

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALEX. VÉRONNET

Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 8 (1912), p. 331-463.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8_331_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte
de la Terre;*

PAR ALEX. VÉRONNET.

INTRODUCTION.

Je me suis proposé, dans ce travail, de reprendre et de compléter les travaux sur la figure d'équilibre de l'ellipsoïde hétérogène en rotation, en particulier ceux de MM. Hamy, Callandreau, Poincaré, Roche, Tisserand, etc., avec application à la Terre et aux planètes.

J'ai donc étudié le *cas général de vitesse* et d'aplatissement, puis le *cas pratique d'une vitesse lente*, d'abord en première approximation en négligeant e^2 ou λ^4 , puis en *seconde approximation* en tenant compte de ce second terme, et en particulier les *limites imposées à l'aplatissement* de la Terre par la considération de la précession et de l'attraction (problème de M. Poincaré). Enfin j'ai soumis ces différents problèmes à des *calculs pratiques et numériques*, au moyen de différentes lois de densité, afin de vérifier, préciser et compléter les calculs purement théoriques.

En donnant toutefois la première place à l'hypothèse fondamentale de Clairaut, je ne me suis attaché exclusivement à aucune, mais je me suis efforcé de les envisager toutes successivement avec leurs inconvénients, leurs avantages et les limites des solutions qu'elles peuvent fournir.

J'ai tout d'abord posé les *équations générales* du problème suivant la méthode classique et suivant celle de M. Hamy, en étendant ces équations à l'hypothèse d'une variation continue de la densité (M. Hamy n'avait considéré que des couches discontinues). J'en ai

déduit une relation générale et simple entre la variation de la vitesse en profondeur et en latitude et la variation de l'aplatissement

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial a} + 2a \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} = \frac{2\pi f C}{(1 + \lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da} \quad \text{où} \quad C > 0.$$

On en conclut, entre autres choses, que dans l'équilibre permanent les surfaces de niveau ne peuvent pas être rigoureusement ellipsoïdales (Hamy) et que, de plus, l'aplatissement des ellipsoïdes déformés croît toujours du centre à la surface.

J'ai étudié, dans le second Chapitre, le *cas général des ellipsoïdes de révolution* et j'ai pu réussir à étendre à l'ellipsoïde hétérogène les démonstrations faites pour les ellipsoïdes de Maclaurin. On démontre, en effet, que dans les différents cas la relation entre la vitesse et l'aplatissement des surfaces de niveau conserve une forme analogue : la vitesse est nulle pour $\lambda^2 = 0$ et pour $\lambda^2 = \infty$ et passe par un maximum dans l'intervalle. De plus, la force centrifuge ne saurait, en aucun cas, devenir égale à l'attraction, ni aucune surface être sphérique. Dans le cas d'une vitesse uniforme sur toutes les couches, on aurait

$$D_1 \gamma < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 \gamma, \quad \gamma = \frac{3 + \lambda_1^2}{\lambda_1^3} \arctan \lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2};$$

on sait qu'on a $\omega^2 = 2\pi f D_1 \gamma$ dans le cas de l'ellipsoïde homogène.

J'ai ensuite repris, rapidement, les principales démonstrations relatives à l'équation et au problème de Clairaut, au moyen des nouvelles équations établies par la méthode de M. Hamy. Ces démonstrations sont souvent ainsi simplifiées, et je les complète pour les adapter aux différentes hypothèses envisagées dans ce travail et aux calculs numériques postérieurs. J'ai mis en évidence la fonction très utile dans la suite $\zeta = -\frac{rD'}{D}$ analogue à η de M. Radau et la formule qui les relie : $0 < \eta < \zeta < 3$. J'ai démontré que cette fonction η peut avoir un maximum et pas de minimum et que, dans le cas de la Terre, elle était toujours croissante. Enfin, j'ai établi que la loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités et nullement de la vitesse, de la densité moyenne ou de la masse : l'aplatissement superficiel seul en dépend.

A la suite de M. Poincaré, j'ai repris l'étude des *limites de l'aplatis-*

sement en tenant compte de la précession et de l'attraction. J'ai d'abord mis en relief les trois formules fondamentales : équation de Clairaut à la surface, formule des moments d'inertie et formule tirée de ces deux-là, qui permettront de calculer *numériquement* trois valeurs distinctes de l'aplatissement : l'une dépendant seulement de l'attraction et de la force centrifuge ou de φ , l'autre des moments d'inertie ou de J , la troisième des deux quantités φ et J .

J'ai donné ensuite l'équation de condition qu'on tire des précédentes en y introduisant la condition de la vitesse constante, on a

$$\lambda^2 + \frac{4}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi \quad \text{ou} \quad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2}.$$

M. Poincaré avait établi une limite inférieure $\frac{1}{e} > 287,10$ en vertu du maximum de K . Comme η est toujours croissant dans le cas de la Terre, donc $\eta < \eta_1$, j'en ai déduit une limite supérieure $\frac{1}{e} < 297,40$. Des calculs numériques et pratiques variés (25 déterminations), avec différentes lois de densités, donnent des limites encore beaucoup plus étroites

$$297,13 < \frac{1}{e} < 297,22.$$

Mais en négligeant λ^4 , on laisse planer une indétermination de 1,5 au moins, qui exige qu'on tienne compte de λ^4 .

J'ai donc repris rapidement pour les appliquer à ce nouveau problème, et en partant toujours des nouvelles équations tirées de la méthode de M. Hamy, les calculs de M. Callandreau, dans son beau Mémoire où il *tient compte de* λ^4 et de la déformation de l'ellipsoïde. Après avoir retrouvé et transformé ses formules pour les appliquer à l'équation de condition du problème de M. Poincaré, je trouve pour les nouvelles limites théoriques

$$\frac{1}{e} = 297,12 \pm 0,38 \quad \text{à } 0,01 \text{ près.}$$

De plus, l'influence des termes en e^3 est négligeable, on a cinq chiffres exacts. Pour tout aplatissement situé en dehors de ces limites, il faudrait faire, pour la Terre, d'autres hypothèses que celle de Clairaut.

Je donne enfin la formule de la variation de la pesanteur, en tenant compte de e^2 . Elle introduit un terme en e^2 qui peut élever de 2 à 5 unités l'inverse de l'aplatissement déterminé autrefois par le pendule, et un terme en $e^2 \cos^2 l$ qui se trouve être *pratiquement* nul pour la Terre. Le nombre trouvé par Faye devient 296,7.

J'ai alors étudié dans le Chapitre suivant les *principales de ces hypothèses* et montré comment elles modifient l'équation de condition et de quelle manière elles pourraient cadrer avec les différents aplatissements possibles. Dans le cas d'une Terre solide et $\frac{1}{e} < 297$, il aurait fallu qu'elle se solidifie à une vitesse constante plus grande que la vitesse actuelle, ou bien avec la même vitesse superficielle, mais des vitesses intérieures décroissantes à partir de la surface. Dans le cas d'une Terre fluide et $\frac{1}{e} < 297$, il faudrait admettre des vitesses croissantes à partir de la surface dont le ralentissement s'expliquerait par le frottement des marées. Il a fallu, dans cette hypothèse générale toute nouvelle des vitesses variables, reprendre la théorie de la précession et l'on aboutit, pour déterminer la nouvelle valeur des rapports des moments d'inertie, à la formule

$$\omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega} da^3 \lambda^2 = 2J \int_0^1 \rho da^3 \quad \text{ou} \quad \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega} da^3 e = J \int_0^1 \rho da^3,$$

Les calculs de précession m'ont amené à étudier la déviation élémentaire exercée dans ce cas par l'action du Soleil et de la Lune sur un anneau fluide tournant suivant un parallèle terrestre. Je trouve que la déviation, maximum à l'équateur, décroît puis devient nulle vers 35° où elle change alors de signe. Il s'ensuit que les couches superficielles de ce parallèle sont alternativement comprimées et dilatées suivant les mêmes périodes et les mêmes maximums que la nutation elle-même. Ce qui permet d'esquisser une *théorie des tremblements de Terre* qui cadre avec la théorie expérimentale de de Parville.

Le Chapitre VII est consacré aux *calculs numériques pratiques*, faits au moyen de la loi de Lipschitz et appliqués aux différentes hypothèses étudiées ci-dessus. L'hypothèse de Clairaut et les trois équations fondamentales qui s'y rattachent fournissent trois séries de valeurs pour e , quand on fait varier ρ_1 de 2 à 3. Ces séries, intéres-

santes en elles-mêmes, le sont plus encore par ce fait que leur accord a toujours lieu pour $\frac{1}{e} = 287,17$ à 0,02 près. Les mêmes calculs dans le cas d'une Terre solide ou de vitesses variables fixent les conditions pratiques que ces hypothèses exigent. Ils montrent qu'alors au contraire l'aplatissement peut varier dans de larges limites, au delà de 280 et de 300. Des Tableaux et des graphiques résument ces calculs, qui complètent les essais de Roche et de M. Hamy, qui n'avaient considéré que trois couches distinctes seulement. La variation de densité étudiée ici est au contraire continue. J'ai étudié encore deux autres lois : $\eta' = 0$ ou $\eta = \eta$, qui est un cas limite, et $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)^m$ qui permet d'expliquer l'aplatissement considérable de Jupiter et de Saturne, ce qui est impossible avec la loi de Lipschitz. J'ai enfin donné quelques formules et calculé quelques éléments pour la seconde approximation en tenant compte de e^2 . La déformation maximum de l'ellipsoïde reste comprise entre 1^m, 26 et 4^m, 27. (Valeur probable 3^m, 28.)

Il faut remarquer, en terminant, que les limites indiquées ici cadrent parfaitement avec la détermination de l'aplatissement faite par M. Helmer. Si elle est confirmée, comme elle semble l'être déjà, d'après la Note de M. Poincaré dans l'*Annuaire* de 1911, Note A, ce sera une confirmation également de l'hypothèse de Clairaut, puisque toute autre hypothèse exige un aplatissement un peu différent, comme on l'a vu.

Rappelons que l'hypothèse de Clairaut suppose que la Terre tourne tout d'une pièce avec une vitesse constante et qu'elle est assez fluide, ou du moins que l'écorce possède assez de jeu ou d'élasticité pour se mettre, au moins à la longue, en équilibre avec les forces d'attraction et la force centrifuge. Or, comme le disait excellemment M. Poincaré dans la Note citée : « Il convient, sans doute, de se représenter la Terre comme pourvue d'une certaine viscosité, de telle sorte que tout en se comportant comme un solide sous l'influence de forces dont les variations seraient relativement rapides, elle aurait cédé à la façon d'un corps pâteux à des actions séculaires dont les effets se seraient accumulés lentement » (p. 23). Les expériences de M. Hecker, à Potsdam (*Annuaire*, 1909, Note de M. Lallemand), sur la déviation de la verticale démontrent que l'écorce possède assez de souplesse pour

obéir, en 24 heures, au moins partiellement, aux forces perturbatrices produisant des marées diurnes. Il est évident qu'elle est depuis longtemps en équilibre avec les forces constantes de l'attraction et de la force centrifuge (1). Il en serait de même *a fortiori* à l'intérieur car déjà à 20^m de profondeur la pression serait assez considérable pour écraser et réduire en poussière le granit qui forme la partie superficielle de l'écorce (RADAU, *La constitution intérieure de la Terre*, p. 79). M. Radau ajoutait alors, en 1880 : « Le cuivre, l'acier, la fonte de fer résistent à des pressions doubles ou triples, mais que deviennent les métaux sous une pression cent fois, mille fois plus fortes ? » Nous le savons maintenant et les expériences de MM. Tesla, Guillaume, etc. établissent que sous fortes pressions les métaux *fluent* comme les liquides et se moulent même à froid. De même à de grandes vitesses, sous de fortes pressions, les liquides acquièrent une rigidité apparente égale à celle des solides. Un jet d'eau sous une pression de 500^{atm} acquiert la rigidité de l'acier et ne peut être coupé même par un fort coup d'épée. On peut dire que, sous fortes pressions, les corps ne sont plus ni liquides ni solides mais possèdent à la fois des propriétés de ces deux états qui nous paraissent contradictoires, de même qu'à de hautes températures, au delà du point critique, et sous fortes pressions, les corps ne sont ni liquides ni gazeux mais possèdent des propriétés mixtes. Et c'est pourquoi j'ai tenu à envisager également les différentes

(1) Ces expériences de Potsdam justifient pleinement les hypothèses de Pratt et de Faye sur la *compensation* des masses continentales et sous-marines, l'hypothèse de l'*isostasie* de Airy reprise par M. Hayford, appuyées d'ailleurs sur de sérieuses considérations expérimentales. Si l'écorce possède un certain jeu et repose sur un sous-sol au moins visqueux, on aura à une certaine profondeur une surface de niveau en équilibre hydrotastique, sur laquelle la pression est partout la même. Le poids et la masse des couches situées entre cette surface et la surface extérieure seront donc aussi partout les mêmes. Il y aura *une certaine compensation* au point de vue de l'attraction. D'ailleurs on s'explique, qu'au moment de la formation de la croûte terrestre, les parties les plus lourdes se sont enfoncées le plus profondément, refoulant les plus légères, les continents, et formant des cuvettes remplies par les eaux, les océans. Le refroidissement au contact de l'eau n'a fait qu'accentuer la différence de densité et par conséquent de niveau.

hypothèses qui peuvent ne pas s'exclure et qui du moins contribuent à limiter la meilleure solution.

Les principaux Mémoires utilisés ont été :

1° Pour le problème général des deux premiers Chapitres, la thèse de M. HAMY, *Étude de la figure des corps célestes*, 1887, où il admet des couches discontinues et ne traite complètement que le cas des surfaces homofocales.

2° Pour le problème de Clairaut et celui de M. Poincaré, de nombreuses Notes indiquées au cours du travail. C'est d'ailleurs une partie classique sur laquelle on pourra consulter avec fruit, par exemple, le Tome II de la *Mécanique céleste* de Tisserand.

3° Pour la seconde approximation, en tenant compte de λ^1 ou e^2 , j'ai surtout utilisé le travail de M. CALLANDREAU, *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, précédé de celui de Airy, suivi de ceux de Helmert, Wiechert, Darwin, etc.

4° Enfin, pour les calculs numériques, il faut citer ceux de Roche, Hamy, Wiechert, faits dans l'hypothèse d'une Terre composée de 2 ou 3 couches seulement, et un calcul isolé de G.-H. Darwin au moyen de la formule de Roche.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES ET ÉQUILIBRE PERMANENT.

1. *Les deux méthodes.* -- Soit une masse fluide hétérogène composée de couches ellipsoïdales de densité variable ρ . En suivant la méthode imaginée par M. Hamy⁽¹⁾, nous pouvons la regarder comme formée, non plus de couches ellipsoïdales superposées, mais de véritables ellipsoïdes qui se compénètrent. Nous donnons à l'ellipsoïde limité par la surface S, et d'axes a, b, c , une densité égale à la différence de densité entre deux surfaces voisines. Mais nous remplaçons ici les différences finies de M. Hamy par les différentielles et les Σ par des f afin de considérer une variation continue et quelconque de la

⁽¹⁾ *Étude de la figure des corps célestes*, 1887, p. 3.

densité. On représentera cette différentielle de la densité par $-\rho' da$ parce qu'on a $\rho' < 0$ et que les densités doivent être positives. On les évaluera sur l'axe de rotation a .

Soit un point $N(x_n, y_n, z_n)$ situé sur l'ellipsoïde S_n d'axes a_n, b_n, c_n . Les composantes de l'attraction des ellipsoïdes pour lesquels ce point est extérieur seront, en employant les formules de Jacobi,

$$X_e = -2\pi f x_n \int_0^{a_n} -\rho' da \int_{\mu}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}$$

où

$$\Delta_s = \frac{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}{abc},$$

et μ étant la racine positive de l'équation,

$$(1) \quad \frac{x_n^2}{a^2+\mu} + \frac{y_n^2}{b^2+\mu} + \frac{z_n^2}{c^2+\mu} = 1.$$

Pour les ellipsoïdes qui contiennent le point N à leur intérieur, en commençant par l'ellipsoïde $S_1(\rho_1, a_1, b_1, c_1)$, on aura

$$\begin{aligned} X_i &= -2\pi f x_n \rho_1 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a_1^2+s)\Delta_s} - 2\pi f x_n \int_{a_n}^1 -\rho' da \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \\ &= -2\pi f x_n \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \quad (1), \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} X &= X_e + X_i = -2\pi f x_n \int_0^{a_n} -\rho' da \int_{\mu}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \\ &\quad - 2\pi f x_n \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}. \end{aligned}$$

Les composantes Y et Z s'obtiendraient en changeant x_n, a_n, a en y_n, b_n, b et en z_n, c_n, c .

(1) Cette dernière notation, qui réduit X_i à un seul terme, n'est pas très régulière; mais je l'ai trouvée très commode pour la suite du calcul car elle permet de réduire la formule fondamentale (5) à deux termes comme la formule (5'), ce qui en fait ressortir davantage les analogies et rend plus facile le passage de l'une à l'autre. Il suffit de se rappeler que le terme en ρ_1 est une constante où l'on donne à l'élément d'intégration sa valeur à la surface.

Les \int_{μ}^{∞} et \int_0^{∞} sont des fonctions de a, b, c de la couche S, à laquelle correspond ρ' et ρ ou ρ_1 . Les \int_{μ}^{∞} sont en outre fonction de x_n, y_n, z_n , d'après (1).

En désignant par ω la vitesse de rotation du point N, les composantes de la force agissant sur le point N seront :

$$X, \quad Y + \omega^2 y_n, \quad Z + \omega^2 z_n,$$

les coordonnées x_n, y_n, z_n du point N vérifiant la relation

$$(3) \quad \frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{y_n^2}{b_n^2} + \frac{z_n^2}{c_n^2} = 1.$$

L'équilibre exige que la force soit normale à la surface, d'où les conditions

$$(4) \quad \begin{aligned} X \frac{a_n^2}{x_n} &= (Y + \omega^2 y_n) \frac{b_n^2}{y_n} = (Z + \omega^2 z_n) \frac{c_n^2}{z_n}, \\ \omega^2 &= -\frac{Y}{y_n} + \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{X}{x_n} = -\frac{Z}{z_n} + \frac{a_n^2}{c_n^2} \frac{X}{x_n}. \end{aligned}$$

Ces deux conditions donnent immédiatement :

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\omega^2}{2\pi f} &= \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} -\rho' da \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s} \\ &+ \frac{1}{b_n^2} \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\omega^2}{2\pi f} &= \frac{1}{c_n^2} \int_0^{a_n} -\rho' da \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s} \\ &+ \frac{1}{c_n^2} \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^{\infty} \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}. \end{aligned}$$

Ces deux valeurs de ω doivent être égales. Il y a une solution évidente : $b = c, b_n = c_n$: ellipsoïdes de révolution. Dans les autres cas, on ignore.

La *méthode classique* consiste à considérer directement l'ellipsoïde hétérogène comme formé de couches ellipsoïdales de densité et d'apla-

tissement variables. Or la différentiation des formules de l'ellipsoïde homogène donne pour l'attraction d'une couche élémentaire

$$dX_e = -2\pi f x_n \rho d \int_{\mu}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta_s}, \quad dX_i = -2\pi f x_n \rho d \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta_s}.$$

Pour l'attraction de l'ellipsoïde hétérogène, puis pour ω^2 , on a ensuite

$$\begin{aligned} X = X_e + X_i &= -2\pi f x_n \left[\int_0^{a_n} \rho d \int_{\mu}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta_s} + \int_{a_n}^1 \rho d \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta_s} \right], \\ (5') \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} &= \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} \rho d \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + s} - \frac{a_n^2}{a^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta_s} \\ &\quad + \frac{1}{b_n^2} \int_{a_n}^1 \rho d \int_0^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + s} - \frac{a_n^2}{a^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}. \end{aligned}$$

Cette dernière formule peut s'écrire :

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = \int_0^{a_n} \rho d\Lambda_{\mu} + \int_{a_n}^1 \rho d\Lambda_0, \quad \Lambda_{\mu} = \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + s} - \frac{a_n^2}{a^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = (\rho \Lambda_{\mu})_0^{a_n} + (\rho \Lambda_0)_{a_n}^1 - \int_0^{a_n} \Lambda_{\mu} d\rho - \int_{a_n}^1 \Lambda_0 d\rho.$$

Or, si l'on fait $a = 0$, on a $b = 0$ et $c = 0$, d'où $\frac{1}{\Delta_s} = 0$ et $\Lambda_{\mu} = 0$.

De même, pour $a = a_n$, on a $b = b_n$; $c = c_n$ et $\mu = 0$, d'après 1 et 3. On a donc

$$(\rho \Lambda_{\mu})^{a_n} = (\rho \Lambda_0)^{a_n} \quad \text{et} \quad (\rho \Lambda_{\mu})_0^{a_n} + (\rho \Lambda_0)_{a_n}^1 = (\rho \Lambda_0)^1 = \rho_1 \Lambda_0.$$

Il vient :

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = - \int_0^{a_n} \Lambda_{\mu} d\rho - \int_{a_n}^1 \Lambda_0 d\rho + \rho_1 \Lambda_0 = \int_0^{a_n} -\rho' \Lambda_{\mu} da + \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \Lambda_0.$$

C'est précisément la formule (5). Ces deux formules (5) et (5') sont donc identiques. La première a l'avantage de présenter les Λ_0 et les Λ_{μ} sous le signe somme, sans différentiation, en conservant la forme

simple de l'attraction des ellipsoïdes homogènes. On pourra donc plus facilement, au moyen de ces formules en ρ' , tenir compte de tous les résultats acquis sur ce dernier point.

Nous distinguerons maintenant l'*équilibre permanent* où les frottements ont égalisé les vitesses en profondeur et en latitude et l'*équilibre transitoire* où ces vitesses ne sont pas encore égalisées (Soleil, Jupiter, Saturne). Ce dernier équilibre, d'ailleurs, serait définitif si le frottement était nul.

Nous allons donc étudier l'expression de la variation de ω^2 en latitude et en profondeur.

2. *Variation de la vitesse de rotation en latitude.* — Les formules (5) et (6) donnent la vitesse de rotation sur la couche S_n . Il suffit de les dériver par rapport à x_n^2 . On remarquera que ω^2 est fonction de x_n^2 , seulement par l'intermédiaire de μ . On aura

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x_n^2} \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} -\rho' \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_n^2} da,$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Delta_\mu}{\partial \mu} = - \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right) \frac{1}{\Delta_\mu} \quad (\Delta_\mu = \Delta_s \quad \text{ou} \quad s = \mu).$$

μ est défini par (1). Pour obtenir $\frac{\partial \mu}{\partial x_n^2}$ éliminons y_n^2 entre (1) et (3) en multipliant d'abord (3) par $\frac{b_n^2}{b^2 + \mu}$ et lui retranchant (1). On obtient

$$\frac{x_n^2}{a_n^2} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right) + \frac{z_n^2}{c_n^2} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{c_n^2}{c^2 + \mu} \right) = \frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - 1.$$

Dérivons par rapport à x_n^2 , on a

$$(9) \quad B \frac{\partial \mu}{\partial x_n^2} = - \frac{1}{a_n^2} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right),$$

en posant

$$(10) \quad B = \frac{x_n^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2 + \mu)^2} - \frac{b_n^2}{(b^2 + \mu)^2} \left(\frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{z_n^2}{c_n^2} - 1 \right) \\ = \frac{x_n^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{y_n^2}{(b^2 + \mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2 + \mu)^2}.$$

Portant (8) et (9) dans (7), on obtient

$$(11) \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 b_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right)^2 \frac{\rho' da}{B \Delta_\mu}$$

La seconde condition (6) donne de même

$$(11') \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 c_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{c_n^2}{c^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right)^2 \frac{\rho' d\alpha}{B \Delta_\mu}.$$

Pour que la vitesse de rotation soit la même sur toute la surface S_n quelconque, c'est-à-dire pour que la figure ellipsoïdale d'équilibre soit compatible avec une vitesse de rotation uniforme en latitude, il faut, ou bien :

1° $\rho' = 0$, densité constante, ellipsoïde homogène;

2° ou $\frac{a_n^2}{a^2 + \mu} = \frac{b_n^2}{b^2 + \mu} = \frac{c_n^2}{c^2 + \mu}$, quel que soit a, b, c : ellipsoïdes homofocaux.

Dans ce dernier cas, on aurait

$$\lambda^2 a^2 = b^2 - a^2 = h^2, \quad \lambda'^2 a^2 = c^2 - a^2 = k^2,$$

λ et λ' deviendraient infinis au centre, avec $a = 0$; $b = h$; $c = k$. L'aplatissement serait égal à 1 et l'ellipsoïde central réduit à un disque aplati.

5. Variation de la vitesse de rotation en profondeur. — Pour plus de simplicité nous l'étudierons le long de l'axe polaire a , suivant lequel on évalue aussi les densités (1). (Voir la Note à la fin.)

Transformons d'abord la formule (5) de façon à n'avoir qu'une seule limite en a_n . On aura :

$$(12) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} (\rho_1 - \rho' da) \int_0^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2 + s} - \frac{a_n^2}{a^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta_s} \\ - \frac{1}{b_n^2} \int_0^{a_n} -\rho' da \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + s} - \frac{a_n^2}{a^2 + s} \right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

(1) Le long de l'axe polaire $y_n = z_n = 0$, les formules (1) et (3) se réduisent à

$$1' \frac{x_n^2}{a^2 + \mu} = 1, \quad 3' \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, \quad a^2 + \mu = a_n^2 = x_n^2.$$

Cette expression dérivée par rapport à a_n donne

$$(13) \quad \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = \frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{\partial E}{\partial a_n} - C \frac{d}{da_n} \left(\frac{a_n^2}{b_n^2} \right)$$

où

$$D = \int_0^{a_n} -\rho' da \int_0^\mu \frac{ds}{(b^2+s)\Delta_s}, \quad E = \int_0^{a_n} -\rho' da \int_0^\mu \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},$$

et en rétablissant les intégrales dans l'ordre primitif

$$C = \int_0^{a_n} -\rho' da \int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} + \int_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho' da) \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} = -\frac{1}{2\pi f} \frac{X}{a_n}.$$

On aura donc d'abord $C > 0$ avec $\rho' < 0$, puis

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad -C \frac{d}{da_n} \left(\frac{a_n^2}{b_n^2} \right) = \frac{C}{(1+\lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

Dans E, ρ' dépend seulement de la variable a , \int_0^μ est fonction de a et de μ qui, défini par (1), est fonction de a et de a_n , de a_n par x_n d'après (3). Nous aurons donc

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = -\rho' \left[\int_0^\mu \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \right]^{a_n} + \int_0^{a_n} -\rho' \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\int_0^\mu \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} \right] \frac{\partial \mu}{\partial x_n^2} \frac{\partial x_n^2}{\partial a_n} da.$$

Dans la première accolade, nous aurons, après intégration, une fonction de μ et de a , où il faudra faire $a = a_n$. Or, si nous faisons $a = a_n$ dans (1), on a $\mu = 0$ d'après (3). Donc ce terme est nul.

Dans le second terme, nous avons déjà obtenu

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^\mu \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} = \frac{1}{(a^2+\mu)\Delta_\mu}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x_n^2} = \frac{-1}{B a_n^2} \left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu} \right).$$

On a aussi dans (3') :

$$\frac{\partial x_n^2}{\partial a_n} = \frac{\partial a_n^2}{\partial a_n} = 2 a_n;$$

d'où, finalement,

$$\frac{\partial E}{\partial a_n} = -\frac{2 a_n}{a_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu} \right) \frac{-\rho' da}{(a^2+\mu) B \Delta_\mu}.$$

On aurait de même :

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right) \frac{-\rho' da}{(b^2 + \mu) B \Delta \mu};$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{\partial E}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right) \frac{-\rho' da}{B \Delta \mu}.$$

Où, en tenant compte de (11),

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{\partial E}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{2\pi f} \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2}.$$

On obtient donc finalement la *formule fondamentale*

$$(14) \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} + 2a_n \frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f C}{(1 + \lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

La formule (6) donnerait une expression identique où λ' remplacerait λ et serait défini par

$$c^2 = a^2(1 + \lambda'^2).$$

4. Conclusions. — Nous étudierons le cas où les deux conditions de l'équilibre permanent seraient réalisées et ceux où il n'y en a qu'une seule.

1° L'équilibre permanent exige $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = 0$ et $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = 0$. Cette dernière condition ne peut être réalisée, nous l'avons vu, que si les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes homofocaux. L'ensemble de ces deux conditions exige d'après (14), $\frac{d\lambda^2}{da_n} = 0$, c'est-à-dire que ces surfaces soient des ellipsoïdes homothétiques.

Ces deux conditions sont incompatibles. Dans un fluide hétérogène, l'équilibre permanent est impossible avec des surfaces ellipsoïdales. C'est le théorème de M. Hamy étendu au cas où la variation des densités est continue.

Volterra a également établi directement l'impossibilité d'ellipsoïdes homothétiques comme surfaces de niveau (1).

(1) *Acta mathematica*, t. VII, 1903, p. 105-124. M. Poincaré avait déjà démontré cette impossibilité pour des couches discontinues (*Journal de Liouville*, 4^e série, t. 6, 1890, p. 69). Volterra étend cette démonstration à une

2° La formule (11) montre que, sauf pour les ellipsoïdes homofocaux, avec $\rho' < 0$ on a $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} > 0$. La vitesse de rotation sur une surface S_n doit augmenter avec x_n de l'équateur au pôle pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales.

Si donc l'équilibre permanent est atteint sur la surface S , la vitesse de rotation à l'équateur, devenue égale à celle du pôle, se trouve être un peu plus grande que celle qui permettrait de réaliser une figure ellipsoïdale. La surface s'allongera en se renflant à l'équateur. Cet allongement a pour effet de diminuer la valeur X de la composante de l'attraction au pôle. La surface va donc se renfler à la fois au pôle et à l'équateur en se creusant entre les deux. C'est ce que M. Callandreau avait démontré pour un ellipsoïde de révolution en tenant compte de λ^4 (1).

3° Supposons $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = 0$, nous aurons

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = \frac{2\pi f C}{(1 + \lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

On voit que, toutes choses égales d'ailleurs, $\frac{d\lambda^2}{da_n}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n}$. La rapidité de variation de l'aplatissement en profondeur augmente avec celle de la vitesse de rotation. Nous vérifierons cette loi, au Chapitre suivant, sur trois exemples : ellipsoïdes homofocaux, λ croît de λ_1 à ∞ , variation maximum de la vitesse ; ellipsoïdes homothétiques, λ constant, variation de vitesse plus faible ; enfin avec une vitesse constante λ décroît de λ_1 à λ_0 . Si $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2}$ n'est pas nul ou négligeable, ces conclusions s'appliqueront à des ellipsoïdes déformés.

4° Supposons enfin $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = 0$. En remplaçant $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2}$ par sa valeur

variation continue de la densité, en faisant remarquer en passant que les démonstrations faites pour le discontinu ne permettent pas toujours de passer à la limite et de les appliquer à une variation continue.

(1) *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, p. 51.

dans (14), on a

$$(15) \quad \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2} \frac{d\lambda^2}{da_n} = \frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu} \right)^2 \frac{-\rho' da}{B\Delta_\mu}.$$

Or, le second membre est toujours positif car $\rho' < 0$, donc $\frac{d\lambda^2}{da_n} > 0$.

Si l'on suppose $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} \neq 0$ de manière à réaliser des surfaces de niveau rigoureusement ellipsoïdales, leur aplatissement croîtra du centre à la surface. Le théorème de Clairaut en est un cas particulier.

Si $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$ les surfaces ellipsoïdales sont déformées, mais la conclusion précédente subsiste appliquée à l'aplatissement correspondant.

Au centre $\frac{1}{B} = a_n^2$, $\Delta_\mu = 1$, le second membre tend vers 0, on a $\frac{d\lambda^2}{da_n} = 0$. L'aplatissement passe par un minimum au centre.

D'où le théorème général :

Dans une masse fluide hétérogène, l'équilibre permanent est impossible avec des surfaces ellipsoïdales. Quand il est atteint, les surfaces de niveau prennent la forme d'ellipsoïdes déprimés entre le pôle et l'équateur et dont l'aplatissement augmente, du centre à la surface, avec minimum au centre.

Voir la Note en appendice, page 462.

CHAPITRE II.

ELLIPSOÏDES DE RÉVOLUTION. LIMITES DE VITESSE ET D'APLATISSEMENT.

1. Formules. — Les équations générales du Chapitre précédent étaient établies pour des ellipsoïdes quelconques à deux ou trois axes. Pour les ellipsoïdes de révolution, les intégrations sont possibles et la formule (2) devient, d'après les expressions connues de l'attraction des

ellipsoïdes homogènes (1)

$$(16) \quad \frac{X}{x} = -4\pi f \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} (l - \text{arc tang } l) da \\ - 4\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} (\lambda - \text{arc tang } \lambda);$$

$$(17) \quad \frac{Y}{y} = -2\pi f \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(\text{arc tang } l - \frac{l}{1+l^2} \right) da \\ - 2\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(\text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right),$$

où

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \quad l^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + \mu} = \lambda^2 \frac{a^2}{a^2 + \mu}, \quad \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + \mu} = 1,$$

puis

$$\omega^2 = -\frac{Y}{y} + \frac{a^2 X}{b^2 x} = -\frac{Y}{y} + \frac{1}{1+\lambda^2} \frac{X}{x}$$

donne

$$(18) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2} \text{arc tang } l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2} \right) da \\ + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2} \text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2} \right).$$

Nous supposons, dans ce qui suit, que la vitesse est variable en latitude de manière que les surfaces soient rigoureusement ellipsoïdales. Pour plus de simplicité et pour rendre les résultats comparables, on évaluera la valeur de ω le long de l'axe polaire. Alors on a

$$a^2 + \mu = a_n^2 = r^2.$$

Alors

$$l^2 = \lambda^2 \frac{a^2}{a^2 + \mu} = \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{dl}{dr} = -\frac{a}{r^2} \lambda = -\frac{l}{r}.$$

Au centre, $l = 0$; sur la couche r , $l = \lambda_r$. On aura, en général, $l < \lambda_r$, sauf dans le cas des couches homofocales où $l = \lambda_r$.

La loi de variation des densités dans la masse étant supposée donnée,

(1) On désignera désormais par r le rayon polaire de la couche considérée et par l'indice r les éléments correspondants.

nous étudierons ce que deviennent ω et λ dans les différents cas principaux : couches homothétiques, surfaces homofocales, vitesse uniforme.

2. *Le rapport entre la force centrifuge et la composante de l'attraction, en un point sur la surface S_r quelconque, est $\varphi = \frac{\omega^2 y}{Y}$.*

Il est égal au rapport des seconds membres de (18) et (17).

Les éléments d'intégration ne diffèrent que par la quantité entre crochets. Or on remarque qu'on a quand $\lambda_r = \infty$,

$$u = \frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \operatorname{arc tang} l - \frac{l}{1 + l^2} - \frac{2l}{1 + \lambda_r^2} = \operatorname{arc tang} l - \frac{l}{1 + l^2} = u_*$$

et

$$\frac{du}{d\lambda_r} = 4\lambda_r \frac{l - \operatorname{arc tang} l}{(1 + \lambda_r^2)^2}.$$

Cette quantité est toujours positive : u varie donc toujours dans le même sens que λ_r . On a donc toujours : $u < u_*$. Il en est de même pour l'expression analogue en λ . Les éléments d'intégration de (18) sont donc tous plus petits que ceux de (17). On a toujours $\varphi < 1$. D'où le théorème :

L'attraction est toujours supérieure à la force centrifuge, à l'intérieur comme à la surface d'une masse fluide hétérogène, dont les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes de révolution, quelles que soient la répartition des densités et la vitesse de rotation.

Les formules s'appliquent aussi bien à une variation brusque de la densité, le $-\rho da$ étant alors un accroissement fini. Le théorème s'applique donc à toute la masse d'une planète, y compris son atmosphère. Si des éléments équatoriaux se sont détachés (anneaux de Saturne, anneaux de Laplace), il fallait que la vitesse de rotation fût plus grande que celle qui est compatible avec des surfaces ellipsoïdales d'équilibre.

Si les surfaces de niveau sont homofocales, on a au centre $\lambda_0 = \infty$ et $\varphi = 1$. Dans un ellipsoïde homogène φ est indépendant de ρ et tend vers 1 quand λ tend vers ∞ (disque aplati) :

$$= \frac{\omega^2 y}{Y} = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arc tang} \lambda - 3\lambda}{(1 + \lambda^2) \operatorname{arc tang} \lambda - \lambda}.$$

Remarque. — Si une surface quelconque était sphérique, c'est-à-dire $\lambda_r = 0$, on aurait

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(3 \operatorname{arc tang} l - \frac{l}{1+l^2} - 2l \right) \\ + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \left(3 \operatorname{arc tang} \lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - 2\lambda \right).$$

Or l'expression en λ est nulle pour $\lambda = 0$ et sa dérivée est toujours négative. Cette expression est donc négative, si $\lambda \neq 0$. Il en est de même de l'expression en l . On ne peut donc pas avoir $\lambda \neq 0$ pour aucune surface, autrement on aurait $\omega^2 < 0$. On a donc partout, dans ce cas, $\lambda = 0$ et aussi $\omega^2 = 0$, d'où le théorème :

Dans une masse fluide hétérogène en équilibre, aucune surface de niveau, en particulier la surface extérieure, ne peut être sphérique, que si la vitesse de rotation est nulle sur toutes les surfaces de niveau, qui sont alors toutes sphériques.

3. La dérivée de la vitesse s'obtient facilement en écrivant

$$u_l = \frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \operatorname{arc tang} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2} = \frac{l^3}{1+l^2} - \frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} (l - \operatorname{arc tang} l),$$

On aura ensuite $R > 0$ toujours, en posant

$$R = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} (l - \operatorname{arc tang} l) da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} (\lambda - \operatorname{arc tang} \lambda).$$

La formule (18) devient, en remarquant que $\int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) = \rho$,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \frac{l^3}{1+l^2} da + \rho - \frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} R.$$

Dérivant alors par rapport à r , on obtient

$$\frac{1 + \lambda^2}{4\pi f} \frac{d\omega^2}{dr} = \frac{R}{1 + \lambda^2} \frac{d\lambda^2}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^r -\rho' \frac{1 + \lambda^2}{(1 + l^2)^2} \frac{l^3}{\lambda^3} (\lambda_r^2 - l^2) da.$$

Si les surfaces sont homothétiques, $d\lambda^2 = 0$; si elles sont homofocales, $l^2 = \lambda_r^2$ et $d\lambda^2 < 0$; dans les deux cas, $d\omega^2 < 0$. La vitesse croît de la surface au centre.

Si la vitesse de rotation est uniforme, on a

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = 0, \quad \frac{R}{1+\lambda^2} \frac{d\lambda^2}{dr} = \frac{1}{r} \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2} \frac{l^3}{\lambda^3} (\lambda_r^2 - l^2) da.$$

Cette relation peut être vérifiée de deux façons : $l < \lambda_r$, $d\lambda^2 > 0$, les aplatissements croissent du centre à la surface. Ou bien $l > \lambda_r$. Les aplatissements seraient alors plus grands que ceux des surfaces homofocales correspondantes. On aurait alors $d\lambda^2 < 0$, aplatissements décroissants. Nous verrons que ce cas ne pourrait être réalisé que pour des valeurs considérables de l'aplatissement superficiel : $\lambda_1 > 2,53$. Nous savons, d'ailleurs, par la démonstration générale du Chapitre précédent, que ce cas n'est jamais réalisé car λ est croissant si ω est constant.

Dans le cas de la vitesse uniforme, on a toujours au centre

$$\frac{R_0}{1+\lambda_0^2} \frac{d\lambda^2}{dr} = -\rho' \frac{1+\lambda_0^2}{(1+l_0^2)^2} \frac{l_0^3}{\lambda_0^3} (\lambda_0^2 - l_0^2) \frac{da}{r},$$

les rapports se réduisent à l'unité et $l^2 = \lambda_0^2$, donc : $d\lambda^2 = 0$. L'aplatissement tend vers une limite minimum.

