JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GOMES TEIXEIRA

**Extrait d'une lettre à M. Haton de la Goupillière**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série*, tome 9 (1913), p. 165-170.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__165_0>

## *Extrait d'une lettre à M. Haton de la Goupillière*

**Par Gomes TEIXEIRA.**

Ma première Communication concerne la théorie des développoïdes, qui a attiré bien des fois votre attention. Je vais démontrer à cet égard le théorème suivant :

*Les foyers d'une courbe* C *sont aussi des foyers de sa développoïde.*

On sait que la développée d'une courbe jouit de cette propriété, mais je crois que le théorème plus général que je viens d'énoncer n'a pas encore été signalé.

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de la courbe C. L'équation de la droite D qui passe par le point $(x, y)$ de cette courbe et fait un angle $\omega$ avec la tangente en ce point est

$$\begin{aligned} x'(\mathrm{Y}\cos\omega + \mathrm{X}\sin\omega) &+ y'(\mathrm{Y}\sin\omega - \mathrm{X}\cos\omega) \\ &= y(x'\cos\omega + y'\sin\omega) - x(y'\cos\omega - x'\sin\omega). \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport à $t$, on a

$$\begin{aligned} x''(\mathrm{Y}\cos\omega + \mathrm{X}\sin\omega) &+ y''(\mathrm{Y}\sin\omega - \mathrm{X}\cos\omega) \\ &= (x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'')\sin\omega + (yx'' - xy'')\cos\omega. \end{aligned}$$

Donc, l'enveloppe de la droite D, c'est-à-dire la développoïde de C, peut être représentée par les équations paramétriques

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{Y} &= y + (y'\cos\omega - x'\sin\omega)\frac{x'^2 + y'^2}{y'x'' - x'y''}\sin\omega, \\ \mathrm{X} &= x + (x'\cos\omega + y'\sin\omega)\frac{x'^2 + y'^2}{y'x'' - x'y''}\sin\omega. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, remarquons qu'on peut déterminer les foyers $(x_1, y_1)$ de la courbe donnée C au moyen de l'équation qui résulte de l'élimination de $t$ entre les équations

$$(2) \qquad y' = ix', \qquad y_1 - ix_1 = y - ix.$$

D'un autre côté, on peut déterminer les foyers $(X_1, Y_1)$ de la développoïde de C au moyen des équations

$$(3) \qquad Y' = iX', \qquad Y_1 - iX_1 = Y - iX.$$

Or, en dérivant les expressions de $x$ et $y$, données par les équations (1) par rapport à $t$ et en faisant ensuite $y = ix$, on trouve les relations

$$Y' = y' - 2ix'(i\cos\omega - \sin\omega),$$
$$X' = x' - 2ix'(\cos\omega + i\sin\omega);$$

d'où il résulte

$$Y' = iX'.$$

Les mêmes équations (1) donnent encore, quand on pose $y = ix$,

$$Y - iX = y - ix.$$

Donc, les valeurs de $t$ qui vérifient les équations (2) vérifient aussi les équations (3), si l'on pose $x_1 = X_1$, $y_1 = Y_1$; et par conséquent chaque foyer de C est aussi un foyer de sa développoïde.

*
* *

Ma seconde Communication concerne la théorie des foyers des courbes. Je vais en effet démontrer le théorème suivant, qui est peut-être nouveau :

*La polaire d'une courbe quelconque par rapport à un cercle ayant son centre en un foyer de cette courbe passe par les points circulaires de l'infini.*

Soient $y = f(x)$ la fonction définie par l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe donnée et $(x', y')$ les coordonnées d'un de ses foyers. Ces coordonnées doivent vérifier l'équation qui résulte de l'élimination de $x$ et $y$ entre les équations

$$y = f(x), \qquad f'(x) = i, \qquad iy' + x' = iy + x,$$

c'est-à-dire l'équation

$$iy' + x' = if[\varphi(i)] + \varphi(i),$$

où $\varphi$ désigne la fonction inverse de la fonction $f'(x)$.

D'un autre côté, en transportant l'origine des coordonnées en un point $(-x_1, -y_1)$, l'équation de la courbe donnée prend la forme

$$y + y_1 = f(x + x_1),$$

et l'équation de sa polaire par rapport au cercle représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

résulte de l'élimination de $x$ et $y$ entre les équations

$$[f(x + x_1) - y_1]Y + xX = r^2,$$
$$Yf'(x + x_1) + X = 0,$$

qui donne

$$\left\{f\left[\varphi\left(-\frac{X}{Y}\right)\right] - y_1\right\}Y + \left[\varphi\left(-\frac{X}{Y}\right) - x_1\right]X = r^2.$$

En faisant $X = \infty$, $\lim \frac{Y}{X} = i$, on déduit de cette équation la condition pour que la polaire considérée passe par les points circulaires de l'infini, savoir :

$$iy_1 + x_1 = f[\varphi(i)] + \varphi(i).$$

Donc $x_1 = x'$, $y_1 = y'$, et le théorème est démontré.

*
* *

Avant de terminer, je communiquerai encore un théorème sur un autre sujet.

