JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROY

Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 229-329.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__229_0>

Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles;

PAR LOUIS **ROY**.

INTRODUCTION.

Une membrane parfaitement flexible est une surface matérielle d'épaisseur infiniment petite, qu'on suppose capable d'éprouver toutes les déformations qui n'altèrent pas sa continuité. Si l'on considère en un point de cette surface un élément d'aire dS, cet élément aura une masse $\rho\, dS$, ρ désignant, par définition, la densité superficielle de la membrane au point considéré.

Si la membrane est partout de même nature, ce que nous supposerons, l'état physique d'un élément de la membrane sera uniquement défini par la densité superficielle ρ de l'élément, par sa température absolue T et son aire dS; la position relative des divers éléments qui constituent la membrane est supposée ne pas intervenir dans la définition de chacun d'eux.

Dans ces conditions, la membrane admettra un potentiel thermodynamique interne Φ qui sera de la forme

$$\Phi = \int \varphi(\rho, T)\, dS,$$

l'intégration s'étendant à la surface entière de la membrane et φ désignant une fonction continue des deux seules variables ρ, T mises en évidence.

Les forces extérieures qui peuvent être appliquées à la membrane seront de deux sortes :

1° Chaque élément linéaire, de longueur ds, du contour de la membrane sera soumis à une force dont les composantes, suivant les axes de coordonnées ox, oy, oz seront désignées par

$$(T_x, T_y, T_z)\, ds;$$

2° Chaque élément superficiel, d'aire dS, de la membrane, sera soumis à une force dont les composantes suivant les mêmes axes seront désignées par

$$\rho(X, Y, Z)\, dS.$$

Tel est le point de départ qui nous servira à former les équations générales du mouvement et de l'équilibre des membranes.

La recherche des conditions d'équilibre des membranes date de Lagrange, qui a indiqué sommairement comment ces conditions pouvaient être établies (1). Cette théorie fut reprise plus tard par Poisson (2), puis par Lamé (3), et enfin par M. Duhem (4), qui lui a donné une forme entièrement satisfaisante en partant des principes de la Thermodynamique générale. Tous ces auteurs se sont bornés à considérer une membrane de température uniforme.

Quant aux équations du mouvement, elles n'ont été établies, jusqu'ici, à notre connaissance, que dans le cas extrêmement particulier des petits mouvements d'une membrane plane uniformément tendue, dénuée de viscosité et de température uniforme et constante. L'équation du mouvement transversal a été obtenue la première, d'abord par Euler (5), au moyen de considérations peu rigoureuses; ensuite, par Lagrange et Poisson.

Les équations du mouvement tangentiel n'ont été trouvées que plus tard, d'abord par Poisson, ensuite par Lamé. Mais ces deux derniers géomètres, par ce fait même qu'ils déduisaient les équations des mem-

---

(1) Lagrange, *Mécanique analytique*, édition 1853, 1re Partie, t. I, section V, Ch. III, § II.

(2) Poisson, *Mémoire sur les surfaces élastiques*, lu à l'Académie des Sciences le 1er août 1814.

(3) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, neuvième leçon.

(4) P. Duhem, *Hydrodynamique*, *Élasticité*, *Acoustique*, t. II, Liv. III, Ch. V, p. 78.

(5) L. Euler, *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. X, p. 247.

branes de celles des plaques élastiques, transportaient dans la théorie des membranes le désaccord qui les séparait dans la théorie de l'élasticité relativement aux deux coefficients λ et μ. Et, en effet, les équations du mouvement tangentiel qu'ils ont données l'un et l'autre diffèrent par la valeur des coefficients. Enfin, M. Duhem, partant de la définition précise de la membrane que nous avons reproduite en commençant, et d'après laquelle une membrane apparaît comme un fluide à deux dimensions dont la continuité ne peut être altérée, a donné à ces équations leur forme définitive (¹). Celle-ci a été adoptée, depuis, par tous les géomètres qui se sont proposés d'étudier les propriétés analytiques des équations des petits mouvements d'une membrane plane.

Mais, comme nous l'avons dit, ces équations supposent en particulier la température uniforme et constante et la viscosité nulle. Or, si le fait de négliger les variations de température est une hypothèse simplificatrice, qui n'a pas plus d'importance restrictive dans le cas actuel que dans le cas des fluides, il en est tout autrement de l'hypothèse qui consiste à supposer la membrane dénuée de viscosité.

Il existe en effet, dans la nature, des fluides, tels que les gaz et les liquides très mobiles, dont le fluide parfait de l'Hydrodynamique constitue une image suffisamment approchée, tandis qu'au contraire toutes les membranes connues présentent une viscosité considérable, qu'on reconnaît très bien à l'amortissement prononcé qu'éprouvent les mouvements qui font varier la densité ; et cette viscosité existe même pour celles qui se rapprochent le plus de la membrane idéale parfaitement flexible comme la membrane de caoutchouc. L'étude des mouvements où la viscosité intervient, faite en partant d'équations qui la négligent, ne peut donc même pas fournir des résultats de première approximation ; et c'est ce qui arrive précisément pour les équations du mouvement tangentiel.

Ainsi, l'étude du mouvement des membranes est incontestablement moins avancée que celle du mouvement des fluides. On sait, en effet, que les géomètres ont abordé depuis longtemps, en Hydrodynamique, l'étude des mouvements finis et recherché l'influence de la viscosité et des variations de température. Les équations les plus géné-

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 136.

rales obtenues dans ce domaine ont été données récemment par M. Duhem [1], qui a proposé une théorie de la viscosité dont les formules renferment, comme cas particulier, celles qu'avaient proposées Navier, Cauchy, Barré de Saint-Venant et Stokes. De plus, M. Duhem a étendu aux fluides réels la théorie de la propagation des ondes, ébauchée par Hugoniot [2], précisée et développée par M. Hadamard [3] dans le cas des fluides parfaits; et l'on sait que cette théorie, jointe à celle des tourbillons, représente le progrès le plus important fait par l'Hydrodynamique moderne.

Nous nous sommes proposé, dans le présent Mémoire, le même but que M. Duhem en Hydrodynamique, en prenant également comme base les principes de la Thermodynamique générale. Il nous fallait tout d'abord obtenir les équations générales du mouvement des membranes, en tenant compte de la viscosité et des variations de température. C'est ce que nous avons fait dans le Chapitre I, où nous avons traité de la viscosité dans les membranes, en nous inspirant de la théorie générale de la viscosité donnée par M. Duhem [4].

Les Chapitres suivants sont exclusivement consacrés à la théorie de la propagation des ondes. Bien des résultats auxquels nous sommes parvenu ont leurs analogues en Hydrodynamique; c'est ce qui arrive chaque fois que la membrane admet un plan tangent unique en chaque point de l'onde et que le vecteur discontinuité se trouve dans ce plan. Mais, si ce vecteur n'est pas contenu dans le plan tangent, les résultats auxquels on parvient sont spéciaux aux membranes. Cela tient à ce qu'en Hydrodynamique on étudie le mouvement d'un milieu continu à trois dimensions dans un espace à trois dimensions : quelle que soit alors l'orientation du vecteur discontinuité, celui-ci se trouve nécessairement dans le milieu étudié. Il n'en est plus de même dans le cas des membranes, puisqu'une membrane est un milieu à deux dimensions, mobile dans un espace à trois dimensions. C'est ce qui

---

[1] P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Paris, 1903-1904.

[2] Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III et IV).

[3] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Paris, 1903.

[4] P. Duhem, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Paris, 1896.

fait, par exemple, qu'une membrane affectée de viscosité peut propager des ondes correspondant à une discontinuité normale à la membrane, tandis que les fluides visqueux n'en propagent pas.

Bien que la membrane dénuée de viscosité nous apparaisse comme une pure abstraction, d'après ce que nous avons dit, nous étudierons néanmoins la propagation des ondes dans les membranes dénuées de viscosité, parce que bien des résultats auxquels nous conduira cette étude correspondent à d'autres résultats obtenus dans l'Hydrodynamique des fluides parfaits.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES MEMBRANES.

§ I. — Préliminaires.

Soient

$$(1) \qquad x = f(u, v, t), \qquad y = g(u, v, t), \qquad z = h(u, v, t)$$

les équations de la membrane à l'instant t, (u, v) désignant les coordonnées curvilignes d'un point quelconque M de la membrane, dont les coordonnées cartésiennes rectangulaires par rapport à trois axes fixes sont x, y, z. En employant les variables dites de Lagrange, chaque point matériel de la membrane se trouve, à chaque instant, caractérisé par le même couple de valeurs (u, v) des paramètres, de sorte que, pour suivre un point matériel déterminé dans son mouvement, il faut faire varier t seul dans les équations (1), qui représentent alors la trajectoire de ce point.

Posons, suivant les notations classiques,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \Sigma x'^2_u, \\ \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \Sigma x'_u x'_v, \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \Sigma x'^2_v, \\ \mathrm{H} &= \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}; \end{aligned} \right.$$

l'élément linéaire ds relatif aux valeurs $(u, v; u+du, v+dv)$ des paramètres et l'élément d'aire dS correspondant auront pour expressions

$$(3)\qquad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ dS = H\,du\,dv. \end{cases}$$

Comme les lignes du réseau correspondent toujours aux mêmes lignes matérielles, si le réseau est orthogonal à un instant t_0, il ne le sera généralement plus à un instant $t \neq t_0$, de sorte que nous devons considérer le cas général des coordonnées curvilignes obliques.

A la membrane de forme variable et de contour variable Γ correspond, dans le plan des (u, v), une aire invariable de contour fixe C et dont chaque point, de coordonnées rectangulaires (u, v), est l'image du point de la membrane qui a pour coordonnées curvilignes (u, v). Nous supposerons la correspondance univoque entre les points de l'aire et ceux de la membrane. A un élément ds de Γ dont l'expression est donnée par la première des égalités (3), correspond un élément $d\sigma$ de C tel que

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2.$$

Dès lors, α, β désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure menée au contour C en un point de l'élément $d\sigma$, on aura

$$du = \mp \beta\, d\sigma, \qquad dv = \pm \alpha\, d\sigma,$$

le signe à prendre dépendant de la position du point $(u+du, v+dv)$ par rapport au point (u, v), et il viendra

$$ds = k\, d\sigma,$$

en posant

$$(4)\qquad k = \sqrt{G\alpha^2 - 2F\alpha\beta + E\beta^2}.$$

Le contour Γ n'est, en somme, qu'une courbe particulière tracée sur la membrane ; considérons, maintenant, une courbe quelconque γ à laquelle correspond, dans le plan des (u, v), une image c. Nous nous proposons de calculer les cosinus directeurs a, b, c de la demi-normale Mn à la courbe γ, menée en un point M de cette courbe dans le plan tangent en M à la membrane et dans un sens tel qu'il corresponde à celui d'une demi-normale de cosinus directeurs α, β menée à la courbe c au point m image de M.

Soit M' un autre point de la demi-normale Mn de coordonnnées $x+dx, y+dy, z+dz$, et correspondant aux valeurs $(u+du, v+dv)$ des paramètres (u, v). En appelant dn sa distance au point M, on aura

$$a = \frac{dx}{dn} = \frac{x'_u\,du + y'_v\,dv}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}}, \tag{5}$$

avec des expressions analogues pour b et c. Exprimons que l'élément dn est normal à γ. Pour cela, soient $x+\mathrm{D}x$, $y+\mathrm{D}y$, $z+\mathrm{D}z$ les coordonnées d'un point M'' de γ voisin de M; on devra avoir

$$\Sigma \mathrm{D}x\,dx = 0.$$

Mais, le long de γ, u et v sont fonctions d'un même paramètre ω, de sorte que, si $\omega + \mathrm{D}\omega$ est la valeur de ce paramètre au point M'', on aura

$$\mathrm{D}x = \left(x'_u \frac{\partial u}{\partial\omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial\omega}\right)\mathrm{D}\omega,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\sum\left(x'_u \frac{\partial u}{\partial\omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial\omega}\right)(x'_u\,du + x'_v\,dv) = 0.$$

Or, soient $(u+\mathrm{D}u, v+\mathrm{D}v)$ les coordonnées du point m'' image de M''; on a la condition de perpendicularité

$$\alpha\mathrm{D}u + \beta\mathrm{D}v = 0,$$

ou

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial\omega} + \beta\frac{\partial v}{\partial\omega} = 0.$$

La condition de perpendicularité peut donc s'écrire

$$\Sigma(\beta x'_u - \alpha x'_v)(x'_u\,du + x'_v\,dv) = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\frac{du}{\mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta} = \frac{dv}{-\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta}.$$

Si nous remplaçons alors, dans la formule (5), du et dv par leurs quantités proportionnelles, il viendra

$$a = \pm \frac{x'_u(G\alpha - F\beta) + x'_v(-F\alpha + E\beta)}{H\sqrt{G\alpha^2 - 2F\alpha\beta + E\beta^2}}.$$

Pour choisir le signe, il suffit de remarquer que si les équations de la membrane se réduisent à $x = u, y = v, z = 0$, celle-ci peut être amenée à coïncider avec son image et, par suite, la courbe γ avec son image c; on devra avoir ainsi $a = \alpha$. Il faut donc prendre le signe $+$, et l'on a, en définitive, en tenant compte de la formule (4),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{x'_u(G\alpha - F\beta) + x'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}, \\ b &= \frac{y'_u(G\alpha - F\beta) + y'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}, \\ c &= \frac{z'_u(G\alpha - F\beta) + z'_v(-F\alpha + E\beta)}{kH}. \end{aligned}\right.$$

Les formules ci-dessus vont nous fournir presque immédiatement la valeur de la dérivée d'une fonction de point suivant la normale Mn; cette dérivée a pour expression générale

$$(7)\qquad \frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{du}{dn} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{dv}{dn}.$$

Or, les égalités (5) nous donnent les suivantes

$$a = x'_u \frac{du}{dn} + x'_v \frac{dv}{dn},$$

$$b = y'_u \frac{du}{dn} + y'_v \frac{dv}{dn},$$

$$c = z'_u \frac{du}{dn} + z'_v \frac{dv}{dn}.$$

En les multipliant respectivement par x'_u, y'_u, z'_u, puis en les ajoutant membre à membre, on obtient la première des égalités

$$E\frac{du}{dn} + F\frac{dv}{dn} = \Sigma a x'_u.$$

$$F\frac{du}{dn} + G\frac{dv}{dn} = \Sigma a x'_v,$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. Tenons compte alors des formules (6) et nous trouverons

$$k\mathrm{H}\frac{du}{dn} = \mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta, \qquad k\mathrm{H}\frac{dv}{dn} = -\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta.$$

L'égalité (7) nous donne ainsi le résultat cherché

$$(8)\qquad k\mathrm{H}\frac{d}{dn} = \alpha\left(\mathrm{G}\frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \beta\left(-\mathrm{F}\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

§ II. — Équation de continuité.

Soit

$$dm = \rho\, d\mathrm{S} = \rho\,\mathrm{H}\, du\, dv$$

la masse de l'élément $d\mathrm{S}$, ρ désignant la densité superficielle; cette masse demeurant la même quand le temps varie, on a

$$\rho\mathrm{H} = \rho_0\mathrm{H}_0,$$

l'indice zéro se rapportant à un instant t_0 choisi une fois pour toutes. On en déduit l'équation de continuité

$$(9)\qquad \frac{\partial(\rho\mathrm{H})}{\partial t} = 0,$$

analogue à celle de Lagrange en Hydrodynamique. Cette équation peut encore se mettre sous une autre forme : donnons à la membrane, à l'instant t, un déplacement virtuel défini par les accroissements $\delta\,(x, y, z)$, fonctions continues de (u, v), des coordonnées de ses différents points. Il en résultera, pour les quantités E, F, G, H, des variations qui, d'après les formules (2), seront

$$(10)\quad \begin{cases} \delta\mathrm{E} = 2\sum x'_u\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial u}, \quad \delta\mathrm{F} = \sum\left(x'_u\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial v} + x'_v\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial u}\right), \quad \delta\mathrm{G} = 2\sum x'_v\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial v}, \\ 2\mathrm{H}\,\delta\mathrm{H} = \mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G} \end{cases}$$

et l'on aura, en outre,

$$\delta\, d\mathrm{S} = \delta\mathrm{H}\, du\, dv.$$

La dilatation superficielle sera ainsi

$$\frac{\delta\, dS}{dS} = \frac{\delta H}{H}.$$

Supposons maintenant que le déplacement virtuel considéré coïncide avec le déplacement réel élémentaire à l'instant t; en appelant

$$(11)\qquad (U, V, W) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t}$$

les composantes de la vitesse du point M (x, y, z), on aura

$$\delta(x, y, z) = (U, V, W)\, dt$$

et

$$(12)\qquad \delta E = E'\, dt, \qquad \delta F = F'\, dt, \qquad \delta G = G'\, dt, \qquad \delta H = H'\, dt,$$

en posant

$$(13)\qquad \begin{cases} E' = \dfrac{\partial E}{\partial t} = 2\sum x'_u \dfrac{\partial U}{\partial u}, \\ F' = \dfrac{\partial F}{\partial t} = \sum\left(x'_u \dfrac{\partial U}{\partial v} + x'_v \dfrac{\partial U}{\partial u}\right), \\ G' = \dfrac{\partial G}{\partial t} = 2\sum x'_v \dfrac{\partial U}{\partial v}, \end{cases}$$

$$2HH' = GE' - 2FF' + EG'.$$

Soit alors $\theta\, dt$ la dilatation superficielle réelle, on aura

$$(14)\qquad \theta = \frac{H'}{H} = \frac{GE' - 2FF' + EG'}{2H^2},$$

d'où, d'après l'équation (9),

$$(15)\qquad \rho\theta + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ce qui est une autre forme de l'équation de continuité. En tenant compte des égalités (13) et (14), cette dernière équation peut s'écrire d'une manière plus explicite

$$(15')\qquad \frac{\rho}{H^2}\sum\left[(Gx'_u - Fx'_v)\frac{\partial U}{\partial u} + (-Fx'_u + Ex'_v)\frac{\partial U}{\partial v}\right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

§ III. — Travail élémentaire des actions de viscosité (1).