Les courbes représentatives des aplatissements dans les différents cas seraient données par la figure 1 :

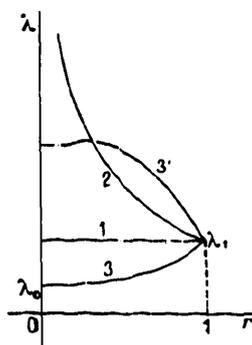


Fig. 1. — Lois des aplatissements.

1. Surfaces homothétiques. — 2. Surfaces homofocales. — 3. Vitesse constante.

Remarque. — On peut trouver de même l'expression de la variation de vitesse en latitude. En effet, les formules qui définissent l et la

surface S_n peuvent s'écrire :

$$x^2 + \frac{y^2}{1+l^2} = \frac{\lambda^2}{l^2} a^2, \quad x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda_r^2} = r^2.$$

En éliminant y^2 entre ces deux relations, on obtient

$$(a) \quad \frac{x^2}{r^2} l^2 + \left(1 + \lambda_r^2 - \frac{x^2}{r^2} \lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2} \lambda^2\right) l^2 - \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 = 0.$$

On en tire

$$\frac{dl}{dx^2} = \frac{l^3}{2} \frac{\lambda_r^2 - l^2}{a^2 \lambda^2 + x^2 l^2}.$$

L'expression de u donne aussi

$$\frac{du}{dl} = \frac{2l^2}{(1+l^2)^2} \frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+\lambda_r^2}.$$

Or ω^2 est fonction de x^2 seulement par l'intermédiaire de l . On aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} &= \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \frac{\partial u}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x^2} da \\ &= \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \frac{l^3}{\lambda^3} \left(\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+l^2}\right)^2 \frac{da}{a^2 \lambda^2 + x^2 l^2}. \end{aligned}$$

Cette expression est toujours positive. Pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales, il faut que sur chaque surface la vitesse de rotation croisse de l'équateur au pôle, conclusion conforme au résultat général du Chapitre précédent.

4. *Étude des fonctions z.* — Dans les cas limites étudiés, les éléments d'intégration dépendent d'une fonction

$$(19) \quad z = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc} \operatorname{tang} l - \frac{l}{\lambda^3} \frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}.$$

où $l = \frac{a}{r} \lambda = \lambda \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$ et qui devient égale à

$$(20) \quad y = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \lambda - \frac{3}{\lambda^3}$$

pour $l = \lambda$ ou $\varepsilon = 1$.

Cette expression (20) définit la relation entre la vitesse de rotation d'un ellipsoïde homogène et son aplatissement. Nulle pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$, elle atteint son maximum 0,22467... pour $\lambda = 2,5293$

Les fonctions z qui en diffèrent seulement par la valeur de ε ou l ont une allure analogue. Pour $\lambda = 0$ ou pour $\lambda = \infty$, elles sont toutes égales à 0. Elles sont, de plus, toujours inférieures à la valeur correspondante de y . En effet, on trouve

$$(21) \quad \frac{dz}{dl} = \frac{2l^2(\lambda^2 - l^2)}{\lambda^3(1 + l^2)^2}, \quad \frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \lambda^2\varepsilon^2)^2}.$$

Cette expression, nulle pour $\varepsilon = 0$ et pour $\varepsilon = 1$, reste toujours positive; z varie dans le même sens que ε . Nul pour $\varepsilon = 0$ (minimum), il croît jusqu'à y (maximum) quand ε croît de 0 à 1. Donc $0 < z < y$.

Si λ varie de 0 à ∞ , z aura donc un maximum comme y . La position et la valeur de ce maximum auront une grande importance pour la suite.

Comme $l = \lambda\varepsilon$ on pourra écrire

$$(19') \quad z = \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc tang} \lambda\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^2\varepsilon^2} - \frac{2\varepsilon}{\lambda^2}.$$

On aura après réduction en prenant la dérivée

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{9 + \lambda^2}{\lambda^4} \left[\frac{9 + \lambda^2 + 15\lambda^2\varepsilon^2 + 3\lambda^4\varepsilon^2 + 4\lambda^6\varepsilon^4}{(9 + \lambda^2)(1 + \lambda^2\varepsilon^2)^2} \lambda\varepsilon - \operatorname{arc tang} \lambda\varepsilon \right].$$

Appelons v la parenthèse, on aura $v = 0$ pour $\lambda = 0$ et $v = -\frac{\pi}{2}$ pour $\lambda = \infty$. On trouve ensuite

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2}{(9 + \lambda^2)^2(1 + \lambda^2\varepsilon^2)^3} [3(5 - 3\varepsilon^2) + \lambda^2(1 - 3\varepsilon^2)^2 - \lambda^4\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)].$$

Cette expression, qui est d'abord positive pour $\lambda = 0$, devient nulle puis reste négative quand λ tend vers l'infini. Donc v , d'abord nul, croît jusqu'à un maximum positif, puis décroît jusqu'à $-\frac{\pi}{2}$, en ne passant qu'une seule fois par 0. Il en est de même de dz . Donc z a un maximum et un seul.

Désignons par u cette dernière parenthèse et traçons les courbes de u , v , z (*fig. 2*). Appelons λ_u et λ_v les valeurs de λ qui sont racines de u et de v . On aura toujours $\lambda_v > \lambda_u$ puisque v s'annule seulement après avoir passé par son maximum.

Or on peut écrire

$$-u = \lambda^4\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2) - \lambda^2(1 - 3\varepsilon^2)^2 - 3(5 - 3\varepsilon^2).$$

C'est un trinôme du second degré en λ^2 . Le produit des racines est négatif et leur somme positive :

$$P = -\frac{3(5 - 3\varepsilon^2)}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)}, \quad S = \frac{(1 - 3\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)}.$$

On a deux racines de signe contraire et la plus grande est positive.

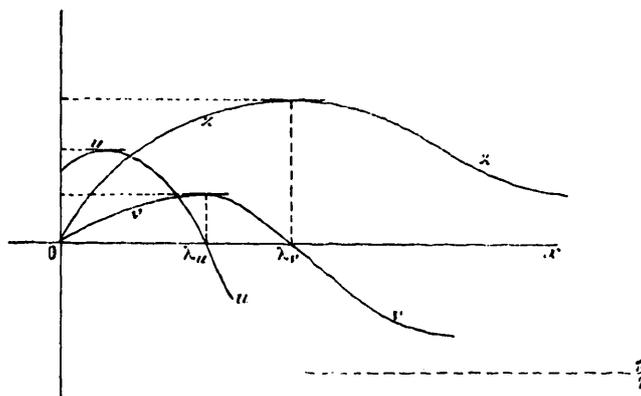


Fig. 2.

Quand ε tend vers 0, P et S tendent vers ∞ . La racine positive λ_μ tend vers ∞ . Il en est de même de λ_ν . Le maximum de z est donc rejeté à ∞ avec λ . Pour $\varepsilon = 1$, on a

$$-u = 2(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 3).$$

La valeur minimum de λ_μ^2 est 3. On aura donc $\lambda_\nu^2 > 3$. Quand ε varie de 1 à 0, le maximum du z correspondant a lieu pour une valeur $\lambda_\nu^2 > 3$ et qui augmente indéfiniment quand ε tend vers 0.

En même temps la valeur de ce minimum tend vers 0. En effet, d'après la formule (21), z varie toujours dans le même sens que ε . Les courbes des z seront toutes intérieures les unes aux autres et décroissantes avec ε ainsi que leurs maximums (fig. 3).

A l'origine, on a, en développant suivant les puissances de λ ,

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{4}{9} \frac{9 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \varepsilon^2 \right) \lambda^3 \varepsilon^3 = \frac{4}{9} (9 + \lambda^2) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \varepsilon^2 \right) \lambda \varepsilon^3.$$

Pour $\lambda = 0$ à l'origine, la dérivée est nulle et la courbe tangente à l'axe des λ .

En procédant à quelques séries de calculs numériques pour des valeurs de ε de dixièmes en dixièmes, on obtient le Tableau suivant des valeurs de dz ainsi que la position et la valeur des maximums (on

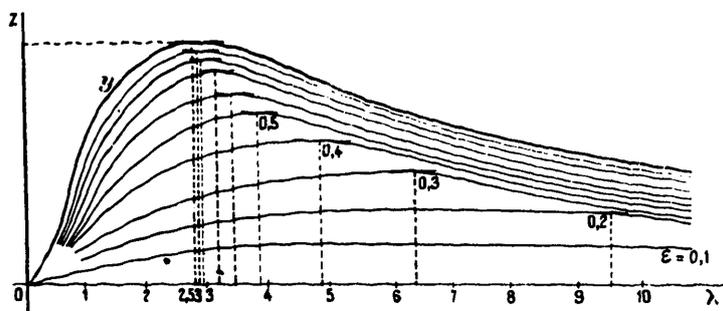


Fig. 3. — Courbes des valeurs de z pour 10 valeurs de ε .

a pris comme unité la quatrième décimale). On a pu tracer ainsi les courbes représentatives correspondantes de la figure 3.

| $\varepsilon =$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | Moyenne |
|----------------------|-----|--------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|---------|
| λ | | | | | | | | | | | | |
| 2,53 | 0 | 0,0029 | 154 | 281 | 310 | 271 | 136 | 117 | 50 | 19 | 0 | 0,014 |
| 3 | 0 | 0,0030 | 150 | 242 | 209 | 141 | 67 | -10 | -65 | -100 | 109 | +56 |
| 4 | 0 | 0,0038 | 120 | 120 | 60 | -16 | -80 | -130 | -159 | -179 | -183 | -47 |
| 6 | 0 | 0,0037 | 54 | -6 | -49 | -93 | -122 | -145 | -154 | -160 | -162 | -79 |
| 10 | 0 | 0,0021 | -3 | -38 | -59 | -72 | -80 | -88 | -90 | -90 | -90 | -58 |
| $\lambda_m = \infty$ | >20 | 9,5 | 6,3 | 4,7 | 3,8 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,53 | 2,53 | 3,55 |
| $z_m = 0$ | | 0,069 | 103 | 135 | 160 | 177 | 201 | 214 | 222 | 225 | 225 | |

Tableau des valeurs de $\frac{dz}{d\lambda}$. L'avant-dernière colonne où $\varepsilon = 1$ donne les valeurs de $\frac{dy}{d\lambda}$.

§. *Ellipsoïdes homothétiques.* — Si toutes les surfaces de niveau sont homothétiques, on a $\lambda = \lambda_r = \text{const}$. On peut écrire

$$(22) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \arctan t - \frac{t}{\lambda^3} \frac{1+\lambda^2}{1+t^2} - \frac{2t}{\lambda^3} \right) dt \\ + \rho \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \arctan \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right),$$

au centre :

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \rho_0 \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \arctan \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right) = \rho_0 y.$$

On a pour ω_0 l'expression connue qui relie ω et λ dans le cas d'un

ellipsoïde homogène. On sait qu'alors si λ varie de 0 à ∞ la valeur $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho_0} = y$ croît de 0 à 0,22467... maximum ($\lambda = 2,5293$), pour décroître ensuite jusqu'à 0.

Pour $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 0,22467\dots$ l'équilibre est impossible avec une figure ellipsoïdale. Pour $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0,22467\dots$ on a deux valeurs de λ et deux ellipsoïdes d'équilibre.

On a vu que, dans ce cas, la vitesse de rotation diminue du centre à la surface. Si donc la vitesse centrale a une limite maximum, toutes les autres, la vitesse de la surface en particulier, passeront aussi par une limite, inférieure à celle de ω_0 et variable suivant les conditions.

La formule (22) peut s'écrire :

$$(23) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \rho y + \int_0^r -\rho' z da.$$

On en tire immédiatement

$$(24) \quad \frac{1}{2\pi f} \frac{d\omega^2}{d\lambda} = \rho \frac{dy}{d\lambda} + \int_0^r -\rho' \frac{dz}{d\lambda} da.$$

Sous le signe d'intégration, z prendra toutes les valeurs de 0 à y , puisque ε varie de 0 à 1. Il en sera de même de dz .

Quand λ varie de 0 à 2,53, dy et tous les dz sont positifs (*fig. 3*). Toutes les vitesses sont croissantes.

Quand λ dépasse la valeur 2,53, dy devient négatif avec une valeur absolue de plus en plus grande. D'autre part, un nombre de plus en plus considérable de dz deviennent également négatifs. Il arrive nécessairement un moment où, pour une certaine valeur λ_m de λ , le second membre de (24) devient nul, puis négatif. La vitesse de rotation ω de la couche correspondante S_r passe par un maximum puis décroît.

A partir du centre l'importance du second terme de (24) croît avec r , et celle du premier, au contraire, diminue avec ρ . La valeur négative de celui-ci l'emportera donc d'autant plus tard que la couche sera plus éloignée du centre et ω , passera par son maximum la dernière, pour une certaine valeur λ_1 .

On aura en résumé

$$2,53 < \lambda_m < \lambda_1.$$

Cette valeur extrême λ , et la rapidité avec laquelle les différentes couches atteignent leur maximum dépend de la répartition des densités.

Or cette répartition peut se ramener à trois types principaux, selon qu'on a $\rho'' = 0$; $\rho'' < 0$ ou $\rho'' > 0$, c'est-à-dire variation constante, plus rapide vers la surface ou plus rapide au centre : courbes 1, 2, 3 (fig. 4).

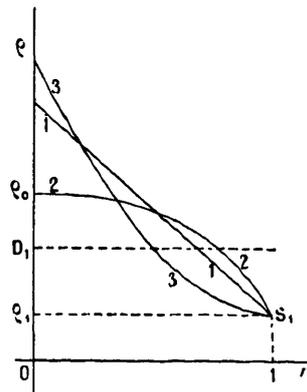


Fig. 4. — Lois des densités.

1. $\rho'' = 0$. — 2. $\rho'' < 0$. — 3. $\rho'' > 0$.

On voit immédiatement sur la formule (23) que, pour une même valeur de λ , ω^2 s'éloignera d'autant plus de ω_0^2 que $\rho\gamma$ sera plus différent de $\rho_0\gamma$ et que $\int_0^r -\rho' da = \rho_0 - \rho$ sera plus grand, en somme, d'autant plus que la condensation vers le centre sera plus prononcée. Il en sera de même d'après (24) pour le maximum de ω^2 .

En résumé, les valeurs et les maximums des ω , confondus, dans le cas de l'homogénéité, avec ω_0 , seront d'autant plus faibles et auront lieu pour des valeurs de λ d'autant plus grandes que l'ensemble s'éloignera davantage de l'homogénéité, ou ρ_0 différent de ρ_1 .

Les courbes de variation des vitesses en profondeur, pour une même valeur de λ , seraient analogues à celles des densités correspondantes.

Les courbes représentatives de la variation des vitesses avec λ seront

analogues à celles des z , celle de ω_0 analogue à celle de y (fig. 5). Si l'on tire une ligne horizontale, on voit qu'à toute valeur ω_1 plus petite que le maximum correspondent deux valeurs distinctes de λ mais qui

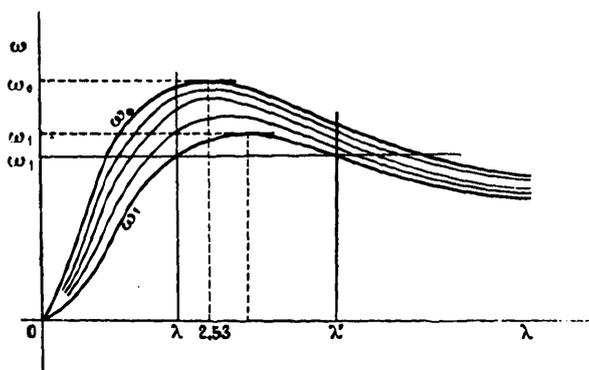


Fig. 5. — Courbes des vitesses de rotation dans le cas des surfaces homothétiques.

exigent une autre valeur de ω_0 et un autre mode de répartition des vitesses. Pour une valeur de ω_1 supérieure au maximum, les surfaces ne pourraient plus être ellipsoïdales.

Quelques calculs numériques montrent, d'après le Tableau des dz , que si $\rho'' = 0$ le maximum de ω_1 a lieu au plus tard pour $\lambda_1 = 3,55$, quand la moyenne des accroissements positifs et négatifs est nulle.

Pour que le maximum ait lieu pour $\lambda_1 = 3$, il suffirait que la densité soit encore $\rho = \frac{3}{4}\rho_0$ à la distance 0,7 du centre, celle qui correspond à $dz = 0$. Alors $\rho'' < 0$.

Pour que ce maximum soit repoussé à $\lambda_1 = 4$ il faudrait que la densité à la distance 0,5 soit déjà réduite à $\rho = \frac{1}{3}\rho_0$. Ces trois valeurs de λ_1 sont calculées avec $\rho_1 = 0$; en réalité, le champ de variation serait encore réduit. Pratiquement, il ne peut pas être considérable.

Dans le cas de la Terre avec $\rho'' = 0$; $\rho_1 = 2,5$ et $\rho_0 = 10$, on aurait au maximum $\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = 0,220\rho_0$; $\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = 0,163\rho_0$; dans le cas d'homogénéité : $D_1 y = 0,125\rho_0$.

6. Ellipsoïdes homofocaux. — Si les surfaces de niveau sont homofocales, on a $b^2 - a^2 = b_1^2 - a_1^2$, avec $b^2 = a^2(1 + \lambda^2)$. On en

ture : $\lambda a = \lambda_1 a_1$. On a alors $l = \frac{a}{r} \lambda = \lambda_r$, car $\lambda a = r \lambda_r$ et la formule (18) devient

$$(25) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \operatorname{arc tang} \lambda_r - \frac{3\lambda_r}{1 + \lambda_r^2} \right) \int_0^r -\rho' \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} da \\ + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \left(\frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \operatorname{arc tang} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda_r^2} \right) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3};$$

$$(25') \quad a\lambda = r\lambda_r \quad \text{et} \quad V = \frac{4}{3} \pi a^3 (1 + \lambda^2)$$

donnent

$$\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} = \frac{V}{V_r} \frac{1 + \lambda_r^2}{\lambda_r^3},$$

d'où

$$(26) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3 + \lambda_r^2}{\lambda_r^3} \operatorname{arc tang} \lambda_r - \frac{3}{\lambda_r^2} \right) \int_0^r -\rho' \frac{V}{V_r} da \\ + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{V}{V_r} \left(\frac{3 + \lambda_r^2}{\lambda_r^3} \operatorname{arc tang} \lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3} \frac{1 + \lambda_r^2}{1 + \lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3} \right).$$

On a vu que la vitesse croît de la surface au centre : $\omega_1 < \omega < \omega_0$.
A la surface, on aura, avec

$$\int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{V}{V_1} = \frac{M_1}{V_1} = D_1.$$

$$(27) \quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3 + \lambda_1^2}{\lambda_1^3} \operatorname{arc tang} \lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2} \right) D_1 = D_1 \gamma.$$

Ainsi la rotation et l'aplatissement sont liés par la même expression que dans un ellipsoïde homogène de densité D_1 , expression analogue à celle de ω_0 dans les ellipsoïdes homothétiques, mais ici ω_1 est indépendant de la loi de variation des densités.

Au centre $\lambda_r = \infty$ et la formule (25) donne

$$(28) \quad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \left(\operatorname{arc tang} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3}.$$

En tenant compte de (25'), on a

$$(28') \quad \frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1 + \lambda_1^2}{V_1 \lambda_1^3} \int_0^1 V \left(\operatorname{arc tang} \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) (\rho_1 - \rho' da).$$

Pour $\lambda_1 = 0$, on a

$$\lambda = \frac{a_1}{a} \lambda_1 = 0$$

et

$$\text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{2}{3} \lambda^3 - \frac{4}{5} \lambda^5 - \dots$$

La formule (28) donne

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3} \pi f \rho_0.$$

Pour $\lambda_1 = \infty$, $\omega_0 = 0$, d'après (28').

Posons

$$v = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right).$$

On a

$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \text{arc tang } \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right) = -\frac{\gamma}{\lambda}.$$

v varie en sens inverse de λ et par conséquent de λ_1 . Ainsi ω_0 est toujours décroissant et varie de $\frac{4}{3} \pi f \rho_0$ à 0 quand λ_1 croît de 0 à ∞ .

Pour étudier la variation de ω_0 avec la *densité* posons encore

$$u = \text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \frac{du}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

L'élément d'intégration de (28') croît avec la valeur de λ de la surface au centre où $u_0 = \frac{\pi}{2}$, car $\lambda_0 = \infty$. Donc ω_0 croît d'autant plus que ρ' est plus grand vers le centre, c'est-à-dire que la concentration est plus considérable. A la limite, on aurait

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1 + \lambda_1^2}{V_1 \lambda_1^3} \frac{\pi}{3} M_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1^3} D_1.$$

On a donc deux limites, l'une en fonction de la densité centrale, l'autre en fonction de l'aplatissement superficiel, qui se complètent sans s'exclure :

$$(29) \quad \omega_0^2 < \frac{4}{3} \pi f \rho_0, \quad \omega_0^2 < \pi^2 f \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1^3} D_1.$$

Toutes les autres vitesses et courbes représentatives seront comprises entre celles des formules (27) et (29).

Comme on a

$$\int_0^r -\rho' V d\alpha = -\rho V_r + \int_0^r \rho dV = (D - \rho) V_r,$$

la formule (26) peut s'écrire

$$(30) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = (D - \rho) y + \int_r^1 \frac{V}{V_r} z (\rho_1 - \rho' d\alpha).$$

où

$$z = \frac{3 + \lambda_r^2}{\lambda_r^3} \text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3} \frac{1 + \lambda_r^2}{1 + \lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^2}$$

est une fonction z déjà étudiée, l étant remplacé par λ , et λ par λ_r .

On a

$$\lambda = \frac{r}{a} \lambda_1 = \lambda_r \varepsilon = l.$$

De r à l limites d'intégration, ε varie de 1 à $\frac{r}{a_1} < 1$ et non de 1 à 0.

Une fraction seulement des z figure sous chaque signe d'intégration, ceux dont l' ε est supérieur à celui de la couche S_r . La variation est la même, les conclusions analogues à celles du cas précédent.

Ainsi, quand λ_1 croît, les vitesses des couches intérieures passent successivement par leur maximum, du centre à la surface où ω_1 sera décroissante la dernière, comme pour les surfaces homothétiques.

En effet, on a vu que les maximums de z ont lieu pour des valeurs de plus en plus grandes de λ_r . Mais ici les λ croissent de la surface au centre $\lambda_r = \frac{\lambda_1}{r}$. Ils atteignent, dans le même ordre, la valeur λ_m correspondant au maximum de chaque surface. Il en sera de même des ω .

Voici d'abord le Tableau des valeurs respectives des λ_m et des λ_r pour $\lambda_1 = 2,53\dots$, maximum de ω_1 :

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|---|
| $\varepsilon \dots \dots \dots$ | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | . |
| $\lambda_r \dots \dots \dots$ | 2,53 | 2,8 | 3,2 | 3,6 | 4,2 | 5,0 | 6,3 | 8,4 | 12,6 | . |
| $\lambda_m \dots \dots \dots$ | 2,53 | 2,6 | 2,7 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 4,7 | 6,3 | 9,5 | . |
| $\lambda_r - \lambda_m \dots \dots$ | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,2 | 1,6 | 2,1 | 3,1 | . |

Quand ω_1 atteint son maximum les z de toutes les surfaces et par conséquent tous les autres ω ont déjà dépassé leur maximum puisque $\lambda_r > \lambda_m$, pour tous les z (*fig. 6*).

D'ailleurs λ_r croît toujours plus vite que λ_m . En effet, dans l'étude des fonctions z on a vu, formule (21), que $\frac{dz}{dl} > 0$, z et l varient dans le même sens. Or on a ici au maximum $l = \lambda_m \varepsilon$. Cette quantité $\lambda_m \varepsilon$ varie donc dans le même sens que z_m et décroît avec ε . Au contraire, dans les surfaces homofocales, $\lambda_r \varepsilon = \lambda_1$. Ainsi $\lambda_r \varepsilon$ reste constant et λ_r croît plus vite que λ_m .

Si donc, à un certain moment, pour un certain $\lambda_1 < 2,53$, le λ_r de

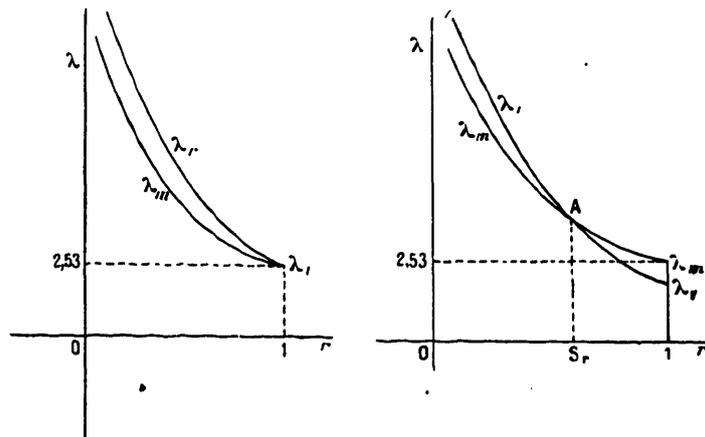


Fig. 6 et 6'. — Courbes comparées des λ et des λ_m dans le cas des surfaces homofocales.

la surface S_r égale le λ_m du z correspondant, tous les λ et les z intérieurs à S_r auront dépassé leur maximum. Tous les λ et les z supérieurs ne l'auront pas dépassé (fig. 6'). Or de (30) on tire

$$(31) \quad \frac{1}{2\pi f} \frac{d\omega^2}{d\lambda} = (D - \rho) \frac{dy}{d\lambda} + \int_0^1 \frac{V}{V_r} \frac{dz}{d\lambda} (\rho_1 - \rho' da).$$

$d\omega^2$ ne dépend que des dz supérieurs, tous positifs ici, ainsi que dy . On a donc $d\omega^2 > 0$ et ω^2 est encore croissant, ainsi que tous les ω supérieurs (1). Faisons décroître λ_1 de 2,53 à 0, les λ passeront successivement, de la surface au centre, par le λ_m du z correspondant. Le maximum de ω reculera dans le même sens.

(1) M. Hamy avait déjà donné cette démonstration sous une forme plus compliquée. *Étude sur la figure des corps célestes*, p. 14-20.

En résumé, si λ_1 croît, les couches voisines du centre passeront par leur maximum dès que λ_1 sera différent de 0, puisque leur λ_0 est infini, et ainsi successivement des autres jusqu'à la surface. On pourra répéter ici tout ce qui a été dit à propos des surfaces homothétiques sur les

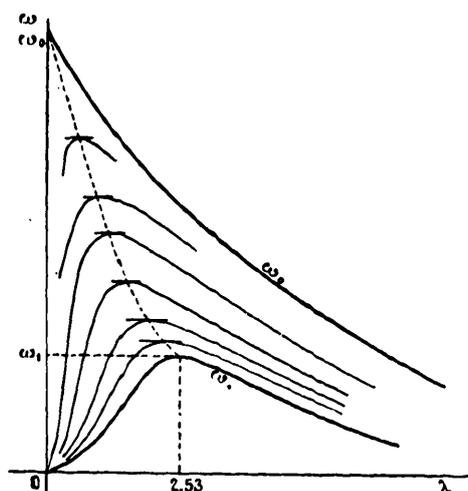


Fig. 7. — Courbes des vitesses de rotation dans le cas des surfaces homofocales.

modifications introduites par la variation des densités. Mais ici ω_1 ne dépend que de D , et non des ρ . On aura les courbes ci-dessus (*fig. 7*).

7. *Vitesse uniforme et classification des vitesses.* — Nous utiliserons les résultats précédents. La formule (18) devient à la surface :

$$(30) \quad \frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2} \text{arc tang } l - \frac{l}{1 + l^2} - \frac{2l}{1 + \lambda_1^2} \right).$$

Si $\lambda_1 = 0$, on a

$$l = \lambda = \lambda_1 = 0.$$

car ici $\lambda \leq \lambda_1$, et alors on a

$$\omega_1 = 0.$$

Si $\lambda_1 = \infty$ tous les λ sont infinis car la figure se réduit à un disque aplati et l'on a encore $\omega_1 = 0$, d'après (30).

La vitesse est donc nulle pour $\lambda_1 = \infty$ comme pour $\lambda_1 = 0$. Elle

aura un maximum dans l'intervalle, comme dans le cas d'un fluide homogène.

La formule (30) peut s'écrire

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_1^2} \frac{\lambda_1^3}{\lambda^3} z = \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_1^2} \frac{a^3}{r_1^2} \frac{\lambda_1^3}{l^2} z.$$

Or le facteur $\frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_1^2} \frac{a^3}{r_1^2} = \frac{V}{V_1}$ reste constant pour chaque surface quand λ varie. Si λ_1 reste le même, la valeur de l'élément d'intégration varie seulement avec $\frac{z}{l^2}$ quand les λ intérieurs varient, c'est-à-dire quand on passe de l'un des cas étudiés à l'autre. On a

$$\frac{d}{dl} \frac{z}{l^2} = \frac{1}{l^3} \left[\frac{2l^2(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3(1 + l^2)^2} - 3z \right].$$

En désignant la parenthèse par u , on a pour $l = 0$, $z = 0$, $u = 0$ et pour $l = \lambda_1$, $u = -3y$. On obtient ensuite

$$\frac{du}{dl} = - \frac{4l^2}{\lambda_1^3(1 + l^2)^2} - \frac{8l^2(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3(1 + l^2)^2},$$

quantité négative avec $l < \lambda_1$, donc u reste négative et les éléments d'intégration varient avec z en raison inverse de l ou de λ , ($l = \lambda \varepsilon$).

Ainsi donc pour le même λ_1 la vitesse superficielle croît quand on passe des couches homofocales aux couches homothétiques, puis à celles du cas de la vitesse uniforme, car alors le λ de chaque couche décroît. On a donc

$$(31) \quad \omega_1 \text{ homofocal} < \omega_1 \text{ homothétique} < \omega_1 \text{ uniforme.}$$

Les courbes des ω_1 s'étageront dans le même ordre.

La formule (18) devient au centre

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{2\pi f} &= \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3 + \lambda_0^2}{1 + \lambda_0^2} \text{arc tang } \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda_0^2} \right) \\ &= \int_0^1 (\rho_1 - \rho' da) Z_0. \end{aligned}$$

$$(32) \quad \frac{dZ_0}{d\lambda} = - \frac{3 + \lambda_0^2}{1 + \lambda_0^2} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \text{arc tang } \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right) = - \frac{3 + \lambda_0^2}{1 + \lambda_0^2} \frac{\gamma'}{\lambda}.$$

Pour le même λ_0 la valeur de chaque élément d'intégration varie donc en sens inverse de λ . Or, dans ce cas, λ_0 étant le même, les λ augmentent de la vitesse uniforme aux couches homothétiques et aux surfaces homofocales. On aura

$$(33) \quad \omega_0 \text{ uniforme} < \omega_0 \text{ homothétique} < \omega_0 \text{ homofocal.}$$

Or on a pour les surfaces homothétiques : $\omega_0^2 = 2\pi f\rho_0\gamma$. Donc dans le cas d'une vitesse uniforme, si λ_0 varie de 0 à ∞ , la valeur de la vitesse restera toujours inférieure à celle-ci.

La courbe de ω uniforme correspondant à λ_0 sera tout entière

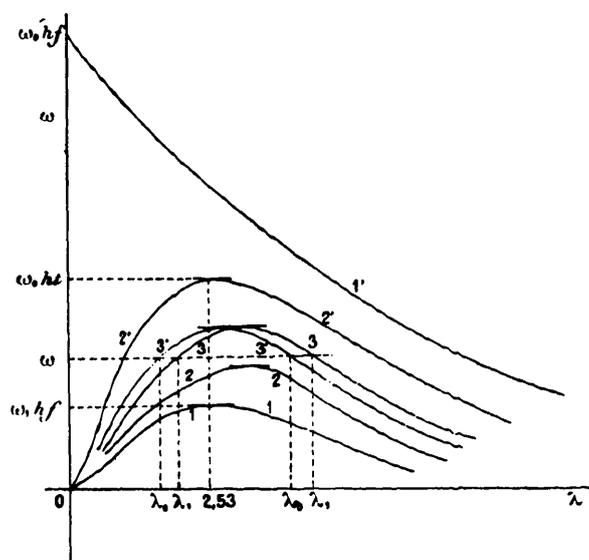


Fig. 8. — Tableau d'ensemble des courbes de vitesses.

1 et 1'. ω_1 et ω_0 des surfaces homofocales. — 2 et 2'. ω_1 et ω_0 des surfaces homothétiques.
3 et 3'. Courbes de vitesse constante en fonction de λ_1 et de λ_0 .

inférieure à celle de ω_0 homothétique. D'autre part, la courbe correspondant aux variations de λ_1 sera tout entière au-dessus de ω_1 homothétique d'après (31). Ces deux courbes seront comprises entre celles des ω_1 et ω_0 homothétiques.

Cela est évident jusqu'au maximum, car alors la courbe correspondant aux λ_1 est à droite et au-dessus de celle des λ_0 puisqu'on a $\lambda_0 < \lambda_1$. Il en sera de même au delà du maximum, au moins jusqu'à une certaine limite. Il n'est pas démontré qu'il en sera toujours ainsi.

La figure 8 traduit ces résultats en donnant la position relative des différentes courbes.

La courbe de ω , homofocal seule ne dépend pas de la répartition des densités, mais seulement de D_1 . Les autres courbes s'élèveront d'autant plus au-dessus de celle-là que l'ensemble s'éloigne davantage de l'homogénéité.

Pour toute valeur de ω plus petite que le maximum, on aura deux valeurs de l'aplatissement, comme dans le cas de l'homogénéité, mais la vitesse correspondante sera toujours plus grande.

On voit aussi (*fig.* 8) que la vitesse uniforme correspond toujours pour un aplatissement donné λ_1 à celle d'une couche homothétique ou homofocale dont l'ensemble aurait le même λ_1 . On peut donc passer de ces deux cas à celui d'une vitesse uniforme simplement en augmentant la vitesse des couches supérieures à celle-ci et diminuant celle des couches inférieures, sans que l'aplatissement λ_1 varie.

En résumé, la vitesse uniforme ω d'un ellipsoïde hétérogène tournant tout d'une pièce, étant comprise entre ω_0 homothétique et ω_1 homofocal, on pourra écrire

$$(34) \quad D_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y \quad \text{avec} \quad y = \frac{3 + \lambda_1^2}{\lambda_1^3} \arctan \lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}.$$

8. Quelques cas limites. — Nous allons en étudier trois en dehors des trois principaux.

1° Si l'aplatissement à partir de la surface croît plus vite que dans le cas des surfaces homofocales, on aura $\omega_1 < \omega_1$ homofocal par le même raisonnement qui a conduit à (31), et cette vitesse tendra vers 0 quand tous les λ tendront vers ∞ .

On a vu aussi que λ_0 restant constant, ω_0 varie en raison inverse de λ . On aura donc également ici $\omega_0 < \omega_0$ homofocal et cette vitesse tendra également vers 0.

Donc si les λ intérieurs tendent vers ∞ , tous les ω tendent vers 0.

2° Si, au contraire, à l'intérieur les λ décroissent plus vite que dans le cas de la vitesse uniforme, ω_1 augmente d'après la démonstration générale de (31) et devient plus grand que ω_1 uniforme, pour la même valeur de λ_1 .

D'après la formule de la dérivée de la vitesse (18'), on a ici

$$\frac{d\omega^2}{dr} > 0,$$

car la variation de l'aplatissement est plus rapide que dans le cas de ω constant, et $\frac{d\lambda^2}{dr}$ est plus grand que dans le cas de $d\omega^2 = 0$. La vitesse diminue donc à partir de la surface.

A la limite, on aurait à l'intérieur des couches sphériques avec un aplatissement superficiel λ_1 . Or, dans la formule (18), l'élément d'intégration

$$Z = \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2} \text{arc tang } l - \frac{l}{1 + l^2} - \frac{2l}{1 + \lambda_r^2} \right)$$

se réduit, quand les λ tendent vers 0, à

$$Z = \frac{2}{3} \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_r^2} \frac{a^3}{r^3} \left(\lambda_r^2 - \frac{6}{5} \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 - \dots \right) = \frac{2}{3} \frac{V}{V_r} \lambda_r^2 - \dots$$

Ils s'annulent tous avec λ_r . Les vitesses de rotation tendent donc vers 0 avec les λ .

On aurait alors à la surface

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \rho_1 \gamma_1 + \frac{2}{3} \int_0^1 -\rho' \frac{V}{V_1} \lambda_1^2 da = \rho_1 \gamma_1 + \frac{2}{3} \lambda_1^2 (D_1 - \rho_1).$$

Mais ω_1 ne croîtrait pas sans limite avec λ_1 , car il passe par un maximum et s'annule, quand λ_1 tend vers ∞ , comme on l'a vu à propos de la formule (30). D'ailleurs la limite ne peut pas être atteinte, car on a vu (n° 1) qu'une couche ne peut être sphérique que si toutes le sont, et si la vitesse est nulle partout.

3° Dans le cas où l'on aurait une vitesse uniforme avec λ croissant de la surface au centre (voir n° 2), pour le même λ_1 , on aurait $\omega_1 < \omega_0$ homothétique, puisque le λ de chaque couche est plus grand que celui de la couche homothétique correspondante [formule (31)]. Quand λ_1 variera de 0 à ∞ , on aura une courbe intérieure à celle de ω_1 homothétique.

Pour le même λ_0 on aura $\omega_0 > \omega_0$ homothétique [formule (32)]. La courbe correspondante sera donc au-dessus de celle des ω_0 homothé-

tiques. Comme on a dans ce cas $\lambda_0 > \lambda_1$, on voit d'après la figure 8 qu'on ne peut avoir $\omega_0 = \omega_1$ que si λ_1 a déjà dépassé son maximum. On sait, d'ailleurs, d'après la démonstration du Chapitre premier, que l'on ne peut pas avoir λ décroissant avec ω constant.

En résumé, la vitesse de rotation, dans le cas d'un ellipsoïde hétérogène tournant tout d'une pièce, reste toujours comprise, quand λ varie de 0 à ∞ , entre la vitesse de deux ellipsoïdes homogènes, qui auraient pour densité et aplatissement, l'un la densité moyenne et l'aplatissement superficiel, l'autre la densité et l'aplatissement central de cet ellipsoïde hétérogène. Elle est nulle pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$ et maximum un peu après $\lambda = 2,53\dots$

Jusqu'au delà du maximum, et probablement toujours, on peut dire encore que *la vitesse de rotation reste comprise entre celle de deux ellipsoïdes homogènes ayant même aplatissement et comme densité, l'un la densité moyenne et l'autre la densité centrale de celui-ci*, ou encore qu'elle reste comprise entre la vitesse qu'il aurait s'il était homogène et sa vitesse centrale si ses surfaces de niveau étaient homothétiques.

$$D_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y, \quad y = \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} \lambda - \frac{3}{\lambda^2}.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde homogène on a $\omega^2 = 2\pi f Dy$.

De la surface au centre, dans les autres cas, la vitesse varie plus ou moins vite dans les mêmes proportions que λ et ρ .

Dans tous les cas de variation quelconque de ω , ρ , λ , à l'intérieur, la vitesse des surfaces de niveau suit le même cycle que pour un ellipsoïde homogène : nulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, elle a un maximum qu'elle atteint plus ou moins après $\lambda = 2,53\dots$

Pour le même aplatissement, la vitesse est d'autant plus élevée que la répartition des densités s'éloigne davantage de l'homogénéité.



CHAPITRE III.

PROBLÈME DE CLAIRAUT.

VITESSE UNIFORME, APLATISSEMENT FAIBLE DONT LE CARRÉ EST NÉGLIGEABLE.

Le problème de Clairaut consiste à étudier les conditions d'équilibre d'une masse fluide hétérogène en rotation, en supposant la vitesse constante et l'aplatissement assez faible pour qu'on puisse négliger son carré. Les nouvelles formules en ρ' permettent souvent de simplifier et de compléter les anciennes démonstrations, dont quelques-unes ont été reprises rapidement dans ce Chapitre, en vue de les généraliser ou de les adapter aux calculs numériques ultérieurs.

