'on y a en vue est la densité ρ de la particule, inverse du déterminant, et non le volume, proportionnel au déterminant.