Imposons à la membrane un déplacement virtuel $\delta(x, y, z)$; l'élément linéaire éprouvera une variation δds telle que

$$2\,ds\,\delta\,ds = \delta \mathrm{E}\,du^2 + 2\delta\mathrm{F}\,du\,dv + \delta\mathrm{G}\,dv^2,$$

$\delta(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ étant donnés par les formules (10), et la dilatation correspondante ∂ de l'élément ds sera

$$(16)\qquad \partial = \frac{\delta\,ds}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta\mathrm{E}\,du^2 + 2\delta\mathrm{F}\,du\,dv + \delta\mathrm{G}\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}.$$

Soient, d'autre part, ds et $\mathrm{D}s$ deux éléments linéaires issus du même point $\mathrm{M}(x, y, z)$ de la membrane et correspondant aux accroissements respectifs (du, dv), $(\mathrm{D}u, \mathrm{D}v)$ des paramètres; ils font entre eux un angle φ tel que

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{E}\,du\,\mathrm{D}u + \mathrm{F}(du\,\mathrm{D}v + dv\,\mathrm{D}u) + \mathrm{G}\,dv\,\mathrm{D}v}{ds\,\mathrm{D}s}.$$

Après la déformation élémentaire, ds est devenu $ds_1 = ds + \delta ds$, $\mathrm{D}s$ est devenu $\mathrm{D}s_1 = \mathrm{D}s + \delta\mathrm{D}s$, et l'angle φ est devenu l'angle φ_1 tel que

$$\cos\varphi_1 = \frac{\mathrm{E}_1\,du\,\mathrm{D}u + \mathrm{F}_1(du\,\mathrm{D}v + dv\,\mathrm{D}u) + \mathrm{G}_1\,dv\,\mathrm{D}v}{ds_1\,\mathrm{D}s_1},$$

formule où l'on a posé

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E} + \delta\mathrm{E},\qquad \mathrm{F}_1 = \mathrm{F} + \delta\mathrm{F},\qquad \mathrm{G}_1 = \mathrm{G} + \delta\mathrm{G}.$$

Pour que la déformation conserve les angles et les longueurs, il faut et il suffit, d'après les égalités précédentes, que $\delta(\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G})$ soient nuls; dans ces conditions, la surface déformée est applicable sur la surface primitive et l'élément $d\mathrm{S}$ est égal à l'élément transformé. La déformation de $d\mathrm{S}$ se trouve donc entièrement définie par les trois quantités $\delta\mathrm{E}$, $\delta\mathrm{F}$, $\delta\mathrm{G}$.

Soit $\delta\mathrm{T}$ la variation infiniment petite de la température absolue T

(1) *De la viscosité dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIII, 4 décembre 1911, p. 1032).

de l'élément dS dans la modification virtuelle considérée; abstraction faite du déplacement d'ensemble dans l'espace éprouvé par cet élément, la modification virtuelle qu'il subit est entièrement déterminée par les quatre quantités

$$\delta E, \quad \delta F, \quad \delta G, \quad \delta T,$$

que nous supposerons constituer un système de variations normales [1].

D'après cela, le travail élémentaire de viscosité intrinsèque de l'élément dS sera de la forme

$$-(\mathcal{E}\,\delta E - 2\mathcal{F}\,\delta F + \mathcal{G}\,\delta G)\,dS,$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ désignant les *actions de viscosité*, fonctions des paramètres qui définissent l'état de l'élément et qui sont la densité ρ et la température absolue T, et aussi fonctions des dérivées E', F', G' données par les formules (13).

Les liaisons entre les divers éléments dS étant des *soudures* au sens de M. Duhem, le travail virtuel de viscosité $\delta\mathcal{T}_v$ relatif à la membrane entière sera la somme des travaux de viscosité intrinsèque étendue à tous les éléments dS, soit

$$(17) \qquad \delta\mathcal{T}_v = -\int(\mathcal{E}\,\delta E - 2\mathcal{F}\,\delta F + \mathcal{G}\,\delta G)\,dS.$$

Il résulte de cette expression que le travail de viscosité est nul dans toute déformation transformant la membrane en une autre applicable sur la première, et ceci est bien conforme à l'idée que nous nous faisons de la membrane parfaitement flexible.

Dans une modification réelle élémentaire, le travail de viscosité devient

$$(18) \qquad d\mathcal{T}_v = -dt\int(\mathcal{E}E' - 2\mathcal{F}F' + \mathcal{G}G')\,dS,$$

et l'on sait que cette expression doit être essentiellement négative. D'autre part, les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ doivent s'annuler en même temps que les dérivées E', F', G'; l'hypothèse la plus simple

(1) *Voir* P. Duhem, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1re Partie, Ch. I.

qu'on puisse faire est donc de regarder ces actions comme des fonctions linéaires et homogènes de E', F', G', dont les coefficients soient de simples fonctions de ρ, T. Lord Rayleigh suppose de plus l'existence d'une *fonction dissipative* $2\mathfrak{D}$, c'est-à-dire d'une forme quadratique de E', F', G', dont les coefficients soient simplement fonctions de ρ, T, et telle qu'on ait

$$(19) \qquad \mathcal{E} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial E'}, \qquad -2\mathcal{F} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial F'}, \qquad \mathcal{G} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial G'}.$$

On a dès lors

$$2\mathfrak{D} = \mathcal{E} E' - 2\mathcal{F} F' + \mathcal{G} G',$$

de sorte que l'égalité (18) devient

$$(20) \qquad d\mathfrak{T}_v = -dt \int 2\mathfrak{D}\, dS.$$

Le travail élémentaire de viscosité relatif à une modification réelle devant être essentiellement négatif, il en résulte que la fonction dissipative $2\mathfrak{D}$ doit être une forme quadratique définie positive. Nous verrons dans un instant les conditions qui doivent être vérifiées pour qu'il en soit ainsi.

Cela posé, pour obtenir l'expression de $2\mathfrak{D}$, nous devons écrire que cette fonction, en un point de la membrane et à l'instant t, a une valeur indépendante du réseau de coordonnées curvilignes tracé sur la surface et exprimer que la membrane est isotrope. Auparavant, voyons comment la déformation réelle (12) est caractérisée géométriquement.

Au point $M(u, v)$ de la surface à l'instant t et dans la direction (du, dv), portons une longueur $MP = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1+\delta}$ et cherchons, dans le plan tangent en M, le lieu du point P, dont nous appellerons ξ, η les coordonnées par rapport à deux axes $(M\xi, M\eta)$ respectivement tangents aux deux lignes du réseau (Mu, Mv) qui se coupent au point M. On a

$$ds_1^2 = E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

avec

$$(21) \qquad E_1 = E + E'\, dt, \qquad F_1 = F + F'\, dt, \qquad G_1 = G + G'\, dt.$$

Comme, d'autre part,

$$\frac{\xi}{\sqrt{E}\,du} = \frac{\eta}{\sqrt{G}\,dv} = \frac{MP}{ds} = \frac{1}{ds_1},$$

il résulte de ces égalités qu'on a

$$\frac{E_1}{E}\xi^2 + 2\frac{F_1}{\sqrt{EG}}\xi\eta + \frac{G_1}{G}\eta^2 = 1.$$

Nous voyons que le lieu du point P est une ellipse ayant le point M comme centre; on l'appelle *ellipse des dilatations* au point M. Cherchons les axes de cette ellipse en écrivant que leurs directions (du, dv), (Du, Dv) sont deux diamètres conjugués rectangulaires.

Tout d'abord, pour que deux directions soient conjuguées, il faut qu'elles forment un faisceau harmonique avec les directions asymptotiques de l'ellipse; de là la première relation

$$E_1\,du\,Du + F_1(du\,Dv + dv\,Du) + G_1\,dv\,Dv = 0,$$

qu'on doit joindre à la condition de perpendicularité

$$E\,du\,Du + F(du\,Dv + dv\,Du) + G\,dv\,Dv = 0.$$

Les expressions données précédemment de $\cos\varphi$ et de $\cos\varphi_1$ montrent ainsi qu'il n'existe que deux directions en chaque point, qui, perpendiculaires avant la déformation, restent perpendiculaires après la déformation. Ce sont celles qui sont dirigées suivant les axes de l'ellipse des dilatations; les directions de ces axes s'appellent les *directions principales* au point M. En tenant compte des égalités (21), on déduit des deux dernières

$$\frac{E'\,du + F'\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{F'\,du + G'\,dv}{F\,du + G\,dv} = \frac{E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = 2D,$$

$D\,dt$ représentant, d'après la formule (16), la dilatation principale relative à la direction (du, dv). Les dilatations principales sont ainsi données par l'équation

$$\begin{vmatrix} E' - 2ED & F' - 2FD \\ F' - 2FD & G' - 2GD \end{vmatrix} = 0.$$

qui s'écrit d'une manière plus explicite

$$(22)\qquad 4H^2D^2 - 2(GE' - 2FF' + EG')D + E'G' - F'^2 = 0.$$

Dès lors, si D_1 et D_2 désignent les racines de cette équation, les demi-axes de l'ellipse des dilatations auront pour longueurs respectives

$$1 - D_1\,dt,\quad 1 - D_2\,dt.$$

Ce premier résultat obtenu, revenons aux trois quantités $\delta(E, F, G)$ qui définissent la déformation éprouvée par un élément dS de la membrane; celles-ci peuvent s'exprimer linéairement en fonction de trois autres quantités qui sont :

1° La dilatation linéaire ∂_u suivant la ligne Mu du réseau le long de laquelle v est constant;

2° La dilatation linéaire ∂_v suivant la ligne Mv du réseau le long de laquelle u est constant;

3° L'accroissement $\delta\psi$ de l'angle formé au point M par les deux lignes (Mu, Mv) du réseau et défini par l'égalité

$$\cos\psi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Nous aurons l'expression de ∂_u en faisant dans l'égalité (16) $dv = 0$ et $\partial = \partial_u$; nous obtenons ainsi la première des formules

$$\delta E = 2E\,\partial_u,\qquad \delta G = 2G\,\partial_v,$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. D'autre part, la différentiation de l'expression de $\cos\psi$ nous donne par un calcul facile et en tenant compte des deux précédentes formules

$$\delta F = F(\partial_u + \partial_v) - H\,\delta\psi.$$

Supposons maintenant que la déformation virtuelle considérée coïncide avec la modification réelle

$$(12)\qquad \delta E = E'\,dt,\qquad \delta F = F'\,dt,\qquad \delta G = G'\,dt,\qquad \delta H = H'\,dt;$$

dans cette modification, nous poserons

$$\partial_u = D_u\,dt,\qquad \partial_v = D_v\,dt,\qquad \delta\psi = \psi'\,dt,$$

de sorte qu'il viendra

$$E' = 2ED_u, \qquad F' = F(D_u + D_v) - H\psi', \qquad G' = 2GD_v.$$

D'après ces formules, nous pouvons, dans l'expression de la fonction dissipative 2ω, substituer aux variables (E', F', G') les variables (D_u, D_v, ψ'); 2ω devient ainsi une forme quadratique des variables (D_u, D_v, ψ') qui doit avoir une valeur indépendante du réseau tracé sur la membrane à l'instant t. Substituons alors aux coordonnées (u, v) d'autres coordonnées curvilignes (u', v') telles que les deux lignes du nouveau réseau (Mu', Mv') qui se coupent au point M soient dirigées suivant les axes principaux de dilatation en ce point. On aura

$$D_{u'} = D_1, \qquad D_{v'} = D_2,$$

et comme le réseau est resté orthogonal pendant la modification réelle considérée, à la place des variables (D_u, D_v, ψ'), on a les variables $(D_1, D_2, 0)$. La fonction dissipative 2ω devient donc une forme quadratique par rapport à D_1, D_2.

Tenons compte, alors, de ce que la membrane est isotrope tout autour du point M : dans ces conditions, la fonction dissipative 2ω doit garder la même valeur, soit que la dilatation principale ait la valeur $D_1\,dt$ suivant Mu', la valeur $D_2\,dt$ suivant Mv', soit qu'on permute entre elles ces deux valeurs. Il en résulte que 2ω est non seulement une forme quadratique de D_1, D_2, mais encore une fonction symétrique de ces mêmes variables; elle s'exprime donc forcément par l'égalité

$$2\omega = A(D_1 + D_2)^2 + BD_1D_2,$$

A et B étant deux quantités qui dépendent seulement de l'état de la membrane au point M à l'instant t, c'est-à-dire de la densité et de la température.

Mais, d'après l'équation (22) et l'égalité (14),

$$D_1 + D_2 = \theta, \qquad D_1 D_2 = \frac{E'G' - F'^2}{4H^2};$$

si donc on pose

$$\Lambda = \frac{A}{H^2}, \qquad M = \frac{B}{4H^2},$$

il viendra

$$2\mathcal{D} = \Lambda H^2\theta^2 + M(E'G' - F'^2) \tag{23}$$

et la fonction dissipative se retrouvera exprimée au moyen des variables E', F', G'. Comme H ne dépend que de la densité, en vertu de l'équation de continuité, les quantités Λ et M sont, ainsi que A et B, de simples fonctions de ρ, T, qu'on appelle les *coefficients de viscosité* de la membrane.

Les égalités (14), (19) et (23) nous donnent les expressions suivantes pour les actions de viscosité

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= \Lambda G\theta + MG', \\ 2\mathcal{F} &= \Lambda F\theta + MF', \\ 2\mathcal{G} &= \Lambda E\theta + ME'. \end{aligned}\right.$$

Il reste à exprimer que la fonction dissipative $2\mathcal{D}$ est une forme quadratique définie positive. Le discriminant de la fonction $2\mathcal{D}H^2$ a pour expression

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\Lambda}{2}G^2 & -\Lambda FG & \frac{\Lambda}{2}EG + MH^2 \\ -\Lambda FG & 2(\Lambda F^2 - MH^2) & -\Lambda EF \\ \frac{\Lambda}{2}EG + MH^2 & -\Lambda EF & \frac{\Lambda}{2}E^2 \end{vmatrix};$$

les conditions pour que la forme quadratique considérée soit définie positive sont alors

$$\frac{\Lambda}{2}G^2 > 0, \qquad 2(\Lambda F^2 - MH^2) > 0, \qquad \frac{\Lambda}{2}E^2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\Lambda}{2}G^2 & -\Lambda FG \\ -\Lambda FG & 2(\Lambda F^2 - MH^2) \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta > 0.$$

Tous calculs faits, on trouve pour le discriminant Δ

$$\Delta = 2H^6M^2(\Lambda + M),$$

de sorte qu'on voit facilement que les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$M < 0, \qquad \Lambda + M > 0. \tag{25}$$

Si les inégalités précédentes sont vérifiées, aucun des deux coefficients de viscosité Λ et M ne peut être nul; dans ces conditions, toute modification élémentaire pour laquelle on n'a pas à la fois

$$E' = 0, \qquad F' = 0, \qquad G' = 0,$$

entraîne un travail négatif des actions de viscosité. Qu'arriverait-il si l'une des deux inégalités (25) se changeait en une égalité?

1° Supposons qu'on ait $M = 0$; la deuxième inégalité se réduira à

$$\Lambda > 0$$

et l'égalité (23) deviendra

$$2\mathfrak{D} = \Lambda H^2 \theta^2; \tag{26}$$

dans ces conditions, le travail de viscosité sera nul dans toute modification ne faisant pas varier la densité.

2° Supposons qu'on ait $\Lambda + M = 0$; la première des inégalités (25) s'écrira indifféremment

$$\Lambda > 0, \qquad \text{ou} \qquad M < 0$$

et l'égalité (23) deviendra

$$2\mathfrak{D} = \Lambda(H^2\theta^2 - E'G' + F'^2),$$

ou, en tenant compte de ce que, d'après l'équation (22),

$$D_1 + D_2 = \theta, \qquad D_1 D_2 = \frac{E'G' - F'^2}{4H^2},$$

$$2\mathfrak{D} = \Lambda H^2(D_1 - D_2)^2.$$

Dans ces conditions, le travail de viscosité sera nul si l'ellipse des dilatations se réduit à un cercle, c'est-à-dire si la déformation laisse l'élément dS semblable à lui-même.

Si les deux inégalités (25) se changeaient toutes deux en égalités, on aurait

$$\Lambda = 0, \qquad M = 0,$$

et la membrane serait dénuée de viscosité.

La première hypothèse ($M = 0$) est celle à laquelle nous aurions été conduits si nous avions tenu, dans l'étude de la viscosité, à rester rigoureusement conséquents avec la définition de la membrane parfaitement flexible. Revenons en effet à cette définition.