1. *Équation générale de Clairaut. Les fonctions η et ζ . Limite de λ^2 et de e .* — La formule (18) développée s'écrira en négligeant l^4

$$(35) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{2}{3} \int_0^r -\rho' \frac{l^3}{\lambda^3} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} l^2 \right) da + \frac{2}{3} \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} \lambda^2 \right).$$

Or, en négligeant λ^4 , on a (¹), r étant la valeur de a sur S_r ,

$$l^2 = \lambda^2 \frac{a^2}{a^2 + \mu} = \frac{a^2}{r^2} \lambda^2,$$

d'où

$$(36) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{a^3}{r^3} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \right) da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} \lambda^2 \right).$$

En intégrant par parties, on obtient immédiatement

$$(37) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \frac{\lambda^2}{r^3} \int_0^r \rho da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 \lambda^2 - \frac{3}{5} \int_r^1 \rho d\lambda^2;$$

(¹) En négligeant λ^4 , l et par conséquent ω est indépendant de x et constant sur chaque surface de niveau (voir Chap. II, n° 3, formule a). L'équilibre est donc possible avec des surfaces ellipsoïdales, dans l'hypothèse de Clairaut.

posons

$$\frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 = D \quad \text{et} \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1} = \varphi,$$

il vient

$$(38) \quad \frac{5}{3} (\lambda^2 D - \varphi D_1) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 \lambda^2 + \int_r^1 \rho a^2 da.$$

Ces formules (36), (37), (38) sont trois formes équivalentes de l'équation de Clairaut, reliant les éléments ω , λ , ρ , r de la surface S_r , éléments qui peuvent être tous variables.

Remarque. — On a

$$(39) \quad \frac{1}{r^3} \int_0^r -\rho' a^3 da = -\rho + \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 = D - \rho \quad \rho < D;$$

en dérivant, on obtient successivement

$$(40) \quad 3\rho = 3D + rD',$$

$$(41) \quad 3\rho' = 4D' + rD''.$$

Nous poserons

$$(42) \quad \zeta = -\frac{rD'}{D} = 3\left(1 - \frac{\rho}{D}\right),$$

ζ sera analogue à la fonction η de M. Radau et d'une grande utilité pratique, comme on le verra dans la suite.

Or, au centre, $D = \rho = \rho_0$, d'où $\zeta = 0$.

A la surface, si $\rho_1 = 0$ et en dehors de la masse, on a $\zeta = 3$.

On aura donc toujours avec $0 < \rho < D$

$$(43) \quad 0 < \zeta < 3.$$

La formule (36) devient à la surface avec $r = 1$

$$(44) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^1 -\rho' a^3 \left(\lambda_1^2 - \frac{3}{5} a^2 \lambda^2 \right) da + \frac{2}{5} \rho_1 \lambda_1^2.$$

Or on a, du centre à la surface, $0 < a^2 \lambda^2 < \lambda_1^2$. Tenant compte de (39), on en déduit

$$(45) \quad \frac{2}{5} \lambda_1^2 \leq \varphi \leq \lambda_1^2 \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\rho_1}{D_1} \right), \quad \frac{2}{5} \leq \frac{\varphi}{\lambda_1^2} \leq 1 - \frac{3}{5} \frac{\rho_1}{D_1}.$$

Si $\rho_1 = 0$ en posant $\lambda_1^2 = 2e$, on a

$$(46) \quad \frac{\varphi}{2} \leq e \leq \frac{5}{4}\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} \leq \frac{\varphi}{e} \leq 2.$$

On aura $e = \frac{\varphi}{2}$ si $\alpha^2 \lambda^2 = 0$ dans (44), c'est-à-dire : 1° si toute la matière était condensée au centre, ou 2° si toutes les surfaces de niveau intérieures étaient sphériques.

On aura $e = \frac{5}{4}\varphi$: 1° si $\alpha^2 \lambda^2 = \lambda_1^2$ à l'intérieur comme à la surface, cas des surfaces homofocales, ou bien 2° si l'intégrale se réduit à l'élément de surface correspondant à ρ_1 , c'est-à-dire si $\rho' = 0$, ellipsoïde homogène.

Dans le cas d'une masse fluide en rotation uniforme, les limites seraient atteintes seulement dans le cas d'homogénéité ou de condensation totale au centre. L'aplatissement superficiel ne dépend alors que du degré de concentration. Il se rapproche de $\frac{\varphi}{2}$ ou de $\frac{5}{4}\varphi$ selon les cas.

Si $\rho'' < 0$, ρ tend vers une limite au centre, ρ' prend des valeurs plus fortes vers la surface (voir *fig.* 4). Ce sont les éléments d'intégration qui donnent un aplatissement voisin de $\frac{5}{4}\varphi$ qui dominent dans (44). C'est le cas de la Terre où $\frac{\varphi}{e} = \frac{297}{288} = 1,03$ environ. Pour Jupiter, au contraire, $\frac{\varphi}{e} = 1,456$, et pour Saturne 1,434; ces valeurs sont plus voisines de 2 que de $\frac{1}{2}$. Il doit y avoir une condensation prononcée, comme l'indique d'ailleurs la faible densité moyenne.

Ce rapport $\frac{\varphi}{e}$ entre dans la définition de $\eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2$. C'est pourquoi M. Callandreau a pu appeler η_1 : *le paramètre de condensation* (1). Les quantités $-\frac{rD'}{D}$, $\frac{\rho}{D}$, en somme ζ , jouent plus directement le même rôle, mais elles sont moins nettement déterminées.

2. Dérivée de la vitesse. Équation de Clairaut-Radau. — En

(1) *Bul. ast.*, mai 1889.

prenant les dérivées dans la formule (36), on obtient immédiatement

$$(47) \quad \frac{3}{4\pi f} \frac{d\omega^2}{dr} = D \frac{d\lambda^2}{dr} - \frac{3}{r} \int_0^r -\rho' \frac{a^3}{r^3} \left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \right) da.$$

Posons avec M. Radau

$$\eta = \frac{re'}{e} = \frac{r}{\lambda^2} \frac{d\lambda^2}{dr},$$

d'où

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = \frac{\lambda^2 \eta}{r},$$

multiplions (47) par r^6 et dérivons de nouveau par rapport à r , on aura successivement

$$r^5 D \lambda^2 \eta - 3 \int_0^r -\rho' a^3 (r^2 \lambda_r^2 - a^2 \lambda^2) da = \frac{3}{4\pi f} r^6 (\omega^2)'. \quad .$$

$$(5r^4 D + r^5 D') \lambda^2 \eta + r^4 D \lambda^2 (\eta^2 + r\eta') - 3(2r\lambda^2 + r\lambda^2 \eta)(D - \rho)r^3 = \frac{3}{2\pi f} (r^6 \omega \omega')',$$

$$(48) \quad r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(\eta + 1) = \frac{3}{2\pi f} \frac{(r^6 \omega \omega')'}{r^3 D \lambda^2} = \frac{3}{4\pi f} \frac{r^2 (\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{eD}.$$

Cas particuliers : Dans le cas des surfaces *homothétiques*, $d\lambda^2 = 0$, la formule (37) donnera

$$\frac{3}{4\pi f} \omega^2 r^5 = \lambda^2 D r^5 - \frac{3}{5} \lambda^2 \int_0^r \rho da^5, \quad \frac{3}{4\pi f} (\omega^2 r^5)' = 2\lambda^2 r^4 D.$$

Dans le cas des surfaces *homofocales*, on aura dans (47) et (48)

$$\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{\lambda_1^2}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d\lambda^2}{dr} = -2 \frac{\lambda^2}{r} \quad \text{et} \quad \eta = -2;$$

$$\frac{d\omega^2}{dr} = -\frac{8}{3} \pi f \lambda_1^2 \frac{D}{r^3}, \quad (r^6 \omega \omega')' = \frac{4}{3} \pi f \lambda_1^2 (\zeta - 3) D r^2.$$

Mais ces formules des surfaces homofocales ne peuvent s'appliquer qu'au voisinage de la surface, car on a

$$r^2 \lambda_r^2 = \lambda_1^2$$

et les λ croissent rapidement et au delà de toute limite au centre.

Cas principal : Problème de Clairaut. Dans le cas d'une *vitesse uniforme*, $d\omega^2 = 0$, (47) et (48) deviennent

$$(47') \quad rD \frac{d\lambda^2}{dr} = D\lambda^2 \eta = \frac{3}{r^3} \int_0^r -\rho' \left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \right) a^3 da,$$

$$(48') \quad r\eta' + \eta(\eta + 5) - 2\zeta(\eta + 1) = 0.$$

Cette dernière est l'équation de Clairaut-Radau, équation différentielle du premier ordre qui définit l'hypothèse d'une vitesse uniforme.

Au centre $\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^2} \lambda^2$, d'où $\frac{d\lambda^2}{dr} = 2e' = 0$ et $\eta_0 = 0$ d'après (42'), puis (48') peut alors s'écrire en divisant par r

$$\eta' + r \frac{e'^2}{e^2} + 5 \frac{e'}{e} = -2 \frac{D'}{D} \left(1 + r \frac{e'}{e} \right).$$

Or, au centre, on aura d'après (41)

$$2D'_0 = \frac{3}{2}\rho'_0.$$

d'où

$$\eta'_0 = -\frac{3}{2} \frac{\rho'_0}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \eta_0 = 0;$$

η nul au centre commence donc par croître et devient positif. Il le restera toujours, car si dans la suite on avait $\eta = 0$, on aurait aussi

$$r\eta' = 2\zeta > 0$$

et η ne pourrait pas devenir négatif. On a donc $\eta > 0$.

(47') peut encore s'écrire d'après (39) et (42)

$$(47'') \quad (\zeta - \eta)r^3 D\lambda^2 = 3 \int_0^r -\rho' a^3 \lambda^2 da.$$

Le second membre est positif, on a donc immédiatement, puis d'après (43)

$$(19) \quad \eta < \zeta \quad \text{et} \quad 0 < \eta < \zeta < 3 \quad (1).$$

La fonction η est toujours plus petite que ζ et comprise entre 0 et 3.

De $\eta = \frac{r e'}{e} > 0$ on déduit $e' > 0$, donc λ^2 et e sont toujours croissants du centre à la surface (Clairaut).

(1) M. Poincaré avait signalé $\eta < 3$ et M. Gallandreau $\eta > 0$. On verra au numéro suivant l'importance de $\eta < \zeta$ pour limiter le champ de variation de η .

De $\eta < \zeta$ on déduit $\frac{e'}{e} < -\frac{D'}{D}$, d'où $\frac{(eD)'}{eD} < 0$ et eD est décroissant.
 De $\eta - 3 < 0$ on déduit $\frac{1}{r^3}(re' - 3e) < 0$, d'où $\left(\frac{e}{r^3}\right)' < 0$ et $\frac{e}{r^3}$ décroissant (Clairaut). Pour la Terre, on aura $\eta < 1$, d'où $\left(\frac{e}{r}\right)' < 0$ et $\frac{e}{r}$ décroissant.

Dans quels cas η peut-il atteindre ses limites?

Si $\eta = 0$ sur une surface quelconque S , il faut, d'après (47'), que depuis le centre jusqu'à cette surface, on ait : 1° ou bien $\lambda_r^2 = \frac{a^2}{r^3}\lambda^2$; on aurait alors des surfaces homofocales, ce qui est impossible puisque dans ce cas on a $\eta = -2$ comme on l'a vu; 2° ou bien $\rho' = 0$, c'est-à-dire une masse homogène. Réciproquement, s'il y a homogénéité, on a $\zeta = 0$ et $\eta = 0$, d'après (47'').

Si $\eta = \zeta$ sur une surface, d'après (47''), on a du centre à cette surface $\rho' = 0$, homogénéité ou $\lambda^2 = 0$, surfaces sphériques, ce qui exige que toutes les surfaces le soient (Chap. II, n° 4). La réciproque est vraie.

Si $\eta = 3$ on a $\zeta = 3$, c'est-à-dire $\rho = 0$. Toute la masse est réunie au centre. Réciproquement, s'il y a concentration totale, $\rho = 0$ et $\zeta = 3$, l'équation qui suit montre qu'on a aussi $\eta = 3$.

Intégrons par parties le second membre de (47'), on a

$$D\lambda^2(3 - \eta) = \frac{3}{r^3} \int_0^r \rho da^3 \lambda^2 \quad \eta < 3.$$

En combinant avec (38) on aura ensuite

$$(50) \quad D\lambda^2(\eta + 2) - 5\varphi D_1 = 3 \int_r^1 \rho d\lambda^2 \quad \text{ou} \quad D(re' + 2e) - \frac{5}{2}\varphi D_1 = 3 \int_r^1 \rho de.$$

A la surface on a

$$(51) \quad \eta_1 = 5 \frac{\varphi}{\lambda_1^2} - 2 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2;$$

(50) dérivée sous la forme η donne immédiatement l'équation de Clairaut-Radau. La seconde forme donne l'équation primitive de Clairaut, équation différentielle du second ordre :

$$r^2 e'' + 2re'(3 - \zeta) = 2\zeta e,$$

Elle permettait de démontrer que e reste croissant, s'il l'est au centre.

3. Discussion de l'équation de Clairaut-Radau. Variation de r .

— L'équation de Clairaut-Radau peut encore s'écrire

$$(52) \quad r\eta' = 2\zeta + (2\zeta - 5)\eta - \eta^2 = (\eta - \beta)(\alpha - \eta).$$

Le second membre est un trinôme du second degré qui pour $0 < \zeta < 3$ a deux racines de signe contraire

$$-5 < \beta < -2 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \zeta < 3,$$

qui tendent vers -5 et 0 pour $\zeta = 0$; vers 0 et 3 pour $\zeta = 3$. Elles

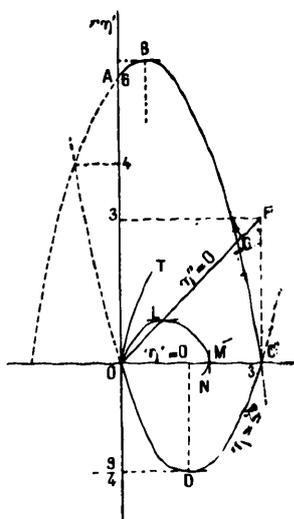


Fig. 9. — Champ de variation de $r\eta'$ et τ , OABCD.

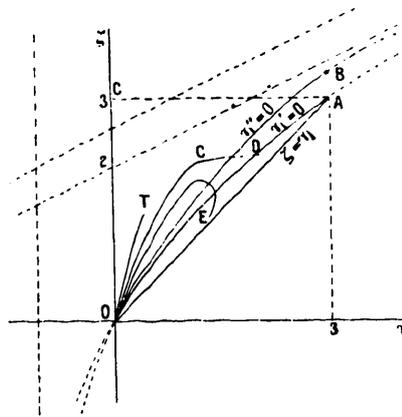


Fig. 10. — Champ de variation de ζ , τ , OAC.

varient toujours dans le même sens que ζ . Pour avoir $r\eta' = 0$, il faut $\eta = \alpha$.

On a encore la relation (49) $\eta < \zeta < 3$. Donnons à ζ ses deux valeurs limites. dans (52) on aura

$$(53) \quad \eta(\eta - 3) = r\eta' = (\eta + 2)(3 - \eta).$$

Et comme d'après (49) on a $0 < \eta < 3$, le champ de variation de $r\eta'$ par rapport à η sera limité par l'axe de $r\eta'$, OA, et par les deux paraboles ABC et ODC (fig. 9).

Dérivons de nouveau l'équation de Clairaut-Radau, il vient

$$r\eta'' + 2\eta'(\eta + 3) = 2(\zeta\eta)' + 2\zeta'.$$

Pour avoir $\eta'' = 0$, il faut ou bien $\eta' = 0$ et $\zeta' = 0$ à la fois ⁽¹⁾, alors η aurait un point d'inflexion et resterait croissant; ou bien

$$\eta'(\eta + 3) = (\zeta\eta)' + \zeta', \quad \eta d\eta + 3 d\eta = d\zeta\eta + d\zeta.$$

En intégrant cette équation de 0 à r et remarquant que la constante est nulle, car pour $r = 0$ on a $\eta = \zeta = 0$, il vient

$$2\zeta(\eta + 1) = \eta(\eta + 6).$$

Cette valeur portée dans l'équation de Clairaut-Radau donne $r\eta' = \eta$. La ligne des points d'inflexion sera donc représentée dans la figure 9 par la droite OF; la ligne des maximums et minimums, $\eta' = 0$, par l'axe OC.

Au centre on a $\eta = \frac{re'}{e} = 0$, puis $\eta > 0$. La courbe des η part donc de l'origine en montant avec $\eta' = 0$. Si elle ne coupe pas OF où $\eta'' = 0$, elle reste montante et η croissant. C'est le cas de la Terre, car à la surface on a à peu près $\eta = 0,5$, $\zeta = 1,5$ et $\eta' = 1,75$, d'où le point figuratif T et la courbe OT.

Or le domaine de variation de $r\eta'$ et η comprend trois parties bien distinctes : 1° OABG où l'on a $\eta'' > 0$, η' croissant et positif, η croissant; 2° OGC où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant mais positif, η croissant; 3° enfin OCD où l'on a $\eta'' < 0$, η' décroissant et négatif, η décroissant. Il est facile de voir dès lors que la courbe de variation ne peut être qu'une courbe analogue à celle de OLMN ou une portion d'une telle courbe selon que le point figuratif de la surface extérieure tombe dans l'une ou dans l'autre de ces trois parties du domaine.

En résumé, la variation générale de η du centre à la surface ne dépend que des valeurs de η et η' à la surface, c'est-à-dire de φ , e_1 , ρ_1 , D_1 . Si $\eta'_1 \geq 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\rho_1}{D_1} \geq \frac{\eta_1 + 2}{\eta_1 + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1}{D_1} \geq \frac{\eta_1 + 2}{6} \frac{3 - \eta_1}{\eta_1 + 1},$$

(1) Cas très particulier, peu probable. La courbe de variation OLMN, au lieu de couper OC en M, lui serait tangente. La discussion suivante et les conclusions n'en sont pas modifiées.

η est toujours croissant. Dans le cas contraire, η_1 décroissant vers la surface passe par un maximum. Il n'a jamais de minimum. D'où le théorème général :

Si η est croissant à la surface, il l'est dans toute la masse. S'il est décroissant à la surface, il aura un maximum à l'intérieur.

Pour la Terre, en admettant $\frac{1}{e} = 297,40$, on aurait $\eta'_1 = 0$ pour $\rho_1 = 3,667$. La densité superficielle est certainement plus faible que ce dernier chiffre; on a donc $\eta' > 0$ et η toujours croissant.

Pour Jupiter et Saturne on a pour η_1 les valeurs 1,640 et 1,586. Les limites correspondantes de ρ_1 sont 0,406 et 0,226. Il faudrait que la densité superficielle soit supérieure à ces chiffres pour que η soit décroissant à la surface. Notons que les densités moyennes sont ici 1,30 et 0,69.

L'équation de Clairaut-Radau donne encore pour $\eta' = 0$ et $\eta'' = 0$ les équations

$$\zeta = \frac{\eta}{2} \frac{\eta + 5}{\eta + 1} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{\eta}{2} \frac{\eta + 6}{\eta + 1}.$$

Traçons les courbes correspondantes (*fig. 10*) nous avons deux hyperboles passant par l'origine. La courbe $\eta'' = 0$ est toujours au-dessus de celle de $\eta' = 0$. On vérifie ainsi de nouveau que si η' devient négatif, il le restera puisqu'on ne peut plus avoir $\eta'' = 0$ au-dessous de la ligne $\eta' = 0$. Traçons la droite $\zeta = \eta$. Toute la courbe sera au-dessus de cette droite OA puisqu'on a $\eta < \zeta$.

Nous venons d'étudier ce qu'on peut savoir de la variation de η d'après sa valeur à la surface. On peut la déduire aussi de la loi de variation de ζ ou de ρ à l'intérieur.

En effet η est d'abord croissant au centre. Il ne peut décroître qu'en passant par un maximum, lequel exige $\eta'' < 0$ et $\eta' = 0$. Dérivons (52) en y faisant $\eta' = 0$, on a

$$\eta'' = 2\zeta'(\eta + 1).$$

Premier cas. — Si ζ' reste positif et ζ croissant, on a $\eta'' > 0$ et η reste croissant. Or

$$\zeta' = -3 \left(\frac{\rho}{D} \right)' = - \left(\frac{rD'}{D} \right)'$$

1° Si $\frac{\rho}{D}$ reste décroissant, ζ et η restent croissants. Or $\frac{\rho}{D}$ (rapport de la densité d'une couche à la densité moyenne à l'intérieur de cette couche) reste décroissant pour toutes les lois de densité étudiées par les astronomes : Legendre et Laplace, Roche, Radau, Lipschitz et Maurice-Lévy, quelle que soit la valeur des paramètres arbitraires. Il est facile de s'en assurer par des calculs très simples. On peut donc dire que pratiquement η reste toujours croissant.

Cependant $\frac{\rho}{D}$ serait croissant si ρ restait constant d'une surface S à une autre S' , car D continue à diminuer. Mais même en admettant un fluide homogène, la simple compression des couches accroît assez la densité pour que $\frac{\rho}{D}$ soit toujours décroissant comme le montrent les formules de Laplace et Roche basées sur la compression d'un fluide homogène.

Avec la loi $\rho = \frac{\rho_1}{r^n}$ et $0 < n < 3$, on a

$$\frac{\rho}{D} = \frac{3-n}{3} = \text{const.}$$

Ce sera un cas limite. De plus, avec $n = \zeta_1$, cette loi vérifie l'équation de Clairaut; on a alors $\eta = \eta_1 = \text{const.}$

2° On a encore

$$\left(\frac{rD'}{D}\right)' = \frac{D'}{D} + \frac{rD''}{D} - \frac{rD'^2}{D^2}.$$

Cette expression sera toujours négative et η toujours croissant si $D'' < 0$.

3° On a enfin

$$\left(\frac{\rho}{D}\right)' = \frac{1}{D^2}(\rho'D - \rho D').$$

Or (39) donne en tenant compte de (40) et intégrant par parties

$$\frac{1}{3}D' = \frac{1}{4r^3} \int_0^r \rho' da^3 = \frac{1}{4}\rho' - \frac{1}{4r^3} \int_0^r \rho'' a^3 da$$

et

$$D = \rho - \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho'' a^3 da,$$

on aura

$$D^2 \left(\frac{\rho}{D} \right)' = \rho' D - \rho D' = \frac{1}{4} \rho \rho' - \frac{\rho'}{r^3} \int_0^r -\rho' a^3 da + \frac{3}{4} \frac{\rho}{r^3} \int_0^r \rho'' a^3 da.$$

Si $\rho'' < 0$ tous les termes du second membre sont négatifs, $\frac{\rho}{D}$ est décroissant, ζ et η croissants (1).

D'ailleurs ce troisième cas équivaut au second. En effet, dans le cas limite où $\rho'' = 0$, ρ est linéaire. On voit facilement que D l'est aussi et $D'' = 0$. Or ρ'' et D'' ne peuvent être toujours positifs ou toujours négatifs qu'en passant par cette limite. Ils y passent tous deux ensemble. Ils seront toujours négatifs ou toujours positifs ensemble.

Deuxième cas. — Si ζ' est nul en un point où $\eta' = 0$, alors $\eta'' = 0$. C'est un point d'inflexion, η' reste positif et η croissant, comme on l'a vu.

Si ζ' reste nul et ζ constant à partir d'un certain point jusqu'à la surface, alors de ce point jusqu'à r quelconque on peut intégrer l'équation de Clairaut-Radau prise sous la forme (52) où α et β , fonctions de ζ , sont constants. On a (2)

$$\frac{d\eta}{\eta - \beta} + \frac{d\eta}{\alpha - \eta} = (\alpha - \beta) \frac{dr}{r}, \quad \frac{\alpha - \eta}{\eta - \beta} r^{\alpha - \beta} = \text{const.}$$

Or il est facile de voir, en résolvant le trinôme de (52), qu'on a $4 < \alpha - \beta < 5$. D'autre part $\frac{\alpha - \eta}{\eta - \beta}$ varie en sens inverse de η . Donc quand r croît, η croît également. Si r croît indéfiniment, η tend vers α et η' vers 0, mais asymptotiquement. On a toujours η croissant : courbe OCD (fig. 10).

Troisième cas. — Si ζ' est négatif avec $\eta' = 0$, alors on a $\eta'' < 0$ et η devient décroissant. Mais peut-on avoir $\eta' = 0$?

Prenons le cas extrême où la décroissance de ζ est maximum, c'est-

(1) M. Callandreaux a signalé le premier et le troisième cas et surtout étudié ce dernier, beaucoup moins général que le premier.

(2) Si ζ est constant partout, la constante est nulle puisqu'au centre on a $r = 0$, alors $\eta = \alpha$ et $\eta' = 0$ partout, η reste constant. C'est le cas limite cité plus haut.

à-dire où la densité reste constante à partir d'un certain point. Si à partir de $r = a$ on a $\rho' = 0$ l'intégrale de (47'') reste constante et l'on peut écrire

$$(48') \quad (\zeta - \eta) r^3 D\lambda^2 = k.$$

Or $r^3 D\lambda^2$ est croissant, donc η tend asymptotiquement vers ζ , et comme ζ tend vers 0, si ρ reste constant, η doit finir par devenir décroissant. Mais cela suppose un rayon très grand.

D'ailleurs, on peut éliminer $D\lambda^2$ de l'équation précédente par dérivation. On obtient en effet

$$r(\zeta' - \eta') + (\zeta - \eta)(\delta + \eta - \zeta) = 0 \quad \text{ou} \quad r\gamma' + \gamma(\delta - \gamma) = 0,$$

en posant $\zeta - \eta = \gamma$. On obtient

$$\frac{\zeta - \eta}{\delta + \eta - \zeta} r^3 = \text{const.}$$

par une nouvelle intégration. D'autre part, en remplaçant $r\gamma'$ par sa valeur dans l'équation précédente, ou en dérivant directement la valeur de ζ , on obtient

$$r\zeta' = \zeta(\zeta - 3), \quad \text{d'où} \quad \frac{\zeta r^3}{3 - \zeta} = \text{const.}$$

On vérifie les mêmes conclusions : quand r croît indéfiniment, ζ tend vers 0 et $\eta < \zeta$ tend vers ζ , donc vers 0.

4. *Équation de Clairaut appliquée à l'Océan.* — Le troisième cas du numéro précédent est celui d'une masse ellipsoïdale et hétérogène recouverte d'un fluide de densité constante. L'équation (48') pourra donc s'écrire à la surface, en remplaçant $\lambda^2 = 2e$,

$$(\zeta_1 - \eta_1) D_1 e_1 = 3 \int_0^{r_1} -\rho' a^3 e da,$$

où r désigne le rayon du noyau, $r_1 = 1$ celui de la masse totale. En remplaçant ζ_1 et η_1 par leurs valeurs et en intégrant le second membre par parties, on retrouve la formule beaucoup plus compliquée

donnée par Laplace et dont Roche s'est servi (1). La formule ci-dessus a encore l'avantage de s'appliquer au cas où il y aurait variation brusque de densité entre le noyau et l'enveloppe, comme c'est le cas pour l'Océan. Il suffit, en effet, d'ajouter au second membre le terme d'intégration correspondant à cette variation de densité,

$$- \rho' da = \rho - \rho_1;$$

il vient

$$(54) \quad (\zeta_1 - \eta_1) D_1 e_1 = 3 \int_0^{r'} - \rho' a^2 e da + 3(\rho - \rho_1) e r^3,$$

où ρ et e désignent la densité et l'aplatissement à la surface du noyau.

On peut démontrer d'ailleurs que cette discontinuité dans la densité n'en introduit pas une dans la variation de η ou de e . En effet, l'équation de Clairaut-Radau montre d'abord que η' reste toujours fini quel que soit η et ζ , et même que $r\eta' < \frac{25}{4}$. Donc η ne peut pas éprouver de saut brusque.

Pour serrer de plus près la difficulté, on peut toujours supposer à la surface de discontinuité une variation extrêmement rapide de la densité. L'équation de Clairaut-Radau reste applicable. Si nous posons $\zeta = \eta + f(r)$, elle devient

$$r r' + \eta(\zeta + f) = f \quad \text{ou} \quad y' + P y = Q,$$

équation linéaire et intégrable qui donne

$$y = e^{-\int P dx} \left(C + \int Q e^{\int P dx} dx \right) = (1 - P dx) [C + (1 + P dx) Q dx],$$

car le champ de la variation, supposée très rapide, se réduit à un seul

(1) *Méc. céle.*, Liv. III, n° 34, et *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre*, 1881, p. 29. Mais il faut remarquer que Roche suppose la terre formée de trois couches homogènes et applique cette formule aux deux couches intérieures, sans tenir compte de la troisième, ni de la discontinuité dans les densités. Hamy, dans son *Étude sur la figure des corps célestes*, 1887, a repris la même hypothèse des trois couches homogènes sous une forme plus rigoureuse. Dans les calculs numériques, j'ai pu traiter le cas général d'une variation continue de la densité (voir Chap. VII).

élément d'intégration, et l'on peut développer, en série, en ne conservant que les premiers termes. Or, pour $dx = 0$, on aura $y = C = \eta_1$, d'où finalement

$$\eta = \left(1 - \frac{4+f}{r} dx\right) \left(\eta_1 + \frac{f}{r} dx\right) = \eta_1 - \frac{4+f}{r} \eta_1 dx + \frac{f}{r} dx.$$

La valeur voisine de η_1 , au point de discontinuité n'en diffère que d'un infiniment petit, η ne subit donc pas de variation brusque. D'ailleurs, en remplaçant f par sa valeur, on retrouve identiquement la loi de Clairaut-Radau, qui demeure donc applicable même dans le cas de densités discontinues

$$\eta - \eta_1 = d\eta = [2\zeta(\eta + 1) - \eta(\eta + 5)] \frac{dr}{r}.$$

Si dr , la profondeur de l'Océan supposée constante, est assez petite, cette dernière formule suffit pour donner la variation de η de la surface de l'écorce à la surface de l'Océan.

La formule (52) donnera aussi dans ce cas

$$(\eta + 2)De - 5\varphi D_1 = 3\rho_1 de.$$

En écrivant

$$\eta = \eta_1 - d\eta, \quad D = D_1 - dD, \quad e = e_1 - de,$$

en développant et tenant compte de la valeur précédente de $d\eta$, on obtient

$$\frac{de}{e_1} = \eta_1 \frac{dr}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{re'}{e_1} = \eta_1.$$

La variation de e est encore donnée à la surface dans le cas d'une discontinuité, par la même valeur de η que dans le cas d'une variation continue de la densité.

Si η_1 et e_1 ont été calculés dans l'hypothèse d'une loi continue de la densité pour la surface solide d'une planète, la valeur de correction de $d\eta$ pour la surface sera encore donnée par la loi de Clairaut-Radau (1).

(1) Il serait intéressant de pouvoir tenir compte de l'influence de l'Océan dans les calculs numériques, mais il s'introduit de nombreux termes de correction qui rendent les calculs pénibles. D'ailleurs les irrégularités de la surface

4. *Étude de ω^2 en fonction de ρ et de e .* — On a

$$1 + \lambda^2 = \frac{1}{(1-e)^2} = 1 + 2e + 3e^2 + \dots$$

Dans (36) faisons $\lambda^2 = 2e$ et changeons la variable a en r pour simplifier :

$$(55) \quad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 - \frac{3}{5} \int_0^1 \rho de.$$

Or quelles que soient la loi des densités et celle des aplatissements, comme $0 < r < 1$, on peut les supposer développées suivant les puissances de r :

$$(56) \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots), \quad \rho_1 = \rho_0(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots) = \rho_0(1 + \alpha),$$

$$(57) \quad e = e_0(1 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \dots), \quad e_1 = e_0(1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots) = e_0(1 + \beta).$$

En portant ces valeurs dans (55) et intégrant, on aura

$$(55') \quad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r + k_2 r^2 + \dots).$$

On obtient facilement en faisant les calculs :

$$k_0 = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \left[\beta_1 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{3} \alpha_2 + \dots \right) + 2\beta_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \alpha_1 + \frac{1}{4} \alpha_2 + \dots \right) + 3\beta_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \alpha_1 + \dots \right) + \dots \right],$$

$$k_1 = \left(\beta_1 + \frac{3}{4} \alpha_1 \right) - \frac{3}{5} \left(\beta_1 + \frac{5}{6} \alpha_1 \right) + \frac{3}{5} \beta_1 = \beta_1 + \frac{1}{4} \alpha_1,$$

$$k_2 = \left(\beta_2 + \frac{3}{4} \alpha_1 \beta_1 + \frac{3}{5} \alpha_2 \right) - \frac{3}{5} \left(\beta_2 + \frac{6}{7} \alpha_1 \beta_1 + \frac{5}{7} \alpha_2 \right) + \frac{3}{5} \left(\beta_2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \beta_1 \right),$$

$$k_3 = \left(\beta_3 + \frac{3}{4} \alpha_1 \beta_2 + \frac{3}{5} \alpha_2 \beta_1 + \frac{3}{6} \alpha_3 \right) - \frac{3}{5} \left(\beta_3 + \frac{7}{8} \alpha_1 \beta_2 + \frac{6}{8} \alpha_2 \beta_1 + \frac{5}{8} \alpha_3 \right) + \frac{3}{5} \left(\beta_3 + \frac{2}{3} \alpha_1 \beta_2 + \frac{1}{3} \alpha_2 \beta_1 \right).$$

La loi de formation des termes est évidente. Après réduction, le terme

lui enlèvent de l'importance, d'autant plus que les différentes lois de densité donnent à très peu près le même aplatissement, quelle que soit la densité superficielle admise.

général peut s'écrire

$$(58) \quad k_n = \beta_n + \frac{3}{4} \alpha_1 \beta_{n-1} + \frac{3}{5} \alpha_2 \beta_{n-2} + \dots + \frac{3}{n+3} \alpha_n \\ - \frac{3}{n(n+5)} (\alpha_1 \beta_{n-1} + 2\alpha_2 \beta_{n-2} + \dots + n\alpha_n).$$

Cette formule, linéaire en α et en β , relie α_n et β_n aux α et β précédents. Si ω est constant, il faudra faire

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

On voit d'après la formule de récurrence (58) que tous les β seront facilement déterminés de proche en proche au moyen des α , ou réciproquement les α au moyen des β . Avec $k_1 = 0$, on a

$$\beta_1 = -\frac{1}{4} \alpha_1, \quad \dots$$

Si donc on se donne la loi des densités, on en déduira celle des aplatissements et réciproquement. Il suffit de connaître $e_1 = e_0(1 + \beta)$, d'où $e_0 = \frac{e_1}{1 + \beta}$, où β sera déterminé par (55). Il n'y a qu'une seule solution.

Si ω n'est pas constant, on pourra écrire

$$(59) \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \dots), \quad \omega_1^2 = \omega_0^2(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots) = \omega_0^2(1 + \gamma).$$

Il faudra alors connaître deux quelconques des relations (56), (57), (59) pour déterminer la troisième. On aura

$$\omega_0^2 = \frac{8}{3} \pi f e_0 \rho_0 k_0 \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \frac{k_1}{k_0}, \quad \dots$$

Il est plus naturel de supposer ρ connu, car il sera plus facile de faire des hypothèses ou des mesures concernant cette donnée physique.

Nous pouvons supposer ρ , et D , suffisamment connus, ce qui permet de déterminer deux des paramètres $\rho_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ de (56). On peut supposer tous les autres nuls, sauf α_2 , et l'on a la formule de Roche

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2),$$

où ρ_0 et α sont complètement déterminés par les valeurs expérimentales

tales ρ_1 et D_1 , ce qui ne laisse pas assez de souplesse à la formule pour représenter les autres données. (On écrit $-\alpha$, car ρ est décroissant, $\rho' < 0$.)

Si, au contraire, on annule tous les coefficients α , sauf α_n qu'on laisse indéterminé, on aboutit à la formule de Lipschitz à trois paramètres

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n), \quad D = \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{n+3} r^n \right).$$

ρ et α sont déterminés par ρ_1 et D_1 , et n pourra varier de 0 à ∞ . La loi des densités variera en même temps depuis l'homogénéité parfaite jusqu'à une certaine condensation, qui n'est jamais totale.

Dans ce dernier cas, on voit facilement sur la formule de récurrence (58) que tous les β seront nuls, sauf les multiples de n , et l'on aura

$$(61) \quad e = e_0(1 + \beta_n r^n + \beta_{2n} r^{2n} + \dots).$$

On a vu que si ω est constant les β ne dépendent que des α . La loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités. Si cette loi des densités est donnée et reste la même, celle des aplatissements restera également la même, quels que soient la vitesse de rotation et le rayon total de la masse. Il suffit que le rapport des distances soit conservé dans la concentration ou la dilatation de la masse.

Dans le cas de ω constant la formule (55') donne

$$\frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_0 \rho_0 k_0 = e_1 \rho_0 \frac{k_0}{1 + \beta},$$

or

$$\frac{3\omega^2}{4\pi f D_1} = \varphi$$

et

$$(62) \quad D_1 = \rho_0 \left(1 + \frac{3}{4} \alpha_1 + \frac{3}{5} \alpha_2 + \dots \right) = \rho_0(1 + \alpha'),$$

on a

$$(63) \quad e_1 = \frac{\varphi}{2} \frac{(1 + \alpha')(1 + \beta)}{k_0}, \quad e_1 = \frac{\varphi}{2} f(\alpha).$$

α' , β et k_0 ne dépendent que des α ; il en est de même de e si φ ou ω^2

reste constant. De plus, si la loi des densités reste la même, e , est proportionnel à φ ou à ω^2 (¹).

Or e , et φ étant donnés, on pourra toujours déterminer $f(\alpha)$ de manière à vérifier (63), ou bien on pourra faire varier $f(\alpha)$ de manière à réaliser différents aplatissements, mais toujours à la condition que ω soit faible et e^2 négligeable. On a vu dans le Chapitre précédent qu'autrement il n'en est plus de même et que ω passe par un maximum.

On a donc le *théorème général* suivant :

Dans une masse fluide hétérogène, remplissant les conditions du problème de Clairaut, la loi de variation des aplatissements ne dépend que de celle des densités et l'aplatissement superficiel est proportionnel à φ .

Si ω varie en profondeur, les e et e_1 dépendront en outre des paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ qui définissent cette vitesse.

CHAPITRE IV.

PROBLÈME DE M. POINCARÉ.

Le problème posé par M. Poincaré consiste à déterminer les limites de l'aplatissement qui vérifie à la fois les conditions de la précession et celles de l'attraction. Ces conditions sont traduites expérimentalement par la valeur de J , rapport des moments d'inertie déduit de la constante de précession et par la valeur de φ , rapport de la force centrifuge à l'attraction, sur l'équateur.

1. *Les trois équations qui déterminent e en fonction de φ , de J , de φ et de J .* — L'équation de Clairaut (38) devient à la surface

$$(64) \quad \frac{5}{3}(\lambda^2 - \varphi)D_1 = \int_0^1 \rho da^3 \lambda^2, \quad \frac{5}{3}\left(e - \frac{\varphi}{2}\right)D_1 = \int_0^1 \rho da^3 e.$$

(¹) M. Hennessy avait déjà indiqué une formule analogue à (63), relative à l'aplatissement superficiel seul. Voir *Comptes rendus*, t. XCIV, p. 526.

Si la loi des densités est donnée, on en déduit celle de e dans l'hypothèse de ω constant (Chapitre précédent) et (64) donne e_1 en fonction de φ , valeur qu'on désignera par e_φ .

