JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 277-283.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__277_0>

Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie;

PAR J. BOUSSINESQ.

1. On sait, depuis les observations de l'ingénieur américain Clémens Herschell, confirmées par d'autres, récentes, de MM. Camichel, Eydoux et Lhériaud ([1]), que le débit q d'une conduite se déduit très simplement, à des erreurs relatives près n'atteignant pas 1 centième, de la différence $P_1 - P_2$ des deux pressions, P_1, P_2, qui s'y trouvent exercées, le long de l'axe supposé horizontal, dans la première section amont, σ_1, et dans la section la plus rétrécie, σ_2, d'un *venturi*, ensemble d'un rétrécissement notable, mais assez allongé ou bien graduel, et d'un élargissement analogue qui s'y raccorde en lui faisant suite, c'est-à-dire sans brusque déviation ni courbure sensible des filets fluides. La formule qu'on y applique est celle que donne, pour chaque filet, le principe de D. Bernoulli sur la conservation de la charge dans l'hypothèse de fluidité parfaite, mais en n'y distinguant pas les vitesses individuelles V des divers filets, à la traversée d'une section normale σ quelconque, d'avec la vitesse moyenne ou *de débit* U à travers la même section. Et, cependant, le régime d'écoulement étant à peu près uniforme à l'entrée du venturi, c'est-à-dire sur la première section amont σ_1 où P_1 désigne la pression sur l'axe (évaluée en hauteur d'eau), on sait que des différences très appréciables de vitesse y

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 160, 4 janvier 1915, p. 28.

existent entre le filet central ou *axial*, le plus rapide, et ceux de la périphérie, quoique ces différences s'atténuent à mesure qu'on approche de la section rétrécie σ_2, où la pression analogue, sur l'axe, est P_2.

Il y a donc quelque chose de paradoxal à ce fait, que l'hypothèse de l'égalité de vitesse des filets fournisse un débit q pratiquement exact.

Je me propose ici de montrer que le paradoxe s'explique par deux petites erreurs de sens contraires, commises dans le calcul : l'une, évidente (du moins au sentiment), qui, pour l'excédent $P_1 - P_2$ de pression constaté le long du rétrécissement, fait obtenir un débit trop fort, et qui consiste en ce qu'on néglige les frottements, les imperfections effectives de fluidité de l'eau; l'autre, plus cachée, tenant à ce que, pour un liquide parfait, un calcul exact, avec mise en compte de l'inégalité de vitesse des filets, donnerait un débit supérieur au débit théorique approché obtenu. C'est justement la formule de ce débit supérieur, concernant un liquide hypothétique parfait, que l'analyse suivante a pour but de faire connaître.

II. Le rétrécissement étant supposé assez graduel pour n'imprimer aux filets fluides ni courbures sensibles, ni même inclinaisons mutuelles appréciables, on sait que la pression p variera *hydrostatiquement* sur toute l'étendue de chaque section normale σ, ou que la somme de la pression p et de l'altitude ζ au-dessus du plan horizontal de l'axe, y égalera simplement la pression P sur l'axe. Ainsi, la *hauteur totale de charge* $\frac{V^2}{2g} + p + \zeta$ de chaque filet fluide, constante le long du filet, y sera simplement $\frac{V^2}{2g} + P$.

On aura donc, pour un filet quelconque, en le considérant sur la section d'amont σ_1 et sur toute autre section normale σ,

$$\frac{V^2}{2g} + P = \frac{V_1^2}{2g} + P_1. \tag{1}$$

Multiplions par le débit constant dq du filet, qu'exprime le produit $V\,d\sigma$ sur la section σ et le produit $V_1\,d\sigma_1$ sur la section σ_1, puis faisons la somme des résultats pour tous les filets, et divisons par le débit total $q = U\sigma = U_1\sigma_1$. Il vient, identiquement,

$$\frac{U^2}{2g}\int\left(\frac{V}{U}\right)^3\frac{d\sigma}{\sigma} + P = \frac{U_1^2}{2g}\int\left(\frac{V_1}{U_1}\right)^3\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} + P_1.$$