On appelle membrane parfaitement flexible une surface matérielle dont l'épaisseur est infiniment petite et dont l'état physique de chaque élément est entièrement défini par sa densité ρ et sa température absolue T. Pour déterminer entièrement la modification virtuelle éprouvée par un tel élément, il suffit de connaître son changement de position dans l'espace ainsi que les variations correspondantes de sa densité et de sa température; il est tout à fait inutile de connaître le changement de forme que cet élément a pu subir pendant la modification considérée.

Mais, si l'on admet qu'il est nécessaire de tenir compte, pour définir la modification, non seulement des variations de la densité et de la température, mais encore des déformations éprouvées par l'élément; si l'on admet que deux états où l'élément a même densité, même température, mais des formes différentes, constituent non deux états identiques, mais deux états distincts, on ne doit plus dire que la surface considérée est une membrane parfaitement flexible; on doit dire qu'on étudie les propriétés d'une surface élastique.

Cela posé, voyons ce que devient l'expression du travail élémentaire de viscosité si l'on tient à rester rigoureusement conséquent avec la définition du mot membrane.

Une modification virtuelle de l'élément $d\mathrm{S}$ est entièrement définie, d'après ce qui précède, par le système de variations normales ($\delta\rho$, $\delta\mathrm{T}$), de sorte qu'au lieu de l'égalité (17), on aura simplement

$$\delta\mathfrak{T}_v = -\int \mathcal{R}\,\delta\rho\,d\mathrm{S},$$

$\mathcal{R}$ étant la seule action de viscosité relative à la variable ρ, fonction de ρ, T, $\frac{\partial\rho}{\partial t}$. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire est d'admettre que $\mathcal{R}$ est proportionnelle à $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, le coefficient de proportionnalité ne dépendant que de ρ et de T. Comme H ne dépend que de ρ, on pourra donc poser

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{H}^2}{\rho^2}\Lambda\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

Λ étant une fonction de ρ et de T appelée *coefficient de viscosité* de la membrane. Il y aura forcément ici une fonction dissipative 2Φ telle que

$$\mathfrak{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)},$$

car, si l'on tient compte de l'équation de continuité (15), il viendra

$$2\Phi = \Lambda H^2 \theta^2. \tag{26}$$

Nous retombons donc bien, en partant de la définition rigoureuse de la membrane parfaitement flexible, sur les conséquences de l'hypothèse ($M = 0$). A l'imitation de la terminologie employée par M. Duhem en Hydrodynamique ([1]), une membrane, pour laquelle $M = 0$, peut être appelée une *membrane proprement dite*.

L'égalité (26) entraîne immédiatement la conséquence suivante : le travail virtuel des actions de viscosité est identiquement nul pour une membrane de densité invariable; autrement dit l'hypothèse d'une membrane affectée de viscosité dont la dilatation superficielle ne peut différer de zéro, quoique la dilatation linéaire puisse ne pas être nulle, est en contradiction avec la définition de la membrane proprement dite. Une semblable membrane serait l'analogue d'un fluide incompressible visqueux.

Ainsi, en suivant les conséquences logiques de la définition stricte du mot membrane, nous serions conduits à cette conclusion qu'il n'existe pas de membrane visqueuse de densité invariable, de même qu'en Hydrodynamique il n'existerait pas de liquide visqueux. De telles conclusions sont évidemment contraires à l'expérience la plus vulgaire.

C'est pour s'affranchir de ces contradictions que M. Duhem a élargi, en Hydrodynamique, la notion de fluide, quand il a traité des actions de viscosité. Nous n'avons fait que suivre son exemple en traitant de la viscosité dans les membranes.

Remarquons enfin que la seconde hypothèse ($\Lambda + M = 0$) est ana-

([1]) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e série, sixième Partie, Chap. I, § 2.

logue à celle que Barré de Saint-Venant et Stokes avaient admise en Hydrodynamique. Suivant l'opinion de M. Duhem, nous n'établirons aucune relation entre les coefficients de viscosité Λ et M et nous nous bornerons à admettre les inégalités (25) auxquelles notre analyse nous a conduits.

§ IV. — Équations du mouvement (¹).

D'après les principes de l'Énergétique, nous obtiendrons les équations du mouvement en écrivant qu'on a, dans toute modification virtuelle isothermique

$$(27) \qquad \delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathfrak{T}_v + \delta\dot{J} - \delta_T\Phi = 0,$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, $\delta\mathfrak{T}_v$ celu des actions de viscosité, $\delta\dot{J}$ celui des forces d'inertie et $\delta_T\Phi$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soient X, Y, Z les composantes par unité de masse de la force appliquée à chaque élément de surface de la membrane, T_x, T_y, T_z les composantes par unité de longueur de la force appliquée à chaque élément de son contour, on aura

$$\delta\mathfrak{T}_e = \int \rho(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dS + \int_\Gamma (T_x\,\delta x + T_y\,\delta y + T_z\,\delta z)\,ds,$$

$$\delta J = -\int \rho\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right) dS,$$

et si nous posons

$$\mathfrak{X} = \rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right), \qquad \mathfrak{Y} = \rho H\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right), \qquad \mathfrak{Z} = \rho H\left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right),$$

$$(\mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z) = k(T_x, T_y, T_z),$$

il viendra

$$\delta\mathfrak{T}_e + \delta J = \int\int(\mathfrak{X}\,\delta x + \mathfrak{Y}\,\delta y + \mathfrak{Z}\,\delta z)\,du\,dv + \int(\mathfrak{T}_x\,\delta x + \mathfrak{T}_y\,\delta y + \mathfrak{T}_z\,\delta z)\,d\sigma,$$

la première intégrale s'étendant à l'aire comprise à l'intérieur du contour C, image de la membrane dans le plan des (u, v), et la

(¹) *Les équations générales des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIV, 15 janvier 1912, p. 109).

deuxième à ce contour lui-même. Nous écrirons pour abréger

(28) $$\delta\mathfrak{T}_e + \delta\mathrm{J} = \int\!\!\int \Sigma\,\mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv + \int \Sigma\,\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma,$$

et nous conserverons cette notation dans tout ce qui va suivre.

Soit, d'autre part, $\varphi(\rho, \mathrm{T})$ le potentiel thermodynamique interne par unité de masse; si nous supposons qu'entre les différents éléments de la membrane ne s'exerce aucune action, le potentiel thermodynamique interne Φ de la membrane entière sera de la forme

$$\Phi = \int \varphi(\rho, \mathrm{T})\,dm.$$

Dans une modification virtuelle isothermique, on aura

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\,\delta\rho\,dm = \int \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\,\rho\,\delta\rho\,d\mathrm{S}.$$

Mais, comme la masse élémentaire $dm = \rho\,d\mathrm{S}$ ne varie pas dans la modification considérée, on a

$$\delta\rho\,d\mathrm{S} + \rho\,\delta\,d\mathrm{S} = 0,$$

de sorte que, si l'on pose

(29) $$\Theta + \rho^2\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0,$$

il viendra

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int \Theta\,\delta\,d\mathrm{S}.$$

Or, d'après la quatrième des formules (10), $\delta d\mathrm{S}$ a pour expression

$$\delta\,d\mathrm{S} = \frac{\mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G}}{2\mathrm{H}}\,du\,dv;$$

nous avons donc en définitive

$$\delta_{\mathrm{T}}\Phi = \int\!\!\int \Theta\,\frac{\mathrm{G}\,\delta\mathrm{E} - 2\mathrm{F}\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{E}\,\delta\mathrm{G}}{2\mathrm{H}}\,du\,dv.$$

Cela posé, d'après l'égalité (17) et la précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\Phi = -\frac{1}{2}\int\!\!\int\Big[\Big(\Theta\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{E}\Big)\delta\mathrm{E} - 2\Big(\Theta\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{F}\Big)\delta\mathrm{F}&\\ + \Big(\Theta\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}} + 2\mathrm{H}\mathcal{G}\Big)\delta\mathrm{G}\Big]\,du\,dv,&\end{aligned}$$

ou, en posant

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \Theta\frac{G}{H} + 2H\mathcal{E}, \\ \mathfrak{N} &= \Theta\frac{F}{H} + 2H\mathcal{F}, \\ \mathfrak{P} &= \Theta\frac{E}{H} + 2H\mathcal{G} \end{aligned}\right.$$

et en tenant compte des formules (10),

$$(31)\quad \begin{aligned} \delta\mathfrak{C}_v - \delta_T\Phi &= -\iint\Big[\mathfrak{M}\sum x'_u\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} - \mathfrak{N}\sum\Big(x'_u\frac{\partial\,\delta x}{\partial v} + x'_v\frac{\partial\,\delta x}{\partial u}\Big) \\ &\qquad + \mathfrak{P}\sum x'_v\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\Big]\,du\,dv \\ &= -\iint\sum\Big[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} \\ &\qquad + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\Big]\,du\,dv. \end{aligned}$$

Les expressions (28) et (31) transportées dans l'égalité (27) nous donnent alors

$$(32)\quad \begin{aligned} &\iint\Sigma\mathcal{X}\,\delta x\,du\,dv + \int\Sigma\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma \\ &\quad - \iint\sum\Big[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\Big]\,du\,dv = 0. \end{aligned}$$

En appliquant à la dernière intégrale l'intégration par parties et en se rappelant que si P et Q désignent deux fonctions de (u, v) admettant à l'intérieur du contour C des dérivées partielles du premier ordre finies, on a, d'après la formule de Green,

$$\iint\Big(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v}\Big)\,du\,dv = \int(P\alpha + Q\beta)\,d\sigma,$$

l'équation (32) s'écrira en définitive

$$\begin{aligned} &\iint\sum\Big[\mathcal{X} + \frac{\partial(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)}{\partial v}\Big]\,\delta x\,du\,dv \\ &\quad + \int\Sigma[\mathfrak{T}_x - \alpha(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) - \beta(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit le déplacement virtuel $\delta(x, y, z)$ imposé à la membrane ; il en résulte qu'on doit avoir :

1° En tous les points de l'aire intérieure au contour C

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{X} + \frac{\partial(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)}{\partial v} = 0, \\ &\mathfrak{Y} + \frac{\partial(\mathfrak{M} y'_u - \mathfrak{N} y'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N} y'_u + \mathfrak{P} y'_v)}{\partial v} = 0, \\ &\mathfrak{Z} + \frac{\partial(\mathfrak{M} z'_u - \mathfrak{N} z'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N} z'_u + \mathfrak{P} z'_v)}{\partial v} = 0; \end{aligned} \right.$$

2° En tous les points du contour C

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{T}_x - \alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) - \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v) = 0, \\ &\mathfrak{T}_y - \alpha(\mathfrak{M} y'_u - \mathfrak{N} y'_v) - \beta(-\mathfrak{N} y'_u + \mathfrak{P} y'_v) = 0, \\ &\mathfrak{T}_z - \alpha(\mathfrak{M} z'_u - \mathfrak{N} z'_v) - \beta(-\mathfrak{N} z'_u + \mathfrak{P} z'_v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les équations générales du mouvement des membranes ; mais, entre les six fonctions inconnues x, y, z, ρ, T, Θ, nous n'avons encore que cinq équations indéfinies, les équations du mouvement (33), l'équation (29) et l'équation de continuité (15'). Pour que le problème soit entièrement déterminé, nous devons donc former une sixième équation appelée la *relation supplémentaire* que nous allons déduire des principes de la Thermodynamique et de la conductibilité calorifique.

§ V. — La relation supplémentaire.

Soient δQ la quantité de chaleur dégagée par une portion quelconque de la membrane dans une modification virtuelle, $\mathfrak{E}$ l'équivalent mécanique de la chaleur ; la Thermodynamique nous enseigne qu'on a

$$\mathfrak{E}\,\delta Q = -\int \mathfrak{E}\, T \delta\left(-\frac{1}{\mathfrak{E}}\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right) dm - \delta \mathfrak{T}_v.$$

Dans cette égalité, $\delta\left(-\frac{1}{\mathfrak{E}}\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)$ représente la variation de l'entropie par unité de masse et $\delta \mathfrak{T}_v$ le travail des actions de viscosité relatif à la portion de membrane considérée à laquelle s'étend l'intégration.

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle, il viendra, d'après l'égalité (20),

$$\mathfrak{E}\, dQ = dt \int \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) \rho\, d\mathrm{S} + dt \int 2\mathfrak{Q}\, d\mathrm{S}.$$

Tenons compte de ce que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\,\theta, \qquad \rho^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}$$

et posons

(35) $$c = -\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2};$$

on aura

(36) $$dQ = dt \int\int \left(\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\, \theta - c\rho \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} + \frac{2\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}\right] \mathrm{H}\, du\, dv,$$

l'intégration s'étendant à la région du plan des (u, v) qui correspond à la portion de membrane considérée.

Mais on a aussi, d'après la théorie de la conductibilité calorifique et en supposant la membrane athermane,

(37) $$dQ = -dt \int_\gamma \mathrm{K} \frac{d\mathrm{T}}{dn}\, ds + dt \int \mathfrak{K}(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0)\, d\mathrm{S},$$

K désignant le produit par l'épaisseur de la membrane du coefficient de conductibilité interne de la substance qui constitue la membrane, $\frac{d\mathrm{T}}{dn}$ la dérivée de la température absolue suivant la normale extérieure (a, b, c) au contour γ qui limite la portion de surface considérée, $\mathfrak{K}$ le double du coefficient de conductibilité extérieure que nous supposons le même pour les deux faces et T_0 la moyenne des températures absolues extérieures sur les deux faces de la membrane. La formule (8) nous donne alors, en nous souvenant que $ds = k\, d\sigma$,

(37') $$\frac{d\mathrm{T}}{dn}\, ds = \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\alpha\left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) + \beta\left(-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right)\right] d\sigma.$$

Si les dérivées secondes de la fonction T par rapport à u et v existent et sont finies, la formule de Green nous donnera

$$\int_\gamma \mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{dn}ds=\int\int\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}+\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)\right]du\,dv;$$

de là cette seconde expression de $d\mathrm{Q}$

$$(38)\quad \begin{aligned} d\mathrm{Q}=dt\int\int\Big[&-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)\\ &-\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}+\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)+\mathrm{H}\mathcal{K}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)\Big]du\,dv.\end{aligned}$$

Retranchons membre à membre les égalités (36) et (38), nous obtiendrons une certaine intégrale qui doit être nulle quelle que soit l'aire d'intégration ; il en résulte que son coefficient différentiel doit être égal à zéro. De là résulte l'équation cherchée

$$(39)\quad \begin{aligned} c\rho\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t}=\ &\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)\\ &+\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\left(-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}+\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)-\mathcal{K}(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)+\frac{1}{\mathfrak{E}}\left(\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\theta+2\Phi\right).\end{aligned}$$

Il y a enfin une dernière condition au contour. Tout le long de Γ on doit avoir

$$\mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{dn}+\mathcal{K}'(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)=0,$$

$\mathcal{K}'$ désignant le produit par l'épaisseur de la membrane du coefficient de conductibilité extérieure relatif à la surface latérale de la membrane. On a donc le long du contour C et outre les égalités (34)

$$\alpha\left(\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)+\beta\left(-\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial u}+\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial v}\right)+\frac{\mathcal{K}'}{\mathrm{K}}\mathrm{H}k(\mathrm{T}-\mathrm{T}_0)=0.$$

§ VI. — Équations de l'équilibre.

Si la membrane est en équilibre, les actions d'inertie et de viscosité sont nulles et les formules (30) se réduisent à

$$(40)\qquad (\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{L})=\Theta\frac{(\mathrm{G},\mathrm{F},\mathrm{E})}{\mathrm{H}}.$$

Les équations indéfinies deviennent ainsi

$$(41)\quad \begin{cases} \rho HX + \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\Theta}{H}(Gx'_u - Fx'_v) + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\Theta}{H}(-Fx'_u + Ex'_v) = 0, \\ \rho HY + \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\Theta}{H}(Gy'_u - Fy'_v) + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\Theta}{H}(-Fy'_u + Ey'_v) = 0, \\ \rho HZ + \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\Theta}{H}(Gz'_u - Fz'_v) + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\Theta}{H}(-Fz'_u + Ez'_v) = 0. \end{cases}$$

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour Γ menée en un point M de ce contour dans le plan tangent en M à la membrane ; ces cosinus sont donnés par les formules (6). Si nous tenons compte de ces formules et des formules (40), les équations au contour (34) se réduisent aux suivantes

$$(42)\qquad (T_x, T_y, T_z) - \Theta(a, b, c) = 0;$$

elles expriment que la force (T_x, T_y, T_z) appliquée par unité de longueur à chaque élément du contour Γ d'une membrane en équilibre est dirigée suivant la normale extérieure (a, b, c) à ce contour et a pour valeur Θ. Cette quantité Θ considérée en un point quelconque de la membrane s'appelle la *tension superficielle* en ce point[1] ; d'après l'égalité (29), il existe donc en chaque point de la membrane une relation finie entre la tension superficielle, la densité et la température. Cette égalité s'appelle l'*équation caractéristique* de la membrane.

La notion de tension dans la théorie des membranes correspond à la notion de pression en Hydrodynamique ; les égalités (42) conduisent à des théorèmes analogues à ceux qu'on démontre relativement à la pression dans un milieu fluide[2].