On peut déduire également e de la considération des moments d'inertie. Pour un ellipsoïde homogène de révolution, on a

$$A = \frac{3}{5} mb^2, \quad B = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2), \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho ab^2,$$

$$A = \frac{8}{15} \pi \rho a^5 (1 + \lambda^2)^2, \quad B = \frac{4}{15} \pi \rho a^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Les moments d'inertie d'une couche ellipsoïdale de densité ρ seront

$$dA = \frac{8}{15} \pi \rho da^5 (1 + \lambda^2)^2, \quad dB = \frac{4}{15} \pi \rho da^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Ceux de l'ellipsoïde hétérogène seront alors

$$(65) \quad A = \frac{8}{15} \pi \int_0^1 \rho da^5 (1 + \lambda^2)^2, \quad B = \frac{4}{15} \pi \int_0^1 \rho da^5 (1 + \lambda^2)(2 + \lambda^2).$$

Puis on aura immédiatement en négligeant λ^6

$$(65') \quad J = \frac{A - B}{A} = \frac{\int_0^1 \rho da^5 (1 + \lambda^2) \lambda^2}{2 \int_0^1 \rho da^5 (1 + 2\lambda^2)}.$$

Si l'on néglige de plus λ^4 , on a

$$(66) \quad \int_0^1 \rho da^5 \lambda^2 = 2J \int_0^1 \rho da^5, \quad \int_0^1 \rho da^5 e = J \int_0^1 \rho da^5.$$

Enfin, en combinant avec l'équation de Clairaut (64), on obtient

$$(67) \quad \frac{5}{3} (\lambda^2 - \varphi) D_1 = 2J \int_0^1 \rho da^5, \quad \frac{5}{3} \left(e - \frac{\varphi}{2} \right) D_1 = J \int_0^1 \rho da^5.$$

La valeur de J est déterminée par l'Astronomie, (66) donnera une nouvelle valeur de e qui en dépend et que l'on désignera par e_J .

L'équation (67) donne une troisième valeur de e qui dépend à la fois de φ et de J , et désignée par $e_{\varphi J}$. Ces trois valeurs doivent concorder, la loi des densités étant donnée. Nous verrons par les calculs

pratiques que l'inverse de l'aplatissement, qui satisfait à ces trois relations, varie à peine de quelques dixièmes quelle que soit la loi des densités.

Ces trois relations fondamentales peuvent s'écrire en une seule :

$$\frac{5}{3} \left(e - \frac{\varphi}{2} \right) D_1 = \int_0^1 \rho da^3 e = J \int_0^1 \rho da^3.$$

2. Équation de condition entre e , φ , J . Limite inférieure de $\frac{1}{e}$.

— Les trois équations ci-dessus sont indépendantes de la loi de la vitesse de rotation. Elles sont encore vraies quand ω est variable. Avec ω constant, dans le cas du problème de Clairaut, on peut établir théoriquement la nécessité d'une limite étroite entre e , φ , J , en introduisant, au moyen de l'équation différentielle de Clairaut-Radau, cette condition de la constance de la vitesse.

En effet, on a identiquement

$$\int_0^a D da^3 = 5 \int_0^a a da \int_0^a \rho da^3 = \frac{5}{2} a^2 \int_0^a \rho da^3 - \frac{3}{2} \int_0^a \rho da^3,$$

et à la surface

$$(67') \quad 3 \int_0^1 \rho da^3 = 5 D_1 - 2 \int_0^1 D da^3.$$

Portant cette valeur dans (67) il vient

$$(68) \quad (\lambda^2 - \varphi) D_1 = 2 J D_1 - \frac{4}{5} J \int_0^1 D da^3.$$

D'autre part, on a aussi identiquement

$$(68') \quad (a^3 \sqrt{1 + \eta} D)' = \frac{5 a^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left(1 + \eta + \frac{a \eta'}{10} + \frac{1 + \eta}{5} \frac{a D'}{D} \right).$$

En introduisant ζ et l'équation Clairaut-Radau, on a

$$(a^3 \sqrt{1 + \eta} D)' = \frac{5 a^4 D}{\sqrt{1 + \eta}} \left(1 + \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{10} \eta^2 \right).$$

On intègre de 0 à $r_1 = 1$ et il vient

$$(69) \quad D_1 \sqrt{1 + \eta_1} = \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{10}\eta^2}{\sqrt{1 + \eta}} D da^5 = K \int_0^1 D da^5.$$

K désigne la valeur moyenne de l'expression en η où l'on aura $0 < \eta < \eta_1$, puisque η est toujours croissant. Cette valeur portée dans (68) donne

$$(70) \quad \lambda^2 + \frac{4}{3} J \frac{\sqrt{1 + \eta_1}}{K} = 2J + \varphi, \quad e + \frac{2}{3} J \frac{\sqrt{1 + \eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2}.$$

C'est l'équation de condition que doit vérifier λ^2 ou e , et qui dépend de φ et de J . Le premier membre est fonction de e , le second en est indépendant.

Or K ne peut varier qu'entre des limites très étroites. On a, en effet, le Tableau de variation suivant :

$$K' = \frac{\eta(1 - 3\eta)}{20(1 + \eta)^2}$$

| | | | | |
|--------|---|---------------|----------|-----|
| η | 0 | $\frac{1}{3}$ | η_1 | 3 |
| K' | 0 | + | 0 | - |
| K | 1 | | K_1 | 0,8 |

Fig. 11.

En admettant $292 < \frac{1}{e} < 298$ avec $\eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2$, on a

$$(71) \quad 0,531 < \eta_1 < 0,583 \quad \text{et} \quad 0,9999 < K_1 < 0,9996.$$

On aura donc finalement

$$0,9996 < K < 1,00075;$$

K ne diffère de l'unité que d'une fraction 0,0004 inférieure à λ^2 ou e . Or, J étant de l'ordre de λ^2 , on peut donc faire $K = 1$, en négligeant λ^4 .

L'équation (70) donne alors comme solution (1) : $\frac{1}{e} = 297,27$.

(1) RADAU, *Comptes rendus*, t. C, 1885, p. 972. et *Bul. ast.*, t. II p. 157.

C'est la seule valeur qui puisse concorder avec les données expérimentales de la précession et de l'attraction, dans les limites de précision du problème et dans l'hypothèse de ω constant.

Remarque. — En dehors de toute hypothèse et de toute donnée expérimentale dont dépende η , on a $K \leq 1,00075$; on en déduit dans les mêmes conditions (1), $\frac{1}{e} \geq 297,10$.

3. *Les deux limites de l'équation de condition.* — Il importe d'étudier plus complètement cette équation (70) et les limites précises de ses solutions, avec les limites exactes de K , pour l'étude du Chapitre suivant où l'on tiendra compte de λ^4 . D'ailleurs, les termes en λ^4 négligés sont complexes et nombreux; il est probable qu'ils se détruisent mutuellement et que (70) donne déjà une précision assez grande, comme on le verra en effet dans la suite.

Posons

$$y = e + \frac{2}{3} J \frac{\sqrt{1 + \eta_1}}{K}, \quad \eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2,$$

on a

$$\frac{dy}{de} = 1 - \frac{J}{\varphi K} \frac{\varphi^2}{2e^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_1}} = 1 - \frac{2}{25} \frac{J}{\varphi K} \frac{(\eta_1 + 2)^2}{\sqrt{1 + \eta_1}}$$

Or l'expression en η_1 est croissante pour $0 < \eta_1 < 3$, on a donc

$$\frac{8}{25} < \frac{2}{25} \frac{(\eta_1 + 2)^2}{\sqrt{1 + \eta_1}} < 1.$$

De plus $\frac{J}{\varphi} = \frac{288,38}{305,31} = 0,94454$; on aura donc

$$\frac{J}{\varphi K} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{25} \frac{J}{\varphi K} \frac{(\eta_1 + 2)^2}{\sqrt{1 + \eta_1}} < 1$$

si $K > 0,94454$, ce qui a sûrement lieu pour la Terre d'après (71). Donc y' reste positif; y toujours croissant ne peut passer qu'une seule

(1) Cette démonstration fondamentale est due à M. Poincaré (*Comptes rendus*, t. CVII, 1888, et *Bul. ast.*, t. VI, p. 5 et 49). Voir aussi *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 92.

fois par la valeur $\frac{\varphi}{2} + J$, quand e varie. Il n'y a dans le cas de la Terre qu'une seule valeur de e solution de (70) (1).

Donnons à K ses deux valeurs limites; on aura, pour déterminer les limites correspondantes de e , les deux équations

$$(70') \quad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1 + \eta_1}}{1,00075} = J + \frac{\varphi}{2}, \quad e + \frac{2}{5} J \frac{1 + \eta_1}{1 + \frac{1}{2} \eta_1 - \frac{1}{10} \eta_1^2} = J + \frac{\varphi}{2}.$$

Or on a

$$J + \frac{\varphi}{2} = 0,00500919,$$

en donnant à e des valeurs régulièrement espacées et en déduisant η_1 , on trouve pour la valeur γ du premier membre des équations (70') le Tableau suivant (on n'a écrit que les deux ou trois dernières décimales de γ , en prenant pour unité la huitième) :

| $\frac{1}{e}$ | 297,0. | 297,1. | 297,2. | 297,3. | 297,4. | 297,5. |
|---------------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $K = 1,00075 \dots$ | 0,00500984 | 917 | 849 | 781 | 711 | 645 |
| $K = K_1 \dots$ | 0,00501180 | 1113 | 1047 | 981 | 914 | 848 |

On a donc en résumé, par un calcul très simple,

$$(71) \quad 297,097 < \frac{1}{e} < 297,393.$$

La valeur de e est renfermée ainsi dans des limites très étroites. Elle dépend de la précision des mesures sur φ et J . Or, on obtient facilement

$$(72) \quad (e - k) d \frac{1}{e} = \frac{J}{e} \left(e - \frac{\varphi}{2} \right) d \frac{1}{J} + \frac{\varphi}{e} \left(\frac{\varphi}{2} - k \right) d \frac{1}{\varphi}$$

avec

$$k = \frac{J \varphi}{2 K e \sqrt{1 + \eta_1}} = \frac{1}{2} \left(J + \frac{\varphi}{2} - e \right) \frac{\eta_1 + 2}{\eta_1 + 1}.$$

Pour les limites de e trouvées ci-dessus on a

$$d \frac{1}{e} = 0,787 d \frac{1}{J} + 0,199 d \frac{1}{\varphi}.$$

(1) On aurait les mêmes résultats, même pour $\eta_1 \leq 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{e} \leq \frac{6}{5} \frac{1}{\varphi} = 346.$$

Un accroissement de 0,1 dans la valeur de $\frac{1}{j}$ et $\frac{1}{\varphi}$ produit à peu près le même accroissement 0,0986 dans celle de $\frac{1}{e}$.

4. *Calculs numériques directs au moyen des trois équations fondamentales. Aplatissement qui en résulte.* — Les trois formules (64), (66), (67) appliquées à la loi des densités de Legendre-Laplace : $\rho = \rho_0 \frac{\sin mr}{mr}$ donne les valeurs ci-dessous :

| $m.$ | 138°. | 140°. | 142°. | 144°. | 146°. |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{e_{\varphi}}$ | 288,7 | 291,2 | 293,9 | 296,7 | 299,7 |
| $\frac{1}{e_j}$ | 299,1 | 298,5 | 297,9 | 297,3 | 296,6 |
| $\frac{1}{e_{\varphi j}}$ | 293,8 | 294,7 | 295,8 | 297,0 | 298,2 |

Tisserand avait déjà calculé la première ligne des e_{φ} (1). On obtient comme courbes représentatives de ces trois séries de valeurs des lignes presque parfaitement droites, qui se coupent au même point où l'on a

$$\rho_1 = 2,61, \quad \frac{1}{e} = 297,2.$$

Avec la formule de Roche ou celle plus générale de Lipschitz, on doit faire $\frac{1}{2} < n < 3$ pour avoir $2 < \rho_1 < 3$, et $n < 7$ pour $\rho_1 > 0$. On obtient, dans ces différents cas, comme solution unique :

| $n.$ | $\frac{1}{2}.$ | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|---------------------|----------------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{1}{e}$ | 297,187 | 297,171 | 297,173 | 297,184 | 297,19 | 297,20 | 297,21 | 297,21 |
| ρ_1 | 2,961 | 2,725 | 2,253 | 1,779 | 1,305 | 0,832 | 0,357 | 0,0 |

Valeurs très voisines et tout à fait concordantes avec celles qui précèdent.

Avec les lois plus compliquées

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^2 \quad \text{et} \quad \rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^3, \quad \bullet$$

(1) *Méc. céleste*, t. II, p. 237.

on obtient

$$\frac{1}{e} = 297,183 \quad \text{et} \quad 297,15$$

ainsi que

$$\rho_1 = 2,632 \quad \text{et} \quad 2,734.$$

§. *Calculs numériques au moyen des formules de Tisserand et de M. Lévy.* — Lipschitz avait démontré (1) que, dans le cas de la formule étudiée par lui, la valeur de l'aplatissement, donnée par la formule (64) en y faisant ω constant, était représentée par une série hypergéométrique.

Tisserand est arrivé à résoudre cette équation transcendante d'une manière très simple (2). Il arrive alors à écrire l'équation (67) entre e_φ et e ,

$$e - \frac{\varphi}{2} = \frac{3-R}{5} J,$$

où R est fonction seulement des données superficielles e_1, ρ_1, D_1 . En modifiant légèrement les notations par l'introduction de η_1 au lieu de $2h$ et $2R' = R + 2$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$e + \frac{2}{5} JR' = J + \frac{\varphi}{2},$$

où

$$R' = 1 + \frac{\eta_1}{2} - \frac{\eta_1^2}{2^3} + \frac{2\zeta - 1}{\zeta} \frac{\eta_1^3}{2^3} - \frac{15\zeta^2 - 31\zeta + 15}{12\zeta^2} \frac{\eta_1^4}{2^7} \\ + \frac{126\zeta^3 - 483\zeta^2 + 665\zeta - 225}{72\zeta^3} \frac{\eta_1^5}{2^9} - \dots$$

C'est l'équation de condition (70) où la fonction $\frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K}$ de M. Poincaré est remplacée par son développement suivant les puissances de $\frac{\eta_1}{2}$ et de ζ dans le cas où les densités suivent la loi de Lipschitz.

(1) *Journal de Crelle*, t. 62.

(2) *Comptes rendus*, t. XCIX, 13 oct. 1884, p. 579, et 1^{er} sept. M. Callandreaux a repris les mêmes calculs dans son remarquable *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, p. 71. Tisserand donnait aussi après Lipschitz le développement des termes de la série hypergéométrique. J'ai pu les remplacer par ceux d'une autre série hypergéométrique plus simple et plus rapidement convergente, ce qui a rendu possible les calculs numériques du Chapitre VII.

Tisserand supposait l'aplatissement e suffisamment connu par les mesures géodésiques $\frac{1}{e} = 292,5$ et il pensait pouvoir en déduire la valeur des trois paramètres ρ_0, α, n , de la formule de Lipschitz qui vérifieraient l'aplatissement mesuré et pouvoir déterminer ainsi plus complètement la loi des densités. Il a constaté seulement que R variait très peu, trop peu pour permettre de réaliser l'accord. Il a même cru que finalement cette valeur de R ne dépendait pas de celle de ρ_1 . C'était avant les travaux de MM. Radau et Poincaré. Nous savons maintenant que la faible variation de la fonction R de Tisserand tient à la forme même de l'expression K à laquelle elle correspondait.

Ici, je me suis servi des mêmes formules pour résoudre le problème inverse. J'ai supposé l'aplatissement e insuffisamment déterminé par les mesures géodésiques, et cherché la valeur de e qui répond aux conditions du problème. J'ai donc donné à e et à ρ_1 une série de valeurs compatibles avec les limites expérimentales : $2 < \rho_1 < 3$, et les limites déterminées dans le paragraphe précédent :

$$297,10 < \frac{1}{e} < 297,40.$$

Pour chacune de ces valeurs, j'ai déterminé celles de η_1 et de ζ qui y correspondent, puis celles de R en poussant la précision jusqu'au cinquième chiffre et tenant compte du terme en η_1^2 . J'ai obtenu ainsi les valeurs de $\frac{3-R}{5} J = J - \frac{2}{5} JR'$ qui doivent être égales à $e - \frac{\varphi}{2}$ d'après l'équation de condition.

Ces différentes valeurs sont consignées dans le Tableau suivant (la dernière colonne contient celles de $e - \frac{\varphi}{2}$) :

| $1 : e.$ | $\rho_1.$ | | | | | | $e - \frac{\varphi}{2}$ |
|--------------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------------------|
| | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. | |
| 297,0..... | 0,0016320 | 320 | 320 | 321 | 323 | 324 | 332 |
| 297,1..... | 0,0016316 | 316 | 316 | 317 | 318 | 319 | 321 |
| 297,2..... | 0,0016311 | 311 | 311 | 312 | 313 | 315 | 309 |
| 297,3..... | 0,0016306 | 306 | 306 | 307 | 308 | 310 | 298 |
| 297,4..... | 0,0016302 | 302 | 302 | 303 | 304 | 305 | 287 |
| 297,5..... | 0,0016297 | 297 | 297 | 298 | 299 | 300 | 278 |
| $1 : e.....$ | 297,17 | 297,17 | 297,17 | 297,16 | 297,14 | 297,13 | |

En traçant les courbes de chacune des colonnes qui correspondent à des valeurs différentes de ρ_1 , on voit qu'elles coupent toutes la courbe de la dernière colonne $e - \frac{\rho}{2}$ dans l'intervalle : $297,1 < \frac{1}{e} < 297,2$.

Un calcul facile donne dans chaque cas, pour chaque valeur de ρ_1 , la valeur précise de l'aplatissement qui satisfait à l'équation de condition, c'est-à-dire à la précession et à l'attraction. Ces valeurs sont consignées dans la dernière ligne du Tableau. On obtient, à 0,01 près, les nombres trouvés par les calculs directs.

Ces valeurs sont plus près de la limite théorique inférieure 297,10 que de la limite supérieure 297,40. La valeur moyenne de η est plus près de celle qui correspond au maximum K que de η_1 . Et cela devait être, car la valeur de K égale à 1 au centre, maximum pour $\eta = \frac{1}{3}$ et égale de nouveau à 1 pour $\eta = 0,53\dots$, reste bien plus longtemps au voisinage de son maximum que de K_1 .

Même en faisant varier ρ_1 de 0 à 4, on aurait encore

$$297,0 < \frac{1}{e} < 297,25.$$

M. Lévy (1) a donné une formule plus générale que celle de Lipschitz, contenant un paramètre de plus : $D = \rho_0(1 - \alpha_1 r^\mu)^\mu$. Elle se ramène à celle de Lipschitz en y faisant $\mu = 1$ et $\alpha_1 = \frac{3\alpha}{n+3}$ d'après (62).

On peut lui appliquer les mêmes calculs. R est à peine modifié de 0,0003 par l'introduction de μ dans le terme en η_1^3 seulement. On obtient les mêmes résultats que ci-dessus, relevés de 0,01 à 0,02.

$$\frac{1}{e} \dots \dots \dots 297,19 \quad 297,19 \quad 297,19 \quad 297,17 \quad 297,16 \quad 297,14$$

La loi de Radau (2) : $\frac{e}{e_1} = 1 - \frac{\eta_1}{n}(1 - r^\mu)$ rentre dans l'un des cas particuliers établis par M. Lévy, celui où

$$\mu = - \frac{\lambda + 5}{2(\lambda + 1)} = - \frac{n + 5}{2(n + 1)},$$

(1) *Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 1370, 1314, 1375.

(2) *Bul. ast.*, t. II, p. 157.

comme il est facile de s'en rendre compte. Elle donnerait donc les mêmes résultats.

Enfin, j'ai étudié aussi une *loi nouvelle* des densités et des aplatissements qui peut être considérée comme un cas limite de condensation. En faisant $\eta' = 0$, on satisfait aux équations de Clairaut avec $\eta = \eta_1$, constant, $\zeta = \zeta_1$, constant, puis $e = e_1 r^{\eta_1}$; $\rho = \rho_1 r^{-\zeta_1}$. Cette loi sera étudiée au Chapitre VII. On trouvera pour la valeur de l'aplatissement qui satisfait à l'équation de condition $\frac{1}{e} = 297,393$. C'est précisément la limite supérieure déterminée dans l'hypothèse où la valeur moyenne de η serait égale à η_1 , ce qui a lieu ici puisque η est constant. C'est là une justification remarquable des ces calculs purement théoriques du 3^e paragraphe de ce Chapitre.

6. *Calcul de g. Valeur de e qu'on en déduit. Précision des résultats.* — On a immédiatement pour la pesanteur

$$(73) \quad g^2 = X^2 + (Y + \omega^2 y)^2 = \frac{X^2}{x^2} \frac{b^2}{1 + \lambda^2} (1 - \lambda^2 \sin^2 \theta + 2\lambda^4 \sin^2 \theta - \lambda^4 \sin^4 \theta).$$

en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde et de la condition (4)

$$\frac{Y + \omega^2 y}{y} = \frac{X}{x} \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

D'autre part, la formule (16), intégrée par parties, devient à la surface

$$(74) \quad \begin{aligned} \frac{X}{r} &= -\frac{4}{3} \pi f \int_0^1 \rho da^3 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} (l - \text{arc tang } l) \\ &= -\frac{4}{3} \pi f \int_0^1 \rho da^3 (1 + \lambda^2) \frac{l^3}{\lambda^3} \left(1 - \frac{3}{5} l^2 + \frac{3}{7} l^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

En remplaçant l par sa valeur donnée par (77), page 67, on a en négligeant λ^4

$$(75) \quad g = f \frac{M}{a^2} (1 - 2e + \varphi) \left[1 - \left(\frac{5}{2} \varphi - e \right) \sin^2 \theta \right] \quad (\theta = \text{colatitude}).$$

La pesanteur est maximum aux pôles

$$g_p = \frac{M}{a^2} (1 - 2e + \varphi).$$

Elle est plus petite que si toute la masse était au centre, car $2e > \varphi$.
La variation de la pesanteur de l'équateur aux pôles est

$$n = \frac{5}{2} \varphi - e = e(\eta + 1).$$

On en déduit la valeur de e au moyen des observations du pendule. Le résultat n'est pas très précis (1).

Pour la variation de g en profondeur on peut négliger l'aplatissement, on a

$$g = f \frac{m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi f \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho r'^2 dr' = \frac{4}{3} \pi f r D,$$

d'où

$$g' = \frac{4}{3} \pi f (D + r D') = \frac{4}{3} \pi f D (1 - \zeta).$$

Si à la surface on a $\zeta > 1$, c'est-à-dire $\rho_1 < 3,706$, on aura $g' < 0$, alors g varie en raison inverse de r et croît à partir de la surface jusqu'à un maximum pour $\zeta = 1$, puis décroît jusqu'à 0.

Si l'on avait $\zeta = 1$ partout, on aurait $g = \text{const.}$ Il est à remarquer que l'hypothèse $\eta = \text{const.}$ donne $\zeta_1 = 1,017$, valeur très voisine de 1.

Remarque. — On a la relation

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \lambda^2 = (1 + \varepsilon)^2 = \frac{1}{(1 - e)^2}.$$

On a aussi, e étant l'aplatissement et ε l'ellipticité,

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{a}{b - a}, \quad \frac{1}{e} = \frac{b}{b - a} = \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

En négligeant ε^2 ou e^2 , en prenant e pour ε et réciproquement, on fait donc une erreur d'une unité sur l'inverse de l'aplatissement.

De même, en développant l'expression ci-dessus, on a

$$\lambda^2 = 2e + 3e^2 + 4e^3 + \dots = 2e \left(1 + \frac{3}{2}e + \dots \right),$$

(1) Faye montre dans son *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, t. I, p. 357, que les neuf déterminations principales laissent subsister une erreur possible de 6 unités sur l'inverse de l'aplatissement, ce qui est énorme. Avec les mesures actuelles plus précises et plus nombreuses, elle resterait cependant du même ordre, c'est-à-dire de l'ordre des unités : $298,3 \pm 1$, d'après Helmert, en tenant compte des termes en e^2 .

d'où

$$\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{3}{2} e + \dots \right) = \frac{1}{e} - \frac{3}{2} + \dots$$

Ainsi en remplaçant λ^2 par $2e$ et négligeant e^2 on fait une erreur de $+ 1,5$ sur l'inverse de l'aplatissement, sans parler des autres termes de correction. La précision des résultats obtenus ci-dessus, à quelques dixièmes près, est donc illusoire, et il faut de toute nécessité tenir compte de λ^1 pour que la précision réelle égale la précision apparente. C'est l'objet du Chapitre suivant. Mais la précision de cinq et six chiffres en première approximation était nécessaire pour obtenir une précision égale dans la seconde approximation.

CHAPITRE V.

PROBLÈMES DE CLAIRAUT ET DE M. POINCARÉ EN TENANT COMPTE DE λ^1 .

Nous reprenons ici les deux problèmes précédents en étudiant les corrections à introduire dans une seconde approximation.

1. Établissement des formules. — La formule (18), développée suivant les puissances de l et de λ , donne

$$(76) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{l^3}{\lambda^2} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} l^2 - \frac{6}{5} \lambda_r^2 l^2 + \frac{6}{7} l^4 \right) da \\ + \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5} \lambda^2 - \frac{6}{5} \lambda_r^2 \lambda^2 + \frac{6}{7} \lambda^4 \right).$$

La valeur de l est donnée par la formule (a), Chap. II, § 1. En posant $\frac{x^2}{r^2} = \cos^2 \theta$ et $\frac{a^2}{r^2} \lambda^2 = \beta^2$ ($r = a$ de S_r) on peut l'écrire

$$(77) \quad l^4 \cos^2 \theta + (1 + \lambda_r^2 \sin^2 \theta - \beta^2) l^2 - \beta^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré en l^2 . La racine positive seule convient. Représentons par D le discriminant de cette équation, on obtient facilement en développant sa valeur et négligeant les termes

en λ^6

$$\sqrt{D} = (1 + \lambda_r^2 \sin^2 \theta - \beta^2) + 2\beta^2 \cos^2 \theta (1 - \lambda_r^2 \sin^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta),$$

$$(78) \quad l^2 = \beta^2 [1 - (\lambda_r^2 - \beta^2) \sin^2 \theta] \dots \quad \text{et} \quad l^3 = \beta^3 \left[1 - \frac{3}{2} (\lambda_r^2 - \beta^2) \sin^2 \theta \right] \dots \quad (1).$$

En portant dans l'équation (76) et négligeant λ^6 on obtient

$$(79) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{a^3}{r^2} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4 \right) da$$

$$+ \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4 \right)$$

$$- \frac{3}{2} \sin^2 \theta \int_0^r -\rho' (\lambda_r^2 - \beta^2)^2 \frac{a^3}{r^2} da;$$

en intégrant par parties et remarquant que $\beta_r^2 = \lambda_r^2$, on a

$$(79') \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f} = \int_0^r \rho d \frac{a^3}{r^2} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{6}{7}\beta^4 \right)$$

$$+ \int_r^1 \rho d \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4 \right)$$

$$- \frac{3}{2} \sin^2 \theta \int_0^r \rho d \frac{a^3}{r^2} (\lambda_r^2 - \beta^2)^2.$$

C'est la formule qu'on aurait trouvée directement par la méthode ordinaire (2). Comme $\sin^2 \theta = 1 - \frac{x^2}{r^2}$, il vient

$$(80) \quad \frac{r^2}{2\pi f} \frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} = \frac{1}{r^3} \int_0^r -\rho' (\lambda_r^2 - \beta^2)^2 a^3 da = \Lambda.$$

C'est bien un cas de la formule générale trouvée au Chapitre I.

(1) En posant $\cos^2 \theta = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ et poussant l'approximation plus loin on obtient

$$(78') \quad l^2 = \beta^2 [1 - (\lambda_r^2 - \beta^2) \sin^2 \theta (1 - \lambda_r^2 - \beta^2 + 2\beta^2 \sin^2 \theta) \dots].$$

(2) On vérifie facilement qu'elle se ramène à la formule (17) de M. Callandreau (*Mémoire sur la théorie de la figure des planètes*, 1889, p. 31; *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

ω_e et ω_p étant les vitesses à l'équateur et au pôle, on aura encore

$$(80') \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = \omega_p^2 - 2\pi f A \sin^2 \theta = \omega_e^2 + 2\pi f A \cos^2 \theta = \omega_e^2 (1 + \alpha \cos^2 \theta), \\ \omega^2 = \omega_e^2 - \pi f A \cos 2\theta, \quad \omega_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{2}(\omega_e^2 + \omega_p^2). \end{array} \right.$$

Pour que les surfaces de niveau soient ellipsoïdales, il faut que la vitesse croisse de l'équateur au pôle, sur chacune des surfaces, suivant la loi ci-dessus.

On multiplie A de (80) par r^2 , on dérive par rapport à r et l'on obtient, en tenant compte de (47'),

$$(81) \quad r \frac{dA}{dr} + 7A = 2 \left(2\lambda_r^2 + r \frac{d\lambda_r^2}{dr} \right) \frac{1}{r^3} \int_0^r -\rho' (\lambda_r^2 - \beta^2) a^3 da = \frac{2}{3} D \lambda^4 \eta (2 + \eta).$$

En dérivant de nouveau et tenant compte de (47') et (48'), il vient

$$(82) \quad 8rA' + r^2A'' = \frac{2}{3} D \lambda^4 [\zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5 + 4\eta)].$$

Au centre $A = 0$, il reste ensuite toujours positif, d'après (80).

En divisant (81) par r on a $A' = 0$, au centre; car $\frac{A}{r} = 0$ et $\frac{d\lambda^2}{dr} = 0$.

A est croissant au centre. Il ne peut décroître qu'en passant par un maximum, c'est-à-dire pour $A' = 0$ et $A'' < 0$. Il sera toujours croissant, d'après (82), si

$$(83) \quad \zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5 + 4\eta) > 0.$$

M. Callandreaux a montré qu'il en était ainsi pour $n \geq 3$, avec la formule de M. Radau (1).

D'ailleurs, $\lambda_r^2 - \beta^2$ est toujours positif et croissant avec r , $\beta^2 = \frac{a^2}{r^2} \lambda^2$ étant décroissant. Si l'on représente par $(\lambda_r^2 - \beta^2)_m$ sa valeur moyenne on a, d'après (80),

$$A = (\lambda_r^2 - \beta^2)_m^2 \frac{1}{r^3} \int_0^r -\rho' a^3 da = (\lambda_r^2 - \beta^2)_m^2 (D - \rho).$$

Or, pratiquement, $D - \rho$ est toujours croissant comme ζ avec les dif-

(1) Même Ouvrage, p. 39.

férentes lois de densités étudiées. La valeur moyenne de $\lambda_r^2 - \beta^2$ sera croissante également ainsi que A.

Le maximum de $(\lambda_r^2 - \beta^2)^2$ est λ_r^4 ; d'où $A < \lambda^4 (D - \rho)$, quantité toujours croissante.

On peut trouver une limite plus faible encore. En effet, d'après (81), on peut écrire

$$(a^2 A)' = \frac{2}{3} D \lambda^4 \eta (2 + \eta) a^6, \quad r^2 A = \frac{2}{21} \int_0^r D \lambda^4 \eta (2 + \eta) da^2;$$

λ^2 et η étant croissants, on a

$$\int_0^r \lambda^4 \eta (2 + \eta) D da^2 < \lambda^4 \eta (2 + \eta) \int_0^r D da^2.$$

Or

$$\int_0^r D da^2 = \frac{7}{5} \int_0^r a^2 D da^2 < \frac{7}{5} r^2 \int_0^r D da^2.$$

En tenant compte de (69) intégrée de 0 à r, où l'on fait $K = 1$ en négligeant les λ^6 , on a

$$(84) \quad K \int_0^r D da^2 = a^2 D \sqrt{1 + \eta} \quad \text{et} \quad A < \frac{2}{15} D \lambda^4 \eta (2 + \eta) \sqrt{1 + \eta}.$$

Pour la Terre à la surface on aurait, d'après (80') avec $2\pi f = \frac{3}{2} \frac{\omega^2}{\varphi D}$,

$$\alpha = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_c^2} = 6 \frac{e^2}{\varphi} \frac{A}{D \lambda^4} < \frac{4}{5} \frac{e^2}{\varphi} \eta (2 + \eta) \sqrt{1 + \eta} = 2e\eta \sqrt{1 + \eta} = 0,00458.$$

Or toujours d'après (80') on a, en négligeant α^2 ,

$$(84') \quad \begin{cases} \omega = \omega_c \left(1 + \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta \right), & T = T_c \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta \right), \\ \delta T = -\frac{\alpha}{2} T_c \cos^2 \theta, & \omega = \frac{2\pi}{T}. \end{cases}$$

A 45° la rotation devrait se faire au maximum en 99° de moins qu'à l'équateur, pour que la surface soit rigoureusement ellipsoïdale.

Par des calculs numériques avec la formule de Roche et $2 < \rho_1 < 3$, on trouve

$$0,00133 < \alpha < 0,00195, \quad 28^s,7 < \delta T < 42^s,2.$$

Il faudrait de 512 à 750 jours pour qu'un point du parallèle de 45° effectue une rotation de plus.

2. Potentiel et attraction des couches de correction pour tenir compte de la déformation. — Si l'équilibre permanent est atteint, si la vitesse de rotation est constante en latitude, les surfaces de niveau ne peuvent plus être ellipsoïdales. Mais la déformation est de l'ordre de λ^4 et l'on peut l'évaluer en négligeant λ^6 .

Legendre a démontré qu'en passant à l'équilibre permanent le rayon de l'ellipse méridienne subissait un accroissement (1)

$$\delta r = a\lambda^4(\gamma_0 + \gamma_1 \sin^2\theta + \gamma \sin^2\theta \cos^2\theta).$$

L'accroissement du demi-axe a est $\gamma_0 a \lambda^4$, celui de b est $(\gamma_0 + \gamma_1) a \lambda^4$. Mais ici on peut négliger l'état antérieur, on suppose l'équilibre établi, et l'on prend les axes dans leur valeur actuelle pour n'étudier que la déformation. Alors on doit faire dans la formule de Legendre, $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$,

$$(85) \quad \delta r = a\gamma\lambda^4 \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

λ^2 est toujours défini par $b^2 = a^2(1 + \lambda^2)$, a et b étant les valeurs des axes dans l'état d'équilibre.

Il faut donc corriger l'attraction de chacun de nos ellipsoïdes homogènes de densité $d\rho$, par celle d'une couche d'épaisseur variable δr et de même densité $d\rho$ (2). Plus simplement, comme on néglige λ^6 , on peut la considérer comme une couche sphérique de rayon a et de densité variable $\delta r d\rho$.

On calcule le potentiel de ces couches au moyen des fonctions sphériques. On a d'abord

$$V = \int \frac{dm}{d}, \quad dm = \rho a^3 \sin\theta d\theta d\psi.$$

(1) LEGENDRE, *Hist. de l'Acad. des Sc.*, 1789, et CALLANDREAU, p. 31.

(2) En employant la méthode des ellipsoïdes de M. Hamy, on ne rencontre aucune difficulté théorique. Dans la méthode ordinaire, au contraire, on corrige une couche ellipsoïdale infiniment mince par une autre couche infiniment mince (CALLANDREAU, p. 14). On retrouvera les mêmes formules après intégration par parties, en employant ici la méthode de M. Hamy.

L'intégrale étant étendue à tout le volume; a, θ, ψ étant les coordonnées polaires et dm la masse du point attirant situé sur la surface S ; r, θ_r, ψ_r sont celles du point attiré situé sur la surface S_r (sa masse = 1); d étant la distance des deux points. On a

$$\frac{1}{d} = (a^2 + r^2 - 2\alpha ar)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} P_1(\alpha) + \frac{a^2}{r^3} P_2(\alpha) + \dots;$$

$$\alpha = \cos\theta \cos\theta_r + \sin\theta \sin\theta_r \cos(\psi - \psi_r).$$

La densité sera, en posant $\cos\theta = \mu$,

$$\rho = -\rho' da \delta r = -\rho' a \gamma \lambda^3 (1 - \mu^2) \mu^2.$$

En exprimant les μ au moyen des polynômes de Legendre

$$X_2 = \frac{3}{2} \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right), \quad X_4 = \frac{35}{8} \left(\mu^4 - \frac{6}{7} \mu^2 + \frac{3}{35} \right),$$

on obtient

$$(1 - \mu^2) \mu^2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{21} X_2 - \frac{8}{35} X_4,$$

on a ensuite

$$d\mu = -\sin\theta d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \int_{-1}^{+1} d\mu.$$

On aura pour le potentiel en un point de la surface S_r

$$V = \int_0^r \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} -\rho' \gamma \lambda^3 \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} P_1 + \frac{a^2}{r^2} P_2 + \dots \right) \\ \times \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{21} X_2 - \frac{8}{35} X_4 \right) a^3 da d\mu d\psi.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi.$$

De plus les P fonctions des α peuvent s'écrire (1)

$$P_i(\alpha) = X_i(\mu) X_i(\mu_r) + f(\theta, \theta_r) \cos(\psi - \psi_r).$$

En intégrant par rapport à ψ de 0 à 2π , les termes en $\cos(\psi - \psi_r)$ disparaissent. Il reste seulement les doubles produits des X_i . On a

(1) Voir, par exemple, TISSERAND, *Méc. céleste*, t. II, p. 251 et suiv.

alors

$$V = \frac{2\pi}{r} \int_0^r -\rho' \gamma \lambda^4 a^3 da \int_{-1}^{+1} \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{21} X_2(\mu) - \frac{8}{35} X_4(\mu) \right] \\ \times \left[1 + \frac{a}{r} X_1(\mu) X_1(\mu_r) + \frac{a^2}{r^2} X_2(\mu) X_2(\mu_r) + \dots \right] d\mu.$$

Or on a

$$\int_{-1}^{+1} X_i(\mu) X_j(\mu) d\mu = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_i^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2i+1}.$$

Il ne reste après intégration que les coefficients de X_2^2 et X_4^2

$$V_c = \frac{2\pi}{r} \int_0^r -\rho' \gamma \lambda^4 \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5} \frac{2}{21} \frac{a^2}{r^2} X_2(\mu_r) - \frac{2}{9} \frac{8}{35} \frac{a^4}{r^4} X_4(\mu_r) \right] a^3 da.$$

C'est le potentiel des points pour lesquels la surface S_r est extérieure ou V_c . Pour avoir le potentiel V_i des autres, il faut développer $\frac{1}{d}$ en fonction de $\frac{r}{a} < 1$; on a

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a} P_1 + \frac{r^2}{a^2} P_2 + \dots \right).$$

Les X sont les mêmes et l'on obtient

$$V_i = 2\pi \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) a^2 \gamma \lambda^4 \left[\frac{2}{15} + \frac{2}{5} \frac{2}{21} \frac{r^2}{a^2} X_2(\mu_r) - \frac{2}{9} \frac{8}{35} \frac{r^4}{a^4} X_4(\mu_r) \right].$$

Il faut en déduire les composantes de l'attraction qui sont

$$X = f \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = f \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Or ici $V = F(x, r)$ est fonction explicite de x par $\mu = \cos \theta = \frac{x}{r}$, et par $r^2 = x^2 + y^2$, et fonction de y seulement par r . On aura en dérivant

$$X = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{x}{r} + \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Mais

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} = \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

On n'a besoin dans la suite que de cette différence. On obtient alors pour les corrections δX et δY à introduire

$$(86) \quad \frac{\delta X_e}{x} - \frac{\delta Y_e}{y} = \frac{8\pi f}{r^3} \int_0^r -\rho' \gamma \lambda^4 \left(\frac{1}{35} + \frac{2}{21} \frac{a^2}{r^2} - \frac{2}{9} \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right) a^3 da,$$

$$(86') \quad \frac{\delta X_i}{x} - \frac{\delta Y_i}{y} = 8\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho') da \gamma \lambda^4 \left(\frac{1}{35} + \frac{2}{21} \frac{r^2}{a^2} - \frac{2}{9} \frac{r^2}{a^2} \cos^2 \theta \right).$$

On aura

$$\delta X = \delta X_e + \delta X_i \quad \text{et} \quad \delta Y = \delta Y_e + \delta Y_i,$$

pour la correction des composantes de l'attraction. En intégrant par parties l'expression $\frac{\delta X}{x} - \frac{\delta Y}{y}$, on retrouve les résultats obtenus par M. Callandreau par la méthode classique. Il n'en est pas de même en intégrant les expressions (86) et (86') séparées, car la définition des éléments intérieurs et extérieurs n'est pas la même dans les deux méthodes.