Les hydrauliciens appellent α l'intégrale $\int\left(\frac{V}{U}\right)^3\frac{d\sigma}{\sigma}$, *cube moyen*, à travers la section σ, du rapport de la vitesse V des divers filets fluides à la vitesse moyenne U : ils lui attribuent ordinairement la valeur *approximative* 1,1 dans les conduites circulaires à régime uniforme. Et ils écrivent, par suite, l'équation ci-dessus, expression du principe de D. Bernoulli pour *tout* le courant liquide à axe horizontal, $\alpha\frac{U^2}{2g} + P = \text{const.}$ En l'appliquant aux deux sections σ_1, σ_2 et désignant par α_1, α_2 les deux valeurs correspondantes de α, on aura donc

$$\alpha_2\frac{U_2^2}{2g} + P_2 = \alpha_1\frac{U_1^2}{2g} + P_1. \tag{2}$$

Remplaçons-y les vitesses de débit U_2, U_1 par les quotients équivalents $\frac{q}{\sigma_2}$, $\frac{q}{\sigma_1}$. Puis isolons la valeur de q ; et nous aurons, dans l'hypothèse de la fluidité parfaite, l'expression théorique du débit q :

$$q = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\,\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\alpha_2\sigma_1^2 - \alpha_1\sigma_2^2}}. \tag{3}$$

Négliger l'inégalité de vitesse des filets fluides, c'est faire $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, ou prendre

$$q = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}}\sqrt{2g(P_1 - P_2)}; \tag{3 bis}$$

de sorte que le coefficient correctif, λ, par lequel il faut multiplier l'expression ainsi simplifiée (3 *bis*) du débit, pour en avoir la vraie expression théorique, est

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\alpha_2\sigma_1^2 - \alpha_1\sigma_2^2}}. \tag{4}$$

Tel est donc le coefficient dont nous aurons à apprécier ici la différence d'avec l'unité.

III. Introduisons-y la valeur donnée, que nous appellerons μ, du *rétrécissement*, c'est-à-dire le rapport $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$: pratiquement, ce sera une fraction assez petite, comme, par exemple, $\frac{1}{4}$ si le diamètre de la conduite s'y réduit *de moitié*. Le carré du coefficient correctif λ deviendra

$$\lambda^2 = \frac{1-\mu^2}{\alpha_2 - \mu^2\alpha_1}. \tag{5}$$

Cela posé, la formule (1), en y spécifiant le premier membre pour la section rétrécie σ_2, où $V = V_2$ et $U = U_2$, donnera, sur un filet fluide quelconque,

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(P_1 - P_2),$$

équation où V_1, V_2 seront comparables respectivement à leurs moyennes U_1, U_2, c'est-à-dire dans un rapport de l'ordre de petitesse de $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \mu$. V_1^2 sera donc une assez petite fraction du second membre; et l'on aura

$$V_2 = \sqrt{2g(P_1 - P_2)}\left[1 + \frac{V_1^2}{2g(P_1 - P_2)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

où la puissance $\frac{1}{2}$ de la quantité entre crochets pourra se développer, par la formule du binome, en une série rapidement convergente.

Exprimons-y la vitesse V_1 du filet sur la section σ_1 d'amont où le régime est à peu près uniforme, en fonction de la vitesse moyenne correspondante U_1 et du rapport $\frac{V_1}{U_1}$, qui sera une certaine fonction φ des deux coordonnées *transversales* différant modérément de sa valeur moyenne 1. Si nous appelons ε l'écart $\varphi - 1$ de cette fonction d'avec l'unité, le carré ε^2 sera un peu sensible, d'une valeur moyenne $\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$ qui atteint quelques centièmes; mais son cube ε^3 sera généralement négligeable et, se trouvant positif au centre de la section, négatif à la périphérie, aura sa valeur moyenne, $\int \varepsilon^3 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, encore plus insensible.

Faisons ainsi, dans le second membre de (6), $V_1 = U_1\varphi$ et substituons-y de plus à U_1 le produit, évidemment équivalent, de la vitesse moyenne U_2 sur la section σ_2 par le rapport inverse μ des deux sections. Enfin posons, pour abréger,

$$\frac{U_2^2}{2g(P_1-P_2)}=\zeta. \tag{7}$$

La formule (6) deviendra, en y négligeant finalement une partie de l'ordre de petitesse de $\frac{\mu^6}{16}$,

$$V_2=\sqrt{2g(P_1-P_2)}\,(1+\zeta\mu^2\varphi^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2g(P_1-P_2)}\left(1+\frac{\zeta\mu^2}{2}\varphi^2-\frac{\zeta^2\mu^4}{8}\varphi^4\right), \tag{8}$$

Il en résulte, en multipliant par $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ et intégrant dans toute la section rétrécie σ_2, une expression de la vitesse moyenne U_2 à travers cette section, savoir

$$U_2=\sqrt{2g(P_1-P_2)}\left(1+\frac{\zeta\mu^2}{2}\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}-\frac{\zeta^2\mu^4}{8}\int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right). \tag{9}$$

Puis, en divisant (8) par (9), développant par la formule du binome la puissance -1 de cette dernière parenthèse et effectuant les produits, on aura la fonction qui définit le mode de distribution des vitesses dans la section rétrécie :