M. Duhem, dans son cours autographié de la Faculté de Lille, a donné les équations de l'équilibre d'une membrane sous une autre forme que nous allons déduire des équations (41) et (42). Multiplions les équations (41) respectivement par x'_u, y'_u, z'_u et ajoutons-les membre à membre : les termes contenant les dérivées en u et v se réduisent

---

(1) Pour l'origine de cette dénomination, *voir* P. DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 88.

(2) Pour l'énoncé et la démonstration de ces théorèmes, *voir* P. DUHEM, *loc. cit.*, t. II, p. 87.

à $\dfrac{\partial\Theta}{\partial u}$ et l'on trouve la première des équations

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho(\mathrm{X}x'_u+\mathrm{Y}y'_u+\mathrm{Z}z'_u)+\frac{\partial\Theta}{\partial u}=0,\\ &\rho(\mathrm{X}x'_v+\mathrm{Y}y'_v+\mathrm{Z}z'_v)+\frac{\partial\Theta}{\partial v}=0;\end{aligned}\right.$$

la deuxième s'obtient d'une manière analogue.

Soient, d'autre part, a'', b'', c'' les cosinus directeurs de la demi-normale à la membrane menée d'un côté déterminé de sa surface; si nous multiplions les équations (41) respectivement par a'', b'', c'' et que nous les ajoutions membre à membre, en tenant compte des relations de perpendicularité

$$\Sigma a''x'_u=0,\qquad \Sigma a''x'_v=0,$$

il viendra

$$\rho\Sigma a''\mathrm{X}+\Theta\sum\frac{\mathrm{G}a''x''_{u^2}-2\mathrm{F}a''x''_{uv}+\mathrm{E}a''x''_{v^2}}{\mathrm{H}^2}=0.$$

Mais on reconnaît, dans le coefficient de Θ, la courbure moyenne $\dfrac{1}{\mathrm{R}_1}+\dfrac{1}{\mathrm{R}_2}$ de la surface en un point, les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 étant comptés positivement suivant la direction (a'', b'', c''). L'équation précédente peut donc s'écrire

$$(44)\qquad \rho(a''\mathrm{X}+b''\mathrm{Y}+c''\mathrm{Z})+\Theta\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1}+\frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)=0.$$

Les équations (43) et (44) sont les équations indéfinies de l'équilibre données par M. Duhem [1], qui les a établies dans l'hypothèse d'un réseau orthogonal ($\mathrm{F}=0$); nous voyons que ces équations gardent la même forme dans le cas d'un réseau quelconque.

Passons aux équations au contour et appelons (N, u) l'angle que fait, en un point du contour Γ, la demi-normale (a, b, c) à ce contour avec la tangente en ce point à la ligne du réseau ($v=$ const.) dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{(x'_u, y'_u, z'_u)}{\sqrt{\mathrm{E}}};$$

---

(1) Dans l'Ouvrage cité de M. Duhem, le terme en Θ de l'équation (44) est précédé du signe $-$: cela tient à ce que l'auteur compte les rayons de courbure positivement dans la direction opposée à (a'', b'', c'').

si nous multiplions les égalités (42) respectivement par ces trois cosinus directeurs et que nous ajoutions membre à membre, il viendra la première des égalités

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{E}}(T_x x'_u + T_y y'_u + T_z z'_u) - \Theta \cos(N, u) = 0, \\ &\frac{1}{\sqrt{G}}(T_x x'_v + T_y y'_v + T_z z'_v) - \Theta \cos(N, v) = 0, \end{aligned} \right.$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue et (N, v) désignant l'angle que fait la demi-normale (a, b, c) au contour Γ avec la tangente au même point à la ligne du réseau $(u = \text{const.})$ dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{(x'_v, y'_v, z'_v)}{\sqrt{G}}.$$

Multipliant, enfin, les égalités (42) respectivement par a'', b'', c'' et ajoutant membre à membre, nous obtiendrons

$$(45') \qquad a'' T_x + b'' T_y + c'' T_z = 0.$$

Les équations (44) et (45') sont les conditions au contour données par M. Duhem.

Quant à la relation supplémentaire (39), elle se réduit, dans le cas de l'équilibre, à la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{K}{H}\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\frac{K}{H}\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right) - H\mathcal{K}(T - T_0) = 0,$$

et la condition au contour correspondante ne change pas.

§ VII. — Équations des petits mouvements.

Reprenons les équations générales du mouvement de la membrane

$$(46) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial(\mathcal{M} x'_u - \mathcal{N} x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathcal{N} x'_u + \mathcal{P} x'_v)}{\partial v} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{aligned} \right.$$

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} &k T_x - \alpha(\mathcal{M} x'_u - \mathcal{N} x'_v) - \beta(-\mathcal{N} x'_u + \mathcal{P} x'_v) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \right.$$

et supposons-les vérifiées pour des valeurs de x, y, z, T indépendantes du temps, c'est-à-dire satisfaisant aux équations de l'équilibre posées dans le précédent paragraphe. Si la position correspondante d'équilibre est stable, ces équations pourront encore être vérifiées par des valeurs

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta, \quad \mathrm{T}+\vartheta,$$

infiniment voisines des précédentes, mais où les accroissements ξ, η, ζ, ϑ, supposés infiniment petits ainsi que leurs dérivées, vont dépendre de t. Les équations que vont vérifier ces nouvelles fonctions sont les équations des petits mouvements.

Pour les obtenir, il suffit de remarquer que les équations (46) et (47) devant être vérifiées par les systèmes de valeurs

$$\begin{gathered} x, \quad y, \quad z, \quad \mathrm{T}, \\ x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta, \quad \mathrm{T}+\vartheta, \end{gathered}$$

les différentielles totales des premiers membres de ces équations par rapport à x, y, z, T, où ξ, η, ζ, ϑ désignent les accroissements des variables, doivent être nulles. En supposant, pour simplifier, qu'on ait

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0, \qquad d(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) = 0,$$

et en remarquant que $d(\rho\mathrm{H}) = 0$, il vient

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\rho\mathrm{H}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathcal{M}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \mathcal{N}\frac{\partial\xi}{\partial v} + x'_u\, d\mathcal{M} - x'_v\, d\mathcal{N}\right) \\ & \qquad + \frac{\partial}{\partial v}\left(-\mathcal{N}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \mathcal{P}\frac{\partial\xi}{\partial v} - x'_u\, d\mathcal{N} + x'_v\, d\mathcal{P}\right) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned} \right.$$

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{T}_x\, dk - \alpha\left(\mathcal{M}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \mathcal{N}\frac{\partial\xi}{\partial v} + x'_u\, d\mathcal{M} - x'_v\, d\mathcal{N}\right) \\ & \qquad - \beta\left(-\mathcal{N}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \mathcal{P}\frac{\partial\xi}{\partial v} - x'_u\, d\mathcal{N} + x'_v\, d\mathcal{P}\right) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Dans ces équations, les $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P})$ figurant hors des signes d ont leurs valeurs correspondant à l'équilibre et comme, à l'équilibre, on peut supposer le réseau orthogonal $(\mathrm{F} = 0)$, ces valeurs sont, d'après les formules (40),

$$\mathfrak{M} = \Theta \frac{G}{H}, \qquad \mathfrak{N} = 0, \qquad \mathfrak{P} = \Theta \frac{E}{H}, \qquad \text{avec} \qquad H = \sqrt{EG}.$$

D'autre part, puisque les quantités $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont nulles à l'équilibre, on a

$$(50) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{M} = d\left(\Theta \dfrac{G}{H}\right) + 2H\mathcal{E}, \\ d\mathfrak{N} = d\left(\Theta \dfrac{F}{H}\right) + 2H\mathcal{F}, \\ d\mathfrak{P} = d\left(\Theta \dfrac{E}{H}\right) + 2H\mathcal{G}, \end{cases}$$

les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ étant données par les formules (24) et les dérivées E', F', G' par les formules (13), dans lesquelles les composantes U, V, W de la vitesse ont pour valeurs, d'après les formules (11),

$$(U, V, W) = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial t}.$$

En tenant compte de ce que

$$d\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \Theta}{\partial T} \mathfrak{S}, \qquad \rho\, dH + H\, d\rho = 0,$$

les égalités (50) deviennent

$$(51) \qquad \begin{cases} d\mathfrak{M} = \dfrac{1}{H}\left[\Theta\, dG - G\left(\Theta + \rho \dfrac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\dfrac{dH}{H} + \dfrac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S}\right] + 2H\mathcal{E}, \\ d\mathfrak{N} = \dfrac{1}{H}\Theta\, dF + 2H\mathcal{F}, \\ d\mathfrak{P} = \dfrac{1}{H}\left[\Theta\, dE - E\left(\Theta + \rho \dfrac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\dfrac{dH}{H} + \dfrac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S}\right] + 2H\mathcal{G}, \end{cases}$$

avec

$$(52) \qquad \begin{cases} dE = 2\sum x'_u \dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \\ dF = \sum \left(x'_u \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + x'_v \dfrac{\partial \xi}{\partial u}\right), \\ dG = 2\sum x'_v \dfrac{\partial \xi}{\partial v}, \\ 2H\, dH = G\, dE + E\, dG. \end{cases}$$

Pour obtenir la forme que prend la relation supplémentaire, il faut remarquer que la théorie analytique de la chaleur suppose les quantités $\frac{\partial T}{\partial(u, v, t)}$, $T - T_0$ infiniment petites du premier ordre. Il suffit donc, dans la relation supplémentaire (39), de faire porter la différentiation sur T seulement. En remarquant d'autre part, que la fonction dissipative 2Φ est du second ordre de petitesse, il vient

$$c\rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial u}\left(K \frac{G}{H} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}\right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial v}\left(K \frac{E}{H} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}\right) - \mathcal{K}\mathfrak{S} + \frac{T}{\mathfrak{E}} \frac{\partial \Theta}{\partial T} \theta,$$

et la condition au contour est de même

$$K \frac{d\mathfrak{S}}{dn} + \mathcal{K}' \mathfrak{S} = 0.$$

Supposons, comme cas particulier, que la membrane soit plane à l'équilibre, contenue, par exemple, dans le plan des (x, y) ; on aura

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = 0,$$

d'où

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$
$$H = 1 ;$$

$$dE = 2\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad dF = \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad dG = 2\frac{\partial \eta}{\partial v}, \qquad dH = \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v},$$
$$E' = 2\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad F' = \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}, \qquad G' = 2\frac{\partial V}{\partial v}, \qquad \theta = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}.$$

Les actions de viscosité seront ainsi, d'après les formules (24),

$$(53) \qquad \left\{\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial V}{\partial v}, \\ 2\mathcal{F} &= M\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\right), \\ 2\mathcal{G} &= \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial U}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Substituons ces expressions dans les égalités (51) ; il viendra

$$d\mathfrak{M} = 2\Theta\frac{\partial \eta}{\partial v} - \left(\Theta + \rho\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S} + \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial V}{\partial v},$$
$$d\mathfrak{N} = \Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) + M\left(\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\right),$$
$$d\mathfrak{P} = 2\Theta\frac{\partial \xi}{\partial u} - \left(\Theta + \rho\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\mathfrak{S} + \Lambda\left(\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + 2M\frac{\partial U}{\partial u},$$

et, en supposant qu'à l'équilibre la membrane soit homogène, les équations (48) nous donneront

$$(54)\quad\begin{cases}\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\rho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\dfrac{\partial\mathfrak{S}}{\partial u}+(\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial u}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)-\mathrm{M}\dfrac{\partial\Delta\xi}{\partial t},\\[2mm] \rho\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-\rho\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\dfrac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\dfrac{\partial\mathfrak{S}}{\partial v}+(\Lambda+\mathrm{M})\dfrac{\partial^2}{\partial t\,\partial v}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}\right)-\mathrm{M}\dfrac{\partial\Delta\eta}{\partial t},\\[2mm] \rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\Theta\,\Delta\zeta,\end{cases}$$

équations où l'on a posé

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

Ces équations (54) généralisent celles qui ont été données jusqu'ici, où l'on supposait la température constante et la membrane dénuée de viscosité ; les deux premières sont analogues à celles des petits mouvements plans d'un fluide visqueux et l'on voit que la troisième, qui détermine le mouvement transversal, est indépendante de la température et de la viscosité. Les résultats obtenus par les géomètres qui ont étudié cette équation sont donc absolument généraux et s'appliquent aux membranes réelles. Par contre, les équations qui se compliquent par suite de la viscosité et des variations de la température sont précisément celles qui présentent les plus grandes difficultés d'intégration.

On déduit des deux premières équations (54) l'équation de la dilatation $\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial\eta}{\partial v}$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)=-\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)+\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\Delta\mathfrak{S}+\Lambda\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)$$

et l'équation de la rotation moyenne $\dfrac{\partial\eta}{\partial u}-\dfrac{\partial\xi}{\partial v}$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)=-\mathrm{M}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi}{\partial v}\right).$$

Enfin, l'équation indéfinie de la température devient

$$c\rho\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}=\mathrm{K}\,\Delta\mathfrak{S}-\varkappa\mathfrak{S}+\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\right).$$

CHAPITRE II.

LES ONDES AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE.

§ I. — Préliminaires.

Soit Σ une courbe mobile tracée sur la membrane à l'instant t ; le long de cette courbe u et v sont des fonctions d'un même paramètre ω et du temps t, de sorte que ses équations s'obtiennent en adjoignant aux équations de la membrane

$$(1) \qquad x = f(u, v, t), \qquad y = g(u, v, t), \qquad z = h(u, v, t),$$

deux équations de la forme

$$(2) \qquad u = \chi(\omega, t), \qquad v = \psi(\omega, t).$$

Dans le plan des (u, v) les équations (2) représentent une courbe mobile s qui est l'image de la courbe Σ. Nous supposerons que la courbe Σ partage la surface de la membrane en deux régions distinctes que nous désignerons par les indices 1 et 2 et auxquelles correspondent, dans le plan des (u, v), deux régions 1 et 2 bien déterminées, séparées par la courbe s.

En un point m quelconque de la courbe s, menons une demi-normale mn à cette courbe et soient α, β (¹) ses cosinus directeurs respectivement proportionnels à $-\frac{\partial v}{\partial \omega}$ et à $\frac{\partial u}{\partial \omega}$. Définissons-les par la double égalité

$$\frac{\alpha}{-\frac{\partial v}{\partial \omega}} = \frac{\beta}{\frac{\partial u}{\partial \omega}} = \frac{1}{r},$$

où l'on a posé

$$r = +\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \omega}\right)^2};$$

(¹) Nous désignons également par α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour C, mais il ne peut en résulter aucune confusion.

nous dirons que la demi-normale mn a été menée vers la région 2 par définition. Nous avons donc

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega} = r\beta, \qquad \frac{\partial v}{\partial \omega} = -r\alpha.$$

Cela posé, soient

$$(4) \qquad x_1 = f_1(u, v, t), \qquad y_1 = g_1(u, v, t), \qquad z_1 = h_1(u, v, t)$$

les équations de la région 1 de la membrane et

$$(5) \qquad x_2 = f_2(u, v, t), \qquad y_2 = g_2(u, v, t), \qquad z_2 = h_2(u, v, t)$$

les équations de la région 2. Il peut arriver que la courbe Σ jouisse de cette propriété que les fonctions (4) et (5) aient deux à deux la même valeur tout le long de la courbe Σ, ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à (u, v, t) jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, mais qu'il n'en soit plus de même pour une au moins des dérivées d'ordre n; qu'on ait par exemple

$$\frac{\partial^n x_1}{\partial u^n} \neq \frac{\partial^n x_2}{\partial u^n}.$$

On dit alors que la courbe Σ est une *onde d'ordre n* ou encore une *ligne de discontinuité d'ordre n* pour les coordonnées des différents points de la membrane ; cette courbe peut, en même temps, être une onde d'un ordre différent de n pour une autre fonction de (u, v, t). Une onde du premier ordre pour les coordonnées s'appelle aussi une *onde de choc*, parce qu'à la traversée d'une telle onde les composantes de la vitesse sont discontinues, tout comme cela arrive quand deux corps se choquent ; une onde du second ordre pour les coordonnées s'appelle aussi une *onde d'accélération*, parce qu'à la traversée d'une telle onde les composantes de l'accélération sont en général discontinues.

Si une telle onde Σ existe pour toutes les valeurs de t correspondant à un certain laps de temps, on dit que l'onde considérée est une onde persistante. Ce sont les propriétés des ondes persistantes que nous nous proposons d'étudier.

§ II. — Vitesse de propagation de l'image de l'onde.

Soient s et s' les images de l'onde dans le plan des (u, v) aux instants t et $t + dt$: la demi-normale mn à la courbe s ou son prolongement rencontre s' en un point m'. Soit $dn = \overline{mm'}$ la valeur algébrique du segment mm' compté positivement suivant la demi-normale mn ; la vitesse de propagation V_0 de l'image s de l'onde Σ est définie par l'égalité

$$V_0 = \frac{dn}{dt};$$

elle est donc positive si la propagation se fait de la région 1 vers la région 2 et négative dans le cas contraire.