3. Introduction de cette correction dans la formule de la vitesse de la rotation. — En tenant compte de la déformation des surfaces ellipsoïdales, on a

$$x^2 + y^2 = (r + \delta r)^2 = r^2 + 2r \delta r = a^2 \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^2 \cos^2 \theta} + 2a^2 \gamma \lambda^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

L'équation de la courbe méridienne devient en coordonnées cartésiennes (*géode théorique*)

$$(87) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\gamma \lambda^4 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} = 1.$$

Les coefficients directeurs de la normale sont

$$\frac{x}{a^2} (1 - 2\gamma \lambda^4 \sin^2 \theta), \quad \frac{y}{b^2} (1 - 2\gamma \lambda^4 \cos^2 \theta).$$

Leur rapport est égal à

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} \frac{b^2}{a^2} \frac{1 - 2\gamma\lambda^4 \sin^2\theta}{1 - 2\gamma\lambda^4 \cos^2\theta} &= \frac{x}{y} (1 + \lambda^2) (1 - 2\gamma\lambda^4 \sin^2\theta + 2\gamma\lambda^4 \cos^2\theta) \\ &= \frac{x}{y} (1 + \lambda^2 + 2\gamma\lambda^4 \cos 2\theta). \end{aligned}$$

La force devant être normale à la surface, le rapport de ses composantes est égal au rapport des coefficients de la normale, d'où l'on a

$$(88) \quad \begin{aligned} \frac{Y + \partial Y + \omega^2 y}{X + \partial X} &= \frac{y}{x} \frac{1}{1 + \lambda^2 + 2\gamma\lambda^4 \cos 2\theta}, \\ \omega^2 &= -\frac{Y}{y} + \frac{1}{1 + \lambda^2} \frac{X}{x} - 2\gamma\lambda^4 \frac{X}{x} \cos 2\theta + \frac{\partial X}{x} - \frac{\partial Y}{y}. \end{aligned}$$

Dans le terme en $\gamma\lambda^4$, on prendra simplement $\frac{X}{x} = -\frac{4}{3}\pi f D$ en négligeant λ^6 .

En remplaçant $\sin^2\theta$ dans (79') et $\cos^2\theta$ dans (86) et (86') par $\cos 2\theta$, on a

$$(89) \quad \begin{aligned} \frac{3\omega^2}{4\pi f} &= \int_0^{r'} \rho da \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_r^2} \frac{a^3}{r^3} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\beta^2 - \frac{3}{4}\lambda_r^4 + \frac{3}{10}\lambda_r^2\beta^2 + \frac{3}{28}\beta^4 \right) \\ &+ \int_r^1 \rho da \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\lambda^2 - \frac{6}{5}\lambda_r^2\lambda^2 + \frac{6}{7}\lambda^4 \right) \\ &+ 6 \int_0^{r'} -\rho' \gamma \lambda^4 \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{63} \frac{a^2}{r^2} \right) \frac{a^5}{r^5} da \\ &+ 6 \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \gamma \lambda^4 \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{63} \frac{r^2}{a^2} \right) \\ &+ \cos 2\theta \left[\frac{3}{4} A + 2\gamma\lambda^4 D - \frac{2}{3} \int_0^{r'} -\rho' \gamma \lambda^4 \frac{a^7}{r^7} da \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \gamma \lambda^4 \frac{r^2}{a^2} \right]. \end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression. En effet l'équilibre permanent étant atteint et la masse tournant tout d'une pièce, l'expression doit être indépendante de θ . Le coefficient de $\cos 2\theta$ égalé à zéro donne donc une première relation qui détermine la valeur du terme de correction γ .

En multipliant ce coefficient nul de $\cos 2\theta$ par $\frac{1}{3}$ et le retranchant du

reste de l'équation (89), on obtiendra, après avoir intégré par parties les deux termes contenant $\gamma\lambda^4$ sous le signe \int

$$\begin{aligned} \frac{3\omega^2}{4\pi f} = & \left(1 - \frac{6}{7}\lambda_r^2\right) \int_0^r \rho d\frac{a^3}{r^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right) \\ & - \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda_r^2\right) \int_r^1 \rho d\lambda^2 \left(1 - \frac{3}{7}\lambda^2\right) \\ & - \frac{2}{7} \left(\frac{\gamma\lambda^4}{r^3} \int_0^r \rho da^3 - \frac{3}{5}\frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 \gamma\lambda^2 - \frac{3}{5} \int_r^1 \rho d\gamma\lambda^4\right). \end{aligned}$$

On voit que l'ensemble des termes en $\gamma\lambda^4$ est identique au second membre de l'équation de Clairaut (37), où λ^2 serait remplacé par $\gamma\lambda^4$. En représentant pour simplifier par λ^2 sa valeur corrigée $\lambda^2 - \frac{3}{7}\gamma\lambda^4$, l'équation ci-dessus pourra s'écrire en négligeant λ^6

$$(90) \quad \begin{aligned} \frac{3\omega^2}{4\pi f} = & \left(1 - \frac{6}{7}\lambda_r^2\right) \int_0^r \rho d\frac{a^3}{r^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2} \left(\lambda_r^2 - \frac{3}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2\right) \\ & - \frac{3}{5} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda_r^2\right) \int_r^1 \rho d\lambda^2 \left(1 - \frac{3}{7}\lambda^2\right). \end{aligned}$$

Cette équation détermine la valeur de λ^2 et l'aplatissement en tenant compte de λ^4 et du terme de correction γ .

4. Équation de Clairaut-Radau en seconde approximation. --

En divisant par $1 - \frac{3}{5}\lambda_r^2$ et dérivant par rapport à r , on a

$$(91) \quad r^3\lambda^2 D \left[3 - \eta + \frac{5}{21}\lambda^2\eta(2 + \eta) \right] - 3 \int_0^r \rho da^3 (1 + \lambda^2)\lambda^2 + \frac{\omega^2}{2\pi f} r^3\lambda^2\eta = 0.$$

$$(92) \quad D = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho da^3 (1 + \lambda^2) \quad (1).$$

En dérivant de nouveau, posant $-\frac{rD'}{D} = \zeta$, divisant par $r^4 D\lambda^2$, on a

$$\begin{aligned} (5 + \eta - \zeta) \left[3 - \eta + \frac{5}{21}\lambda^2\eta(2 + \eta) \right] - r\eta' + \frac{5}{21}\lambda^2 [2r\eta'(1 + \eta) + 2\eta^2 + \eta^3] \\ - 3\frac{\rho}{D} (5 + \eta + 5\lambda^2 + 2\lambda^2\eta) + \frac{\omega^2}{2\pi f D} (5\eta + \eta^2 + r\eta') = 0. \end{aligned}$$

(1) Cette expression D devrait être divisée par $1 + \lambda_r^2$ pour représenter exactement la densité moyenne. Mais cette forme est plus avantageuse, parce que plus simple pour les calculs (voir CALLANDEAU, p. 40).

Or (92) donne

$$(92') \quad 3\rho \left(1 + \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^2\eta\right) = 3D + rD', \quad 3\frac{\rho}{D} = (3 - \zeta) \left(1 - \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda^2\eta\right).$$

On tient compte aussi de la première équation de Clairaut-Radau (48') pour éliminer $r\eta'$ dans les termes en λ^2 ; enfin on pose $\frac{3\omega^2}{4\pi fD} = \varphi$ et l'on obtient l'équation de Clairaut-Radau en λ^4

$$(93) \quad r\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(1 + \eta) = \chi;$$

$$(94) \quad \chi = \frac{4}{3}\varphi\zeta(1 + \eta) + \frac{4}{21}\lambda^2\zeta(5 + 4\eta + 2\eta^2) + \frac{2}{7}\lambda^2\eta(7 + \eta).$$

Le terme de correction en λ^2 est toujours positif et toujours croissant avec φ , ζ , η , λ^2 du centre à la surface où sa valeur est maximum (1).

Ce terme en λ^2 étant très petit ne modifie pas la discussion de l'équation sans second membre. En effet, on a d'abord pour $\eta = 0$

$$r\eta' = 2\zeta \left(1 + \frac{2}{3}\varphi + \frac{2}{21}\lambda^2\right), \quad \eta' = -2\frac{D'}{D} \left(1 + \frac{2}{3}\varphi + \frac{2}{21}\lambda^2\right),$$

η' est positif au centre et η y est nul et croissant. Or η ne peut pas ensuite devenir négatif, car on a toujours η' positif et η croissant quand $\eta = 0$. On a donc, comme en première approximation,

$$\eta > 0, \quad \frac{r}{\lambda^2} \frac{d\lambda^2}{dr} > 0, \quad d\lambda^2 > 0 \quad (\lambda^2 \text{ et } e \text{ croissants}).$$

η croissant ne peut décroître qu'en passant par un maximum qui exige $\eta'' < 0$ et $\eta' = 0$. En dérivant (93) et faisant $\eta' = 0$ et $\lambda^2 = 2e$

(1) M. Callandreau avait laissé au terme de correction une forme beaucoup plus compliquée. G. H. Darwin, en reprenant les mêmes calculs avec une notation un peu différente [*The figure of the earth carried to the second order of small quantities* (*Monthly Notices of R. A. S.*, 1899, p. 93)], lui donne une forme d'apparence plus simple que (94), mais sans pouvoir démontrer que cette expression est toujours positive ou toujours croissante. Il fait remarquer au même endroit que M. Helmert émet des doutes sur la généralité de la preuve des limites de η . Cette preuve est étendue ici à la seconde approximation et, je crois, aussi rigoureuse que celle donnée en première approximation, Chap. III, § 2.

dans γ , on a

$$r\eta'' = 2\zeta'(1 + \eta) + \gamma',$$

$$\gamma' = \frac{4}{3}(\varphi\zeta' + \varphi'\zeta)(1 + \eta) + \frac{8}{21}(e'\zeta + e\zeta')(5 + 4\eta + 2\eta^2) + \frac{4}{7}e'\eta(7 + \eta).$$

Or on a $\varphi' > 0$ et $e' > 0$. Si de plus $\zeta' > 0$, on a aussi $\gamma' > 0$ et $\eta'' > 0$, par conséquent η n'aura pas de maximum et restera croissant dans les mêmes conditions qu'en première approximation.

D'autre part, en intégrant par parties l'intégrale de (91) et en simplifiant, on pourra encore l'écrire sous une forme analogue à (47'')

$$(\zeta - \eta)r^3\lambda^2 D = 3 \int_0^r -\rho' a^2 (1 + \lambda^2)\lambda^2 da + \frac{1}{3}r^3\lambda^2 D\eta \left(\zeta - \frac{2\zeta}{\lambda^2} - \frac{5}{7}\eta - \frac{31}{7} \right).$$

Dans le second membre, le terme de correction en λ^4 ne peut pas changer le signe du premier terme en λ^2 , d'où l'on a $\zeta > \eta$. D'autre part, d'après (92'), $\zeta < 3$. On a donc encore ici, comme en première approximation, la formule fondamentale

$$0 < \eta < \zeta < 3.$$

En donnant à ζ sa valeur aux deux limites, η et 3, on voit que le champ de variation de $r\eta' - \gamma$ en seconde approximation est le même que celui de $r\eta'$ en première approximation

$$\eta(\eta - 3) \leq r\eta' - \gamma \leq (\eta + 2)(3 - \eta).$$

On aurait la même discussion et les mêmes conclusions.

En troisième et quatrième approximation les termes de correction seraient encore plus petits. La démonstration subsiste, *elle est générale*.

3. Étude de l'équation définissant la déformation. — Le coefficient de $\cos 2\theta$ égalé à 0 donne la relation

$$(95) \quad \frac{3}{4}A + 2\gamma\lambda^4 D - \frac{2}{3} \frac{1}{r^2} \int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4 a^2 da - \frac{2}{3}r^2 \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{\gamma\lambda^4}{a^2} da = 0.$$

On divise par r^2 et l'on dérive par rapport à r , on a

$$(95') \quad \frac{3}{4}r^2(rA' - 2A) + 2r^2(3\rho - 5D)\gamma\lambda^4 + 2r^3 D(\gamma\lambda^4)' + 6 \int_0^r -\rho'\gamma\lambda^4 a^2 da = 0.$$

On dérive de nouveau, en tenant compte de $\zeta D = -r D' = 3(D - \rho)$

$$2r^2 D(\gamma\lambda^4)'' + 12\rho(\gamma\lambda^4)' + 4(3\rho - 10D)\gamma\lambda^4 + \frac{3}{4}r(8A' + rA'') - \frac{3}{2}(\gamma\Lambda + r\Lambda') = 0.$$

Les deux derniers termes ont déjà été calculés : (81), (82). On a enfin

$$(96) \quad r^2(\gamma\lambda^4)'' + 2r(3 - \zeta)(\gamma\lambda^4)' - 2(\gamma + \zeta)\gamma\lambda^4 + \frac{1}{4}\lambda^4 \{ \zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5\eta + 7) \} = 0.$$

Au centre $r = 0$, les deux derniers termes de (95) sont nuls, car

$$\rho_1 \frac{r^2}{a^2} = \rho_1 \frac{r^2}{r_1^2} = 0 \quad \text{et} \quad r^2 \int_r^1 -\rho' \frac{da}{a^2} = 0,$$

il reste

$$\gamma\lambda^4 = -\frac{3}{8} \frac{\Lambda}{D}.$$

$\gamma\lambda^4$ est donc nul au centre avec Λ , et du même ordre de petitesse que Λ . Il est ensuite négatif. Il commence donc par décroître. Il ne peut cesser de décroître qu'en passant par un minimum, c'est-à-dire $(\gamma\lambda^4)' = 0$ et $(\gamma\lambda^4)'' > 0$. Il restera toujours décroissant si $(\gamma\lambda^4)'' > 0$, c'est-à-dire

$$(97) \quad \zeta(4 + 6\eta + 3\eta^2) - 2\eta(5\eta + 7) - 8(\gamma + \zeta)\gamma > 0.$$

Expression analogue à (83) qui détermine la variation de Λ .

Du moins γ restera toujours négatif. En effet supposons qu'il devienne positif et soit $r^4 \gamma_r$ la valeur maximum et positive de $r^4 \gamma$. On multiplie (95) par $\frac{r^4}{\lambda_r^2}$, on a

$$\frac{3}{4} \frac{r^4}{\lambda_r^2} \Lambda + 2r^4 \gamma_r D - \frac{2}{3} \int_0^r -\rho' \frac{\lambda^4}{\lambda_r^2} \frac{a^3}{r^3} \gamma a^4 da - \frac{2}{3} \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{\lambda^4}{a^6} \frac{r^6}{\lambda_r^2} \gamma a^4 = 0.$$

Or λ^2 croît. De 0 à r on a $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^2} < 1$, donc $\frac{\lambda^4}{\lambda_r^2} \gamma a^4 < r^4 \gamma_r$.

$\frac{\lambda^2}{a^3}$ décroît. De r à 1 on a $\frac{\lambda^4}{a^6} \frac{r^6}{\lambda_r^2} < 1$, donc $\frac{\lambda^4}{a^6} \frac{r^6}{\lambda_r^2} \gamma a^4 < r^4 \gamma_r$. On obtient

$$\int_0^r -\rho' \frac{\lambda^4}{\lambda_r^2} \frac{a^3}{r^3} \gamma a^4 da < r^4 \gamma_r (D - \rho) \quad \text{et} \quad \int_r^1 (\rho_1 - \rho' da) \frac{\lambda^4}{a^6} \frac{r^6}{\lambda_r^2} \gamma a^4 da < r^4 \gamma_r \rho.$$

L'équation (95) deviendra alors

$$(98) \quad \frac{3}{4} \frac{r^2}{\lambda_p^2} \Lambda + 2r^2 \gamma_r D - \frac{2}{3} r^2 \gamma_r D < 0, \quad \frac{3}{4} \frac{r^2}{\lambda_p^2} \Lambda + \frac{4}{3} r^2 \gamma_r D < 0.$$

Ce qui est impossible, les deux termes étant positifs. Donc γ reste toujours négatif, d'où le théorème dû à M. Callandreau :

Dans un fluide hétérogène en équilibre permanent, animé d'une rotation lente, toutes les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes déprimés entre le pôle et l'équateur.

On peut obtenir plusieurs limites de γ . On a d'abord dans (95), γ étant toujours négatif,

$$\frac{3}{4} \Lambda + 2\gamma\lambda^2 D < 0, \quad -\gamma > \frac{3}{8} \frac{\Lambda}{D\lambda^2}.$$

De plus à la surface en divisant par $D\lambda^2$, on aura

$$\frac{3}{8} \frac{\Lambda}{D\lambda^2} + \gamma \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{D_1}\right) = \frac{1}{3D_1} \int_0^1 -\rho' \frac{\lambda^2}{\lambda_p^2} \gamma a^2 da < 0.$$

Si de plus $-\gamma\lambda^2 a^2$, ou à plus forte raison si $-\gamma a^2$ est toujours croissant, ce qu'on peut admettre, ce qui a lieu pratiquement avec les différentes lois de densité, comme on le verra plus loin, on a

$$\frac{1}{3D_1} \int_0^1 -\rho' \frac{\lambda^2}{\lambda_p^2} \gamma a^2 da > \frac{\gamma}{3D_1} \int_0^1 -\rho' a^2 da = \frac{\gamma}{3} \left(1 - \frac{\rho_1}{D_1}\right).$$

Ces deux relations donnent à la surface la double inégalité

$$(99) \quad \frac{6}{6+\xi} \frac{9}{16} \frac{\Lambda}{D\lambda^2} < -\gamma < \frac{9}{16} \frac{\Lambda}{D\lambda^2}.$$

En tenant compte de la limite déjà trouvée pour Λ (84), on a

$$(100) \quad -\gamma < \frac{3}{40} n(2+\tau) \sqrt{1+\tau}.$$

Cette formule donne pour la Terre une dépression maximum de 10^m, 10 à 45°. Nous verrons au Chapitre VII les limites pratiques plus étroites données par la formule (99); 1^m, 26 < δr < 4^m, 27.

Pour Jupiter et Saturne $\eta_1 = 1,640$ et $1,586$, la dépression atteindrait au maximum 183^{km} et 552^{km} , ce qui ferait seulement $\frac{1}{1120}$ et $\frac{1}{3000}$ du rayon et le $\frac{1}{22,9}$ et $\frac{1}{12,3}$ de l'aplatissement.

6. Application au problème de M. Poincaré, en tenant compte de λ^1 et de la déformation. — L'équation complète (90) devient à la surface

$$(101) \quad \frac{3\omega^2}{4\pi f}(1 + \lambda_1^2) = \left(1 - \frac{6}{7}\lambda_1^2\right)\lambda_1^2 D_1 - \frac{3}{5}\left(1 - \frac{6}{7}\lambda_1^2\right) \int_0^1 \rho da^5 (1 + \lambda^2)\lambda^2.$$

Nous transformerons d'abord ω^2 en φ (y étant pris positivement)

$$\varphi = \frac{\omega^2 y}{Y - \omega^2 y} = \frac{\omega^2 y}{Y} \left(1 + \frac{\omega^2 y}{Y} \dots\right), \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega^2 y}{Y} = \varphi(1 - \varphi).$$

Pour un ellipsoïde homogène de révolution, on a à l'équateur

$$\begin{aligned} \frac{Y}{y} &= -2\pi f \rho \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3} \left(\text{arc tang } l - \frac{l}{1 + l^2}\right) \\ &= -\frac{4}{3}\pi f \rho (1 + \lambda^2) \frac{a^3}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2}\lambda^2\right) \left(1 + \frac{3}{10} \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 + \dots\right). \end{aligned}$$

On obtiendra pour l'ellipsoïde hétérogène, par la méthode ordinaire et en tenant compte de la première approximation (64) dans le terme en λ^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{Y}{y} &= -\frac{4}{3}\pi f \left(1 - \frac{3}{2}\lambda_1^2\right) \int_0^1 \rho da^3 (1 + \lambda^2) + \frac{3}{10} \int_0^1 \rho da^5 \lambda^2 \\ &= -\frac{4}{3}\pi f D_1 \left(1 - \lambda_1^2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{3\omega^2}{4\pi f}(1 + \lambda_1^2) = \frac{\omega^2 y}{Y}(1 + \lambda_1^2) \left(1 - \lambda_1^2 - \frac{\varphi}{2}\right) D_1 = \varphi D_1 \left(1 - \frac{3\varphi}{2}\right),$$

en portant cette expression dans (101), on a

$$(102) \quad (\lambda_1^2 - \varphi) D_1 + 3\varphi \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3}{7}\lambda_1^2\right) D_1 = \frac{3}{5} \int_0^1 \rho da^5 (1 + \lambda^2)\lambda^2.$$

Il faut ensuite exprimer l'intégrale de (101) en fonction de J et de l'équation de Clairaut-Radau, pour obtenir l'équation de condition. Nous suivrons la même marche qu'au Chapitre IV, en première approximation.

On a en général pour la somme des trois moments d'inertie suivant trois axes rectangulaires (ici $C = B$) et pour A

$$A + 2B = \frac{4\pi}{5} \int \int \rho dr^3 d\mu, \quad A = \frac{2\pi}{5} \int \int \rho(1 - \mu^2) dr^3 d\mu.$$

Or ici r^3 est remplacé par $(r + \delta r)^3 = r^3 + 3r^2 \delta r + \dots$ et pour la couche de correction seule par

$$3r^2 \delta r = 3r^2 \gamma \lambda^2 (1 - \mu^2) \mu^2,$$

il vient

$$(103) \quad \delta(A - B) = \pi \int_0^r \rho dr^3 \gamma \lambda^2 \int_{-1}^{+1} (1 - 3\mu^2)(1 - \mu^2) \mu^2 d\mu \\ = -\frac{2}{7} \frac{4\pi}{15} \int_0^r \rho dr^3 \gamma \lambda^2.$$

Or d'après (65')

$$A - B = \frac{4\pi}{15} \int_0^r \rho da^3 (1 + \lambda^2) \lambda^2.$$

On voit que cette formule contiendra le terme de correction précédent en $\gamma \lambda^4$ dans (103), en donnant à λ^2 la valeur $\lambda^2 - \frac{2}{7} \gamma \lambda^4$, comme dans l'équation complète (90).

L'équation (65) donnera alors (1)

$$(104) \quad \int_0^r \rho da^3 (1 + \lambda^2) \lambda^2 = 3J \int_0^r \rho da^3 (1 + 2\lambda^2).$$

Or on a identiquement, d'après la valeur de D (92),

$$\int_0^r D da^3 + \int_0^r \rho a^3 d\lambda^2 = \frac{5}{2} a^3 D - \frac{3}{2} \int_0^r \rho da^3 (1 + \lambda^2).$$

On en déduit à la surface

$$(105) \quad 3 \int_0^1 \rho da^3 (1 + 2\lambda^2) = 5D - 2 \int_0^1 D da^3 - 2 \int_0^1 \rho a^3 d\lambda^2 + 3 \int_0^1 \rho da^3 \lambda^2.$$

(1) Les équations (102) et (104) remplacent (64) et (66) de première approximation, qui donnaient e_p et e_1 .

On remplace le dernier terme en λ^2 par sa valeur (64). On représente par $(\lambda^2 \eta)$ la valeur moyenne de $\lambda^2 \eta$, d'où

$$\int_0^1 \rho a^5 d\lambda^2 = \int_0^1 \rho a^5 \frac{\lambda^2 \eta}{a} da = \frac{1}{5} (\lambda^2 \eta) \int_0^1 \rho da^5 = \frac{1}{6} (\lambda^2 \eta) (\lambda^2 - \varphi) \frac{D}{J}.$$

Ces différentes valeurs (105), (104), (102) portées dans (101) donnent

$$(106) \quad \varphi \left(1 - \frac{3\varphi}{2} \right) = \left(1 - \frac{6}{7} \lambda^2 \right) \left(\lambda^2 - 2J + \frac{4}{5} \frac{J}{D} \int_0^1 D da^5 \right) + \frac{2}{15} (\lambda^2 \eta) (\lambda^2 - \varphi) - 2J(\lambda^2 - \varphi).$$

L'identité

$$(68') \quad (r^3 \sqrt{1+\eta} D)' = \frac{5r^3 D}{\sqrt{1+\eta}} \left(1 + \eta + \frac{r\eta'}{10} + \frac{1+\eta}{5} \frac{rD'}{D} \right),$$

en tenant compte de $\zeta = -\frac{rD'}{D}$ et de l'équation de Clairaut-Radau complète (93) donnera, en intégrant de 0 à $r_1 = 1$,

$$D_1 \sqrt{1+\eta_1} = \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{2} \eta_1 - \frac{1}{10} \eta_1^2 + \frac{1}{10} \zeta}{\sqrt{1+\eta_1}} D da^5 = (K + \delta K) \int_0^1 D da^5;$$

K est la même fonction de MM. Radau et Poincaré qu'en première approximation; $\delta K = \frac{1}{10} \frac{\zeta}{\sqrt{1+\eta}}$ est son accroissement. Désormais K , χ et η désigneront les valeurs moyennes définies par l'équation ci-dessus.

Or χ étant une expression en λ^2 et K étant égal à 1 dans les termes du second ordre, on aura

$$\frac{1}{D_1} \int_0^1 D da^5 = \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} \left(1 - \frac{\delta K}{K} \right) = \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} - \delta K \sqrt{1+\eta_1}.$$

On porte cette valeur dans (106), on remarque

$$\frac{6}{7} \lambda^2 \left(\lambda^2 - 2J + \frac{4}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} \right) = \frac{6}{7} \lambda^2 \varphi.$$

en vertu de la première approximation (70). On obtient finalement en

négligeant λ^6

$$(107) \quad \lambda^2 + \frac{4}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = 2J + \varphi + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{4}{5} J \delta K \sqrt{1+\eta_1} + 2\lambda^2 \left(J + \frac{3}{7} \varphi \right) - 2J\varphi - \frac{3\varphi^2}{2} - \frac{2}{15} (\lambda^2 \eta) (\lambda^2 - \varphi).$$

C'est l'équation de condition correspondant à (70), en première approximation et que doit vérifier λ^2 , (ε terme de correction).

7. Calculs numériques et résultats. — Il faut d'abord calculer la nouvelle expression de η_1 , en tenant compte de λ^1 . On procède comme en première approximation.

En éliminant l'intégrale de (102) au moyen de (91), et en tenant compte dans le terme de correction de la valeur de η_1 , en première approximation, on a facilement

$$(108) \quad \eta_1 = 5 \frac{\varphi}{\lambda_1^2} - 2 + \frac{9}{7} \varphi + \frac{5}{14} \varphi \eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2 - \frac{\varphi}{14} \left(\frac{69}{2} - 5\eta_1 \right).$$

η_1 est diminué d'environ

$$\varphi(2,5 - 0,1) = 2,4 \varphi.$$

Nous désignerons désormais par η_1 la valeur principale calculée en première approximation. Il faudra donc dans (107) remplacer η_1 par la valeur voisine $\eta_1 + d\eta_1$, ou remplacer

$$\sqrt{1+\eta_1} \quad \text{par} \quad \sqrt{1+\eta_1} + \frac{1}{2} \frac{d\eta_1}{\sqrt{1+\eta_1}} = \sqrt{1+\eta_1} - \frac{\varphi}{28} \frac{1}{\sqrt{1+\eta_1}} \left(\frac{69}{2} - 5\eta_1 \right).$$

D'autre part λ^2 est mis pour $\lambda^2 - \frac{3}{7} \gamma \lambda^4$ et l'on a $\lambda^2 = 2e + 3e^2 \dots$. Remplaçons dans (107), λ^2 par cette valeur. Alors e sera mis pour $e - \frac{4}{7} \gamma e^2$ et $\frac{1}{e}$ pour $\frac{1}{e} + \frac{4}{7} \gamma$ et l'on aura

$$(109) \quad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \frac{1}{25} J \gamma \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{\sqrt{1+\eta}} - \frac{2}{15} (e\eta) (2e - \varphi),$$

où ξ est l'ensemble des termes de correction indépendants des

limites K_1 et K_m de K .

$$\xi = 2e \left(J + \frac{3}{7} \varphi \right) + \frac{1}{70} \frac{J\varphi}{\sqrt{1+\eta_1}} \left(\frac{69}{2} - 5\eta_1 \right) - \frac{3}{2} e^2 - J\varphi - \frac{3}{4} \varphi^2.$$

Or en négligeant les termes du troisième ordre, le maximum de K a lieu pour $\eta = \frac{1}{3}$ comme en première approximation. D'autre part l'indéterminée $(e\eta)$ doit être prise minimum $(e\eta) = 0$, pour avoir la limite la plus basse. L'équation qui donne une des limites de e pour $K = K_m$ devient

$$(109') \quad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K_m} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \frac{\sqrt{3}}{50} J \gamma_m \sqrt{1+\eta_1},$$

γ_m est la valeur de γ où l'on a fait $\eta = \frac{1}{3}$ et $\zeta = \zeta_1$; $e = e_1$; valeurs maximums.

Pour la seconde limite $\eta = \eta_1$ il faut remplacer $\frac{1}{K_1}$ par $\frac{1}{K_1} - \frac{K_1'}{K_1^2} d\eta_1$ et donner à $(e\eta)$ sa valeur maximum calculée pour $\eta = \eta_1$. On a alors

$$e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{2+\eta_1}}{K_1} = J + \frac{\varphi}{2} + \xi + \xi_1.$$

où

$$\xi_1 = \frac{1}{25} J \gamma_1 - \frac{4}{15} \frac{3 - \zeta_1}{\eta_1 + 5 - \zeta_1} J e_1 \eta_1 - \frac{J\varphi}{700} \frac{\eta_1(3\eta_1 - 1)}{\eta_1 + 1} \left(\frac{69}{2} - 5\eta_1 \right).$$

On remarque tout d'abord que $e^3 = 0,00000038$ pour $\frac{1}{e} = 297$. On voit de plus par les calculs numériques que la huitième décimale n'influe que sur les 0,001 de l'inverse de l'aplatissement. En négligeant e^3 ou λ^6 on obtiendra donc les résultats avec cinq chiffres exacts au moins.

On trouve $J + \frac{\varphi}{2} = 0,00500919$ puis $\xi = -0,00001220$, valeur constante dans l'intervalle considéré. Pour le second cas où $\eta = \eta_1$ et $\zeta = \zeta_1$ constants, les calculs se font complètement sans indétermination et $\xi_1 = 0,00000204$. En calculant une série de valeurs du premier membre de 109' on trouve comme solution dans ce cas $\frac{1}{e} = 297,428$. On a donc $\frac{1}{e} < 297,504$ en augmentant $\frac{1}{e}$ de $-\frac{4}{7}\gamma_1$, calculé d'après (100).

En désignant par ξ_m la valeur du second terme de correction de (109')

et calculant sa valeur pour différentes valeurs de ρ_1 (on a pris comme unité la huitième décimale), on obtient comme solutions les valeurs inscrites ci-dessous :

| | | | | | | |
|-----------------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\rho_1 \dots\dots$ | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 |
| $\xi_m \dots\dots$ | 0,00000465 | 442 | 419 | 397 | 374 | 352 |
| $1 \div e \dots\dots$ | 296,732 | 296,766 | 296,800 | 296,833 | 296,866 | 296,898 |

On a donc finalement pour limites extrêmes des valeurs qui satisfont à l'attraction et à la précession, en tenant compte de e^2 ,

$$296,732 < \frac{1}{e} < 297,504 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e} = 297,12 \pm 0,38.$$

Les valeurs sont presque les mêmes qu'en première approximation. Les limites sont seulement deux fois plus étendues. Mais alors la précision n'était qu'apparente, ici elle est moindre mais réelle.

Telles sont les limites où est renfermée à quelques dixièmes près la seule valeur possible de l'aplatissement qui puisse satisfaire à la fois aux conditions de la précession et à celles de l'attraction, dans l'hypothèse d'une Terre dont les parties posséderaient assez de jeu pour obéir aux différentes forces perturbatrices extérieures, comme l'établissent les expériences de Potsdam, et dont les surfaces de niveau auraient la même vitesse de rotation, ce qui n'est malheureusement établi par aucune expérience ni aucune démonstration *a priori*.

Si l'inverse de l'aplatissement s'éloigne tant soit peu en plus ou en moins de ces limites étroites, comme par exemple pour les nombres 292 ou 298, il faudra recourir à d'autres hypothèses, étude qui forme l'objet du Chapitre suivant.

Remarque. — Dans la formule (109) les quatre premiers termes sont identiquement les mêmes qu'en première approximation. Les trois autres sont des termes de correction : ξ a une valeur parfaitement déterminée; la valeur des deux autres χ et $(e\eta)$ est définie par les relations de la page 83. Si l'on y porte les valeurs obtenues en première approximation pour ρ et e , avec la loi de Lipschitz, les solutions des calculs numériques (Chap. IV, § 4) deviennent, pour $n = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$,

$$\frac{1}{e} = 297,213 \quad 297,179 \quad 297,183 \quad 297,207.$$

G. H. Darwin (Ouvrage cité, p. 119), au moyen de la formule de Roche, $n = 2$, et en tenant compte aussi de e^2 , avait trouvé 296,4. Ce nombre est un peu faible.

Wiechert, avec une hypothèse plus simple d'un noyau et d'une écorce, trouve 297,3.

8. Calcul de g en seconde approximation en tenant compte de λ^4 . — J'ai négligé ici la déformation de l'ellipsoïde et par conséquent les termes en $\gamma\lambda^4$ qui sont presque de l'ordre de e^3 (1). On a alors les mêmes formules (73) et (74) établies en première approximation avec la condition (4). La valeur de l^2 d'après (78') donne

$$\begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{4}{3} \pi f \int_0^1 \rho da^2 (1 + \lambda^2) & \left[1 - \frac{3}{5} \beta^2 + \frac{3}{7} \beta^4 - \frac{3}{2} (\lambda_r^2 - \beta^2) \sin^2 \theta \right. \\ & + \frac{3}{2} (\lambda_r^4 + \lambda_r^2 \beta^2 - 2\beta^4) \sin^2 \theta \\ & \left. + \frac{3}{8} (\lambda_r^4 - 10\lambda_r^2 \beta^2 + 9\beta^4) \sin^4 \theta \right]. \end{aligned}$$

La valeur des termes en β^2 est donnée par (102), celle des termes en β^4 par (80) en fonction de A_1 . On obtient

$$\begin{aligned} g = g_0 & \left[1 - \left(e - \frac{5}{2} \varphi \right) \sin^2 \theta + e^2 \left(\frac{25}{4} \frac{\varphi^2}{e^2} + \frac{26}{7} \frac{\varphi}{e} - \frac{5}{2} - \frac{3A_1}{D_1 e^2} \right) \sin^2 \theta \right. \\ & \left. + \frac{e^2}{2} \left(7 - 15 \frac{\varphi}{e} + \frac{27}{4} \frac{A_1}{D_1 e^2} \right) \sin^4 \theta \right]. \\ g_0 = f \frac{M}{a^2} & \left[1 - 2e + \varphi + e^2 \left(4 - \frac{8}{7} \frac{\varphi}{e} - \frac{3}{2} \frac{\varphi^2}{e^2} + \frac{3}{7} \frac{A_1}{D_1 e^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais en appelant l la latitude géographique déterminée par la verticale, on aura d'après l'équation de la normale à l'ellipsoïde

$$\text{tang } l = \frac{x}{y} \frac{b^2}{a^2} = (1 + \lambda^2) \cot \theta.$$

d'où

$$\sin^2 \theta = (1 + \lambda^2 \sin^2 l + \dots) \cos^2 l.$$

(1) L'indétermination introduite est $< 0,06$ et pratiquement égale à $0,03$ sur l'inverse de l'aplatissement.

La valeur de g pourra alors s'écrire

$$g = g_0 \left[1 - \frac{5}{2} (\varphi - e - \mu e^2) \cos^2 l \right].$$

$$\mu = \left(\frac{25}{4} \frac{\varphi^2}{e^2} - \frac{9}{7} \frac{\varphi}{e} - \frac{1}{2} - \frac{3A_1}{D_1 e^2} \right) + \left(\frac{27}{8} \frac{A_1}{D e^2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} \right) \cos^2 l.$$

En faisant $A_1 = 0$, on a pour $1 : e = 292$ et $1 : e = 297$.

$$\mu = 4,605 - 1,031 \cos^2 l \quad \text{et} \quad \mu = 4,807 - 1,075 \cos^2 l.$$

En donnant à A_1 sa valeur maximum d'après (84), on a

$$\mu = 1,944 + 1,963 \cos^2 l \quad \text{et} \quad \mu = 1,834 + 2,268 \cos^2 l.$$

Les deux termes de μ auront des valeurs comprises entre ces valeurs extrêmes, suivant la valeur réelle de A_1 . On peut remarquer du moins que μ reste compris entre 2 et 5.

Les calculs numériques du Chapitre VII, paragraphe 10, montrent comment varie A_1 avec la loi des densités. Si l'on fait $\rho_1 = 2,6$ dans la formule de Roche, ou $\rho_1 = 2,75$ avec $n = 1$, on obtient, pour $292 < \frac{1}{e} < 297$,

$$(a) \quad \begin{cases} 3,633 + 0,062 \cos^2 l < \mu < 3,835 + 0,018 \cos^2 l. \\ 3,603 + 0,096 \cos^2 l < \mu < 3,805 + 0,052 \cos^2 l. \end{cases}$$

Le terme en $\cos^2 l$ est très petit. Il en résulte donc que *pratiquement* pour la Terre, si la loi des densités est voisine de celle de Roche, μ doit être à peu près indépendant de $\cos^2 l$ et g de $\cos^2 l$.

M. Helmholtz avait donné, dans *Höhere Geodäsie* (t. II, p. 77), la formule de g en seconde approximation. En l'appliquant aux expériences sur le pendule, il trouve $1 : e = 298,3$, nombre un peu fort, et, en outre, il constate que le terme en $\cos^2 l$ doit être fait pratiquement nul. Il en avait conclu comme explication, au grand scandale de G. H. Darwin (Ouvrage cité, p. 82), que l'ellipsoïde devait être renflé et non déprimé vers 45° . Les calculs numériques indiqués ci-dessus montrent comment la loi des densités permet d'expliquer ce fait. En même temps ils légitiment *théoriquement* la formule expérimentale simplifiée de M. Helmholtz.

Si l'on compare la formule de g ci-dessus avec celle de première approximation ($\mu = 0$), on voit qu'en réalité cette dernière formule donnait, non pas e , mais $e(1 + \mu e)$, de sorte qu'on obtenait

$$\frac{1}{e(1 + \mu e)} = \frac{1}{e}(1 - \mu e) = \frac{1}{e} - \mu \quad \text{au lieu de} \quad \frac{1}{e}.$$

Il faudrait donc augmenter de 3,6 à 3,8, d'après (a), l'inverse de l'aplatissement obtenu par l'ancienne formule de Clairaut. Le chiffre de Faye deviendrait 296,7 et rentrerait ainsi dans les limites déterminées plus haut. Dans le cas du pendule la correction introduite par les termes du second ordre est donc considérable, près de 4 unités.



CHAPITRE VI.

HYPOTHÈSES AUTRES QUE CELLE DE CLAIRAUT. TERRE SOLIDE ET VITESSE INTERNE VARIABLE.

On peut faire à propos de la Terre d'autres hypothèses que celle de Clairaut et se poser pour chacune d'elles le même problème que précédemment : quel est l'aplatissement qui concilie à la fois les données de la précession et celles de l'attraction. Nous nous en tiendrons à la première approximation en négligeant λ^4 ou e^2 . On peut conclure, d'après l'étude du Chapitre précédent, que la vraie valeur n'en différera que de quelques dixièmes.

1. *Terre solide et solidifiée à l'état de vitesse uniforme.* — Si la vitesse et par conséquent la valeur de φ , au moment de la solidification, était la même que la vitesse superficielle actuelle, la même équation de condition (70) donnerait la même valeur $\frac{1}{e} = 297$, en négligeant les dixièmes.

Si la vitesse n'était pas la même, cette équation de condition s'appliquerait encore au moment de la solidification en donnant à ω , φ , η leurs valeurs à ce moment-là. La valeur de J n'a pas changé.