Si une courbe glisse sur une droite fixe de manière qu'elle soit toujours tangente à cette droite en un même point de la droite, un point **M** du plan de la courbe décrit une ligne nommée *glissette de la courbe par rapport à la droite*. Cela posé, nous avons trouvé le théorème suivant :

*La glissette du centre du cercle fixe d'une épicycloïde ou hypocycloïde quelconque est une ellipse.*

Rapportons la courbe glissante à un système de coordonnées polaires ($\rho$, $\theta$) ayant pour pôle le point décrivant M et pour axe une droite arbitraire du plan de cette courbe, et rapportons la glissette à un système de coordonnées cartésiennes orthogonales ayant pour origine O, le point de contact de la courbe mobile avec la droite donnée, et pour axe des abscisses cette droite. En désignant par $\nu$ l'angle que la droite OM fait avec cet axe, et par $x$, $y$ les coordonnées du point M, on a

$$x = \mathrm{OM}\cos\nu = \rho\cos\nu, \qquad y = \rho\sin\nu,$$

et par conséquent la glissette peut être représentée par les équations paramétriques

$$x = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2\, d\theta^2 + d\rho^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2\, d\theta}{\sqrt{\rho^2\, d\theta^2 + d\rho^2}}.$$

Si la courbe glissante est représentée par les équations paramétriques polaires

$$\rho = \varphi(u), \qquad \theta = \psi(u),$$

les équations précédentes prennent la forme

$$(1) \qquad x = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2\theta'^2 + \rho'^2}}, \qquad y = \frac{\rho^2\theta'}{\sqrt{\rho^2\theta'^2 + \rho'^2}},$$

$\theta'$ et $\rho'$ désignant les dérivées de $\theta$ et $\rho$ par rapport à $u$.

Nous allons appliquer ces formules générales aux épicycloïdes et hypocycloïdes.

Les équations de ces courbes sont, R et $r$ étant les rayons des cercles mobile et fixe,

$$x = (\mathrm{R} + r)\cos\alpha - r\cos\frac{\mathrm{R} + r}{r}\alpha,$$

$$y = (\mathrm{R} + r)\sin\alpha - r\sin\frac{\mathrm{R} + r}{r}\alpha.$$

Donc

$$(2) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2 = (\mathrm{R} + r)^2 + r^2 - 2(\mathrm{R} + r)r\cos\frac{\mathrm{R}}{r}\alpha.$$

Nous avons encore, en faisant $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$,

$$d\rho \cos\theta - \rho \sin\theta \, d\theta = (R + r)\left(\sin \frac{R+r}{r}\alpha - \sin\alpha\right) d\alpha,$$

$$d\rho \sin\theta + \rho \cos\theta \, d\theta = (R + r)\left(\cos\alpha - \cos \frac{R+r}{r}\alpha\right) d\alpha$$

et, par suite, en tenant compte de l'équation précédente,

$$d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2 = 2(R + r)^2\left(1 - \cos\frac{R}{r}\alpha\right) d\alpha^2 = (R + r)\frac{\rho^2 - R^2}{r} d\alpha^2.$$

Mais l'équation (2) donne

$$\rho \, d\rho = (R + r) R \sin\frac{R}{r}\alpha \, d\alpha$$

et, par suite,

$$d\alpha^2 = \frac{4 r^2 \rho^2 \, d\rho^2}{R^2(\rho^2 - R^2)[(R + 2r)^2 - \rho^2]}.$$

Donc

$$d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2 = \frac{4(R + r) r \rho^2 \, d\rho^2}{R^2[(R + 2r)^2 - \rho^2]}$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho\sqrt{m^2\rho^2 - R^2}}, \qquad m = \frac{R}{R + 2r}.$$

Cette équation peut être intégrée par les méthodes classiques, et l'on trouve

$$\theta = \frac{1}{m}\left[\text{arc tang}\sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{m^2(R^2 - \rho^2)}} - m \,\text{arc tang}\sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{R^2 - \rho^2}}\right]$$

ou

$$\theta = \frac{1}{m}\left(\text{arc tang}\frac{u}{m} - m \,\text{arc tang}\, u\right),$$

en posant

$$u = \sqrt{\frac{m^2\rho^2 - R^2}{R^2 - \rho^2}}.$$

Donc la courbe peut être représentée par les équations paramétriques

$$\theta = \frac{1}{m}\left(\text{arc tang}\frac{u}{m} - m \,\text{arc tang}\, u\right),$$

$$\rho^2 = \frac{R^2(u^2 + 1)}{u^2 + m^2}.$$

En appliquant maintenant à ces équations les formules (1) et en tenant compte des relations

$$\theta' = \frac{1 - m^2}{(u^2 + m^2)(u^2 + 1)}, \qquad \rho' = \frac{R^2(m^2 - 1)u}{\rho(u^2 + m^2)^2},$$

on obtient les équations

$$x = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + m^2}}, \qquad y = \frac{R}{\sqrt{u^2 + m^2}};$$

d'où il résulte, par l'élimination de $u$,

$$x^2 + m^2 y^2 = R^2.$$

Cette équation représente une ellipse, et le théorème énoncé est donc démontré.

Dans le même ordre d'idées, j'énoncerai, sans m'arrêter à sa démonstration, la proposition suivante :

*La roulette ordinaire et la roulette à glissement proportionnel décrites par le centre du cercle fixe d'une épicycloïde ou hypercycloïde ordinaire, roulant sur une droite, sont formées par une suite d'arcs d'ellipse.*

J'appelle *roulette à glissement proportionnel* la courbe décrite par un point du plan d'une courbe roulant et glissant sur une droite, de manière que le segment compris entre le point de contact M avec la droite et un point fixe O de cette droite, soit proportionnel à l'arc de cette courbe compris entre le point M et le point de la courbe qui coïncide avec O quand elle devient tangente à la droite en ce point.

On connaît cette propriété des roulettes ordinaires des épicycloïdes ou hypocycloïdes, mais je crois que la généralisation aux roulettes *à glissement proportionnel* n'a pas encore été signalée.