Calculons V_0 et soient (u, v), $(u + du, v + dv)$ les coordonnées des points m et m', auxquelles correspondent les valeurs respectives (ω, t), $(\omega + d\omega, t + dt)$ des paramètres. On a

$$du = \alpha\, dn = \frac{\partial u}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial u}{\partial t} dt;$$

de là, la première des égalités

$$\alpha V_0 = \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\beta V_0 = \frac{\partial v}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t},$$

la seconde s'établissant d'une manière analogue. En les multipliant respectivement par α, β et ajoutant membre à membre, le coefficient de $\frac{d\omega}{dt}$ est nul en vertu des égalités (3) et il vient

$$V_0 = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{6}$$

D'après les égalités (3), on peut écrire aussi

$$V_0 = \frac{1}{r}\frac{D(u, v)}{D(\omega, t)}.$$

§ III. — Discontinuités du premier ordre.

D'une manière générale, nous désignerons par δ' l'accroissement brusque qu'éprouve une quantité discontinue, quand on franchit la ligne de discontinuité Σ en passant de la région 1 à la région 2 ; l'accent ayant pour but d'éviter toute confusion avec le symbole δ employé dans le calcul des variations. Supposons que Σ soit une onde de choc, c'est-à-dire une ligne de discontinuité du premier ordre : les expressions (4) et (5) des coordonnées coïncident deux à deux tout le long de Σ, mais il n'en est plus de même d'une au moins des dérivées partielles $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)}$. Suivant la notation que nous venons d'adopter, nous poserons donc

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_2}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

et l'on peut évidemment intervertir à volonté les caractéristiques ∂ et δ'.

L'onde Σ étant du premier ordre, nous avons

$$(7) \qquad \delta'(x, y, z) = 0$$

et ces égalités doivent avoir lieu tout le long de Σ à l'instant t, c'est-à-dire qu'étant vérifiées par les valeurs (u, v, t) des paramètres, elles doivent l'être encore par les valeurs $(u + du, v + dv, t)$, du et dv ayant pour expressions

$$(8) \qquad d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega} d\omega;$$

il en résulte qu'on doit avoir

$$\frac{\partial \delta' x}{\partial u} du + \frac{\partial \delta' x}{\partial v} dv = 0,$$

ou

$$(9) \qquad \delta' \frac{\partial x}{\partial u} du + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} dv = 0,$$

ainsi que deux égalités analogues pour y et z. Dès lors, d'après les égalités (3) et (8), nous pourrons écrire

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial x}{\partial u}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial x}{\partial v}}{\beta} = \lambda,$$

λ désignant une certaine fonction de (u, v, t). En appelant μ et ν deux autres fonctions analogues, nous aurons donc les deux formules triples

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u} = \alpha(\lambda, \mu, \nu), \\ &\delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial v} = \beta(\lambda, \mu, \nu). \end{aligned} \right.$$

Ces égalités, qui expriment qu'à chaque instant le lieu des points de discontinuité pour les dérivées partielles est une courbe continue tracée sur la membrane, s'appellent, d'après M. Hadamard ([1]), les *conditions identiques*.

Il reste à exprimer que ce lieu des points de discontinuité continue d'être une courbe unique tracée sur la membrane quand t varie ; nous obtiendrons ainsi ce que M. Hadamard ([2]) appelle les *conditions cinématiques de compatibilité*. Pour cela, il faut écrire que les égalités (7) sont vérifiées, non seulement par les valeurs (u, v, t) des paramètres, mais aussi par les valeurs $(u + du, v + dv, t + dt)$, du et dv ayant pour expressions

$$(11) \qquad d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} dt.$$

Nous avons donc

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} du + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} dv + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} dt = 0,$$

ainsi que deux égalités analogues pour y et z. Si l'on remplace dans cette égalité du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul en vertu des égalités (8) et (9) et il vient

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial x}{\partial t} = 0.$$

([1]) J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, Ch. II, § 2.

([2]) J. Hadamard, *Loc. cit.*, Ch. II, § 3.

Tenons compte enfin des formules (6) et (10), il viendra

$$\delta' \frac{\partial x}{\partial t} = -\lambda V_0.$$

Nous aurions deux formules analogues pour y et z; de là les conditions cinématiques de compatibilité

$$(12) \qquad \delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial t} = -(\lambda, \mu, \nu) V_0.$$

Les égalités (10) et (12) nous montrent qu'une onde de choc est caractérisée en chacun de ses points par trois quantités λ, μ, ν, qu'on peut regarder comme les composantes d'un vecteur appelé ***discontinuité*** au point considéré, et par la vitesse de propagation V_0 de l'image de l'onde.

§ IV. — Expressions des dérivées (x'_u, x'_v, ..., z'_v) en fonction des cosinus directeurs de la normale et de la tangente à l'onde.

En un point M de l'onde Σ, menons la demi-normale Mn_2 à l'onde située dans le plan tangent en M à la région 2 et menée vers cette région. Nous allons calculer les cosinus directeurs a_2, b_2, c_2 de cette demi-normale; pour cela, il y a bien peu à changer au calcul général de a, b, c, qui a été fait au paragraphe I du Chapitre I.

Au lieu de la formule (5) de ce Chapitre, nous aurons

$$(13) \qquad a_2 = \frac{(x'_u)_2\, du + (x'_v)_2\, dv}{\sqrt{E_2\, du^2 + 2F_2\, du\, dv + G_2\, dv^2}}.$$

Avec les mêmes notations, appelons $x + Dx$, $y + Dy$, $z + Dz$ les coordonnées d'un point M″ de Σ voisin de M et correspondant à la valeur $\omega + D\omega$ de la variable ω. On aura encore

$$(14) \qquad Dx = \left(x'_u \frac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial \omega}\right) D\omega,$$

formule dans laquelle les dérivées x'_u et x'_v peuvent être prises toutes deux indifféremment mais simultanément soit sur la région 1, soit sur la région 2. En effet, il résulte des conditions identiques (10) qu'on a, en vertu des formules (3),

$$(x'_u)_1 \frac{\partial u}{\partial \omega} + (x'_v)_1 \frac{\partial v}{\partial \omega} = (x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial \omega} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial \omega},$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Dorénavant, quand, dans une égalité, des quantités dépendant des dérivées du premier ordre pourront être affectées indifféremment et simultanément de l'indice 1 ou de l'indice 2, nous n'écrirons pas ces indices.

Avant d'aller plus loin, nous allons tirer de l'égalité précédente cette conséquence que k reste continu à la traversée de l'onde. En effet, d'après s cette égalité et l'égalité (14), l'élément linéaire $Ds = MM''$ suivant l'onde a la même valeur suivant qu'on y affecte les dérivées en u et v de l'indice 1 ou de l'indice 2; comme on a, d'autre part, $Ds = k\,d\sigma$, $d\sigma$ désignant l'image mm'' de l'élément Ds, image qui a une valeur indépendante des indices, on a forcément

$$\delta' k = 0. \tag{15}$$

Cela posé, revenons au calcul de a_2, b_2, c_2 : la condition de perpendicularité des éléments MM' et MM'' s'écrira

$$\sum \left(x'_u \frac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \frac{\partial v}{\partial \omega} \right) [(x'_u)_2\, du + (x'_v)_2\, dv] = 0$$

et le calcul s'achèvera comme au Chapitre I ; nous trouverons ainsi

$$a_2 = \frac{(x'_u)_2 (G_2 \alpha - F_2 \beta) + (x'_v)_2 (-F_2 \alpha + E_2 \beta)}{k H_2}, \tag{16}$$

avec deux formules analogues pour b_2 et c_2. Nous ne mettons pas d'indice au bas de k en vertu de la convention faite.

Soient a_1, b_1, c_1 les cosinus directeurs de la demi-normale Mn_1 menée en M à l'onde Σ dans le plan tangent en M à la région 1 et dirigée vers l'extérieur de cette région. Un calcul tout pareil au précédent nous donnerait

$$a_1 = \frac{(x'_u)_1 (G_1 \alpha - F_1 \beta) + (x'_v)_1 (-F_1 \alpha + E_1 \beta)}{k H_1} \tag{16'}$$

et deux formules analogues pour b_1 et c_1. En vertu de la convention faite relativement aux indices, les formules (16) et (16') et leurs analogues rentrent ainsi dans les formules générales

$$(17)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{x'_u(\mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta) + x'_v(-\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta)}{k\mathrm{H}}, \\ b = \dfrac{y'_u(\mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta) + y'_v(-\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta)}{k\mathrm{H}}, \\ c = \dfrac{z'_u(\mathrm{G}\alpha - \mathrm{F}\beta) + z'_v(-\mathrm{F}\alpha + \mathrm{E}\beta)}{k\mathrm{H}}, \end{cases}$$

que nous avons données au Chapitre I; nous poserons

$$\delta' a = a_2 - a_1, \qquad \delta' b = b_2 - b_1, \qquad \delta' c = c_2 - c_1.$$

Dorénavant, nous réserverons exclusivement les notations (a, b, c) pour désigner les cosinus directeurs de la demi-normale à l'onde menée dans le plan tangent et vers la région 2.

Soient a', b', c' les cosinus directeurs de la tangente en M à l'onde Σ menée, pour fixer les idées, dans le sens des ω croissants : on aura

$$(a', b', c') = \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}s},$$

ou, d'après la formule (14) et puisqu'on suppose $\mathrm{D}\omega > 0$,

$$a' = \frac{x'_u \dfrac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \dfrac{\partial v}{\partial \omega}}{\sqrt{\sum \left(x'_u \dfrac{\partial u}{\partial \omega} + x'_v \dfrac{\partial v}{\partial \omega}\right)^2}}.$$

Tenons compte des formules (3) et de ce que

$$\sqrt{\Sigma(\beta x'_u - \alpha x'_v)^2} = k,$$

il viendra la première des égalités

$$(18)\qquad \begin{cases} ka' = \beta x'_u - \alpha x'_v, \\ kb' = \beta y'_u - \alpha y'_v, \\ kc' = \beta z'_u - \alpha z'_v, \end{cases}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

Les formules (17) et (18) permettent d'exprimer les dérivées par rapport à u et à v des coordonnées en fonction des cosinus directeurs de la normale et de la tangente à l'onde. Le calcul n'offre aucune difficulté ; si nous posons

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} m &= G\alpha - F\beta, \\ n &= -F\alpha + E\beta, \end{aligned}\right.$$

d'où il résulte que

$$(20) \qquad m\alpha + n\beta = k^2,$$

nous trouverons

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} kx'_u &= \alpha H a + n a', \\ ky'_u &= \alpha H b + n b', \\ kz'_u &= \alpha H c + n c'; \end{aligned}\right.$$

$$(21)' \qquad \left\{\begin{aligned} kx'_v &= \beta H a - m a', \\ ky'_v &= \beta H b - m b', \\ kz'_v &= \beta H c - m c', \end{aligned}\right.$$

formules dont nous ferons par la suite un usage fréquent.

§ V. — Variations des quantités dépendant des dérivées du premier ordre.

Les formules établies dans les deux derniers paragraphes vont nous permettre de donner une forme simple aux variations δ' des principales fonctions dépendant des dérivées du premier ordre, et qui sont

$$E, \quad F, \quad G, \quad H, \quad \rho, \quad m, \quad n, \quad a, \quad b, \quad c.$$

De la première des formules (2) du Chapitre I on déduit

$$\delta' E = \Sigma \delta'(x'_u)^2 = \Sigma[(x'_u)_1 + (x'_u)_2]\delta' x'_u;$$

mais, d'après les formules (10) et (21), on a

$$\delta' x'_u = \alpha\lambda,$$
$$k[(x'_u)_1 + (x'_u)_2] = \alpha(H_1 a_1 + H_2 a_2) + (n_1 + n_2) a';$$

il vient donc

$$(22) \qquad k\delta' E = \alpha[\alpha(H_1 \Sigma a_1 \lambda + H_2 \Sigma a_2 \lambda) + (n_1 + n_2)\Sigma a' \lambda].$$

On aurait de même

$$(23)\qquad k\delta' G = \beta[\beta(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda) - (m_1 + m_2)\Sigma a'\lambda].$$

Soient, d'autre part, A et B deux quantités discontinues le long de Σ; on a la suite d'identités

$$(24)\qquad \begin{aligned}\delta'(AB) = A_2B_2 - A_1B_1 = A_1\delta' B + B_2\delta' A &= A_2\delta' B + B_1\delta' A \\ &= \frac{1}{2}[(A_1 + A_2)\delta' B + (B_1 + B_2)\delta' A].\end{aligned}$$

La deuxième des formules (2) du Chapitre I nous donne ainsi

$$\delta' F = \Sigma\delta'(x'_u x'_v) = \frac{1}{2}\sum \left\{[(x'_u)_1 + (x'_u)_2]\delta' x'_v + [(x'_v)_1 + (x'_v)_2]\delta' x'_u\right\},$$

ce qui peut s'écrire, d'après les formules (10), (21) et (21'),

$$(25)\qquad k\delta' F = \alpha\beta(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda) + \frac{-(m_1 + m_2)\alpha + (n_1 + n_2)\beta}{2}\Sigma a'\lambda.$$

Passons au calcul de $\delta' H$. La quatrième des égalités (2) du Chapitre I jointe aux identités (24) nous donne

$$2\delta' H^2 = (G_1 + G_2)\delta' E - 2(F_1 + F_2)\delta' F + (E_1 + E_2)\delta' G;$$

en remplaçant dans cette égalité $\delta'(E, F, G)$ par leurs expressions (22), (23), (25), les termes en $\Sigma a'\lambda$ se détruisent, et il reste

$$(26)\qquad (H_1 + H_2)\delta' H = k(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda).$$

Nous avons vu (Chap. I, § II) qu'on a en un point quelconque de la membrane

$$\rho H = \rho_0 H_0,$$

l'indice zéro se rapportant à un état initial choisi une fois pour toutes. En appliquant cette égalité à deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la courbe Σ, et en passant au cas limite où ces deux points se confondraient sur cette courbe, il viendra

$$(27)\qquad \rho_1 H_1 = \rho_2 H_2 = \rho_0 H_0,$$

égalités d'où nous déduisons

$$(27')\qquad \frac{H_1}{\rho_2} = \frac{H_2}{\rho_1} = \frac{H_1 + H_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\rho_0 H_0}{\rho_1\rho_2}.$$

Nous pouvons ainsi exprimer H_1 et H_2 en fonction de ρ_1, ρ_2 et de $\rho_0 H_0$.

Mais la première des égalités (27) n'est autre que

$$\delta'(\rho H) = 0, \tag{28}$$

ce que nous pouvons écrire encore, d'après les identités (24),

$$(H_1 + H_2)\delta'\rho + (\rho_1 + \rho_2)\delta' H = 0.$$

Remplaçons $\delta' H$ par sa valeur tirée de l'égalité (26) et tenons compte des formules (27'), nous obtenons

$$\frac{\rho_0 H_0}{\rho_1 \rho_2}\delta'\rho = -k\frac{\rho_2 \Sigma a_1 \lambda + \rho_1 \Sigma a_2 \lambda}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{29}$$

Cette égalité tient lieu de l'équation de continuité dans l'étude des discontinuités du premier ordre.

Les variations des quantités m et n se calculent aisément en partant des formules (19), (22), (23), (25); les termes en $\Sigma a_1 \lambda$, $\Sigma a_2 \lambda$ disparaissent et l'on trouve

$$\delta' m = -k\beta \Sigma a' \lambda, \qquad \delta' n = k\alpha \Sigma a' \lambda. \tag{30}$$

On a donc bien, d'après l'égalité (20),

$$\delta' k^2 = \alpha \delta' m + \beta \delta' n = 0,$$

comme nous avions déjà eu l'occasion de le démontrer.

Il reste, enfin, à calculer les variations $\delta'(a, b, c)$ des cosinus directeurs de la normale à l'onde; posons pour abréger

$$N = m x'_u + n x'_v$$

et la première des formules (17) s'écrira

$$ka = \frac{N}{H}.$$

Nous avons donc

$$k\delta' a = \frac{N_1 + \delta' N}{H_1 + \delta' H} - \frac{N_1}{H_1} = \frac{H_1 \delta' N - N_1 \delta' H}{H_1(H_1 + \delta' H)} = \frac{\delta' N}{H_2} - k a_1 \frac{\delta' H}{H_2}.$$

Mais l'égalité (28) nous donne encore, d'après les identités (24),

$$\rho_1 \delta' H + H_2 \delta' \rho = \rho_2 \delta' H + H_1 \delta' \rho = 0;$$

nous pouvons donc écrire la première des égalités

$$k\delta' a = \frac{\delta' N}{H_2} + k a_1 \frac{\delta' \rho}{\rho_1},$$
$$k\delta' a = \frac{\delta' N}{H_1} + k a_2 \frac{\delta' \rho}{\rho_2},$$

la deuxième s'obtenant d'une manière analogue. Calculons $\delta' N$. D'après les identités (24), nous avons

$$\delta' N = m_1 \delta'(x'_u) + (x'_u)_2 \delta' m + n_1 \delta'(x'_v) + (x'_v)_2 \delta' n;$$

tenons compte des formules (10), (20), (21), (21′), (30) et nous trouverons facilement

$$\delta' N = k^2(\lambda - a'\Sigma a'\lambda).$$

Substituons alors cette expression dans celles qui viennent d'être obtenues pour $k\delta' a$ et nous trouverons la première des doubles égalités

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta' a &= k\frac{\lambda - a'\Sigma a'\lambda}{H_2} + a_1 \frac{\delta' \rho}{\rho_1} = k\frac{\lambda - a'\Sigma a'\lambda}{H_1} + a_2 \frac{\delta' \rho}{\rho_2}, \\ \delta' b &= k\frac{\mu - b'\Sigma a'\lambda}{H_2} + b_1 \frac{\delta' \rho}{\rho_1} = k\frac{\mu - b'\Sigma a'\lambda}{H_1} + b_2 \frac{\delta' \rho}{\rho_2}, \\ \delta' c &= k\frac{\nu - c'\Sigma a'\lambda}{H_2} + c_1 \frac{\delta' \rho}{\rho_1} = k\frac{\nu - c'\Sigma a'\lambda}{H_1} + c_2 \frac{\delta' \rho}{\rho_2}, \end{aligned} \right.$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

§ VI. — Vitesses de propagation d'une onde de choc.