Or nous avons trouvé (72)

$$d\frac{1}{e} = 0,2 d\frac{1}{\varphi} \quad \text{ou} \quad d\frac{1}{\varphi} = 5d\frac{1}{e}, \quad \varphi = \frac{3\omega^2}{4\pi f D_1}.$$

La valeur de e solution de (70) varie dans le même sens que φ et que ω^2 , mais moins vite (5 fois moins). Si donc la vitesse de rotation était plus grande au moment de la solidification il en était de même de φ et de e solution ; $\frac{1}{e}$ était plus petit.

Pour que la solution $\frac{1}{e} = 297$ descende à 292 par exemple (chiffre de Clarke et de Faye), il aurait fallu que la valeur de $\frac{1}{\varphi}$ fût de 25 unités plus petite ou 263,3. Avec le chiffre de Helmert : 298, elle aurait dû être de 5 unités plus grande : 293,3.

En prenant la formule (70), où l'on fait $K = 1$ pour simplifier, on obtient des valeurs plus exactes. Elles sont consignées dans le Tableau suivant où l'on a mis aussi les rapports de φ et de ω^2 au moment de la solidification avec leurs valeurs actuelles :

| | | | | | | | |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{e} =$ | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 |
| $\frac{1}{\varphi} =$ | 266 | 270 | 274 | 278 | 283 | 288 | 293 |
| $\frac{\varphi}{\varphi_1} =$ | 1,084 | 1,068 | 1,052 | 1,037 | 1,022 | 1,000 | 0,984 |
| $\frac{\omega}{\omega_1} =$ | 1,041 | 1,033 | 1,026 | 1,019 | 1,011 | 1,000 | 0,992 |

Pour réaliser en vitesse uniforme un aplatissement superficiel de $\frac{1}{292}$ satisfaisant à la précession, il aurait fallu que la vitesse au moment de la solidification fût 0,041 plus grande que la vitesse actuelle. Le jour aurait dû être moins long qu'actuellement de 57^m environ. Pour réaliser un aplatissement de $\frac{1}{298}$ il aurait fallu que la vitesse fût 0,008 plus petite qu'actuellement. Le jour aurait été plus long de 11^m environ.

Comme cause explicative du retard dans le premier cas, de l'accélération dans le second, on aurait l'action des marées et la concentration due au refroidissement.

2. *Terre solide mais solidifiée progressivement avec vitesse variable, la vitesse superficielle restant la même.* — A la surface les équations en φ et J sont toujours applicables, car (64) et (66) ne supposent pas la vitesse constante. Mais pour établir l'équation de condition entre les deux au moyen de (69), il faut dans (68') introduire l'équation de Clairaut-Adau reliant η et ζ dans le cas de ω variable, équation (48), dont nous désignerons le second membre par σ .

Finalement l'équation de condition (70) est transformée en la suivante

$$(109'') \quad e + \frac{2}{5} J \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K + \frac{1}{10} \frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}}} = J + \frac{\varphi}{2},$$

où (σ) et (η) sont les valeurs moyennes analogues à celles de K et χ , et définies par les relations

$$\frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}} \int_0^1 D da^3 = \int_0^1 \frac{\sigma}{\sqrt{1+\eta}} D da^3, \quad \sigma = \frac{3}{8\pi f} \frac{r^2(\omega^2)'' + 6r(\omega^2)'}{eD}.$$

Voici les valeurs qu'il faut donner à σ pour concilier différentes valeurs de l'aplatissement avec les valeurs actuelles de $\frac{1}{\varphi} = 288,38$ et de $\frac{1}{j} = 305,31$:

| | | | | | | | | |
|--------------------------------|---|------|------|------|------|------|------|-------|
| $\frac{1}{e}$ | = | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 |
| $\frac{\sigma}{\sqrt{1+\eta}}$ | = | 0,24 | 0,19 | 0,14 | 0,10 | 0,06 | 0,01 | -0,03 |

Cette valeur moyenne de σ pourrait être réalisée par une infinité de lois différentes de ω^2 , qui reste indéterminée. Faisons $(\omega^2)'' = \text{const.}$ ou $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \gamma r^2)$, d'où $(\omega^2)'' = 2\gamma\omega_0^2 = \frac{2\gamma\omega_1^2}{1+\gamma}$,

$$(110) \quad \sigma = \frac{3\omega_1^2}{4\pi f} \frac{1,4\gamma}{1+\gamma} \frac{r^2}{eD} \quad \text{et} \quad \tau < 1,4 \frac{\varphi}{e} \frac{\gamma}{1+\gamma},$$

car, d'après (50), $\frac{r^2}{eD}$ et par conséquent σ sont toujours croissants, ce qui fournit la limite supérieure indiquée.

Or la valeur de σ croît à mesure que $\frac{1}{e}$ descend au-dessous de la valeur 297, d'après le Tableau ci-dessus; il en sera de même de γ d'après (110).

En résumé, si la Terre s'est solidifiée avec $\frac{1}{e} < 297$ et la même vitesse de rotation superficielle, la vitesse ne pouvait pas être partout la même au moment de la solidification et la loi des aplatissements intérieurs correspondrait à une loi de vitesses croissantes du centre à la surface et d'autant plus que $\frac{1}{e}$ s'éloignera davantage de 297.

Or les aplatissements suivent les mêmes lois que les vitesses. Ils décroîtront de la surface au centre plus vite que si la solidification avait eu lieu en vitesse uniforme.

C'est ce qui ressort avec évidence d'ailleurs de la formule générale (64) qui donne e

$$\int_0^1 \rho da^3 e = J \int_0^1 \rho da^2.$$

La valeur moyenne de e donnée par cette formule est et reste égale

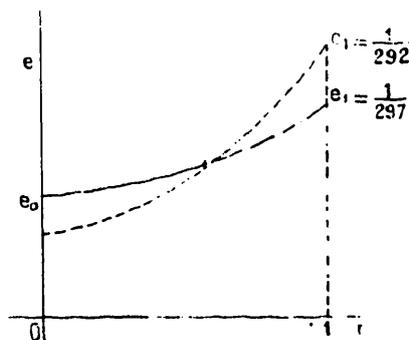


Fig. 12.

à J. Cela a lieu pour les aplatissements résultant d'une vitesse constante si $\frac{1}{e} = 297$. Si l'aplatissement est plus grand à la surface, il faut non seulement qu'ils diminuent à l'intérieur plus vite que ne l'exigerait une vitesse constante, mais encore qu'ils deviennent plus petits que ceux qui correspondent à $\frac{1}{e} = 297$ en vitesse constante (fig. 12).

On verra au Chapitre suivant les résultats des calculs numériques.

Pour expliquer cette répartition des aplatissements, il faudrait supposer que la solidification s'est faite progressivement du centre à la surface, en même temps que la vitesse, d'abord plus faible que la vitesse actuelle, allait elle-même en s'accélégrant jusqu'à la valeur définitive. L'accélération de vitesse serait expliquée par la concentration due au refroidissement, mais la solidification débutant au centre reste peu plausible. D'autre part, en faisant commencer la solidification à la surface, on n'arriverait que très difficilement à réaliser la loi des aplatissements exigée par l'hypothèse. Il faudrait admettre une solidification brusque en vitesse variable.

5. Masse fluide et surfaces de niveau à vitesse variable. Modification du coefficient de précession. — Laplace (*Méc. céleste*, Livre V, nos 10-12) avait déjà démontré que les phénomènes de précession et de nutation n'étaient modifiés en rien par la fluidité de la mer. Hopkins (*Researches in physical Geology*, dans *Philosophical Transactions*, 1839, 1840, 1842), Hennessy (*idem*, 1851), Thomson (*idem*, 1863, et Mémoire *On the rigidity of the earth* et *Treatise on natural Philosophy*, n° 847, 848), G. H. Darwin (*On the precession of a viscous spheroid*, dans *Phil. Trans.*, 1879), S. Oppenheim (*Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroid*, dans *Astron. Nachrichten*, 1885, n° 2701), enfin et surtout M. Poincaré d'une façon complète dans le *Bulletin astronomique* de septembre 1910, ont démontré que le phénomène de précession du moins n'était aucunement modifié par l'hypothèse d'une Terre complètement solide ou liquide, ou bien d'un noyau liquide entouré d'une écorce solide, rigide ou élastique.

La valeur du rapport des moments d'inertie J déduit du phénomène de la précession est donc indépendant de toute hypothèse sur la fluidité, rigidité ou élasticité du globe terrestre. Mais les calculs ont toujours été faits dans l'hypothèse où la masse entière tournerait d'un seul bloc avec une vitesse de rotation uniforme. Il faut reprendre rapidement la théorie de la précession pour étudier la correction à introduire dans la valeur de J avec l'hypothèse d'une vitesse de rotation variable sur les différentes surfaces de niveau.

Le phénomène de la précession (déplacement du point γ ou

rotation de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique) est un phénomène dont la valeur est déterminée et mesurée par les termes séculaires du développement de la fonction perturbatrice U dans le mouvement de la Terre

$$U = f \iint \frac{dm dm_1}{r},$$

intégrale qui doit être étendue à tous les points de la Terre et des astres perturbateurs, r étant la distance des centres de gravité respectifs, θ , φ , ψ étant les variables de signification connue, θ l'angle des deux plans (équateur et écliptique), φ et ψ les arcs comptés respectivement sur l'équateur et sur l'écliptique. On obtiendra les équations du mouvement en portant $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial U}{\partial \psi}$ dans les équations de Lagrange. Or en développant on obtient (1)

$$(111) \quad U = f \left(\frac{m}{r} + \frac{A + B + C - 3I}{2r^3} \right) \int dm_1 = C_0 - \frac{3}{2} f \frac{M}{r^3} I,$$

C_0 étant indépendant de θ , φ , ψ , M étant la masse de l'astre perturbateur et I le moment d'inertie de l'astre troublé, autour du rayon vecteur joignant les deux astres. Si le corps troublé est de révolution $B = C$ et l'on aura

$$(112) \quad U = C' - \frac{3}{2} f (A - B) \frac{M}{r^3} \frac{x^2}{r^2}, \quad I = A \frac{x^2}{r^2} + B \frac{y^2}{r^2} + C \frac{z^2}{r^2},$$

C' étant une nouvelle constante. On obtient pour le Soleil et pour la Lune, en ne conservant que les termes principaux indépendants de i^2

$$(113) \quad \frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta [1 - \cos 2(mt + \psi)],$$

$$\frac{x'^2}{r'^2} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta [1 - \cos 2(m't + \psi) + i \sin \theta \cos \theta \cos(N' + \psi)].$$

On voit que U est indépendant de φ . Les équations de Lagrange avec $B = C$ donnent $\omega = \text{const.}$ La précession n'altère pas la vitesse de rotation (2).

(1) TISSERAND, *Méc. cél.*, t. I, p. 61.

(2) *Idem.*, t. II, p. 392 et 409.

En transformant les équations de Lagrange en un système canonique, on en déduit

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{A\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{A\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta};$$

si l'on ne considère dans les $\frac{x^2}{r^2}$ que les termes où le temps n'est pas périodique, les seuls dont dépende la précession, on a

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)_p = 0, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p = 0, \quad \theta_p = \theta_0.$$

Le phénomène de précession ne modifie pas l'obliquité moyenne de l'équateur sur l'écliptique. On aura ensuite

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{3}{2} f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3}\right) (A - B) \sin \theta \cos \theta,$$

d'où

$$(114) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_p = \frac{3}{2} f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3}\right) \frac{A - B}{A} \frac{\cos \theta}{\omega} = h \frac{J}{\omega} \cos \theta.$$

Cette expression représente précisément le déplacement du point γ en fonction du temps. On voit qu'il dépend du rapport des moments d'inertie J , de la vitesse de rotation ω , et de l'inclinaison θ de l'équateur.

La même formule est applicable à une *couche ellipsoïdale* quelconque. D'autre part $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est la vitesse de déplacement autour de l'axe de l'écliptique. En première approximation, en négligeant λ^4 , la quantité de mouvement correspondante sera

$$(115) \quad dA \frac{\partial \psi}{\partial t} = h(dA - dB) \frac{\cos \theta}{\omega}.$$

On aura pour la quantité de mouvement totale, en tenant compte de l'expression (65') des moments d'inertie, et négligeant λ^4 ,

$$(116) \quad \frac{8\pi}{15} \int_0^1 \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} da^3 = \frac{4\pi}{15} h \int_0^1 \rho \frac{\cos \theta}{\omega} da^3 \lambda^2.$$

Or la valeur de J a été obtenue au moyen de la formule (114) où l'on a supposé ω et θ constants. En identifiant (116) avec (114) multipliée

par A (conservation des quantités de mouvement), on a

$$JA \frac{\cos \theta_1}{\omega_1} = \frac{4\pi}{15} \int_0^1 \rho \frac{\cos \theta}{\omega} da^3 \lambda^2 \quad \text{ou} \quad 2J \frac{\cos \theta_1}{\omega_1} \int_0^1 \rho da^3 = \int_0^1 \rho \frac{\cos \theta}{\omega} da^3 \lambda^2.$$

Enfin si l'on suppose que toutes les couches ont le même axe de rotation (θ constant) il vient

$$(117) \quad 2J \int_0^1 \rho da^3 = \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho}{\omega} da^3 \lambda^2.$$

C'est la relation qui doit remplacer (66) dans l'hypothèse de surfaces de niveau animées de vitesses variables.

En représentant par (ω) la valeur moyenne de ω dans (117), on aura en combinant avec (64)

$$2J \int_0^1 \rho da^3 = \frac{\omega_1}{(\omega)} \int_0^1 \rho da^3 \lambda^2 = \frac{5}{3} \frac{\omega_1}{(\omega)} (\lambda^2 - \varphi) D_1.$$

La valeur du premier membre est constante et l'on a vu que $\frac{\lambda^2}{2} = e = \frac{1}{297}$ pour $\omega = (\omega) = \omega_1 = \text{const.}$ Si nous donnons à $\frac{\lambda^2}{2}$ ou à e une valeur plus grande que $\frac{1}{297}$, il faut également donner à (ω) une valeur plus grande que celle de ω_1 , et par conséquent admettre que la vitesse des couches intérieures augmente de la surface au centre. Pour $\frac{1}{e} = 298$ ce serait le contraire. On aura le Tableau suivant :

| | | | | | | | |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{e} =$ | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 |
| $\frac{(\omega)}{\omega_1} =$ | 1,036 | 1,028 | 1,021 | 1,014 | 1,007 | 1,000 | 0,993 |

Si ω est toujours décroissant on aura $\omega_0 > (\omega) > \omega_1$.

Avec la formule de Lipschitz on trouvera au Chapitre suivant par calculs numériques pour

$$\frac{1}{e} = 292, \quad \omega^2 = \frac{\omega_1^2}{0,857} (1 - 0,143 r^2), \quad \omega_0 = 1,16 \omega_1.$$

L'équation de condition correspondant au problème de M. Poincaré sera modifiée en conséquence.

D'après (117) la valeur numérique du rapport des moments d'inertie J doit être remplacée par $J \frac{(\omega)}{\omega_1}$. D'autre part la fonction K devra être complétée, comme dans le cas précédent, par le second membre de l'équation de Clairaut-Radau avec vitesse variable. On aura finalement pour l'équation de condition (70) la nouvelle expression

$$(118) \quad e + \frac{2}{3} J \frac{(\omega)}{\omega_1} \frac{\sqrt{1+\eta_1}}{K + \frac{1}{10} \frac{(\sigma)}{\sqrt{1+(\eta)}}} = J \frac{(\omega)}{\omega_1} + \frac{\varphi}{2},$$

qui traduit le cas général de vitesses intérieures quelconques.

4. Ralentissement de l'écorce dû au frottement des marées. —

La rotation moins rapide de l'écorce dans cette hypothèse s'expliquerait simplement par le frottement des marées agissant comme un frein à la surface.

D'ailleurs l'action de ralentissement due aux marées est un fait. Il s'agit de savoir de quel ordre est la grandeur du phénomène et s'il est capable de produire la différence de vitesse exigée par l'hypothèse.

Les expériences de Hagen et Poiseuille, confirmées par les déductions théoriques de Stokes, Neumann et Hagenbach ⁽¹⁾ sur le frottement dans les tuyaux indiquent que le frottement, au voisinage d'une paroi solide et pour de faibles vitesses, est proportionnel au coefficient de viscosité du liquide, à la surface de contact et à la vitesse relative des deux couches $f = \epsilon S \frac{dv}{dr}$.

Le rayon du tube étant pris pour unité, la loi des vitesses à l'intérieur est $v = v_0(1 - r^2)$, formule analogue à celle de $(\omega^2)^v = \text{const.}$ étudiée plus haut.

Sur les différents parallèles d'une même surface de niveau considérée comme sphérique, on aura

$$v = \omega r_1, \quad \frac{dv}{dr} = r_1 \frac{d\omega}{dr}.$$

La surface d'une zone élémentaire comprise entre deux parallèles

⁽¹⁾ Voir *Annuaire du Bureau des Longitudes : Frottement dans les liquides.*

sera $S = 2\pi r_1 dx$ (voir *fig. 13*). La résistance totale due au frottement de deux surfaces de niveau l'une sur l'autre sera donc

$$F = 4\pi r \varepsilon \frac{d\omega}{dr} \int_0^r r_1 dx = 2\pi^2 r^3 \varepsilon \frac{d\omega}{dr} = 2\pi^2 \frac{\gamma \varepsilon \omega_1}{\sqrt{1-\gamma}} r^3;$$

avec

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - \gamma r^2).$$

on a

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{\gamma \omega_1}{\sqrt{1-\gamma}}$$

vers la surface.

D'autre part, en appelant m la masse de l'écorce, x son épaisseur supposée assez petite, I son moment d'inertie, M la masse totale, on pourra écrire

$$m = 4\pi \rho_1 R^2 x, \quad I = \frac{2}{3} m R^2 = 2 M R^2 \frac{\rho_1}{D_1} \frac{x}{R}.$$

Enfin l'équation du mouvement s'écrira à la surface

$$F = I \frac{d\omega}{dt}, \quad - 2\pi^2 \frac{\gamma \varepsilon \omega_1}{\sqrt{1-\gamma}} R = 2 M \frac{\rho_1}{D_1} \frac{x}{R} \frac{d\omega}{dt}.$$

L'accélération séculaire du mouvement de la Lune, réaction du frottement des marées, permettrait de conclure à une augmentation du jour de 0^s,000012 par an⁽¹⁾. En représentant ce nombre par α on a

$$\omega + \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi}{86400 + \alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha \omega_1}{86400}.$$

En C. G. S. on a $M = 6,5 \times 10^{27}$, $R = 6,378 \times 10^8$. En donnant à γ la valeur du paragraphe précédent dans l'hypothèse $\frac{1}{e} = 292$, on trouve $\varepsilon = 1,7 \times 10^8$ environ. Or pour la poix à 6° on a $\varepsilon = 2,2 \times 10^9$. Si donc au niveau de séparation du noyau et de l'écorce la viscosité est de l'ordre de celle de la poix, le ralentissement de l'écorce dû aux marées peut produire une variation de vitesse intérieure suffisante pour rendre possible un aplatissement descendant jusqu'à $\frac{1}{292}$ et

(1) TISSERAND, *Méc. cél.*, t. II, p. 540. Ce chiffre est discuté, mais il pourrait être divisé par 2 ou 3 sans modifier sensiblement les conclusions.

s'accordant à la fois avec les données de l'attraction et celles de la précession, avec φ et J .

Du moins nous ne connaissons rien sur cette viscosité interne. C'est une simple possibilité. L'hypothèse n'est pas absurde.

De plus, si une différence de vitesse s'établit entre le noyau et l'écorce, elle ne peut s'éteindre que très lentement, de proche en proche par frottement et diffusion. Helmholtz avait déjà calculé qu'il faudrait des milliers d'années dans l'air pour que par simple frottement et diffusion, une différence de vitesse à la surface se transmette réduite de moitié à la limite de l'atmosphère (1). Un calcul analogue montre qu'ici il faudrait des millions d'années pour que cette différence de vitesse se transmette au centre réduite de moitié.

D'ailleurs le ralentissement de l'écorce est continu. L'accroissement des vitesses en profondeur doit l'être aussi dans un noyau fluide sans jamais arriver à atteindre l'équilibre permanent. Mais la grandeur de l'effet dépendra de la viscosité qui est inconnue.

Pour avoir $\frac{1}{2} = 298 > 297$ à la surface, il faudrait au contraire que les vitesses intérieures soient un peu plus faibles que celle de l'écorce. Ceci pourrait s'expliquer par la contraction due au refroidissement, qui, si elle était sensible, accroîtrait la vitesse de l'écorce plus que celle des couches intérieures. Mais l'accroissement du jour, s'il est réel, et l'action de freinage des marées prouveraient que la vitesse de l'écorce doit plutôt diminuer. Il faudrait alors que la vitesse des couches intérieures diminue encore plus vite (on ne voit de cela aucun phénomène explicatif), ou bien que cette vitesse intérieure ait toujours été plus faible depuis la formation de la Terre, depuis des millions d'années, sans que le frottement ait pu encore uniformiser ces vitesses, sans que l'action des marées ait pu encore abaisser la vitesse de l'écorce au-dessous de la vitesse des couches intérieures.

§. *Précession d'un anneau fluide tournant suivant un parallèle. Zones de compression maximum de l'écorce à 35°. Une cause de tremblements de terre.* — La déviation due à la précession et à la nutation n'est pas la même sur tous les parallèles d'une même surface

(1) Voir par exemple B. BRUNHES, *La dégradation de l'énergie*, p. 142.

de niveau. Il suffit d'étudier cette action sur un anneau fluide formant un parallèle quelconque, et considéré comme tournant tout d'une pièce en vertu de la rigidité gyrostatique.

Soit O' le centre de cet anneau de rayon $O'\Lambda = r_1$, T le centre de la Terre (*fig. 13*), Tx son axe de rotation, Ty la trace du plan de

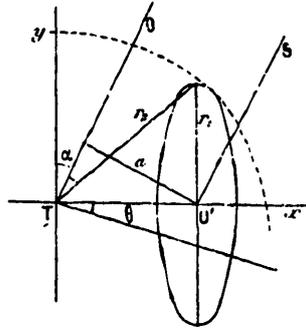


Fig. 13.

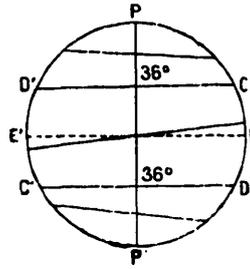


Fig. 14.

l'équateur, TO la trace du plan de l'écliptique sur xTy . En appelant I et I_1 les moments d'inertie de l'anneau autour de OT et de $O'S$, on a $I = I_1 + ma^2$. Or d'après (112)

$$I_1 = (A - B) \frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{2} m r_1^2 \frac{x^2}{r^2}, \quad a^2 = \overline{O'T}^2 \cos^2 \alpha = \overline{O'T}^2 \left(1 - \frac{r^2}{r^2}\right),$$

d'où

$$I = m \left(\frac{3}{2} r_1^2 - r^2 \right) \frac{x^2}{r^2} + m \overline{O'T}^2.$$

Or les formules (111), (113) et suivantes s'appliquent identiquement comme dans le cas précédent et donnent de même avec $C = m r_1^2$ et l étant la latitude

$$(114') \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_p = \frac{3}{2} f \left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3} \right) \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{r_1^2} \right) \frac{\cos \theta}{\omega} = h \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\cos^2 l} \right) \frac{\cos \theta}{\omega}.$$

On en déduit que la déviation de l'axe de rotation d'un anneau fluide, tournant suivant un parallèle, est maximum à l'équateur, puis toujours décroissante. Elle s'annule sur le parallèle de 35° où $\cos^2 l = \frac{2}{3}$ et change ensuite de sens. Si l'on désigne par ψ_e sa valeur à l'équateur, par ψ_m la valeur moyenne de celle de la surface de niveau supposée solidifiée ($J = e$ pour une couche élémentaire), on

aura

$$\psi' = \frac{3}{2} h \left(1 - \frac{2}{3 \cos^2 l} \right) \frac{\cos \theta}{\omega} = \psi'_e \left(1 - \frac{2}{3 \cos^2 l} \right).$$

$$\psi'_m = h \frac{e}{\omega} \cos \theta, \quad \psi'_e = \frac{3}{2e} \psi'_m.$$

A la surface de la Terre la tendance à la déviation serait à l'équateur près de 450 fois plus grande que la déviation moyenne, laquelle serait sensiblement égale à la déviation de l'ensemble ou 50" par an. Elle y produirait une accélération tangentielle, dans le sens du méridien, de 4^{cm} par seconde, pressant les couches superficielles l'une contre l'autre avec une force égale au $\frac{4}{1000}$ de leur poids environ, $\frac{4}{981} = 0,0041\dots$. Cette pression latérale va diminuant en latitude suivant la formule (114'), jusqu'à 35°, ou elle s'annule et change de signe.

Dans le cours d'une rotation de 24 heures, les différents parallèles tendront donc à se comprimer sur celui de 35° en deux points diamétralement opposés, puis 12 heures après à s'en éloigner. Il y aura compression et dilatation successive tout le long des deux parallèles de 35° (*fig. 14*). Ces pressions latérales convergentes se traduiront aussi par une résultante dirigée suivant le rayon vecteur, comme une onde de marée diurne. Les parallèles de 35° seront ainsi des zones de fracture et de dislocation de l'écorce (exactement 35° 15' 52") (1).

Il suffit de faire remarquer que ce parallèle de 35° passe par San-Francisco, le Haut-Mexique, Lisbonne, la Sicile, la Calabre, la Perse, le Japon, qui est bien une ligne privilégiée de tremblements de terre. Dans l'hémisphère sud, ce parallèle se trouve en plein océan, sauf les pointes de continent : Le Cap, Melbourne, Buenos-Ayres.

Remarque. — On peut d'ailleurs, à titre de vérification, au moyen de la formule (114') donnant la précession d'un anneau, retrouver celles qui donnent la précession d'une couche élémentaire ou d'un solide quelconque.

En effet, multiplions les deux membres de (114') par $m r_i^2 = A$, nous

(1) Ce sont d'ailleurs les cercles où la sphère de même volume coupe l'ellipsoïde, donc aussi les lignes *fixes* où s'*articule* l'ellipsoïde s'il se déforme.

les transformons en une expression de quantité de mouvement

$$(a) \quad m r_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{3}{2} f m \left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3} \right) \left(\frac{3}{2} r_1^2 - r_2^2 \right) \frac{\cos \theta}{\omega}.$$

Mais on a ici $m = 2\pi \rho r, ds$. En portant cette valeur dans (a) et en intégrant de manière à sommer tous les anneaux parallèles d'une couche, situés entre le pôle et l'équateur, on obtiendra la précession de la couche entière. Le premier membre sera $A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_p$.

Si l'on considère une couche sphérique $x^2 + r_1^2 = r_2^2$, on trouve que l'intégrale du second membre s'annule. La précession est nulle.

Si l'on considère une couche elliptique, on a $x^2 + y^2 = a^2 + y^2 \lambda^2$ ou $r_2^2 = a^2 + r_1^2 \lambda^2$. On trouve, en négligeant λ^4 ,

$$A \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_p = \frac{3}{2} f \left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{r'^3} \right) A \frac{\lambda^2 \cos \theta}{2 \omega} = h A \frac{J}{\omega} \cos \theta,$$

car ici

$$\frac{\lambda^2}{2} = e = \frac{A - B}{A} = J.$$

C'est précisément la formule (114).

On retrouve donc en même temps ce théorème que la précession moyenne d'une couche ellipsoïdale ou d'un ellipsoïde fluide est la même que celle d'un ellipsoïde solide, en considérant seulement chaque filet fluide comme rigide.

Mais la précession définie plus haut ne donne que la rotation moyenne de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique, indépendante des termes périodiques.

Reprenons l'expression de la fonction perturbatrice

$$U = \frac{3}{2} f (A - B) \frac{x^2}{r^2} = \frac{3}{2} f (A - B) \cos^2 l',$$

elle est proportionnelle au carré de la latitude l' de l'astre troublant. Considérons d'autre part la déviation $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ produite à un instant donné où l'astre perturbateur sera considéré comme fixe; alors

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

et il reste

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{1}{A \omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Or, les expressions (113) peuvent s'écrire

$$\frac{x^2}{r^2} = \sin^2 \theta \sin^2 \varrho, \quad \frac{x'^2}{r'^2} = \sin^2 \theta \sin^2 \varrho' + \sin^2 \theta \cos \theta \cos N',$$

en désignant par ϱ , ϱ' , N' les latitudes comptées à partir du point γ , du Soleil, de la Lune et du nœud descendant de la Lune. On aura, en prenant $\frac{\partial U}{\partial \theta}$,

$$(119) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{3}{2} f \left(1 - \frac{2}{3 \cos^2 i} \right) \left(\frac{M}{r^3} \sin^2 \varrho + \frac{M'}{r'^3} \sin^2 \varrho' + i \frac{M'}{r'^3} \frac{\cos 2 \theta}{\cos \theta} \cos N' \right).$$

D'après cette formule, la déviation instantanée de l'axe de rotation sera donc soumise aux mêmes variations que la nutation elle-même. On y distinguera une ondulation mensuelle due à l'action de la Lune avec maximum semi-mensuel pour $\varrho' = \pm \frac{\pi}{2}$; une ondulation annuelle due au Soleil, maximum $\varrho = \pm \frac{\pi}{2}$ aux solstices; enfin une période de 18 ans $\frac{2}{3}$ due au déplacement des nœuds.

En prenant la masse de la Terre et son rayon comme unité, on obtient pour les coefficients :

$$\frac{M}{r^3} = 2,67 \times 10^{-8}, \quad \frac{M'}{r'^3} = 6,03 \times 10^{-8}, \quad i \frac{M'}{r'^3} \frac{\cos 2 \theta}{\cos \theta} = 0,392 \times 10^{-8}.$$

Il y a maximum quand le Soleil et la Lune sont en opposition ou en conjonction : maximum absolu tous les 18 ans $\frac{2}{3}$; alors la somme des coefficients égale 9,10. Le maximum semi-mensuel de conjonction ou d'opposition est le plus considérable, il atteint sa plus haute valeur aux solstices (valeur moitié plus grande), et son summum quand le nœud descendant coïncide avec γ .

Ces périodes de maximum seront des périodes de compression et de décompression maximum pour les différents parallèles de l'écorce solide, ce qui doit faciliter les glissements et le jeu des différents morceaux de la mosaïque superficielle.

Ce serait là, semble-t-il, une explication intéressante de la théorie de M. de Parville, théorie appuyée sur des statistiques de plusieurs

années, relevant la coïncidence de la fréquence des tremblements de terre avec les positions critiques du Soleil et de la Lune. Une vérification scientifique serait à reprendre avec les appareils sismiques nouveaux, car ce qui importe c'est plutôt la concordance et la localisation des secousses que leur importance, car dans un terrain préparé par des dislocations successives la moindre secousse peut être un désastre, comme on a vu des arbres résister à de terribles orages et s'abattre le lendemain sans cause apparente.

CHAPITRE VII.

CALCULS NUMÉRIQUES AU MOYEN DE LA FORMULE DE LIPSCHITZ APPLIQUÉS A LA TERRE.

Nous allons dans ce Chapitre reprendre tous les problèmes et toutes les hypothèses étudiées précédemment à un point de vue purement théorique et leur appliquer des calculs pratiques.

1. *Formule de Lipschitz* (¹), $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)$. — Cette formule est à la fois assez simple et assez souple pour permettre d'effectuer des calculs numériques complets et de les appliquer successivement aux différentes hypothèses, en modifiant convenablement les paramètres. La loi de Roche en est un cas particulier, $n = 2$.

Cette formule donne

$$(120) \quad \rho_1 = \rho_0(1 - \alpha), \quad D_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{3\alpha}{n+3} \right).$$

Si l'on se donne ρ_1 et D_1 , deux des trois paramètres de la formule sont déterminés, ρ_0 et α par exemple. En faisant varier n , on réalisera alors différentes lois de densités.

Pour $\alpha = 0$, on a $\rho_1 = \rho_0 = D_1$; il y a homogénéité. Pour $\alpha = 1$, on a $\rho_1 = 0$.

On a encore

$$(121) \quad \rho' = -\alpha n \rho_0 r^{n-1}, \quad \rho'' = -\alpha n(n-1) \rho_0 r^{n-2}.$$

Pour $n = 1$, la variation des densités est linéaire.

(¹) *Journal de Crelle*, t. LXII, 1863.

Pour $n > 1$, $\rho'' < 0$, la courbe des densités tourne sa concavité vers le bas. On a alors $\rho'_0 = 0$, la densité tend vers une limite au centre. Cette limite tend vers D_1 si n augmente indéfiniment.

Pour $n < 1$, $\rho'' > 0$, la courbe tourne sa concavité vers le haut, $\rho'_0 = \infty$. L'accroissement des densités est de plus en plus rapide vers le centre. Il y a concentration d'autant plus prononcée que n est plus voisin de 0.

On obtient facilement les formules

$$(122) \quad \alpha = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\zeta}{3} \frac{n+3}{n+\zeta} \quad \text{où} \quad \zeta = 3 \left(1 - \frac{\rho_1}{D_1} \right),$$

$$(123) \quad \frac{\rho_0}{D_1} = 1 + \frac{\zeta}{n}, \quad \frac{F_1}{D_1} = \frac{1}{D_1} \int_0^1 \rho dr^5 = 1 - \frac{2}{3} \frac{\zeta}{n+\zeta},$$

qui donnent α , ρ_0 , F_1 , en fonction de ζ et de n . Pour chaque valeur de n on donnera à ζ une série de valeurs telles que $2 < \rho_1 < 3$ ou réciproquement; la valeur de ρ sera parfaitement définie et l'on pourra l'introduire dans les différentes formules étudiées précédemment pour en faire l'application pratique.

Tous les calculs numériques ont été faits avec la valeur $D_1 = 5,56$; en adoptant la nouvelle valeur donnée par l'*Annuaire*, $D_1 = 5,5$, il suffira de corriger les valeurs de ρ_1 en les multipliant par $\frac{5,56}{5,5} = 1,0109$. D'ailleurs les valeurs de α , ρ_0 , F_1 , et toutes celles qu'on en déduira, ne dépendent que de ζ , c'est-à-dire du seul rapport $\frac{\rho_1}{D_1}$ et non de la valeur absolue de ρ_1 ou D_1 .

2. Limites de e_0 , ρ_0 , n . — La formule (66)

$$\int_0^1 \rho dr^5 e = J \int_0^1 \rho dr^5$$

donne, puisque e est croissant,

$$e_0 < J < e_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{e_0} > 305,31.$$

La formule (51') devient au centre

$$(124) \quad e_0 = \frac{5}{4} \varphi \frac{D_1}{\rho_0} + \frac{31}{2\rho_0} \int_0^1 \rho de,$$

or $de > 0$, d'où (1)

$$(124') \quad e_0 > \frac{5}{4} \varphi \frac{D_1}{\rho_0}, \quad \rho_0 > \frac{5}{4} \frac{\varphi}{e_0} D_1.$$

Comme on a aussi

$$(a) \quad \rho_1(e_1 - e_0) < \int_0^1 \rho \, de < \rho_0(e_1 - e_0),$$

on en déduit en portant la première inégalité dans (124)

$$(125) \quad \rho_0 > \frac{5}{4} \frac{\varphi}{e_1} D_1 \frac{e_1}{e_0} + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{e_1}{e_0} - 1 \right).$$

En faisant $e_0 = e_1$, on obtient (124') indiquée par Stieljes, et la limite $\rho_0 > 7,07$.

En faisant $e_0 = J$, on obtient plus simplement une limite plus resserrée

$$(126) \quad \rho_0 > \frac{5}{4} \frac{\varphi}{J} D_1 + \frac{3}{2} \rho_1 \left(\frac{e}{J} - 1 \right).$$

En dehors de toute hypothèse sur ρ_1 et e , c'est-à-dire en ne tenant compte que du premier terme, on a $\rho_0 > 7,358$. Le minimum déterminé par Stieljes et basé sur les valeurs de F_1 , formule (123), et de ρ_1 , donnait seulement $\rho_0 > 7,3$ pour $n = 2$.

J'ai calculé, d'après cette formule (126), les minimums et les maximums qu'on en déduit pour n , d'après (123), dans les deux cas : $\frac{1}{e} = 297$ et $\frac{1}{e} = 292$.

| ρ_1 | | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. |
|---------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{1}{e} = 297$ | $\rho_0 > \dots$ | 7,442 | 7,450 | 7,459 | 7,463 | 7,467 | 7,476 |
| | $n < \dots$ | 5,95 | 5,33 | 4,99 | 4,66 | 4,33 | 3,99 |
| $\frac{1}{e} = 292$ | $\rho_0 > \dots$ | 7,496 | 7,510 | 7,524 | 7,537 | 7,551 | 7,565 |
| | $n < \dots$ | 5,52 | 5,17 | 4,84 | 4,49 | 4,16 | 3,83 |

Il suffira donc de considérer $0 < n < 6$ pour la Terre.

(1) On vérifie ici en même temps, en faisant $de = 0$, un des résultats du Chapitre II, à savoir que l'aplatissement central en vitesse constante est plus grand que dans le cas des surfaces homothétiques, si la vitesse centrale ou la valeur de φ est la même.

La seconde inégalité (a) donne encore avec (124)

$$(127) \quad \rho_0 < \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e_1} D_1 \frac{e_1}{e_0} \frac{1}{5 - 3 \frac{e_1}{e_0}}$$

En donnant au rapport $\frac{e_1}{e_0}$ différentes valeurs, ρ_0 sera compris entre les limites suivantes, déterminées par (125) et (127) :

| | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\frac{e_1}{e_0}$ | 1. | 1,1. | 1,2. | 1,3. | 1,4. | 1,5. | 1,6. | 1,6666. |
| $\rho_0 \leq \dots$ | 7,05 | 9,12 | 12,06 | 17,56 | 24,70 | 42,30 | 112,8 | ∞ |
| $\rho_0 \geq \dots$ | 7,05 | 8,07 | 9,10 | 10,12 | 11,14 | 12,16 | 13,18 | 18,80 |

Les formules (125) et (127) sont d'ailleurs, parmi beaucoup d'autres, les combinaisons qui donnent les limites les plus étroites.