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{U_2}=1&+\frac{\zeta\mu^2}{2}\left(\varphi^2-\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)\\&-\frac{\zeta^2\mu^4}{8}\left(\varphi^4-\int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)-\frac{\zeta^2\mu^4}{4}\left(\varphi^2-\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Élevons enfin cette expression au cube, toujours jusqu'aux termes en μ^6 exclusivement; puis multiplions par $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ et intégrons, en supprimant finalement du résultat les nombreux termes qui se détruisent. Il viendra, comme formule du coefficient α_2 qui était à déterminer dans (5) :

$$\alpha_2=1+\frac{3}{4}\zeta^2\mu^4\left[\int\varphi^4\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}-\left(\int\varphi^2\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Observons, en portant dans (7) l'expression (9) de U_2, que le nombre ζ excède peu l'unité, savoir, d'une quantité comparable à μ^2; de sorte que l'on peut, sauf erreur négligeable (en μ^6), faire $\zeta=1$ dans (11).

Rappelons, en outre, que l'on a $\varphi = 1 + \varepsilon$, avec ε assez petit pour que son cube ε^3 soit jugé insensible, ou pour qu'on puisse prendre

$$\varphi^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2, \qquad \varphi^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2,$$

valeurs à substituer dans (11). Il vient ainsi, après des réductions évidentes,

$$(12) \qquad \alpha_2 = 1 + 3\mu^4 \left[\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - \left(\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} \right)^2 \right].$$

IV. On peut actuellement, avec une erreur relative sensible, il est vrai, mais néanmoins de l'ordre de petitesse de ε, remplacer $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ par $\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$. Effectivement, si les ε s'annulaient, ou qu'on eût $V = U$ sur la section d'amont σ_1 et, à plus forte raison, sur les autres sections σ moindres, tous les filets fluides éprouveraient, d'une section à l'autre, les mêmes changements relatifs de grosseur et l'on aurait, pour chaque filet, $\frac{d\sigma}{\sigma} =$ constante. Plus généralement, il est clair que chaque filet occupera comparativement à d'autres, à la traversée d'une section quelconque, une fraction $\frac{d\sigma}{\sigma}$ de l'espace total σ, d'autant moindre qu'il y sera plus rapide par rapport à eux, leurs inégalités relatives de vitesse se répercutant sur la variation des sections partielles relatives $\frac{d\sigma}{\sigma}$, en raison inverse de ces vitesses.

Si donc, dans $\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$, l'on remplace $\frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ par $\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, l'erreur absolue commise est de l'ordre du produit de ε^2 par ε, c'est-à-dire négligeable. De même, si l'on fait la pareille substitution dans $\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$, l'erreur est de l'ordre de ε^2. Mais alors l'intégrale restante, $\int \varepsilon \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, devient la valeur moyenne de ε à travers σ_1, c'est-à-dire zéro d'après la définition même de ε; d'où il suit que $\int \varepsilon \frac{d\sigma_2}{\sigma_2}$ est de l'ordre de ε^2 et a son propre carré négligeable. Ainsi, la formule (12) se réduit à

$$(13) \qquad \alpha_2 = 1 + 3\mu^4 \int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}.$$

Or on sait que le coefficient α considéré sur la section d'amont, c'est-à-dire α_1, excède l'unité de $3\int \varepsilon^2 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$, à l'erreur près négligeable $\int \varepsilon^3 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$. Donc, si nous retranchons l'unité des deux membres de (13), il vient, pour relier entre elles les deux valeurs de α entrant dans l'expression (5) du carré λ^2 du coefficient théorique du débit, la formule approximative très simple

$$\alpha_2 - 1 = \mu^4(\alpha_1 - 1). \tag{14}$$

V. La relation (5) devient alors, par l'élimination de α_2, la suppression *haut et bas* d'un facteur $1 - \mu^2$ commun et, finalement, une extraction de racine carrée,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2(\alpha_1 - 1)}} = 1 + \frac{\mu^2}{2}(\alpha_1 - 1). \tag{15}$$

On voit que le coefficient de débit λ, pour un liquide parfait, excède un peu l'unité. Si, par exemple, le venturi est *au quart*, ou que $\mu = \frac{1}{4}$, et si α_1 vaut environ 1,1, il vient

$$\lambda = 1 + \frac{\alpha_1 - 1}{32} = (\text{environ})\ 1 + \frac{1}{300}.$$

L'influence réductrice des frottements en retranchera, pour l'eau, une petite quantité, que l'on sait, par l'expérience des questions de cette nature et vu, ici, la très graduelle variation supposée des sections σ ou des vitesses, être comparable seulement au centième. La valeur définitive de λ se trouvera donc un peu inférieure à l'unité, d'une fraction de centième, conformément aux débits constatés notamment par M. Camichel, dans des observations soignées de laboratoire.