Considérons, sur la membrane à l'instant t, l'onde Σ et la courbe Σ', lieu des points de la membrane à l'instant t qui seront atteints par l'onde à l'instant $t + dt$. Supposons que cette courbe Σ' soit située dans la région 2 : on dira alors que l'onde se propage de la région 1 vers la région 2, ou encore que le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2. Dans ces conditions, la demi-normale Mn_2 menée à l'onde Σ au point M dans le plan tangent en M à la région 2 et vers cette région coupe la courbe Σ' en un point M'_2. Soit $dN_2 = \overline{MM'_2}$ la valeur algébrique du segment MM'_2 compté positivement suivant la demi-normale; la quantité

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{dN_2}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 1 vers la région 2. Nous allons calculer cette vitesse qui, d'après les hypothèses faites, est forcément positive.

Soient $x+dx, y+dy, z+dz$ les coordonnées du point M'_2 correspondant aux valeurs $(u+du, v+dv)$ des paramètres (u, v); puisque la courbe Σ' est tracée sur la membrane à l'instant t, pour calculer $d(x, y, z)$, on doit laisser t constant dans les équations (5) qui représentent la région 2 et ne le faire varier que dans les équations (2). On obtient ainsi

$$dx = (x'_u)_2\, du + (x'_v)_2\, dv,$$

avec

$$d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega}\, d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t}\, dt, \tag{11}$$

et l'on aurait deux expressions analogues pour dy et dz; nous avons donc

$$dx = a_2\, dN_2 = \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial\omega} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial\omega}\right] d\omega + \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t}\right] dt.$$

Tenons compte des formules (3) et (18) et nous obtiendrons, après avoir divisé par dt, la première des égalités

$$a_2\mathfrak{V}_2 = kra'\frac{d\omega}{dt} + (x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$b_2\mathfrak{V}_2 = krb'\frac{d\omega}{dt} + (y'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (y'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$c_2\mathfrak{V}_2 = krc'\frac{d\omega}{dt} + (z'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (z'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

les deux autres s'obtenant de la même manière.

Multiplions-les alors respectivement par a_2, b_2, c_2 et ajoutons-les membre à membre : le coefficient de $\frac{d\omega}{dt}$ est nul et il reste

$$\mathfrak{V}_2 = \sum a_2 \left[(x'_u)_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (x'_v)_2 \frac{\partial v}{\partial t} \right].$$

En remplaçant a_2, b_2, c_2 par leurs valeurs fournies par les formules (17), où les quantités discontinues à la traversée de l'onde sont affectées de l'indice 2, on trouve aisément

$$\mathfrak{V}_2 = \frac{H_2}{k}\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

et, d'après la formule (6),

$$k\mathfrak{V}_2 = H_2 V_0. \tag{32}$$

Nous avons supposé que la courbe Σ' se trouvait dans la région 2; si elle se trouve dans la région 1, on dit que le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1. Dans ces conditions, la courbe Σ' rencontre en un point M'_1 le prolongement de la demi-normale Mn_1 menée en M à la courbe Σ dans le plan tangent en M à la région 1 et vers l'extérieur de cette région. Soit $dN_1 = \overline{MM'_1}$ la valeur algébrique du segment MM'_1 compté positivement suivant la demi-normale; la quantité

$$\mathfrak{V}_1 = \frac{dN_1}{dt}$$

s'appelle la *vitesse de propagation de l'onde* se propageant de la région 2 vers la région 1. D'après les hypothèses faites, cette vitesse est forcément négative.

Un calcul tout à fait analogue au précédent nous donnerait alors

$$k\mathfrak{V}_1 = H_1 V'_0, \tag{32'}$$

en mettant V'_0 à la place de V_0 pour désigner la vitesse de propagation de l'image de l'onde dans le plan des (u, v) et afin d'éviter toute confusion, car ces vitesses V_0 et V'_0 sont de signes contraires.

Mais, supposons qu'on ait

$$V_0 + V'_0 = 0;$$

alors, les égalités (32) et (32′), multipliées respectivement par ρ_2 et ρ_1, puis ajoutées membre à membre, donnent, d'après la première des égalités (27),

$$\rho_1 \mathcal{V}_1 + \rho_2 \mathcal{V}_2 = 0. \tag{33}$$

Nous obtenons ainsi l'extension au cas des membranes d'une relation établie en Hydrodynamique par Riemann dans le cas des ondes planes et généralisée par M. Jouguet [1].

§ VII. — Discontinuités du second ordre.

Supposons, maintenant, que la courbe Σ tracée sur la membrane soit une onde du second ordre par rapport aux coordonnées, ou, comme on dit encore, une onde d'accélération : les dérivées du premier ordre de x, y, z resteront continues à la traversée de l'onde et, avec la notation adoptée, nous aurons

$$\delta' \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, t)} = 0. \tag{34}$$

Dès lors, la membrane admettra un plan tangent unique en chaque point de Σ, les demi-normales Mn_1 et Mn_2 se confondront en une demi-normale unique, et les formules (17), (18), (19), (20), (21), (21′) devront être utilisées telles quelles, sans indice au bas des quantités qui tout à l'heure étaient discontinues.

D'autre part, les égalités (32) et (32′) se réduisent à une formule unique

$$k\mathcal{V} = \mathrm{H}\mathrm{V}_0, \tag{35}$$

en appelant $\mathcal{V}$ la vitesse de propagation de l'onde qui est positive ou négative suivant que le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 ou inversement.

Revenons aux égalités (34) et écrivons qu'elles sont vérifiées tout

---

(1) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re série, deuxième Partie, Ch. I, § I.

le long de la courbe Σ à l'instant t. Nous aurons, par exemple,

$$(36)\qquad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} dv = 0, \\[2ex] \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} du + \delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv = 0, \end{cases}$$

avec

$$(8)\qquad d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial \omega} d\omega.$$

Si nous tenons compte des formules (3), les égalités (36) nous enseignent qu'il existe en chaque point de Σ une quantité λ, telle qu'on ait

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}}{\beta} = \lambda \alpha,$$

$$\frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}}{\alpha} = \frac{\delta' \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}}{\beta} = \lambda \beta.$$

Nous aurions pour y et z des égalités analogues; si donc nous désignons par μ et ν deux autres quantités, nous obtiendrons les formules

$$(37)\qquad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial u^2} = \alpha^2 (\lambda, \mu, \nu), \\[2ex] \delta' \dfrac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial u\, \partial v} = \alpha\beta (\lambda, \mu, \nu), \\[2ex] \delta' \dfrac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial v^2} = \beta^2 (\lambda, \mu, \nu). \end{cases}$$

En écrivant enfin que les autres égalités (34)

$$(38)\qquad \delta' \frac{\partial (x, y, z)}{\partial t} = 0$$

sont vérifiées tout le long de Σ à l'instant t, nous aurons pour la première

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v} dv = 0,$$

du et dv étant donnés par la double formule (8); d'après les formules (3), nous pouvons donc écrire

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u}\beta - \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial v}\alpha = 0. \tag{39}$$

Cela posé, il reste à exprimer que le lieu des points de discontinuité continue d'être une courbe tracée sur la membrane quand t varie. Pour cela, il faut exprimer que les égalités (34) sont vérifiées, non seulement par les valeurs (u, v, t) des paramètres, mais aussi par les valeurs $(u + du, v + dv, t + dt)$, du et dv ayant pour expressions

$$d(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial\omega} d\omega + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} dt; \tag{11}$$

nous obtenons ainsi des égalités telles que

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial t} dt = 0,$$

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u} du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial t} dt = 0.$$

Si nous remplaçons dans ces égalités du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul d'après les égalités (36) et (8), et il reste

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial t} = 0,$$

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial t} = 0.$$

Tenons compte enfin des égalités (37) et (6), nous aurons

$$\alpha\lambda V_0 + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial t} = 0, \qquad \beta\lambda V_0 + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial t} = 0;$$

résultat qui vérifie identiquement l'égalité (39). Nous aurions des résultats semblables pour y et z; de là, les deux groupes de formules

$$\left\{ \begin{aligned} \delta' \frac{\partial^2(x, y, z)}{\partial u\,\partial t} &= -\alpha(\lambda, \mu, \nu) V_0, \\ \delta' \frac{\partial^2(x, y, z)}{\partial v\,\partial t} &= -\beta(\lambda, \mu, \nu) V_0. \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Écrivons enfin que les formules (38) sont vérifiées tout le long de l'onde Σ et à chaque instant; nous aurons, pour la première de ces formules,

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u}\, du + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v}\, dv + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\, dt = 0.$$

Si l'on remplace du et dv par leurs valeurs (11), le coefficient de $d\omega$ est nul en vertu des formules (3) et (40), et il reste

$$\delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Tenons compte alors des égalités (6) et (40), et nous obtiendrons la première des formules

$$(41) \qquad \delta' \frac{\partial^2 (x, y, z)}{\partial t^2} = (\lambda, \mu, \nu) V_0^2,$$

les deux autres s'obtenant d'une manière toute semblable.

Ainsi, tout comme une discontinuité du premier ordre, une discontinuité du second ordre est caractérisée en chaque point de l'onde par un vecteur discontinuité (λ, μ, ν) et la vitesse de propagation V_0 de l'image de l'onde.

§ VIII. — Variations des quantités dépendant des dérivées du second ordre des coordonnées.

Les formules obtenues au précédent paragraphe vont nous permettre de calculer aisément les variations des dérivées partielles du premier ordre des quantités

$$E, \quad F, \quad G, \quad H, \quad \rho, \quad \Theta.$$

Tout d'abord, les formules (2) du Chapitre I nous donnent

$$\delta' \frac{\partial E}{\partial u} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \delta' \frac{\partial E}{\partial v} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \qquad \delta' \frac{\partial E}{\partial t} = 2 \sum x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t},$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial u} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial v} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial F}{\partial t} = \sum \left(x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial t} + x'_u \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t} \right),$$

$$\delta' \frac{\partial G}{\partial u} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}, \qquad \delta' \frac{\partial G}{\partial v} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \qquad \delta' \frac{\partial G}{\partial t} = 2 \sum x'_v \delta' \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial t}.$$

Tenons compte, maintenant, des formules (21), (21′) et des formules (37) et (40) : les neuf égalités précédentes pourront se condenser dans les trois formules triples

$$(42)\quad \begin{cases} k\delta' \dfrac{\partial E}{\partial(u, v, t)} = 2\alpha(\alpha, \beta, -V_0)(\alpha H \Sigma a\lambda + n\Sigma a'\lambda), \\ k\delta' \dfrac{\partial F}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)[2\alpha\beta H \Sigma a\lambda + (-m\alpha + n\beta)\Sigma a'\lambda]. \\ k\delta' \dfrac{\partial G}{\partial(u, v, t)} = 2\beta(\alpha, \beta, -V_0)(\beta H \Sigma a\lambda - m\Sigma a'\lambda). \end{cases}$$

Cela posé, la quatrième des formules (2) du Chapitre I nous donne

$$2H\delta'\frac{\partial H}{\partial u} = G\delta'\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\delta'\frac{\partial F}{\partial u} + E\delta'\frac{\partial G}{\partial u},$$

ainsi que deux égalités analogues pour les dérivées par rapport à v et à t. En y remplaçant les variations des dérivées de E, F, G par leurs valeurs (42), nous obtiendrons la formule triple

$$(43)\qquad \delta'\frac{\partial H}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)k\Sigma a\lambda.$$

Enfin, l'équation de continuité $\rho H = \rho_0 H_0$ nous donne

$$\rho\delta'\frac{\partial H}{\partial(u, v, t)} + H\delta'\frac{\partial \rho}{\partial(u, v, t)} = 0;$$

nous avons donc, en vertu des formules (43),

$$(44)\qquad \delta'\frac{\partial \rho}{\partial(u, v, t)} = -\frac{\rho}{H}(\alpha, \beta, -V_0)k\Sigma a\lambda.$$

Nous savons, d'après l'équation caractéristique

$$\Theta + \rho^2\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 0,$$

que la tension Θ en un point de la membrane est une fonction finie de la densité ρ et de la température absolue T. D'après les formules (44), l'onde d'accélération considérée est du premier ordre pour la densité ; supposons qu'elle soit également du premier ordre pour la température. On aura alors en chaque point de l'onde

$$\delta' T = 0,$$

une au moins des dérivées partielles du premier ordre de T étant discontinue à la traversée de l'onde. En raisonnant comme au paragraphe III du présent Chapitre, nous reconnaîtrions qu'il existe en chaque point de Σ une quantité τ telle qu'on ait

$$\delta' \frac{\partial T}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)\tau. \tag{45}$$

Ce résultat obtenu, les dérivées de Θ sont liées à celles de ρ et de T par des relations de la forme

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial u};$$

nous en déduisons immédiatement les variations des dérivées de Θ qui sont, d'après les formules (44) et (45),

$$\delta' \frac{\partial \Theta}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)\left(-\frac{\rho}{H} k \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right). \tag{46}$$

§ IX. — Discontinuités d'ordre supérieur.

Les formules auxquelles nous sommes parvenus pour les discontinuités du second ordre se généralisent aisément. L'onde Σ étant supposée d'ordre n par rapport aux coordonnées x, y, z, toutes les dérivées de ces fonctions par rapport à (u, v, t) jusqu'à celles d'ordre $n - 1$ inclusivement sont continues quand on passe de la région 1 à la région 2 ; mais il n'en est plus de même d'une au moins des dérivées d'ordre n, qui subit une variation brusque à la traversée de l'onde.

On reconnaît alors que les variations des dérivées d'ordre n des coordonnées sont exprimées par les formules

$$\delta' \frac{\partial^n (x, y, z)}{\partial u^p \partial v^q \partial t^r} = \alpha^p \beta^q (-V_0)^r (\lambda, \mu, \nu) \qquad (p + q + r = n). \tag{47}$$

où λ, μ, ν désignent les composantes du vecteur discontinuité et V_0 la vitesse de propagation de l'image de l'onde.

L'onde est, en général, d'ordre $n-1$ par rapport aux quantités

$$E,\quad F,\quad G,\quad H,\quad \rho,$$

et l'on trouve les formules suivantes qui généralisent les formules (42), (43) et (44) :

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}
&k\delta'\frac{\partial^{n-1}E}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = 2\alpha^{p+1}\beta^q(-V_0)^{r-1}(\alpha H\Sigma a\lambda + n\Sigma a'\lambda),\\
&k\delta'\frac{\partial^{n-1}F}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}[2\alpha\beta H\Sigma a\lambda + (-m\alpha + n\beta)\Sigma a'\lambda],\\
&k\delta'\frac{\partial^{n-1}G}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = 2\alpha^p\beta^{q+1}(-V_0)^{r-1}(\beta H\Sigma a\lambda - m\Sigma a'\lambda),\\
&\delta'\frac{\partial^{n-1}H}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}k\Sigma a\lambda,\\
&\delta'\frac{\partial^{n-1}\rho}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = -\frac{\rho}{H}\alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}k\Sigma a\lambda.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, si l'onde est aussi d'ordre $n-1$ pour T, il existe une quantité τ telle que

$$\delta'\frac{\partial^{n-1}T}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}\tau,$$

et les variations des dérivées de Θ sont données par la formule

$$\delta'\frac{\partial^{n-1}\Theta}{\partial u^p\,\partial v^q\,\partial t^{r-1}} = \alpha^p\beta^q(-V_0)^{r-1}\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\tau\right).$$

CHAPITRE III.

LES ONDES DE CHOC [1].

§ I. — Emploi de l'équation fondamentale de l'énergétique.

Supposons qu'à l'instant t la membrane soit le siège d'une onde de choc Σ : traçons sur la membrane une courbe Γ' la divisant en deux

---

[1] *Les ondes de choc dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, 18 mars 1912, t. CLIV, p. 759).

parties que nous désignerons par les indices a et b, et soient Γ_a et Γ_b les parties du contour Γ correspondant à chacune de ces deux régions; nous aurons, évidemment, $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$.

La courbe Γ' est tracée de telle sorte qu'entre les instants t et $t + dt$, l'onde se trouve tout entière dans la région a sans toucher la courbe Γ' en aucun point ; dans ces conditions et dans le même intervalle de temps, la discontinuité n'atteindra aucun point de la région b ni de son contour $\Gamma' + \Gamma_b$.

Soient C', C_a, C_b les images respectives dans le plan des (u, v) des courbes Γ', Γ_a, Γ_b tracées sur la membrane; nous désignerons par les mêmes indices a et b les deux régions du plan limitées par les contours $C' + C_a$, $C' + C_b$ et correspondant à celles déterminées sur la membrane par la courbe Γ'.