La formule (67) donne encore, d'après (123),

$$\frac{5}{3} \left(e - \frac{\varphi}{2} \right) = J \frac{F_1}{D_1} = J \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\zeta}{n + 5} \right) \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{2}{3} \frac{\zeta}{n + 5} = \frac{e}{J} \left(1 - \frac{\eta_1}{3} \right).$$

Les valeurs de n et ρ_0 sont alors complètement déterminées par celles de e et de ζ dans l'hypothèse de la vitesse constante et de l'application de la loi du Lipschitz. On a le Tableau suivant :

| | | | | | | | | |
|---------------------|---|----------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ρ_1 | | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. | |
| $\frac{1}{e} = 297$ | } | $\rho_0 \dots$ | 9,70 | 10,25 | 11,07 | 12,39 | 15,08 | 22,62 |
| | | $n \dots$ | 2,58 | 2,15 | 1,72 | 1,30 | 0,87 | 0,45 |
| $\frac{1}{e} = 292$ | } | $\rho_0 \dots$ | 8,11 | 8,32 | 8,57 | 8,92 | 9,46 | 10,33 |
| | | $n \dots$ | 4,19 | 3,67 | 3,15 | 2,64 | 2,12 | 1,61 |

On aura donc en résumé dans l'hypothèse de Clairaut

$$8,11 < \rho_0 < 22,62, \quad 0,45 < n < 4,19.$$

3. Application au problème de Clairaut, cas d'une vitesse uniforme. — Nous avons vu (61) qu'avec $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^n)$, la loi des aplatissements dans le cas de vitesse constante prend la forme

$$e = e_0(1 + \beta_1 r^n + \beta_2 r^{2n} + \dots), \quad e_1 = e_0(1 + \beta_1 + \beta_2 + \dots) = e_0(1 + \beta).$$

La formule (37) reliant ω , ρ , e , r s'écrit

$$(128) \quad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = \frac{e}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho dr^5 e - \frac{3}{5} \int_r^1 \rho de.$$

En y portant les valeurs de e , ρ et intégrant, on obtient

$$(128') \quad \omega^2 = \frac{8}{3} \pi f e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r^n + k_2 r^{2n} + \dots),$$

où l'on doit faire $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = 0$, dans le cas de vitesse constante. On obtient facilement comme terme général, en supposant $\beta_0 = 1$,

$$k_i = \beta_i - 3\alpha\beta_{i-1} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{i} \frac{1}{in+5} \right), \quad \beta_i = \beta_{i-1} \left(1 - \frac{1}{i} \frac{n+3}{in+5} \right) \frac{\zeta}{n+\zeta}.$$

En posant

$$\frac{\zeta}{n+\zeta} r^n = x, \quad ab = \frac{2}{n}, \quad a+b = \frac{5}{n} + 2, \quad c = \frac{5}{n} + 1,$$

on obtient pour l'expression de e ci-dessus une série hypergéométrique

$$e = e_0 \mathbf{H}(a, b, c, x) = e_1 \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{H}_1}.$$

On en déduit

$$(129) \quad \eta = \frac{re'}{e} = \frac{rH'}{H} = \frac{2n}{n+5} \frac{\mathbf{H}(a+1, b+1, c+1, x)}{\mathbf{H}(a, b, c, x)} \frac{\zeta}{n+\zeta} r^n.$$

En tenant compte de la valeur de η_1 à la surface, les formules (64), (66) et (67) s'écriront

$$(130) \quad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \frac{\eta_1 + 2}{5}, \quad \frac{1}{e_1} = \frac{1}{J} \frac{D_1}{F_1} \frac{3 - \eta_1}{3}, \quad e_{\varphi_1} = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5} J \frac{F_1}{D_1}.$$

Ce sont les trois formules qui ont servi pour les calculs numériques. Mais on a donné à η_1 une autre forme plus pratique que (129). En effet, l'intégrale contenue dans (64) et (66) peut s'écrire

$$(131) \quad \int_0^1 \rho dr^3 e = e_1 \rho_1 m - \int_0^1 \rho' e r^3 dr = e_1 \rho_1 m,$$

où

$$m = 1 + \frac{n+3}{n+5} \frac{\zeta}{3-\zeta} \frac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta}, \quad \beta' = \frac{\beta_1}{2n+5} + \frac{\beta_2}{3n+5} + \dots$$

Or (64) devient

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{3-\zeta}{5} m \right) = \frac{2}{\varphi} \frac{\eta_1 + 2}{5},$$

d'où

$$(132) \quad \frac{\eta}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5} \frac{1+(n+5)\beta'}{1+\beta},$$

où

$$1 + (n + 5)\beta' = H(a, b, c + 1, x_1)$$

est encore une série hypergéométrique (1).

En faisant les calculs pour $0 < \rho_1 < D_1$ et $\frac{1}{2} < n < 7$, on obtient pour les valeurs de $e_\varphi, e_1, e_{\rho_1}$ les trois Tableaux suivants :

1° Valeurs de $\rho_1 : e_2$.

| ρ_1 . | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 5,56. |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n = \frac{1}{2}$. | | | 325,01 | 296,08 | | | 230,70 |
| 1. | 373,04 | 344,11 | 316,34 | 290,12 | 265,51 | 242,66 | " |
| 2. | 350,19 | 325,95 | 302,83 | 280,90 | 260,23 | 240,91 | " |
| 3. | 333,33 | 312,65 | 292,90 | 274,12 | 256,34 | 239,61 | " |
| 4. | 320,43 | 302,53 | 285,29 | 268,96 | | | " |
| 5. | 310,38 | 294,58 | 279,25 | 264,87 | | | " |
| 6. | 302,31 | 288,21 | 274,63 | 261,56 | | | " |
| 7. | 295,69 | 282,96 | 270,66 | 258,83 | | | " |

2° Valeurs de $\rho_1 : e_1$.

| | | | | | | | |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n = \frac{1}{2}$. | | | 289,49 | 297,44 | | | 305,31 |
| 1. | 269,61 | 282,48 | 292,11 | 298,74 | 302,94 | 305,04 | " |
| 2. | 279,86 | 289,01 | 295,79 | 300,57 | 303,61 | 305,09 | " |
| 3. | 286,36 | 293,12 | 298,17 | 301,75 | 304,02 | 305,15 | " |
| 4. | 290,74 | 295,88 | 299,82 | 302,53 | | | " |
| 5. | 293,76 | 297,81 | 301,02 | 303,09 | | | " |
| 6. | 295,95 | 299,20 | 301,69 | 303,52 | | | " |
| 7. | 297,57 | 300,25 | 302,33 | 303,82 | | | " |

(1) Cette série est beaucoup plus rapidement convergente que la précédente donnée par Lipschitz et Tisserand (*Méc. céle.*, t. II, p. 239). En effet, dans la première (129), η à la surface devient $\eta_1 = \frac{n\theta}{1+\beta}$, où $\theta = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + \dots$ et voici les valeurs comparées de θ et β' pour $n = 2$ et $\rho_1 = 2$. C'est ce fait de la convergence rapide de β' qui a rendu possible tous ces calculs numériques, appliqués à une variation continue de la densité.

| θ . | β' . |
|------------|------------|
| 0,13997 | 0,01555 |
| 0,09904 | 0,00450 |
| 0,06168 | 0,00158 |
| 0,03648 | 0,00061 |
| 0,02085 | 0,00025 |
| 0,01170 | 0,00010 |
| | |

3° Valeurs de $1 : e_{\varphi_1}$.

| | | | | | | | |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n = 0.$ | 343,30 | 327,41 | 312,92 | 299,74 | 287,48 | 276,26 | 270,34 |
| $\frac{1}{2}.$ | 335,09 | 321,24 | 308,50 | 296,74 | 285,84 | 275,70 | " |
| 1. | 328,52 | 316,28 | 304,91 | 294,34 | 284,48 | 275,25 | " |
| 2. | 318,73 | 308,79 | 299,44 | 290,65 | 282,36 | 274,54 | " |
| 3. | 311,75 | 303,39 | 295,47 | 287,95 | 280,80 | 274,01 | " |
| 4. | 306,53 | 299,33 | 292,45 | 285,89 | | | " |
| 5. | 302,48 | 296,15 | 290,07 | 284,25 | | | " |
| 6. | 299,25 | 293,60 | 288,17 | 282,93 | | | " |
| 7. | 296,61 | 291,51 | 286,59 | 281,83 | | | " |

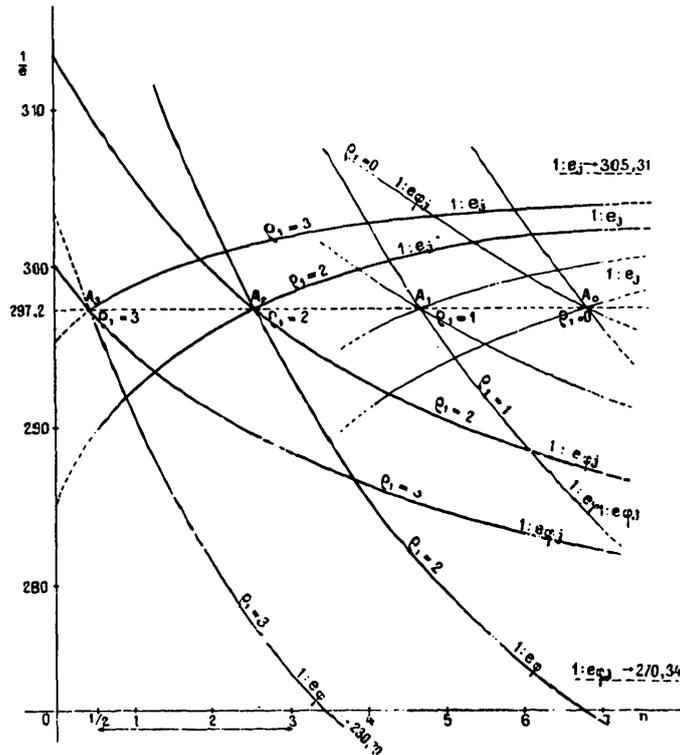


Fig. 15. — Courbes de $\frac{1}{e_\varphi}, \frac{1}{e_i}, \frac{1}{e_{\varphi_1}}$ dans l'hypothèse de Clairaut, pour une même valeur de ρ_1 .
 A_0, A_1, A_2, A_3 , ligne des valeurs d'accord pour les différentes valeurs de ρ_1 .

En faisant passer des paraboles par trois points voisins, on en déduit avec cinq chiffres exacts les valeurs d'accord où l'on a $e_\varphi = e_i = e_{\varphi_1}$. Elles sont consignées dans le Tableau suivant :

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n =$ | $\frac{1}{2}$ | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 6,25. | 7. |
| $\frac{1}{e} \dots\dots$ | 297,18 | 297,17 | 297,18 | 297,18 | 297,19 | 297,20 | 297,21 | 297,21 | 297,22 |
| $\rho_1 \dots\dots$ | 2,96 | 2,72 | 2,25 | 1,78 | 1,30 | 0,83 | 0,36 | 0,0 | - 0,12 |

Enfin ces résultats sont traduits aux yeux par les deux graphiques

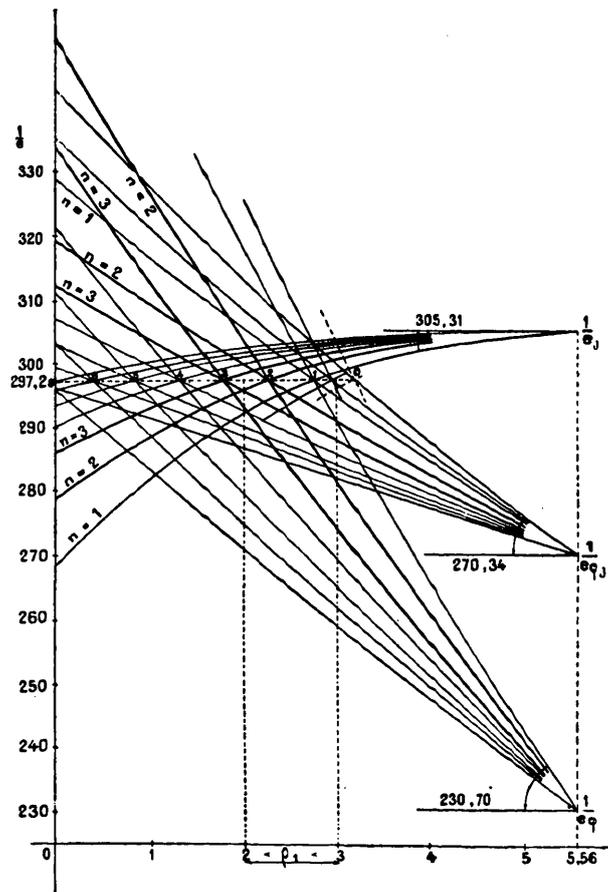


Fig. 16 — Graphique général des valeurs de $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e_1}$, $\frac{1}{e \rho_1}$ dans l'hypothèse de Clairaut, pour toutes les valeurs de ρ_1 , de 0 à D_1 .
 297,2 - - - - - est la ligne des valeurs d'accord, pour les différentes valeurs de n .

15 et 16 qui donnent les courbes de $\frac{1}{e}$ en fonction de n et de ρ_1 . On a en résumé : $297,17 < \frac{1}{e} < 297,22$ et $0 < \rho_1 < 3$ (1).

(1) Par interpolation pour $n = 0$, on aurait $1 : e_1 = 297,20$ et $\rho_1 = 3,17$.

On voit d'après le Tableau précédent que pour $2 < \rho_1 < 3$ on a $\frac{1}{2} < n < 3$. On a repris les calculs avec les logarithmes à 7 décimales et 6 chiffres exacts pour $n = \frac{1}{2}, 1, 2, 3$. On obtient les valeurs suivantes :

| $n = \frac{1}{2}$ | ρ_1 | | | | | |
|----------------------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. |
| 1 : e_φ | 325,043 | 319,115 | 313,256 | 307,454 | 301,726 | 296,077 |
| 1 : e_j | 289,486 | 291,336 | 293,048 | 294,643 | 296,106 | 297,440 |
| 1 : e_{ρ_1} | 308,502 | 306,074 | 303,685 | 301,333 | 299,016 | 296,736 |
| $n = 1.$ | | | | | | |
| 1 : e_φ | 316,339 | 310,970 | 305,666 | 300,425 | 295,244 | 290,121 |
| 1 : e_j | 292,108 | 293,647 | 295,078 | 296,403 | 297,624 | 298,745 |
| 1 : e_{ρ_1} | 304,915 | 302,740 | 300,596 | 298,482 | 296,397 | 294,341 |
| $n = 2.$ | | | | | | |
| 1 : e_φ | 302,829 | 298,346 | 293,911 | 289,524 | 285,186 | 280,897 |
| 1 : e_j | 295,795 | 296,902 | 297,930 | 298,883 | 299,764 | 300,574 |
| 1 : e_{ρ_1} | 299,444 | 297,644 | 295,865 | 294,108 | 292,371 | 290,655 |
| $n = 3.$ | | | | | | |
| | ρ_1 | | | | | |
| | 1,4. | 1,6. | 1,8. | 2,0. | 2,2. | 2,4. |
| 1 : e_φ | 304,638 | 300,689 | 296,775 | 292,901 | 289,068 | 285,273 |
| 1 : e_j | 295,328 | 296,336 | 297,284 | 298,171 | 298,996 | 299,764 |
| 1 : e_{ρ_1} | 300,171 | 298,587 | 297,019 | 295,468 | 293,934 | 292,415 |

Les valeurs calculées pour η_1 et qui conduisent aux résultats ci-dessus ont pu être résumées dans les formules suivantes : pour $n = 1$, on a

$$\eta_1 = 0,211916 \frac{\zeta^2}{3^2} + 1,021984 \frac{\zeta}{3} + 0,0176 \frac{\zeta}{3} \left(1 - \frac{\zeta}{3}\right) \left(2 \frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

qui donne les valeurs de $\frac{1}{2}$ à 0,003 près pour $2 < \rho_1 < 3$, et à 0,09 près pour $0 < \rho_1 < D_1$. Cette formule contient donc et résume d'une façon très précise tous les résultats et calculs numériques ci-dessus pour $n = 1$, dans l'hypothèse de Clairaut. Les deux premiers termes représentent une parabole passant par les trois points $\frac{\zeta}{3} = 0, \frac{1}{2}, 1$. Le troisième est un terme de correction nul pour ces trois points.

Cette formule montre que, pour $n = 1$, on a $\eta_1 < 1,23$, ce qui rend

impossible l'explication de l'aplatissement de Jupiter et de Saturne par cette formule. D'ailleurs on démontre facilement que, si n tend vers 0, la condensation tend vers une limite, et la formule de Lipschitz n'est dans aucun cas applicable à Jupiter et Saturne, l'aplatissement qui en résulte étant trop faible.

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on a les formules

$$\eta_1 = 0,16738 \frac{\zeta^2}{3^2} + 0,86842 \frac{\zeta}{3} + 0,0092 \frac{\zeta}{3} \left(1 - \frac{\zeta}{3}\right) \left(2 \frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

$$\eta_1 = 0,75622 \frac{\zeta^2}{3^2} + 0,13338 \frac{\zeta}{3} + 0,005 \frac{\zeta}{3} \left(1 - \frac{\zeta}{3}\right) \left(2 \frac{\zeta}{3} - 1\right),$$

qui donnent η_1 avec plus de précision encore : 0,002 et 0,001.

Enfin on déduit des Tableaux ci-dessus pour chaque valeur de n , les valeurs d'accord de e_1 , e_0 , ρ_1 , l'équation de la densité ρ , celles de e_φ et e_1 en fonction de ρ_1 :

$$n = 1; 2; \quad 1 : e_1 = 297,187; \quad 1 : e_0 = 496,00; \quad \rho_1 = 2,9606; \quad \rho = 21,1564 - 18,1958 \sqrt{r}.$$

$$1 : e_\varphi = 388,327 - 33,4125 \rho_1 + 0,8875 \rho_1^2; \quad 1 : e_1 = 264,031 + 15,9175 \rho_1 - 1,5938 \rho_1^2.$$

$$n = 1; \quad 1 : e_1 = 297,171; \quad 1 : e_0 = 412,90; \quad \rho_1 = 2,7252; \quad \rho = 14,0642 - 11,3390 r.$$

$$1 : e_\varphi = 373,277 - 29,9775 \rho_1 + 0,7531 \rho_1^2; \quad 1 : e_1 = 271,089 + 13,100 \rho_1 - 1,2938 \rho_1^2.$$

$$n = 2; \quad 1 : e_1 = 297,177; \quad 1 : e_0 = 359,60; \quad \rho_1 = 2,2525; \quad \rho = 10,5212 - 8,2687 r^2.$$

$$1 : e_\varphi = 350,323 - 24,957 \rho_1 + 0,605 \rho_1^2; \quad 1 : e_1 = 280,651 + 9,434 \rho_1 - 0,931 \rho_1^2.$$

$$n = 3; \quad 1 : e_1 = 297,184; \quad 1 : e_0 = 340,32; \quad \rho_1 = 1,7790; \quad \rho = 9,341 - 7,562 r^3.$$

$$1 : e_\varphi = 333,413 - 21,242 \rho_1 + 0,493 \rho_1^2; \quad 1 : e_1 = 286,728 + 7,147 \rho_1 - 0,714 \rho_1^2.$$

Les formules de densité données ci-dessus sont les seules qui permettent de retrouver le même aplatissement en tenant compte à la fois de l'attraction et de la précession. On obtient $\frac{1}{e}$ à 0,01 près, en prenant trois décimales dans l'expression de ρ . La formule de Roche donnée par l'*Annuaire* devra donc s'écrire

$$\rho = 10,521 - 8,269 r^2 \quad \text{pour} \quad D_1 = 5,56$$

ou

$$\rho = 10,41 - 8,18 r^2 \quad \text{pour} \quad D_1 = 5,50.$$

La formule actuelle $\rho = 10,0 - 7,5 r^2$ conduit aux aplatis-

sements $1 : e_\varphi = 291,14$ et $1 : e_1 = 298,53$ qui ne sont guère concordants. Elle donne en effet $\rho_1 = 2,5$ qui correspond à 2,527 du Tableau.

4. *Hypothèse des surfaces homothétiques.* — La formule (64) qui donne e_φ devient

$$(133) \quad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{F_1}{D_1} \right) = \frac{2}{5} \frac{2}{\varphi} \left(1 + \frac{\zeta}{n+5} \right), \quad \eta = \frac{2\zeta}{n+5}.$$

(128) fournit ensuite

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 - \gamma r^n) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{5}{n+5} \frac{\zeta}{n+\zeta}.$$

L'équation de précession (117) dans le cas de vitesse variable donne

$$(134) \quad JF_1 = e_1 \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho dr^3}{\omega} = e D_1 m', \quad \frac{1}{e_1} = \frac{1}{J} \frac{D_1}{F_1} m'$$

avec

$$m' = \frac{n+\zeta}{n} \sqrt{1-\gamma} \left(h_1 - \frac{5\alpha}{n+5} h_2 \right) = 5 \frac{n+\zeta}{n} \sqrt{1-\gamma} (h'_1 - \alpha h'_2)$$

et

$$h_1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{5}{n+5} \gamma + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{2n+5} \gamma^2 + \dots,$$

$$h_2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{n+5}{2n+5} \gamma + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{n+5}{3n+5} \gamma^2 + \dots$$

On voit que h_1 et h_2 sont encore des séries hypergéométriques, en posant

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{5}{n}, \quad c = \frac{5}{n} + 1,$$

$$h_1 = 1 + 5h'_1 = h(a, b, c, \gamma), \quad h_2 = 1 + 5h'_2 = h(a, b+1, c+1, \gamma).$$

Les valeurs de $\frac{1}{e_\varphi}$ sont linéaires en ζ et facilement calculables. Les valeurs de $\frac{1}{e_1}$ sont données dans le Tableau suivant et figure 17 :

| n. | ρ_1 | | | | | | |
|-------------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 5,56 |
| 1 | 254,10 | 263,61 | 272,08 | 280,63 | 289,53 | 299,21 | 305,31 |
| 2 | 265,81 | 272,92 | 279,58 | 286,34 | 293,27 | 300,75 | " |
| 3 | 274,04 | 279,61 | 284,96 | 290,36 | 295,91 | 301,97 | " |
| 4 | 280,01 | 284,50 | 288,80 | 293,33 | 297,91 | 303,63 | " |
| 5 | 284,45 | 288,14 | 291,76 | 295,45 | 299,25 | 303,16 | " |
| 6 | 287,90 | 290,94 | 294,00 | 297,17 | 300,54 | 304,12 | " |

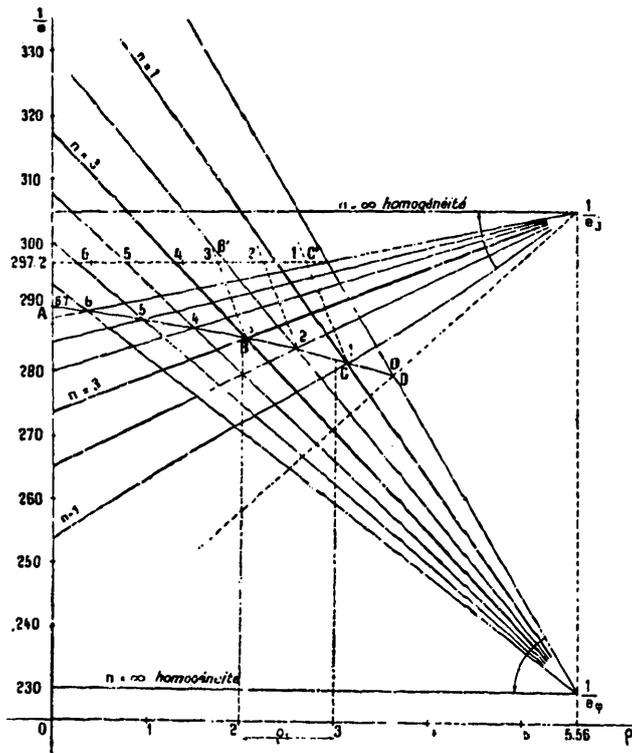


Fig. 17. — Graphique général dans le cas des surfaces homothétiques.
 BB', CC', . . . , lignes des valeurs d'accord dans le cas général de vitesse variable.

On en déduit pour les valeurs d'accord :

| n = | 0. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 6,70 |
|-------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|
| $1 : e_1 = (278,97)$ | 281,56 | 283,54 | 285,26 | 286,70 | 287,98 | 289,11 | 289,84 | |
| $\rho_1 = (3,621)$ | 3,109 | 2,589 | 2,054 | 1,512 | 0,958 | 0,399 | 0,00 | |
| $\omega_0 : \omega_1 =$ | 1,380 | 1,211 | 1,148 | 1,115 | 1,095 | 1,081 | 1,073 | |

Ces valeurs d'accord sont comprises dans les formules :

$$\rho_1 = 3,621 - 0,507n - 0,00501n^2, \quad \zeta = 1,0462 + 0,2735n + 0,0027n^2.$$

ζ porté dans l'expression de e_φ donne e_1 à 0,03 près.

On voit dans le Tableau des valeurs d'accord que ρ_1 conserve à peu près la même valeur que dans l'hypothèse précédente, pour les mêmes valeurs de n , et que $\frac{1}{e_1}$ reste compris aussi dans des limites assez étroites : 279 à 290. Si l'on veut réaliser un aplatissement intermédiaire entre ces valeurs et celle qui est donnée par l'hypothèse de Clairaut : 297,17, il faudra étudier une hypothèse intermédiaire où les vitesses croîtront vers le centre, mais moins vite que dans le cas des surfaces homothétiques.

§. *Hypothèse générale des surfaces à aplatissement variable et vitesse variable.* — Je relie ce cas général aux deux hypothèses particulières précédentes : vitesse uniforme et surfaces homothétiques, en posant

$$(135) \quad e = e_0(1 + \varepsilon\beta_1 r^n + \varepsilon\beta_2 r^{2n} + \dots), \quad e_1 = e_0(1 + \varepsilon\beta).$$

Pour $\varepsilon = 0$, on aura des surfaces homothétiques; pour $\varepsilon = 1$, une vitesse constante. Pour $0 < \varepsilon < 1$, cas intermédiaire, la vitesse croîtra de la surface au centre, mais moins vite que pour les surfaces homothétiques. Pour $\varepsilon > 1$, les aplatissements décroissent de la surface au centre, mais plus vite que dans le cas d'une vitesse uniforme; la vitesse des couches décroîtra de la surface au centre.

En portant cette valeur de e dans l'intégrale de (64) et opérant comme dans l'hypothèse de Clairaut (les β étant les mêmes), on a les mêmes formules où tous les β sont multipliés par ε :

$$(136) \quad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{3-\zeta}{5} m_\varepsilon \right) = \frac{2}{\varphi} \frac{n_\varepsilon + 2}{5},$$

$$(137) \quad m_\varepsilon = 1 + \frac{n+3}{n+5} \frac{\zeta}{3-\zeta} \frac{1+\varepsilon(n+5)\beta'}{1+\varepsilon\beta}, \quad \frac{n_\varepsilon}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5} \frac{1+\varepsilon(n+5)\beta'}{1+\varepsilon\beta}.$$

Portée dans (128) cette valeur de e donne : $k_2 = k_3 = \dots k_l = 0$ et

$$(138) \quad \omega^3 = \frac{8}{3} \pi f e_0 \rho_0 (k_0 + k_1 r^n) = \omega_0^3 (1 - \gamma r^n), \quad \gamma = -\frac{k_1}{k_0}.$$

Or on a

$$-k_1 = \beta_1(1 - \varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon}{n + 5} \frac{2\zeta}{n + \zeta} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{2}{5}(1 - \varepsilon) + \varepsilon k'_0,$$

en désignant par k'_0 la valeur de k_0 en vitesse constante ('). En transformant cette valeur en φ , e_1 , η_1 , on pourra l'écrire

$$k'_0 = \frac{3\omega^2}{8\pi f e_0 \rho_0} = \frac{\varphi}{2e_1} (1 + \beta) \frac{n}{n + \zeta} = \frac{n}{n + \zeta} \frac{\eta_1 + 2}{5} (1 + \beta).$$

On en tire

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{5}{2} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} k'_0}, \quad \text{où} \quad \gamma_0 = \frac{5}{n + 5} \frac{\zeta}{n + \zeta};$$

γ_0 est la valeur de γ pour $\varepsilon = 0$ (surfaces homothétiques).

La condition (117) donnée par la précession devient, en développant et intégrant,

$$JF_1 = \omega_1 \int_0^1 \frac{\rho dr^3 e}{\omega} = \frac{c_1 \rho_1 \sqrt{1 - \gamma}}{(1 + \varepsilon\beta)(1 - \alpha)} \left[\left(h_1 - \alpha \frac{5}{n + 5} h_2 \right) + \varepsilon\beta_1 \left(h_2 - \alpha \frac{n + 5}{2n + 5} h_3 \right) + \varepsilon\beta_2 \left(\dots \right) \right];$$

h_1, h_2, \dots sont les mêmes séries hypergéométriques que dans le cas des surfaces homothétiques. En les transformant en h' et représentant la parenthèse par m'' , on obtiendra

$$m'' = m'_\varepsilon + m'_\varepsilon,$$

$$(1 + \varepsilon\beta)(1 - \alpha)m'_\varepsilon = 5(h'_1 - \alpha h'_2) + \varepsilon[(n + 5)(h'_2 - \alpha h'_3)\beta_1 + (2n + 5)(h'_3 - \alpha h'_4)\beta_2 \dots],$$

$$(139) \quad \frac{1}{e_1} = \frac{1}{J} \frac{D_1}{F_1} \frac{3 - \zeta}{3} \sqrt{1 - \gamma} (m_\varepsilon + m'_\varepsilon) = \frac{1}{J} \frac{D_1}{F_1} \sqrt{1 - \gamma} \frac{3 - \eta_\varepsilon + (3 - \zeta) m'_\varepsilon}{3} = \frac{1}{J} \frac{D_1}{F_1} \frac{3 - \eta_1}{3}.$$

(') On aurait aussi en faisant $r = 1$ dans l'expression de ω^2

$$k_0 + k_1 = \frac{1}{3} \frac{\varphi}{2e} \frac{n}{n + \zeta} (1 + \varepsilon\beta) = \frac{1}{3} \frac{n}{n + \zeta} \frac{\eta_\varepsilon + 2}{5} (1 + \varepsilon\beta),$$

puis on remplacerait η_ε par η_1 .

On a calculé alors pour $n = 2$ les Tableaux suivants de $\frac{1}{e_\varphi}$ et $\frac{1}{e_l}$:

| ε . | ρ_l . | | | | | | | | | |
|-----------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0. | 1. | 2,0 | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. | 4. | 5. |
| 1,2..... | 353,13 | 328,05 | 304,21 | 299,61 | 295,04 | 290,53 | 286,08 | 281,69 | 260,55 | 240,96 |
| 1,0..... | 350,19 | 325,95 | 302,83 | 298,35 | 293,91 | 289,52 | 285,19 | 280,90 | 260,23 | 240,91 |
| 0,8..... | 346,94 | 323,64 | 301,34 | 297,00 | 292,71 | 288,46 | 284,24 | 280,08 | 259,90 | 240,86 |
| 0,6..... | 343,31 | 321,10 | 299,73 | 295,55 | 291,41 | 287,30 | 283,23 | 279,20 | 259,56 | 240,81 |
| 0,4..... | 339,28 | 318,31 | 297,99 | 293,98 | 290,02 | 286,09 | 282,17 | 278,27 | 259,20 | 240,76 |
| 0,2..... | 334,73 | 315,22 | 296,08 | 292,29 | 288,52 | 284,76 | 281,02 | 277,28 | 258,83 | 240,71 |
| 0,0..... | 329,58 | 311,80 | 294,01 | 290,45 | 286,90 | 283,34 | 279,78 | 276,23 | 258,45 | 240,66 |
| ε . | | | | | | | | | | |
| 1,2..... | » | » | 298,74 | 299,82 | 300,80 | 301,68 | 302,49 | 303,21 | » | » |
| 1,0..... | 279,86 | 289,01 | 295,79 | 296,90 | 297,93 | 298,88 | 299,76 | 300,57 | 303,61 | 305,09 |
| 0,8..... | » | » | 292,80 | 293,93 | 295,01 | 296,03 | 296,98 | 297,89 | » | » |
| 0,6..... | 274,68 | 283,04 | 289,68 | 290,86 | 292,00 | 293,09 | 294,13 | 295,12 | 299,57 | 303,35 |
| 0,4..... | » | » | 286,45 | 287,66 | 288,88 | 290,04 | 291,18 | 292,29 | » | » |
| 0,2..... | » | » | 283,09 | 284,38 | 285,65 | 286,91 | 288,14 | 289,24 | » | » |
| 0,0..... | 265,81 | 272,92 | 279,58 | 280,94 | 282,26 | 283,62 | 284,98 | 286,34 | 293,27 | 300,75 |

En calculant les valeurs de $e_l, \rho_l, \delta T_0$ (accroissement du temps de rotation au centre) pour les points où $e_\varphi = e_l$, on a

| $\varepsilon =$ | 0,0. | 0,2. | 0,4. | 0,6. | 0,8. | 1,0. | 1,2. | etc. |
|--------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|------------------|--------|---------------------------------|------|
| $1 : e_1$ | 283,54 | 286,36 | 289,14 | 291,87 | 294,55 | 297,18 | 299,76 | |
| ρ_1 | 2,589 | 2,515 | 2,445 | 2,378 | 2,314 | 2,252 | 2,194 | |
| γ | 0,318 | 0,267 | 0,210 | 0,147 | 0,077 | 0,00 | -0,086 | |
| δT_0 | -4 ^h 10 ^m | -3 ^h 26 ^m | -2 ^h 40 ^m | -1 ^h 50 ^m | -57 ^m | 0,0 | +1 ^h 11 ^m | |

Telles sont pour $n = 2$ les valeurs qui s'accordent à la fois avec les données de l'attraction et de la précession. On voit qu'on peut faire varier facilement $1 : e_l$ de 283 à 300 et au delà, en faisant varier la loi des vitesses. De ρ_l , on déduit facilement ρ_0 et la loi générale de ρ .

Comme dans l'hypothèse de Clairaut, j'ai condensé toutes ces valeurs dans des formules qui permettent de les trouver rapidement ou de les déterminer dans les intervalles non calculés. Ces formules, exactes pour $\varepsilon = 0$ et 1, le sont à 0,02 près pour les autres cas. Les voici pour $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 1 : e &= 297,171 - 15,611(1 - \varepsilon) + 2,612\varepsilon(1 - \varepsilon), & \rho_1 &= 2,7252 + 0,384(1 - \varepsilon) - 0,110\varepsilon(1 - \varepsilon), \\
 1 : e &= 297,177 - 13,637(1 - \varepsilon) + 0,616\varepsilon(1 - \varepsilon), & \rho_1 &= 2,252 + 0,336(1 - \varepsilon) - 0,039\varepsilon(1 - \varepsilon), \\
 1 : e &= 297,184 - 11,924(1 - \varepsilon) + 0,315\varepsilon(1 - \varepsilon), & \rho_1 &= 1,779 + 0,275(1 - \varepsilon) - 0,021\varepsilon(1 - \varepsilon),
 \end{aligned}$$

et

$$(140) \quad 1 : e_1 = 297,18 - (0,13n^2 - 2,36n + 17,85)(1 - \varepsilon) \\ + (0,85n^2 - 4,54n + 6,30)\varepsilon(1 - \varepsilon).$$

Cette formule générale donne $1 : e_1$ compatible avec l'attraction et la précession pour $1 < n < 3$ et $0 < \varepsilon < 1,2$, à 0,01 près.

En appelant η_1 la valeur de η_e pour $\varepsilon = 1$ (vitesse uniforme), on a

$$\eta_e = \varepsilon\eta_1 + (1 - \varepsilon)\frac{2\zeta}{n + 5} + \varepsilon(1 - \varepsilon)\frac{\beta}{1 + \varepsilon\beta}\left(\eta_1 - \frac{2\zeta}{n + 5}\right).$$

On pourra poser

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \varepsilon\eta_1 + (1 - \varepsilon)\frac{2\zeta}{n + 5}, \\ \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi}\frac{\eta + 2}{5} + \varepsilon(1 - \varepsilon)\delta\frac{1}{e_\varphi}, \\ \frac{1}{e_j} = \frac{1}{J}\frac{D_1}{F_1}\frac{3 - \eta}{3} + \varepsilon(1 - \varepsilon)\delta\frac{1}{e_j}; \end{array} \right.$$

et les termes de correction seront donnés par les formules suivantes pour $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{array}{ll} \delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(17,50\frac{\zeta}{3} - 4,17\right)\frac{\zeta}{3}, & \delta\frac{1}{e_j} = \left(\eta_1 - \frac{2\zeta}{n + 5}\right)\left(0,417\frac{\zeta}{3} - 0,016\right), \\ \delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(7,92\frac{\zeta}{3} - 2,04\right)\frac{\zeta}{3}, & \delta\frac{1}{e_j} = (\zeta - 0,33), \\ \delta\frac{1}{e_\varphi} = \left(4\frac{\zeta}{3} - 1\right)\frac{\zeta}{3}, & \delta\frac{1}{e_j} = (\zeta - 0,25). \end{array}$$

Les résultats pour $2 < \rho_1 < 3$ et $n = 2$ sont consignés dans le graphique 18, où la ligne des valeurs d'accord A_0A , est représentée en pointillé. Pour avoir la représentation générale de ce cas de vitesse variable, il suffit de se reporter au graphique 17 des surfaces homothétiques, où A, B, C, D est la ligne des valeurs d'accord pour les différentes valeurs de n , de 0 à 6. On a ajouté, la ligne correspondante A', B', C' pour le cas de vitesse uniforme, $\varepsilon = 1$. Donc BB' sera la ligne des valeurs d'accord pour $n = 3$, quand ε varie de 0 à 1; CC' celle de $n = 1$, etc. Toutes les valeurs correspondant à $1 < n < 3$ et $2 < \rho_1 < 3$ sont à peu près renfermées dans le quadrilatère BC'B'C'.

Remarque. — Pour Jupiter et Saturne, en négligeant le terme de correction, on pourra de η donné par (141) tirer la valeur de ε qui permettrait de réaliser les valeurs observées $\eta = 1,64$ et $1,59$. On obtient $\varepsilon > 2,8$ pour $n \geq 1$ et $\gamma > 1$, ce qui est impossible. La loi de Lipschitz ne peut donc pas expliquer l'aplatissement de Jupiter et

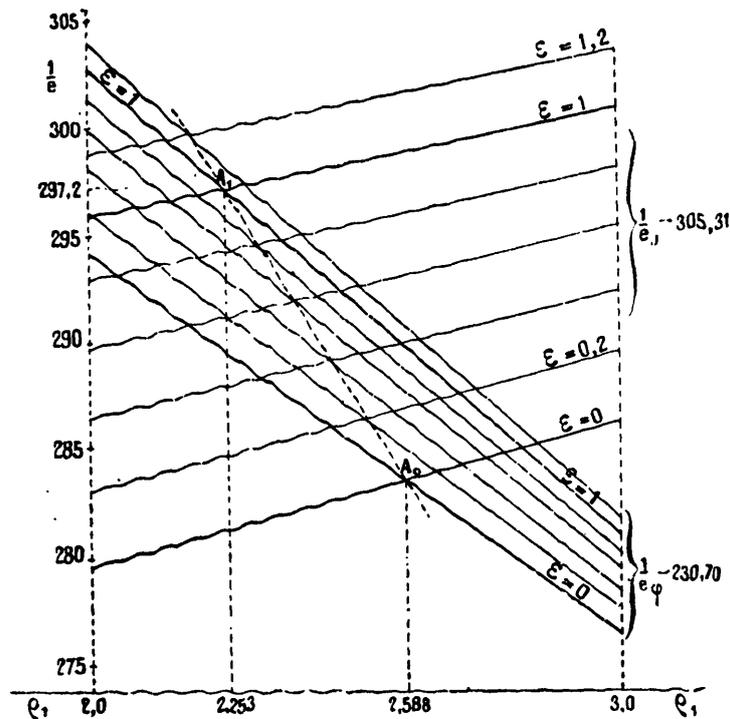


Fig. 18. — Cas général des vitesses variables. Courbes de $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e_1}$ pour $2 < e_1 < 3$ et $n = 2$.

$A_0 A_1$, ligne des valeurs d'accord quand ε varie de 0 à 1,2.

de Saturne, même en admettant une loi de vitesse quelconque avec la loi de e ci-dessus.

6. *Hypothèse d'une Terre solide.* — Comme dans ce cas la vitesse est naturellement la même sur toutes les surfaces de niveau, e_φ , e_1 , e_{φ_1} sont donnés encore par les formules (130), comme dans l'hypothèse de Clairaut. De plus e_{φ_1} ne dépend que de la loi des densités et conserve les mêmes valeurs calculées déjà dans cette hypothèse. Au contraire e_φ et e_1 dépendent de η et de la loi des

aplatissements. J'ai suivi alors deux méthodes : la première en rattachant cette loi des aplatissements à celle qui a été déjà déterminée dans le cas d'une rotation uniforme; la deuxième en lui donnant une forme indépendante et plus simple, analogue à celle des densités de Lipschitz.

Première méthode. — Prenons pour e la même forme (135) que dans le cas précédent, alors η_1 aura la valeur donnée par η_e dans (137). On en déduit aussi au moyen de (138) la valeur de ω^2 qui correspond à telle loi des aplatissements (1).

Pour $n = 2$, j'ai fait les calculs depuis $\varepsilon = -0,35$, limite minimum où pour $\rho_1 = 0$ on a $e_\varphi = e_1 = e_{\varphi_1}$ (au delà il n'y a plus d'accord possible) jusqu'à $\varepsilon = \infty$. Pour $\varepsilon = 0$, on retrouve le cas de surfaces homothétiques et pour $\varepsilon = 1$ celui de l'équilibre d'un fluide à vitesse constante.