Cela posé, l'équation fondamentale de l'Énergétique

$$\delta \mathfrak{T}_e + \delta \mathfrak{T}_v + \delta \dot{J} - \delta_T \Phi = 0, \tag{1}$$

que nous avons employée (Chap. I, § IV) pour obtenir les équations du mouvement, suppose les accélérations finies en chaque point du milieu considéré; il n'en sera plus de même si le milieu est le siège d'une onde de choc, car les accélérations des points rencontrés par l'onde sont infinies. Avec M. Duhem, nous ferons l'hypothèse que l'équation précédente est encore applicable dans ce cas, et c'est à très peu près la méthode employée par cet auteur en Hydrodynamique que nous allons suivre, pour étudier la propagation des ondes de choc dans les membranes ([1]).

Évaluons les différents termes de l'équation (1) : on a d'abord

$$\delta \mathfrak{T}_e = \int_C \Sigma \mathfrak{T}_x \, \delta x \, d\sigma + \int_{a+b} \Sigma X \, \delta x \, dm.$$

Les composantes de la vitesse étant discontinues en certains points de la région a, nous écrirons, pour les points de cette région, les composantes de l'accélération sous la forme

$$\frac{U' - U}{dt}, \quad \frac{V' - V}{dt}, \quad \frac{W' - W}{dt},$$

([1]) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e Partie, Ch. I, § 2.

U′, V′, W′ désignant les composantes de la vitesse à l'instant $t+dt$; nous avons donc

$$\delta \mathrm{J} = -\int_b \sum \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\delta x\,dm - \frac{1}{dt}\int_a \sum (\mathrm{U}' - \mathrm{U})\,\delta x\,dm;$$

d'autre part, on a évidemment

$$\delta \mathfrak{G}_v = \delta \mathfrak{G}_{va} + \delta \mathfrak{G}_{vb}, \qquad \delta_{\mathrm{T}} \Phi = \delta_{\mathrm{T}} \Phi_a + \delta_{\mathrm{T}} \Phi_b;$$

l'équation (1) peut donc s'écrire

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0, \tag{2}$$

en posant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} = &-\int_a \Sigma(\mathrm{U}' - \mathrm{U})\,\delta x\,dm \\ &+ dt\left(\delta \mathfrak{G}_{va} - \delta_{\mathrm{T}} \Phi_a + \int_{\mathrm{C}_a} \Sigma \mathfrak{G}_x\,\delta x\,d\sigma + \int_a \Sigma \mathrm{X}\,\delta x\,dm\right), \\ \mathrm{B} = &\; dt\left(\delta \mathfrak{G}_{vb} - \delta_{\mathrm{T}} \Phi_b + \int_{\mathrm{C}_b} \Sigma \mathfrak{G}_x\,\delta x\,d\sigma + \int\int_b \Sigma \mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv\right). \end{aligned}\right.$$

Imposons tout d'abord à la membrane une modification virtuelle qui laisse immobiles tous les points de la région a et de son contour $\Gamma' + \Gamma_a$. On aura, dans cette modification, $\mathrm{A} = 0$ et l'équation (2) se réduira à

$$\mathrm{B} = 0.$$

Par des calculs analogues à ceux qui nous ont donné les équations générales du mouvement d'une membrane (Chap. I, § IV), nous verrions qu'on doit avoir :

1. En tout point de la région b

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{array}\right.$$

2. En tout point du contour C_b

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{G}_x - \alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) - \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Imposons maintenant à la membrane un déplacement virtuel quelconque; multiplions les équations (4) respectivement par $\delta(x, y, z)$, $du\,dv$, ajoutons-les membre à membre et intégrons dans la région b; il viendra

$$\int\!\!\int_b \sum \left[\mathcal{X} + \frac{\partial(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)}{\partial v} \right] \delta x \, du \, dv = 0.$$

Ceci peut s'écrire encore, moyennant une intégration par parties,

$$(6)\quad \begin{aligned} &\int\!\!\int_b \sum \left[\mathcal{X}\,\delta x - (\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) \frac{\partial\,\delta x}{\partial u} - (-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v) \frac{\partial\,\delta x}{\partial v} \right] du\,dv \\ &\quad + \int_{C_b} \Sigma [\alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma \\ &\quad + \int_{C'} \Sigma [\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0, \end{aligned}$$

α', β' désignant les cosinus directeurs de la demi-normale au contour C' menée vers l'extérieur de b.

Mais, d'après l'égalité (31) du Chapitre I, on a

$$\delta \mathfrak{E}_{vb} - \delta_T \Phi_b = -\int\!\!\int \sum \left[(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) \frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v) \frac{\partial\,\delta x}{\partial v} \right] du\,dv;$$

l'égalité (6) peut donc s'écrire, en vertu des équations (5),

$$\begin{aligned} &\delta \mathfrak{E}_{vb} - \delta_T \Phi_b + \int_{C_b} \Sigma\, \mathfrak{G}_x \,\delta x\,d\sigma + \int\!\!\int_b \Sigma\, \mathcal{X}\,\delta x\,du\,dv \\ &\quad + \int_{C'} \Sigma [\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

La deuxième des égalités (3) devient alors

$$B = -dt \int_{C'} \Sigma [\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma,$$

de sorte que l'équation (2) s'écrit

$$(7)\quad \begin{aligned} &\int_a \Sigma (U' - U)\,\delta x\,dm \\ &\quad - dt \left(\delta \mathfrak{E}_{va} - \delta_T \Phi_a + \int_{C_a} \Sigma\, \mathfrak{G}_x\,\delta x\,d\sigma + \int_a \Sigma X\,\delta x\,dm \right) \\ &\quad + dt \int_{C'} \Sigma [\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

C'est là l'équation dont nous allons faire usage en particularisant la région a.

Considérons, dans le plan des (u, v), les images s et s' de l'onde aux instants t et $t + dt$ (*fig.* 1); ces deux courbes déterminent entre elles, soit seules si elles sont fermées et ne rencontrent pas le contour C, soit avec une portion du contour C comme dans le cas de la figure, une région a_0 dont la largeur en un point m de s est $mm' = V_0\, dt$,

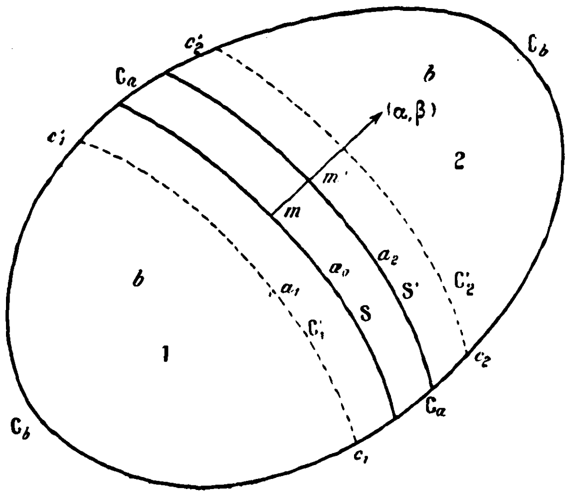

Fig. 1.

si la propagation se fait de la région 1 vers la région 2, ce que nous allons supposer pour fixer les idées. Désignons par ε_1, ε_2 des quantités finies positives et prenons comme courbe C' l'ensemble de deux courbes, l'une C'_1 située dans la région 1 à la distance $\varepsilon_1\, dt$ de s, l'autre C'_2 située dans la région 2 à la distance $\varepsilon_2\, dt$ de s' et de telle façon qu'en passant de la région 1 à la région 2, on rencontre les quatre courbes considérées dans l'ordre C'_1, s, s', C'_2. Si nous appelons a_1 la région comprise entre C'_1 et s, a_2 la région comprise entre s' et C'_2, nous aurons

$$a = a_0 + a_1 + a_2.$$

Si l'image s de l'onde est une courbe fermée, il en sera de même des trois autres courbes et la région a n'aura aucune partie commune avec le contour C; on aura donc $C_a = 0$, $C_b = C$. Dans le cas de la figure, au contraire, où s rencontre le contour C, le contour C_a se compose de deux parties, c_1c_2, $c'_1c'_2$, infiniment petites de l'ordre de dt.

Cela posé, évaluons les différents termes de l'équation (7) en commençant par le premier.

Dans la région a_0 qui appartient à la région 2, on a

$$dm = \rho_2 H_2 \, du \, dv = \rho H \, du \, dv,$$

en vertu de l'équation (27) du Chapitre II et de la convention que nous avons faite (Chap. II, § IV) relativement aux indices; si nous prenons comme élément d'aire dans le plan des (u, v)

$$mm' \, d\sigma = V_0 \, dt \, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'arc de s, on aura

$$dm = \rho H V_0 \, dt \, d\sigma.$$

D'autre part, les points de la région a_0 sont dans la région 2 à l'instant t et dans la région 1 à l'instant $t+dt$; avec la notation du Chapitre II, nous avons donc

$$U' - U = U_1 - U_2 = -\delta' U,$$

ce qui donne, pour le premier terme de l'équation (7) relatif à a_0,

$$-dt \int \Sigma \, \delta' U \rho H V_0 \, \delta x \, d\sigma,$$

l'intégration s'étendant à toute la courbe s. Les régions a_1 et a_2 donneraient chacune un terme analogue, mais où $\delta' U$, au lieu d'être une quantité généralement finie, serait de l'ordre de dt. Ces deux termes sont donc négligeables et l'expression précédente représente bien à elle seule le premier terme de l'équation (7); comme elle est de l'ordre de $dt \, \delta(x, y, z)$, nous négligerons dans l'équation (7) les quantités d'un ordre supérieur.

Dès lors, l'expression

$$dt \left(-\delta_T \Phi_a + \int_{C_a} \Sigma \mathfrak{S}_x \, \delta x \, d\sigma + \int_a \Sigma X \, \delta x \, dm \right)$$

est négligeable comme étant de l'ordre de $dt^2 \, \delta(x, y, z)$.

Occupons-nous de la dernière intégrale de l'équation (7) qui doit être étendue au contour $C' = C'_1 + C'_2$. Le long de C'_1, on a très sensiblement $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, (α, β) désignant les cosinus directeurs de la demi-normale à s menée vers la région 2, et l'on peut, sans erreur sensible, intégrer le long de s en prenant pour $\delta(x, y, z)$ la valeur de ces mêmes quantités sur s puisqu'elles sont continues; le long de C'_2, on a très sensiblement $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$ et l'on peut, de même, substituer s à C'_2 comme chemin d'intégration. Il viendra donc

$$\begin{aligned}
&\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathcal{M}x'_u - \mathcal{N}x'_v) + \beta'(-\mathcal{N}x'_u + \mathcal{P}x'_v)]\,\delta x\,d\sigma \\
&= \int \Sigma[\alpha\,(\mathcal{M}x'_u - \mathcal{N}x'_v) + \beta\,(-\mathcal{N}x'_u + \mathcal{P}x'_v)]_1\,\delta x\,d\sigma \\
&\quad - \int \Sigma[\alpha\,(\mathcal{M}x'_u - \mathcal{N}x'_v) + \beta\,(-\mathcal{N}x'_u + \mathcal{P}x'_v)]_2\,\delta x\,d\sigma,
\end{aligned}$$

les deux dernières intégrations s'étendant à la courbe s. Posons alors, pour simplifier,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
Q_x &= \alpha(\mathcal{M}x'_u - \mathcal{N}x'_v) + \beta(-\mathcal{N}x'_u + \mathcal{P}x'_v),\\
Q_y &= \alpha(\mathcal{M}y'_u - \mathcal{N}y'_v) + \beta(-\mathcal{N}y'_u + \mathcal{P}y'_v),\\
Q_z &= \alpha(\mathcal{M}z'_u - \mathcal{N}z'_v) + \beta(-\mathcal{N}z'_u + \mathcal{P}z'_v);
\end{aligned}\right.$$

l'équation (7) deviendra, après avoir divisé par dt,

$$(9)\qquad \int \Sigma(\rho H V_0\,\delta' U + \delta' Q_x)\,\delta x\,d\sigma + \delta\mathcal{T}_{va} = 0.$$

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à évaluer le travail virtuel des actions de viscosité $\delta\mathcal{T}_{va}$; d'après l'équation précédente, nous ne devons conserver dans $\delta\mathcal{T}_{va}$ que les termes de l'ordre de $\delta(x, y, z)$.

D'après les formules (3), (10) et (17) du Chapitre I, on a, d'une manière générale,

$$(10)\qquad \delta\mathcal{T}_v = -2\int\!\!\int \sum\left[(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right] H\,du\,dv,$$

l'intégration s'étendant à la région du plan des (u, v) correspondant à la portion de membrane considérée. Pour calculer $\delta\mathcal{T}_{va}$, nous devons donc étendre l'intégration à la région $a_0 + a_1 + a_2$.

Tout d'abord, dans les régions a_1 et a_2, les quantités $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ sont finies; il en est donc de même des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ données par les formules (24) du Chapitre I, et, comme les aires d'intégration sont de l'ordre de dt, ces régions donnent lieu à un terme de l'ordre de $dt\,\frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ qui est négligeable, car les quantités $\frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ et $\delta(x,y,z)$ sont du même ordre de grandeur.

Les points de la région a_0 étant balayés par l'onde de choc entre les instants t et $t+dt$, les dérivées E′, F′, G′ y sont infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{dt}$, et, comme nous l'avons fait pour les composantes de l'accélération qui étaient du même ordre d'infinitude, nous écrirons pour les points de la région a_0

$$(11)\qquad E'=\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{E_1-E_2}{dt}=-\frac{\delta' E}{dt},\qquad F'=-\frac{\delta' F}{dt},\qquad G'=-\frac{\delta' G}{dt}.$$

Mais les expressions données des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ supposaient jusqu'ici les dérivées E′, F′, G′ très petites ou, tout au moins, inférieures à une certaine limite; nous ne savons donc pas si ces expressions conserveront un sens si nous y remplaçons ces dérivées par leurs valeurs actuelles (11). A l'imitation de M. Duhem, qui a fait une hypothèse semblable en Hydrodynamique (¹), nous répondrons à la question qui se pose par l'hypothèse suivante :

Les expressions

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\mathcal{E} &= \Lambda G\theta + MG',\\ 2\mathcal{F} &= \Lambda F\theta + MF',\\ 2\mathcal{G} &= \Lambda E\theta + ME',\end{aligned}\right.$$

qui font connaître les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, lorsque les dérivées E′, F′, G′ restent très petites, sont encore valables lorsque ces dérivées croissent au delà de toute limite.

Dès lors, dans l'expression (10) relative à la région a_0, les quantités $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ données par les formules précédentes seront de l'ordre de $\frac{1}{dt}$ si les accroissements $\delta'(E,F,G)$ ne sont pas nuls; comme, d'autre part, la région a_0 appartient à la région 2 à l'instant t où se fait l'intégration, on peut prendre

$$H\,du\,dv = H_2 V_0\,dt\,d\sigma,$$

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*

$d\sigma$ étant un élément d'arc de s; ceci montre que $\delta\mathcal{C}_{va}$ est de l'ordre de $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(u, v)}$. Nous aurons ainsi

$$(13)\quad \delta\mathcal{C}_{va} = -2\,dt\int\sum\left[(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right]\mathrm{H}_2\mathrm{V}_0\,d\sigma,$$

l'intégration étant faite le long de s et l'indice 2 placé au bas des parenthèses indiquant que celles-ci se rapportent à la région 2.

Au lieu des dérivées de $\delta\,(x, y, z)$ suivant les axes du plan des (u, v), introduisons leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial n}$ suivant la demi-normale (α, β) à s et leurs dérivées $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ suivant la tangente à s menée, par exemple, dans le sens des ω croissants; on trouve aisément les formules

$$\frac{\partial}{\partial u} = \alpha\frac{\partial}{\partial n} + \beta\frac{\partial}{\partial\sigma},$$
$$\frac{\partial}{\partial v} = \beta\frac{\partial}{\partial n} - \alpha\frac{\partial}{\partial\sigma},$$

qui permettent d'exprimer $\delta\mathcal{C}_{va}$ au moyen des dérivées $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(n, \sigma)}$. D'après cela, l'équation (9) devient

$$(14)\quad \begin{aligned}&\int\Sigma[\rho\mathrm{H}\mathrm{V}_0\,\delta'\mathrm{U} + \delta'\mathrm{Q}_x)\,\delta x\,d\sigma\\
&-2\,dt\int\Sigma[\alpha(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 + \beta(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2]\frac{\partial\,\delta x}{\partial n}\mathrm{H}_2\mathrm{V}_0\,d\sigma\\
&-2\,dt\int\Sigma[\beta(\mathcal{E}x'_u - \mathcal{F}x'_v)_2 - \alpha(-\mathcal{F}x'_u + \mathcal{G}x'_v)_2]\frac{\partial\,\delta x}{\partial\sigma}\mathrm{H}_2\mathrm{V}_0\,d\sigma = 0.\end{aligned}$$

C'est là l'équation fondamentale que nous voulions obtenir et qu'il nous reste à discuter.

§ II. — Cas d'une membrane affectée de viscosité.