Le premier Tableau donne les valeurs de $1 : e_\varphi$, le second celles de $1 : e_1$, la dernière ligne celle de $1 : e_{\varphi_1}$.

| ε_1 | 0. | 1. | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3. | 4. | 5. | 5,56. |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\varepsilon = \infty$ | 412,41 | 376,42 | 341,67 | | | | | 308,34 | 276,53 | 246,58 | 230,70 |
| 1:0,2. | 381,22 | 349,51 | 319,35 | 313,50 | 307,79 | 302,10 | 296,50 | 290,99 | 264,83 | 241,68 | » |
| 1:0,4. | 367,10 | 338,41 | 311,27 | 306,03 | 300,87 | 295,78 | 290,76 | 285,82 | 262,32 | 241,22 | » |
| 1:0,6. | 359,04 | 332,38 | 307,10 | 302,22 | 297,40 | 292,64 | 287,95 | 283,33 | 261,23 | 240,99 | » |
| 1:0,8. | 353,83 | 328,28 | 304,55 | 299,90 | 295,31 | 290,78 | 286,29 | 281,86 | 260,62 | 240,96 | » |
| 1..... | 350,19 | 325,95 | 302,83 | 298,35 | 293,91 | 289,52 | 285,19 | 280,90 | 260,23 | 240,91 | » |
| 0,8... | 346,94 | 323,64 | 301,34 | 297,00 | 292,71 | 288,46 | 284,24 | 280,08 | 259,90 | 240,85 | » |
| 0,6... | 343,31 | 321,10 | 299,73 | 295,55 | 291,41 | 287,30 | 283,23 | 279,20 | 259,56 | 240,81 | » |
| 0,4... | 339,28 | 318,31 | 297,99 | | | | | 278,27 | 259,20 | 240,76 | » |
| 0,2... | 334,73 | 315,22 | 296,08 | | | | | 277,28 | 258,83 | 240,71 | » |
| 0..... | 329,58 | 311,80 | 294,01 | 290,45 | 286,90 | 283,34 | 279,78 | 276,24 | 258,45 | 240,66 | » |
| -0,2. | 323,47 | 307,96 | 291,75 | | | | | 275,09 | 258,05 | 240,62 | » |
| -0,35 | 318,73 | 304,76 | 289,86 | | | | | 274,19 | 257,74 | 240,59 | » |

(1) Mais on peut admettre aussi que la solidification ne s'est pas faite d'un seul coup, avec une seule et même loi des vitesses. Du moins ω^2 serait la loi des vitesses qui donnerait les mêmes aplatissements dans l'hypothèse de la fluidité.

| ρ_1 | 0. | 1. | 2.0. | 2.2. | 2.4. | 2.6. | 2.8. | 3. | 4. | 5. | 5,56. |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\varepsilon = \infty$ | 203,01 | 230,86 | 253,86 | | | | | 272,70 | 287,97 | 299,94 | 305,31 |
| 1:0,2. | 241,52 | 261,87 | 277,96 | 280,72 | 283,33 | 285,80 | 288,13 | 290,32 | 299,20 | 304,39 | » |
| 1:0,4. | 258,97 | 274,65 | 286,68 | 288,71 | 290,61 | 292,38 | 294,04 | 295,58 | 301,61 | 304,81 | » |
| 1:0,6. | 268,93 | 281,60 | 291,19 | 292,78 | 294,26 | 295,64 | 296,93 | 298,11 | 302,65 | 305,02 | » |
| 1:0,8. | 275,36 | 286,33 | 293,94 | 295,24 | 296,45 | 297,58 | 298,63 | 299,59 | 303,24 | 305,05 | » |
| 1..... | 279,86 | 289,01 | 295,79 | 296,90 | 297,93 | 298,88 | 299,76 | 300,57 | 303,61 | 305,09 | » |
| 0,8... | 283,88 | 291,68 | 297,41 | 298,33 | 299,21 | 300,00 | 300,73 | 301,41 | 303,93 | 305,15 | » |
| 0,6... | 288,36 | 294,60 | 299,15 | 299,89 | 300,57 | 301,20 | 301,77 | 302,30 | 304,26 | 305,19 | » |
| 0,4... | 293,35 | 297,82 | 301,03 | | | | | 303,25 | 304,59 | 305,23 | » |
| 0,2... | 298,96 | 301,37 | 303,09 | | | | | 304,26 | 304,95 | 305,25 | » |
| 0..... | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | 305,31 | » |
| -0,2. | 312,89 | 309,74 | 307,77 | | | | | 306,49 | 305,70 | 305,36 | » |
| -0,35 | 318,73 | 313,37 | 310,25 | | | | | 307,39 | 306,01 | 305,39 | » |
| 1: e_{ρ_1} | 318,73 | 308,79 | 299,44 | 297,64 | 295,86 | 294,11 | 292,37 | 290,65 | 282,36 | 274,54 | 270,34 |

On obtient ensuite pour chaque valeur de ε les valeurs d'accord pour lesquelles on a $e_\varphi = e_j = e_{\rho_1}$:

| ε | ∞ | 1:0,2. | 1:0,4. | 1:0,6. | 1:0,8. | 1. | 0,8. |
|--------------------------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ρ_1 | 3,757 | 3,020 | 2,702 | 2,502 | 2,361 | 2,253 | 2,149 |
| 1: e_1 ... | 284,41 | 290,48 | 293,22 | 294,95 | 296,21 | 297,17 | 298,10 |
| 1: e_0 ... | ∞ | 674,72 | 430,75 | 392,82 | 372,80 | 360,48 | 351,85 |
| $\omega_0 : \omega_1$.. | 0,0 | 0,490 | 0,758 | 0,878 | 0,950 | 1,000 | 1,043 |

| ε | 0,6. | 0,4. | 0,2. | 0. | -0,2. | -0,35. |
|--------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ρ_1 | 2,023 | 1,866 | 1,656 | 1,365 | 0,856 | 0,00 |
| 1: e_1 | 299,24 | 300,68 | 302,62 | 305,31 | 310,19 | 318,73 |
| 1: e_0 | 339,96 | 328,16 | 316,60 | 305,31 | 292,35 | 281,75 |
| $\omega_0 : \omega_1$.. | 1,089 | 1,137 | 1,190 | 1,269 | 1,397 | 1,461 |

On voit que 1: e_1 peut varier de 284,41 à 318,73, quand ρ_1 varie de 3,757 à 0 avec $n = 2$. Pour $2 < \rho_1 < 3$, on a $290,65 < \frac{1}{\varepsilon} < 299,44$.

L'ensemble est représenté par le graphique 19. La courbe des valeurs d'accord se confond avec celle de e_{ρ_1} .

Pour quelques autres valeurs de n , il suffira d'indiquer les limites et les valeurs principales de 1: e_1 .

| | $\rho_1 = 0.$ | $\rho_1 = 2.$ | $\rho_1 = 3.$ | $\varepsilon = \infty.$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|--|
| $n = 0$ | 343,30 | 312,92 | 299,74 | 288,41 $\rho_1 = 3,612$ 281,90 $\rho_1 = 3,846$ |
| $n = 1$ | 328,52 | 304,91 | 294,34 | |
| $n = 3$ | 311,75 | 295,47 | 287,95 | |
| $n = 5$ | 302,48 | 290,07 | 284,25 | |

Pour $\rho_1 = 2,$

$$290,07 < \frac{1}{e} < 312,92;$$

pour $\rho_1 = 3,$

$$284,25 < \frac{1}{e} < 299,74.$$

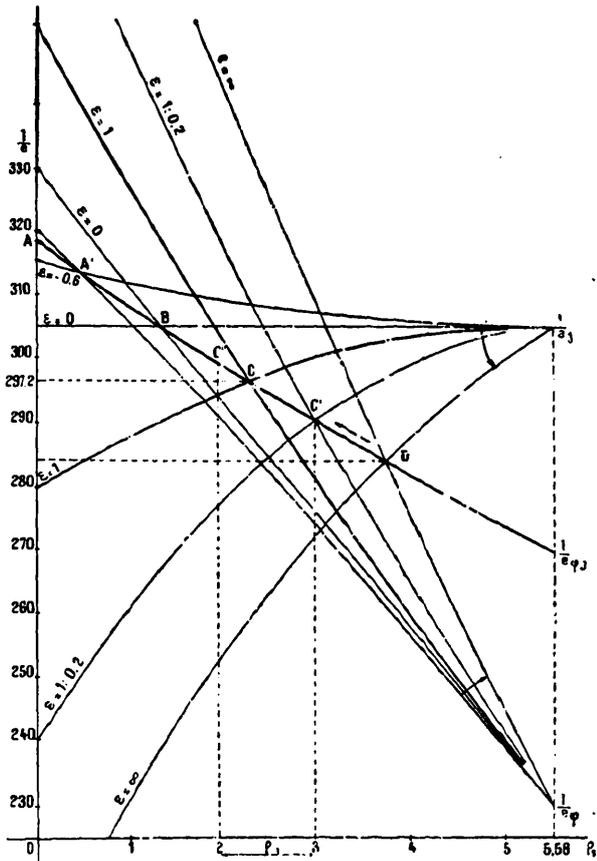


Fig. 19. — Hypothèse d'une Terre solide. Graphique pour $n = 2$. ABCD, ligne des valeurs d'accord. Pour $\epsilon = 0$ on a des lignes droites.

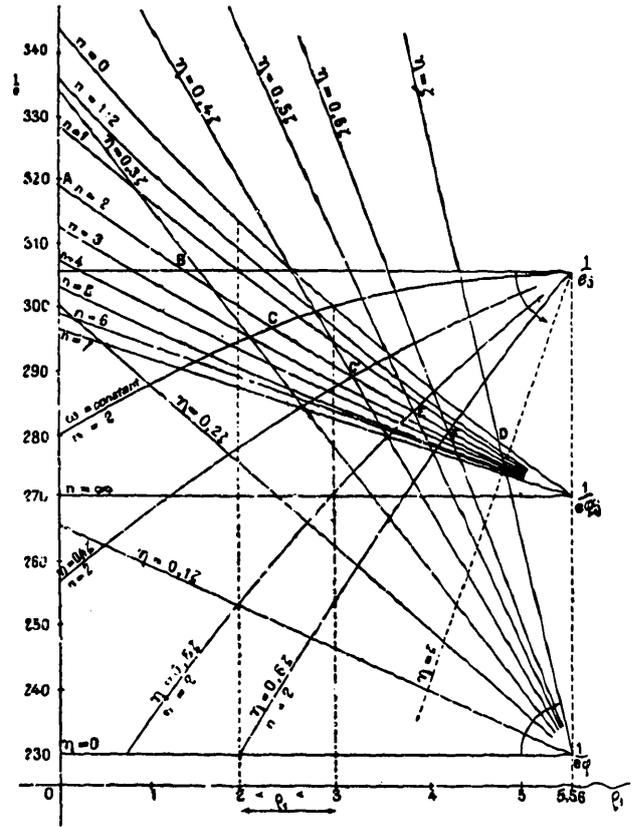


Fig. 20. — Graphique général dans le cas d'une Terre solide avec $e = e_0(1 + \beta r^{n'})$. ABCEFD, ligne des valeurs d'accord pour $n = 2$.

Deuxième méthode. — Posons

$$e = e_0(1 + \beta r^{n'})$$

avec $\beta > -1$ et $n' > 0$. La formule (131) donnera à la place de (132)

$$\frac{\eta}{\zeta} = 1 - \frac{n+3}{n+5} \frac{1+\theta\beta}{1+\beta}, \quad \theta = \frac{n+5}{n'+n+5}.$$

La solution est ici très simple.

La loi des densités étant supposée donnée, la série des valeurs de e_{φ} est parfaitement déterminée et la même que dans l'hypothèse de Clairaut.

Si de plus on se donne la loi des aplatissements, β et n' sont alors également déterminés, $\eta : \zeta$ est constant et $1 : e_{\varphi}$ varie linéairement avec ζ . On a comme représentation (*fig. 20*), des lignes droites qui coupent les e_{φ} aux points extrêmes D pour $\eta = \zeta$, puis en des points de plus en plus à gauche et de plus en plus élevés pour $\eta < \zeta$. On a représenté le faisceau de droites de e_{φ} ; le faisceau de courbes de e_{φ} pour $0 < n < 7$, et quelques courbes de e , pour $n = 2$.

Pour $2 < \rho_1 < 3$, on a, suivant les valeurs de n ,

| $n =$ | 0. | 1:2. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. |
|-----------------------|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\frac{1}{e_1} \dots$ | $< 312,92$ | $308,50$ | $304,91$ | $299,44$ | $295,17$ | $292,45$ | $290,07$ | $288,17$ | $286,59$ |
| | $> 299,74$ | $296,74$ | $294,34$ | $290,65$ | $287,95$ | $285,89$ | $284,25$ | $282,93$ | $281,83$ |

On aurait comme limites extrêmes $1 : e_1 = 343,30$ pour $n = 0$, $\rho_1 = 0$ et $1 : e_1 = 270,30$ pour $\rho_1 = 4,972$. Dans cette hypothèse, on peut faire varier $1 : e$ de 73 unités. C'est la plus grande variation obtenue.

Enfin cette loi permet de réaliser pour Jupiter et Saturne les aplatissements observés en faisant $\frac{n'\beta}{n'+5} = 0,25$. La loi des vitesses correspondantes s'en déduirait en portant la valeur de e dans l'expression (128'). La vitesse superficielle serait plus grande que les vitesses intérieures, qui décroîtraient jusqu'au centre.

7. *Lois des densités* $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^2$ et $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^3$, ou $\rho = \rho_0(1 - \alpha r^2)^m$. — Ces lois admettent un point d'inflexion où la variation de la densité est maximum. On aura donc comme un noyau central à forte densité et une écorce superficielle à densité plus faible. Elles permettent de réaliser une condensation plus considérable et un inverse de l'aplatissement e_{φ} , correspondant à l'attraction, plus grand qu'avec la loi de Lipschitz. Je ne les ai appliquées que dans l'hypothèse d'une vitesse uniforme. Elles permettent dans ce cas d'expliquer l'aplatissement observé pour Jupiter et Saturne.

Première loi. — On obtient successivement comme dans l'hypothèse

de Clairaut, avec l'exposant n ,

$$D_1 = \int_0^1 \rho dr^3 = \rho_0 \left(1 - \frac{6\alpha}{n+3} + \frac{3\alpha^2}{2n+3} \right),$$

$$F_1 = \int_0^1 \rho dr^5 = \rho_0 \left(1 - \frac{10\alpha}{n+5} + \frac{5\alpha^2}{2n+5} \right),$$

$$\beta_i = \frac{6\alpha}{n+3} \beta_{i-1} \left(1 - \frac{1}{i} \frac{n+3}{in+5} \right) - \frac{3\alpha^2}{2n+3} \beta_{i-2} \left(1 - \frac{2}{i} \frac{2n+3}{in+5} \right),$$

$$\beta'' = \frac{\beta_1}{3n+5} + \frac{\beta_2}{4n+5} + \dots, \quad \int_0^1 \rho der^3 = e_1 \rho_0 m,$$

$$m = (1-\alpha)^2 + \frac{2\alpha n}{1+\beta} \left[\frac{1+(n+5)\beta'}{n+5} - \alpha \frac{1+(2n+5)\beta''}{2n+5} \right],$$

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\rho_0}{D_1} m \right), \quad \frac{1}{e_J} = \frac{1}{J} \frac{\rho_0}{F_1} m, \quad e_{\varphi J} = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5} J \frac{F_1}{D_1}.$$

Les calculs numériques donnent alors les résultats suivants avec $n = 2$:

| | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\alpha =$ | 1. | 0,9. | 0,8. | 0,7. | 0,6. | 0,54. | 0,52. | 0,50. | 0,4. | 0,2. | 0. |
| $1 : e_\varphi \dots$ | 428,88 | 398,68 | 366,32 | 339,70 | 315,08 | 302,04 | 297,97 | 294,06 | 276,48 | 256,84 | 230,70 |
| $1 : e_J \dots$ | 234,83 | 255,49 | 274,33 | 284,26 | 292,44 | 295,99 | 297,00 | 297,91 | 301,34 | 304,76 | 305,31 |
| $1 : e_{\varphi J} \dots$ | 353,89 | 339,86 | 326,38 | 314,49 | 304,39 | 299,12 | 297,50 | 295,93 | 288,88 | 278,06 | 270,34 |

Pour les valeurs d'accord, on a $1 : e_1 = 297,183$, $1 : e_0 = 372,55$,

$$\rho_1 = 2,632, \quad \rho = 11,234(1 - 0,516r^2)^2.$$

Remarque. — Les valeurs correspondantes pour Jupiter et Saturne s'en déduisent en multipliant ρ_1 par le rapport des densités moyennes et $1 : e_\varphi$ par le rapport des valeurs de φ . On trouve

| | Pour Jupiter. | | | | Pour Saturne. | | | |
|----------------------|---------------|------|------|-----|---------------|------|------|-----|
| $\alpha \dots \dots$ | 1 | 0,9 | 0,8 | ... | 1 | 0,9 | 0,8 | ... |
| $\rho_1 \dots \dots$ | 0 | 0,05 | 0,10 | | 0 | 0,03 | 0,06 | |
| $1 : e_1 \dots$ | 17,5 | 16,7 | 15,0 | | 10,2 | 9,8 | 8,9 | |

Les valeurs observées $1 : e = 17,11$ et $9,18$ correspondent aux densités superficielles $0,025$ et $0,05$, c'est-à-dire 9 et 17 fois celle de l'air.

Deuxième loi. — On obtient de même

$$D_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{9\alpha}{n+3} + \frac{9\alpha^2}{2n+3} - \frac{3\alpha^3}{3n+3} \right),$$

$$F_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{15\alpha}{n+5} + \frac{15\alpha^2}{2n+5} - \frac{5\alpha^3}{3n+5} \right),$$

$$\beta_i = \frac{9\alpha}{n+3} \beta_{i-1} \left(1 - \frac{1}{i} \frac{n+3}{in+5} \right) - \frac{9\alpha^2}{2n+3} \beta_{i-2} \left(1 - \frac{2}{i} \frac{2n+3}{in+5} \right) + \frac{3\alpha^3}{3n+3} \beta_{i-3} \left(1 - \frac{3}{i} \frac{3n+3}{in+5} \right),$$

$$m = (1-\alpha)^3 + \frac{3\alpha n}{1+\beta} \left[\frac{1+(n+5)\beta'}{n+5} - 2\alpha \frac{1+(2n+5)\beta''}{2n+5} + \alpha^2 \frac{1+(3n+5)\beta'''}{3n+5} \right],$$

$$\beta''' = \frac{\beta_1}{4n+5} + \frac{\beta_2}{5n+5} + \dots \quad (1).$$

Le calcul donne alors les résultats suivants pour $n = 2$:

| α . | 1. | 0,9. | 0,8. | 0,6. | ... | 0,40. | 0,38. | 0,36. | ... |
|------------------|--------|--------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|-----|
| $1:e_2$. | 477,35 | 459,60 | 422,75 | 357,28 | ... | 301,72 | 296,92 | 292,16 | ... |
| $1:e_1$. | 192,88 | 204,68 | 240,89 | 278,14 | ... | 296,26 | 297,20 | 298,30 | ... |
| $1:e_{\rho_1}$. | 380,60 | 366,80 | 351,76 | 322,37 | ... | 299,09 | 297,05 | 295,16 | ... |

Accord 1 : $e_1 = 297,15$; $\rho_1 = 2,734$; $\rho = 11,527 (1 - 0,381r^2)^3$.

Pour Jupiter et Saturne, les aplatissements observés exigeraient, dans ce cas, $\rho_1 = 0,03$ et $0,17$, c'est-à-dire des densités 10 et 60 fois plus grandes que celle de l'air.

8. Étude de la loi limite $\eta = \eta_1 = \text{const.}$ — Si η est constant, on a

$$\frac{re'}{e} = \eta_1, \quad \frac{de}{e} = \eta_1 \frac{dr}{r}, \quad e = e_1 r^{\eta_1}.$$

On a aussi $\eta' = 0$, et l'équation Clairaut-Radau devient

$$(145) \quad \eta(5 + \eta) = 2\zeta(1 + \eta).$$

Comme $\eta = \eta_1$, on a aussi

$$\zeta = \zeta_1 = \frac{\eta_1}{2} \frac{5 + \eta_1}{1 + \eta_1} = \text{const.},$$

(1) $1 + (2n+5)\beta''$ et $1 + (3n+5)\beta'''$ sont encore des séries hypergéométriques. On voit de plus immédiatement la forme des expressions β_i et m pour la loi générale $\rho = \rho_0 (1 - \alpha r^n)^m$.

équation qui donne η_1 en fonction de ζ_1 et réciproquement. On a ensuite

$$-\frac{rD'}{D} = \zeta_1, \quad \frac{dD}{D} = -\zeta_1 \frac{dr}{r}, \quad D = D_1 r^{-\zeta_1}.$$

Puis $3\left(1 - \frac{\rho_1}{D}\right) = \zeta_1$, d'où

$$\rho = D\left(1 - \frac{\zeta_1}{3}\right) = D_1 r^{-\zeta_1} \left(1 - \frac{\zeta_1}{3}\right) = \rho_1 r^{-\zeta_1}.$$

L'équation de Clairaut (128) en y portant ces valeurs de e et ρ donne

$$(146) \quad \frac{3\omega^2}{8\pi f} = e_1 \rho_1 \left(\frac{3}{3 - \zeta_1} - \frac{3}{5} \frac{5 + \eta_1}{5 + \eta_1 - \zeta_1} - \frac{3}{5} \frac{\eta_1}{\zeta_1 - \eta_1} \right) r^{\eta_1 - \zeta_1} + \frac{3}{5} e_1 \rho_1 \frac{\eta_1}{\zeta_1 - \eta_1}.$$

En tenant compte de (145), la parenthèse est nulle et (146) donne finalement

$$(147) \quad \eta_1 = \frac{5}{2} \frac{\varphi}{e} - 2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e_\varphi} = \frac{2}{\varphi} \frac{\eta_1 + 2}{5}.$$

Les équations qui donnent e_1 et e_{φ_1} deviennent à leur tour

$$(148) \quad 2e_1 \rho_1 \frac{1 + \eta_1}{2 + \eta_1} = J \frac{5}{5 - \zeta_1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{e_1} = \frac{1}{J} \left(1 - \frac{\eta_1^2}{10 + 5\eta_1} \right),$$

$$(149) \quad e_{\varphi_1} = \frac{\varphi}{2} + J \frac{\rho_1}{D_1} \frac{3}{5 - \zeta_1} = \frac{\varphi}{2} + J \frac{3 - \zeta_1}{5 - \zeta_1}.$$

Pour $\frac{1}{e} = 297$, on a $\eta_1 = 0,5747$ et (145) donne $\zeta_1 = 1,0170$ et $\rho_1 = 3,675$. J'ai donc fait les calculs pour $3,5 < \rho_1 < 3,8$, on obtient

| ρ_1 | 3,5. | 3,6. | 3,7. | 3,8. |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $1:e_\varphi$ | 305,59 | 300,62 | 295,82 | 291,16 |
| $1:e_1$ | 295,60 | 296,71 | 297,72 | 298,67 |
| $1:e_{\varphi_1}$ | 300,80 | 298,73 | 296,74 | 294,83 |

L'accord a lieu pour $\frac{1}{e} = 297,39$ et $\rho_1 = 3,667$. La valeur de $\frac{1}{e}$ est précisément la limite supérieure trouvée, en première approximation, dans le problème de M. Poincaré, quand on suppose $\eta = \eta_1$, comme on l'a vu [Chap. IV, formule (71)].

Remarque. — En seconde approximation, dans l'hypothèse $\eta' = 0$, la valeur de e_φ serait donnée par l'expression (108) de η_1 , qui

s'écrira

$$\frac{1}{e_\varphi} = \frac{2\eta_1 + 2}{\varphi \cdot 5} + \left(\frac{69}{70} - \frac{\eta_1}{7} \right).$$

Pour déterminer la valeur de η_1 , on aura d'abord, en faisant $D_1(1 + \lambda^2) = \Delta_1 = 5,56$ dans (93'),

$$3\rho_1 = 5,56(3 - \zeta_1)(1 - \frac{2}{3}e\eta_1).$$

On donne à $e\eta_1$ sa valeur en première approximation et l'on déduit de cette expression ζ_1 en fonction de ρ_1 . Cette valeur de ζ_1 , portée dans l'équation de Clairaut-Radau, complète (93), donne finalement η_1 , qui permet de calculer e_φ .

La valeur de e_3 s'obtiendra au moyen de (104). Pour cela, il faut calculer λ^2 et ρ .

On a d'abord, comme en première approximation,

$$\eta' = 0, \quad \frac{r}{\lambda^2} \frac{d\lambda^2}{dr} = 0, \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 r^{\eta_1}.$$

Puis (93) s'écrira

$$\zeta = -\frac{rD'}{D} = \frac{\eta_1}{2} \frac{5 + \eta_1}{1 + \eta_1} - \frac{1}{2} \frac{\chi}{1 + \eta_1},$$

où ζ est légèrement variable avec χ . On en déduit l'expression de D , puis celle de ρ , d'après (92'). Elles contiendront un terme de correction dérivé de χ .

9. *Formules pour calculs numériques en tenant compte de e^2 .* — ω^2 est déterminé par la formule (90) qui devient, en remplaçant λ^2 par $2e + 3e^2$,

$$\begin{aligned} \frac{3\omega^2}{8\pi f} = & \frac{e}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho dr^5 e - \frac{3}{5} \int_r^1 \rho de \\ & - \frac{31}{14} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 + \frac{78}{35} \frac{e}{r^3} \int_0^r \rho dr^5 e + \frac{4}{5} e \int_r^1 \rho de \\ & + \frac{2e}{r^3} \int_0^r \rho dr^3 e - \frac{21}{10} \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho dr^5 e^2 - \frac{27}{70} \int_r^1 \rho de^2. \end{aligned}$$

En posant

$$e = e_0(1 + \beta_1 r^n + \beta_2 r^{2n} + \dots) + e_0^2(\beta'_1 r^n + \beta'_2 r^{2n} + \dots),$$

la valeur des termes de correction β'_1, \dots sera déterminée par celle des termes en e^2 dans ω^2 .

Les formules (102) et (104) donneront ensuite e_φ et e_1 . Les quantités nouvelles à calculer seront données ou définies comme il suit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho dr^5 (1 + 2\lambda^2) &= \int_0^1 \rho dr^5 + 4 \int_0^1 \rho dr^5 e = JF_1 + \frac{10}{3}(2e - \varphi)D_1, \\ \int_0^1 \rho dr^5 (1 + \lambda^2) &= D_1(1 + \lambda_1^2), \quad \int_0^1 \rho dr^5 e = e_1 \rho_1 (m + e_1 m'), \\ \int_0^1 \rho dr^5 e^2 &= e_1^2 \rho_1 m_2, \end{aligned}$$

où F_1, D_1, m sont les valeurs calculées en première approximation et où m_1, m', m_2 sont des termes de correction.

En éliminant l'intégrale commune à (102) et (104), on a d'abord

$$(\lambda^2 - \varphi)(1 + \lambda^2)D_1 - \left(\frac{6}{7}\lambda^2 - \frac{3}{2}\varphi\right)\varphi D_1 = \frac{6}{5}JF_1 + 4J(\lambda^2 - \varphi)D_1,$$

puis

$$e = \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{5}J \frac{F_1}{D_1} + \mu e^2, \quad e(1 - e\mu) = e_{\varphi 1}, \quad \frac{1}{e} = \frac{1}{e_{\varphi 1}} - \mu,$$

où

$$\mu = -\frac{3}{2} + \frac{2}{5}(3 - \eta) \left(2 \frac{J}{e} - 1\right) + \frac{3}{5} \frac{6 - 7\eta}{35} (\eta + 2).$$

De même les formules (102) et (104) s'écriront à leur tour

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} &= \frac{2}{\varphi} \left(1 - \frac{3 - \zeta}{5} m - e\mu_\varphi\right) = \frac{1}{e_\varphi} - \frac{5\mu_\varphi}{\eta + 2}, \quad \mu_\varphi = \mu - \frac{3 - \zeta}{5} \mu_1, \\ \frac{1}{e} &= \frac{1}{J} \frac{\rho_1}{F_1} (m - e\mu_1) = \frac{1}{e_1} - \frac{\mu_1}{m}, \quad \mu_1 = 4 \frac{J}{e} \frac{3 - \eta}{3 - \zeta} - m' - \frac{7}{2} m_2. \end{aligned}$$

μ, μ_φ, μ_1 détermineront les corrections à faire subir aux valeurs $e_\varphi, e_1, e_{\varphi 1}$ calculées en première approximation dans les Tableaux donnés. Ces corrections ne sont applicables qu'à l'hypothèse de Clairaut. Elles auraient d'ailleurs peu d'intérêt dans les autres cas où l'aplatissement, qui s'accorde avec l'attraction et la précession, peut varier dans de larges limites. De plus, dans l'hypothèse de Clairaut, ces termes de

correction ne peuvent influencer que de quelques dixièmes sur la valeur de l'inverse de l'aplatissement, comme on l'a vu à la fin du Chapitre V.

D'ailleurs la valeur d'accord ayant été alors calculée directement, ces calculs de correction, longs et pénibles sur les trois valeurs e_φ , e_1 , e_{φ_1} , perdent toute leur importance.

10. *Calcul de A, γ , δr , valeurs de seconde approximation.* — On a successivement

$$A = \frac{1}{r^3} \int_0^r -\rho' a^2 (\lambda_r^2 - \beta^2)^2 da,$$

$$\left(\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2} \lambda^2 \right)^2 = 4 \left(e_r - \frac{a^2}{r^2} e \right)^2 = 4 \left(e_r^2 - 2 \frac{a^2}{r^2} e e_r + \frac{a^4}{r^4} e^2 \right),$$

$$e^2 = e_0^2 [1 + 2\beta_1 r^n + (2\beta_2 + \beta_1^2) r^{2n} + 2(\beta_3 + \beta_1 \beta_2) r^{3n} + \dots],$$

$$A = 4 \alpha n e_0^2 \rho_0 r^n \left[\frac{1}{n+3} \frac{e^2}{e_0^2} - 2 \frac{e}{e_0} \left(\frac{1}{n+5} + \frac{\beta_1}{2n+5} r^n + \frac{\beta_2}{3n+5} r^{2n} + \dots \right) + \left(\frac{1}{n+7} + \frac{2\beta_1}{2n+7} r^n + \frac{2\beta_2 + \beta_1}{3n+7} r^{2n} + \dots \right) \right].$$

A la surface $r=1$, en représentant par β'_1 et β''_1 la valeur des parenthèses en $n+5$ et $n+7$, on aura

$$A_1 = 4 \frac{\alpha n}{1-\alpha} \rho_1 \frac{e_1^2}{(1+\beta)^2} \left[\frac{(1+\beta)^2}{n+3} - 2\beta'_1 (1+\beta) + \beta''_1 \right], \quad e_1 = e_0(1+\beta).$$

Or β et β'_1 ont déjà été calculés. La valeur de β''_1 se déduit de celle de β'_1 . On obtient ainsi celle de A_1 . Pour les trois cas principaux $n=1$, $n=2$, $n=3$, on a calculé la valeur de $\frac{A}{D\lambda^4}$, et les valeurs maximums et minimums de γ et de δr à 45° , où $\delta r = \frac{1}{4} \alpha \gamma \lambda^4 = \gamma r e^2$; les limites de γ étant définies par (99). On obtient le Tableau suivant (1) :

(1) Dans l'hypothèse de Roche, $n=2$, on a vu que l'accord des trois valeurs de e avait lieu pour $\rho_1=2,25$. On voit facilement, d'après le Tableau, que l'on a dans ce cas

$$2,86 < \delta r < 3,71, \quad \delta r = 3^m, 28 \pm 0^m, 42.$$

La valeur moyenne probable serait pour le maximum de dépression de $3^m, 28$. G. H. Darwin, dans la même hypothèse, trouve $3^m, 26$ (*On the figure of the earth*, p. 107). L'accord est remarquable.

| $\rho_1 =$ | | 2,0. | 2,2. | 2,4. | 2,6. | 2,8. | 3,0. |
|------------|--------------|---|------|------|------|------|------|
| A | $n = 0$ | 0,146 | 138 | 130 | 122 | 113 | 105 |
| | 1 | 0,105 | 100 | 94 | 88 | 82 | 76 |
| | 2 | 0,099 | 93 | 87 | 81 | 74 | 68 |
| | 3 | 0,076 | 72 | 67 | 63 | 58 | 53 |
| $n = 1$ | $-\gamma$ | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 0,0591 \\ > \dots & 447 \end{array} \right.$ | 566 | 530 | 495 | 464 | 429 |
| | ∂r | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 4^m, 27 \\ > \dots & 3, 24 \end{array} \right.$ | 4,09 | 3,83 | 3,58 | 3,35 | 3,10 |
| | | | 433 | 413 | 391 | 371 | 349 |
| | | | 3,13 | 2,98 | 2,83 | 2,68 | 2,52 |
| $n = 2$ | $-\gamma$ | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 0,0559 \\ > \dots & 423 \end{array} \right.$ | 522 | 489 | 453 | 417 | 380 |
| | ∂r | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 4^m, 04 \\ > \dots & 3, 06 \end{array} \right.$ | 3,77 | 3,53 | 3,28 | 3,02 | 2,75 |
| | | | 400 | 381 | 358 | 334 | 309 |
| | | | 2,89 | 2,75 | 2,59 | 2,41 | 2,23 |
| $n = 3$ | $-\gamma$ | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 0,0429 \\ > \dots & 0,0325 \end{array} \right.$ | 404 | 377 | 352 | 326 | 300 |
| | ∂r | $\left\{ \begin{array}{l} < \dots & 3^m, 10 \\ > \dots & 2, 35 \end{array} \right.$ | 2,92 | 2,73 | 2,55 | 2,35 | 2,17 |
| | | | 309 | 294 | 278 | 261 | 244 |
| | | | 2,23 | 2,12 | 2,01 | 1,89 | 1,76 |

On aurait en résumé pour limites de ∂r dans les trois cas

$$2,52 < \partial r < 4,27, \quad 2,23 < \partial r < 4,04, \quad 1,76 < \partial r < 3,10,$$

et finalement pour limites pratiques de la dépression maximum

$$2 < \rho_1 < 3, \quad 1^m, 26 < \partial r < 4^m, 27.$$

NOTE.

Dans le n° 3 du Chapitre I, p. 343, remplaçons C par X, l'équation (13) devra s'écrire

$$(13) \quad \frac{1}{2\pi f} \frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{\partial E}{\partial a_n} - \frac{\partial D}{\partial a_n} + \frac{1}{2\pi f} \frac{X}{a_n} \frac{d}{da_n} \left(\frac{a_n^2}{b_n^2} \right).$$

En outre, on aurait de fait sur l'axe polaire

$$\begin{aligned} a^2 + \mu = a_n^2 = r_n^2, \quad \frac{\partial \mu}{\partial r_n^2} = 1, \quad \frac{\partial \mu}{\partial a_n} = 2a_n, \\ \frac{\partial D}{\partial a_n} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \frac{\partial E}{\partial a_n} = \frac{2a_n}{b_n^2} \int_0^{a_n} \left(\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} - \frac{a_n^2}{a^2 + \mu} \right) \frac{-\rho' da}{\Delta \mu}, \end{aligned}$$

et finalement l'équation (14) devient en posant

$$1 + l^2 = \frac{b^2 + \mu}{a^2 + \mu} = \frac{b^2 + \mu}{a_n^2}, \quad l^2 = \frac{a^2}{a_n^2} \lambda^2,$$

$$(14) \quad a_n(1 + \lambda^2) \frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} + \frac{X}{1 + \lambda^2} \frac{d\lambda^2}{da_n} = 4\pi f \int_0^{a_n} \frac{\lambda_n^2 - l^2}{1 + l^2} \frac{l^3}{l^3} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{1 + l^2} \frac{1 + \lambda'^2}{1 + l'^2}} \rho' da,$$

λ' et l' représentent les valeurs de λ et l où b est remplacé par c . On obtiendrait une nouvelle relation en remplaçant dans (14), λ et l par λ' et l' et réciproquement.

Conclusions. — 1° Si nous supposons l'équilibre permanent réalisé, $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n}$ et $\frac{\partial \omega^2}{\partial x_n^2} = 0$. Cette dernière relation exige, comme on l'a vu, ou bien $\rho' = 0$,

(ellipsoïde homogène), ou bien $\frac{b_n^2}{b^2 + \mu} = \frac{a_n^2}{a^2 + \mu}$, c'est-à-dire ici $\lambda_n^2 = l^2$, ellipsoïdes homofocaux. Dans ce dernier cas (14) se réduirait à $d\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire qu'on devrait avoir des ellipsoïdes homothétiques. Il y a incompatibilité. Le premier cas reste seul possible. *Une masse fluide, tournant tout d'une pièce, ne peut prendre la forme ellipsoïdale que si elle est homogène.*

2° Si les surfaces de niveau sont des ellipsoïdes homofocaux, alors $\lambda_n^2 = l^2$ et (14) donne

$$a_n(1 + \lambda^2) \frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = - \frac{X}{1 + \lambda^2} \frac{d\lambda^2}{da_n} = \frac{X}{a_n} \frac{2\lambda^2}{1 + \lambda^2} < 0,$$

car, dans ce cas, $\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2}{a^2}$ et $\frac{d\lambda^2}{da} = - \frac{2\lambda_1^2}{a^3} = - \frac{2\lambda^2}{a}$. La vitesse de rotation varie donc en sens inverse du rayon et décroît du centre à la surface. Au centre $\partial \omega^2 = 0$.

3° Si les surfaces de niveau sont homothétiques, $d\lambda^2 = 0$ et le second membre de (14) est encore négatif, car $\rho' < 0$ et $\lambda_n^2 - l^2 > 0$. En effet, ici

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \text{const.}$$

et $l^2 = \frac{a^2}{a_n^2} \lambda_n^2 < \lambda_n^2$. On a donc encore $\partial \omega^2 < 0$ et la vitesse de rotation décroît du centre à la surface. Elle est maximum au centre.

4° Enfin, si la vitesse de rotation est *uniforme* (au moins sur l'axe de rotation), $\frac{\partial \omega^2}{\partial a_n} = 0$, on a

$$\frac{X}{1 + \lambda^2} \frac{d\lambda^2}{da_n} = 4\pi f \int_0^{a_n} \frac{\lambda_n^2 - l^2}{1 + l^2} \frac{l^3}{l^3} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{1 + l^2} \frac{1 + \lambda'^2}{1 + l'^2}} \rho' da$$

X et ρ' sont négatifs. Cette relation peut être vérifiée en général de deux façons

différentes : ou bien $l < \lambda_n$ et $d\lambda^2 > 0$, ou bien $l > \lambda_n$ et $d\lambda^2 < 0$. Or, $l^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha_n^2} \lambda^2$; de plus, sur la surface S_n , on a $l = \lambda_n$ et l'intégration est prise de 0 à α_n . Si $\alpha^2 \lambda^2$ reste constant, alors $l = \lambda_n$ (ellipsoïdes homofocaux). Si $\alpha^2 \lambda^2$, à partir de S_n jusqu'au centre, devient plus petit que λ_n^2 , c'est-à-dire si l'aplatissement devient plus petit que l'aplatissement homofocal correspondant (lequel tend vers 1), alors on a $l < \lambda_n$ et $d\lambda^2 > 0$. Les aplatissements croissent du centre à la surface. C'est l'extension du théorème de Clairaut, à l'ellipsoïde à trois axes, la vitesse de rotation étant quelconque, dans le cas où les ellipsoïdes ne se réduisent pas à des disques aplatis. Les conclusions de la page 346 demeurent.

Mais on aurait un *second cas d'équilibre*, en vitesse uniforme, probablement *instable*, avec des aplatissements croissants à partir de la surface, et très grands, plus grands que les aplatissements homofocaux correspondants, puisqu'on doit avoir $l > \lambda_n$ ou $\lambda > \frac{\alpha_n}{\alpha} \lambda_n$ (courbe 3, *fig. 1*, p. 350). On voit par les discussions du Chapitre II que ce cas ne peut être réalisé que pour des aplatissements considérables, tendant vers l'unité. Ce serait le *cas inverse de celui de Clairaut*, les surfaces de niveau au lieu d'être voisines de la sphère, seraient voisines du *disque aplati*, et les vitesses de rotation également faibles.