L'équation (14) doit être vérifiée, quelles que soient les fonctions $\delta(x, y, z)$; supposons, tout d'abord, qu'on ait tout le long de la courbe s

$$\delta(x, y, z) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial\,\delta(x, y, z)}{\partial\sigma} = 0.$$

L'équation (14) se réduira à sa deuxième ligne

$$-2\,dt\int\Sigma\left[\alpha(\mathcal{E}x'_u-\mathcal{F}x'_v)_2+\beta(-\mathcal{F}x'_u+\mathcal{G}x'_v)_2\right]\frac{\partial\,\delta x}{\partial n}\,H_2V_0\,d\sigma=0$$

et devra être vérifiée, quelles que soient les dérivées $\frac{\partial\delta(x,y,z)}{\partial n}$; on devra donc avoir tout le long de $\mathfrak{s}$

$$\begin{aligned}
dt[\alpha(\mathcal{E}x'_u-\mathcal{F}x'_v)_2+\beta(-\mathcal{F}x'_u+\mathcal{G}x'_v)_2]&=0,\\
dt[\alpha(\mathcal{E}y'_u-\mathcal{F}y'_v)_2+\beta(-\mathcal{F}y'_u+\mathcal{G}y'_v)_2]&=0,\\
dt[\alpha(\mathcal{E}z'_u-\mathcal{F}z'_v)_2+\beta(-\mathcal{F}z'_u+\mathcal{G}z'_v)_2]&=0,
\end{aligned}$$

équations où nous avons laissé dt, parce que les quantités $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})\,dt$ sont finies.

Supposons qu'on ait $\beta=0$, $\alpha=1$; il reste trois équations linéaires et homogènes en $\mathcal{E}_2\,dt$, $\mathcal{F}_2\,dt$ qui, prises deux à deux, ne peuvent avoir leurs déterminants tous les trois nuls, puisqu'ils sont respectivement proportionnels aux cosinus directeurs a''_2, b''_2, c''_2 de la normale au plan tangent à la région 2 mené au point considéré de l'onde Σ. On doit donc avoir

$$(15)\qquad \mathcal{E}_2\,dt=0,\qquad \mathcal{F}_2\,dt=0$$

et, par suite,

$$\mathcal{G}_2\,dt=0.$$

D'après les égalités (11) et (12) et l'expression de θ [Chap. I, égalité (14)], les équations (15) et la suivante s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda_2}{2}G_2^2\,\delta'E-\Lambda_2F_2G_2\,\delta'F+\left(\frac{\Lambda_2}{2}E_2G_2+M_2H_2^2\right)\delta'G&=0,\\
-\Lambda_2F_2G_2\,\delta'E+2(\Lambda_2F_2^2-M_2H_2^2)\,\delta'F-\Lambda_2E_2F_2\,\delta'G&=0,\\
\left(\frac{\Lambda_2}{2}E_2G_2+M_2H_2^2\right)\delta'E-\Lambda_2E_2F_2\,\delta'F+\frac{\Lambda_2}{2}E_2^2\,\delta'G&=0;
\end{aligned}$$

nous avons ainsi un système de trois équations linéaires et homogènes entre $\delta'(E, F, G)$, système dont le déterminant est essentiellement positif, sans quoi la fonction dissipative ne serait pas, dans la région 2, une forme quadratique définie positive (Chap. I, § III). On doit donc avoir

$$(16)\qquad \delta'E=0,\qquad \delta'F=0,\qquad \delta'G=0.$$

Il résulte alors des formules (11) que, dans la région a_0, on a $(E', F', G') = 0$, ce que nous devons écrire $(E'_2, F'_2, G'_2) = 0$, puisque cette région appartient à la région 2 à l'instant t; on a, par suite,

$$\mathcal{E}_2 = 0, \qquad \mathcal{F}_2 = 0, \qquad \mathcal{G}_2 = 0,$$

d'après les formules (12). Si nous avions supposé un sens inverse de propagation, nous aurions eu l'indice 1 à la place de l'indice 2 dans ces égalités. Nous arrivons donc à cette première conclusion que les actions de viscosité sont nulles, en tout point de la membrane infiniment voisine de l'onde et pris sur la région vers laquelle l'onde se dirige.

D'après les formules (22), (23), (25) du Chapitre II, les égalités (16) s'écrivent d'une manière plus explicite

$$\alpha(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda) + (n_1 + n_2)\Sigma a'\lambda = 0,$$
$$\alpha\beta(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda) + \frac{-(m_1+m_2)\alpha + (n_1+n_2)\beta}{2}\Sigma a'\lambda = 0,$$
$$\beta(H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda) - (m_1 + m_2)\Sigma a'\lambda = 0.$$

La première et la troisième de ces égalités constituent deux équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda, \quad \Sigma a'\lambda,$$

dont le déterminant vaut $2k^2$ d'après les formules (15) et (20) du Chapitre II. On doit donc avoir

$$H_1\Sigma a_1\lambda + H_2\Sigma a_2\lambda = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0,$$

ce qui vérifie la deuxième des équations précédentes. Il résulte alors des formules (26) et (28) du Chapitre II qu'on a

$$\delta' H = 0, \qquad \delta'\rho = 0,$$

de sorte que la formule (29) du même Chapitre nous donne

$$\Sigma(a_1 + a_2)\lambda = 0. \tag{17}$$

En définitive, une onde de choc qui se propage dans une membrane affectée de viscosité est caractérisée par les égalités

$$\delta'\rho = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0, \tag{18}$$

d'où se déduit immédiatement l'égalité (17). Elles expriment qu'en chaque point M de l'onde Σ, le vecteur discontinuité (λ, μ, ν) se trouve suivant l'intersection du plan normal à l'onde Σ en M et du plan bissecteur des deux plans tangents en M aux régions 1 et 2, qui traverse la membrane au point M.

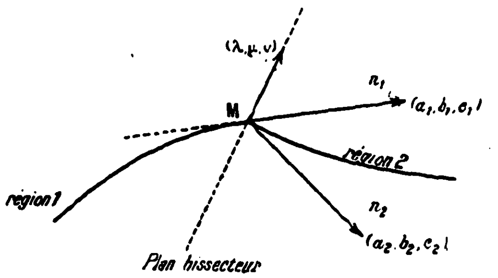

Fig. 2.

La figure 2 représente l'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde.

Il résulte des égalités (15) que l'équation (14) se réduit à sa première ligne et qu'on doit avoir pour tout déplacement virtuel

$$\int \Sigma(\rho H V_0 \delta' U + \delta' Q_x)\, \delta x\, d\sigma = 0. \tag{19}$$

Puisque H est continue à la traversée de l'onde, les formules (32) et (32′) du Chapitre II rentrent dans la formule unique

$$k\mathfrak{V} = HV_0,$$

$\mathfrak{V}$ désignant la vitesse de propagation de l'onde, positive ou négative suivant le sens de cette propagation. Introduisons $\mathfrak{V}$ à la place de V_0 dans l'équation (19) : celle-ci devant être vérifiée, quelles que soient les fonctions $\delta(x, y, z)$, on doit avoir, en chaque point de l'onde,

$$\left\{\begin{array}{l} \rho k \mathfrak{V}\, \delta' U + \delta' Q_x = 0, \\ \rho k \mathfrak{V}\, \delta' V + \delta' Q_y = 0, \\ \rho k \mathfrak{V}\, \delta' W + \delta' Q_z = 0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Ces équations tiennent lieu d'équations indéfinies dans le problème des ondes de choc.

Calculons les quantités (Q_x, Q_y, Q_z) données par les formules (8) en tenant compte des formules (21) et (21′) du Chapitre II : si nous posons

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{M}\alpha^2 - 2\mathcal{N}\alpha\beta + \mathcal{L}\beta^2, \\ k\mathcal{B} &= n(\mathcal{M}\alpha - \mathcal{N}\beta) - m(-\mathcal{N}\alpha + \mathcal{L}\beta), \end{aligned}$$

on trouve, par un calcul facile,

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = (a, b, c)\frac{H}{k}\mathcal{A} + (a', b', c')\mathcal{B}.$$

Pour expliciter les équations (20), nous devons calculer les variations δ' éprouvées par les quantités (Q_x, Q_y, Q_z) à la traversée de l'onde.

Il résulte tout d'abord des formules (18) que les formules (31) du Chapitre II se réduisent à

$$\delta'(a, b, c) = \frac{k}{H}(\lambda, \mu, \nu);$$

nous avons alors

$$\delta' Q_x = \lambda\mathcal{A}_1 + a_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}_2 + a_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B},$$

ainsi que deux formules analogues pour Q_y, Q_z. Tenons compte enfin de ce que

$$\delta'(U, V, W) = -(\lambda, \mu, \nu)V_0 = -(\lambda, \mu, \nu)\frac{k}{H}\mathcal{V}$$

et les équations (20) pourront s'écrire des deux manières suivantes

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\lambda + a_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = 0, \\ &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\mu + b_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + b'\delta'\mathcal{B} = 0, \\ &\left(\mathcal{A}_1 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\nu + c_2\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + c'\delta'\mathcal{B} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(22')\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\lambda + a_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + a'\delta'\mathcal{B} = 0, \\ &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\mu + b_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + b'\delta'\mathcal{B} = 0, \\ &\left(\mathcal{A}_2 - \rho\frac{k^2}{H}\mathcal{V}^2\right)\nu + c_1\frac{H}{k}\delta'\mathcal{A} + c'\delta'\mathcal{B} = 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions les équations (22) ou (22′) respectivement par a', b', c' et ajoutons membre à membre; en tenant compte de ce que

$$\Sigma a'\lambda = 0, \qquad \Sigma(a_1, a_2)a' = 0,$$

il vient

$$\delta' \mathcal{A} = 0.$$

Tenons compte de cette simplification dans les équations précédentes; deux cas sont à distinguer :

I. $\delta' \mathcal{A} \neq 0$. Les équations (22) et (22′) considérées deux à deux nous donnent alors

$$\frac{\lambda}{(a_1, a_2)} = \frac{\mu}{(b_1, b_2)} = \frac{\nu}{(c_1, c_2)}, \tag{23}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mathcal{A}_1 - \rho \frac{k^2}{\mathrm{H}} \mathcal{V}^2}{\mathcal{A}_2 - \rho \frac{k^2}{\mathrm{H}} \mathcal{V}^2} = -1, \tag{24}$$

la valeur commune de ces derniers rapports ne pouvant être égale à $+1$, car il en résulterait $\delta' \mathcal{A} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les égalités (23) expriment que la discontinuité est longitudinale, les égalités (24) que la courbe d'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde présente en M un point de rebroussement. La dernière des égalités (24) fait connaître la vitesse de propagation de l'onde

$$\mathcal{V} = \pm \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{k^2} \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{2\rho}}, \tag{25}$$

le radical devant être pris avec le signe + ou le signe − suivant que la discontinuité se propage de la région 1 vers la région 2 ou en sens inverse.

Cette vitesse peut d'ailleurs se mettre sous une forme plus explicite : la formule (21) jointe aux formules (30) du Chapitre I nous donne en effet

$$\frac{\mathrm{H}}{k^2} \mathcal{A} = \Theta + 2 \frac{\mathrm{H}^2}{k^2} (\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2),$$

de sorte que la formule (25) peut encore s'écrire

$$\mathcal{V} = \pm \sqrt{\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2\rho} + \frac{\mathrm{H}^2}{k^2} \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)\alpha^2 - 2(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)\alpha\beta + (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)\beta^2}{\rho}}; \tag{26}$$

ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2) = 0$ si le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 et alors on prend le signe + devant le radical; $(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) = 0$ si la propagation se fait en sens contraire et alors on doit prendre le signe −.

Nous appellerons *ondes de deuxième espèce* les ondes qui rentrent dans la catégorie précédente; nous rencontrerons au paragraphe suivant des *ondes de première espèce*, que propagent seulement les membranes dénuées de viscosité.

II. $\delta'\mathcal{A} = 0$. Les équations (22) et (22′) se confondent et se réduisent aux suivantes

$$\left(\mathcal{A} - \rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

d'où l'on déduit pour la vitesse de propagation

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{\mathrm{H}^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}. \tag{27}$$

Comme la quantité $\mathcal{A}$ est continue par hypothèse à la traversée de l'onde, les quantités Θ, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ peuvent être affectées indifféremment mais simultanément des indices 1 ou 2; si le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2, nous mettrons les indices 2 et alors on aura $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2) = 0$; si la propagation se fait en sens inverse, nous mettrons les indices 1 et alors on aura $(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) = 0$. Revenant aux notations $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, nous aurons donc

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho}}. \tag{27'}$$

Nous appellerons *ondes de troisième espèce* les ondes qui rentrent dans cette catégorie.

§ III. — Cas d'une membrane dénuée de viscosité.

Par hypothèse, on a $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ en tout point de la membrane; l'équation (14) se réduit donc à sa première ligne

$$\int \Sigma(\rho \mathrm{H} \mathrm{V}_0\, \delta'\mathrm{U} + \delta'\mathrm{Q}_x)\,\delta x\, d\sigma = 0. \tag{28}$$

Les formules (30) du Chapitre I se réduisent à

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}) = \Theta \frac{(G, F, E)}{H}$$

et l'on trouve aisément, d'après les formules (8),

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = k\Theta(a, b, c).$$

L'équation (28) nous donne alors les suivantes

$$(29) \qquad \begin{cases} -\rho H V_0^2 \lambda + k\delta'(\Theta a) = 0, \\ -\rho H V_0^2 \mu + k\delta'(\Theta b) = 0, \\ -\rho H V_0^2 \nu + k\delta'(\Theta c) = 0. \end{cases}$$

Mais les identités (24) du Chapitre II nous donnent

$$\delta'(\Theta a) = \Theta_1 \delta' a + a_2 \delta' \Theta = \Theta_2 \delta' a + a_1 \delta' \Theta,$$

de sorte qu'en tenant compte des expressions générales de $\delta' a$, il vient

$$\delta'(\Theta a) = \frac{\Theta_1}{H_1} k(\lambda - a'\Sigma a'\lambda) + a_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{\rho_2} \equiv \frac{\Theta_2}{H_2} k(\lambda - a'\Sigma a'\lambda) + a_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{\rho_1}$$

et l'on aurait deux autres formules analogues pour $\delta'(\Theta b)$, $\delta'(\Theta c)$. Dès lors, les équations (29) peuvent s'écrire sous les deux formes équivalentes

$$(30) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_2 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \dfrac{\Theta_1}{H_1} a'\Sigma a'\lambda = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_2 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \dfrac{\Theta_1}{H_1} b'\Sigma a'\lambda = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_2 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} - \dfrac{\Theta_1}{H_1} c'\Sigma a'\lambda = 0; \end{cases}$$

$$(30') \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \dfrac{\Theta_2}{H_2} a'\Sigma a'\lambda = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \dfrac{\Theta_2}{H_2} b'\Sigma a'\lambda = 0, \\ \left(\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_1 \dfrac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} - \dfrac{\Theta_2}{H_2} c'\Sigma a'\lambda = 0. \end{cases}$$

Multiplions les équations (30) ou (30') respectivement par a', b', c'

et ajoutons membre à membre, il vient

$$V_0^2\,\Sigma a'\lambda = 0. \tag{31}$$

Multiplions de même les équations (30) respectivement par les cosinus directeurs a''_2, b''_2, c''_2, de la normale au plan tangent en M à la région 2 et ajoutons membre à membre; les équations (30′) par les cosinus directeurs a''_1, b''_1, c''_1 de la normale au plan tangent en M à la région 1 et ajoutons membre à membre. Étant données les conditions de perpendicularité, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\Sigma a''_2\lambda = 0,\\ &\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\Sigma a''_1\lambda = 0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

En multipliant enfin les équations (30) par a_2, b_2, c_2, les équations (30′) par a_1, b_1, c_1, on trouvera de même

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\Sigma a_2\lambda + \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0,\\ &\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\Sigma a_1\lambda + \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Ces équations vont nous permettre de discuter les différents cas qui peuvent se présenter.

A. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Alors, d'après l'égalité (31), $V_0 = 0$; l'onde est donc stationnaire. Comme la tension en un point d'une membrane est essentiellement positive en vertu des conditions de stabilité (1), les les équations (32) deviennent

$$\Sigma a''_1\lambda = 0, \qquad \Sigma a''_2\lambda = 0. \tag{34}$$

Si les normales (a''_1, b''_1, c''_1), (a''_2, b''_2, c''_2) sont confondues, il en est de même des normales Mn_1 et Mn_2 menées dans les plans tangents en M aux régions 1 et 2 et l'on a $\delta'(a, b, c) = 0$. S'il n'en est pas ainsi, ces normales ne peuvent pas être opposées, car on aurait

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad b_1 + b_2 = 0, \qquad c_1 + c_2 = 0, \qquad \delta'(a, b, c) \neq 0,$$

(1) P. Duhem, *Hydrodynamique*, *Élasticité*, *Acoustique*, t. II, p. 98.

et, comme les équations (29) s'écrivent, dans le cas actuel où $V_0 = 0$,

$$(35)\qquad (\Theta_1 + \Theta_2)\,\delta' a + (a_1 + a_2)\,\delta'\Theta = 0,$$

avec deux équations analogues, on serait conduit à une impossibilité. Ainsi, si les normales aux plans tangents ne sont pas confondues, elles font entre elles un angle différent de π. Dès lors, d'après les équations (34), la discontinuité est tangente à l'onde, c'est-à-dire transversale et l'on a par suite

$$\Sigma a_1 \lambda = 0, \qquad \Sigma a_2 \lambda = 0.$$

On a donc $\delta'(\rho\Theta) = 0$, d'après les formules (33), et $\delta'\rho = 0$, d'après la formule (29) du Chapitre II. En outre, les formules (30) ou (30') se réduisent à

$$(\lambda, \mu, \nu) - (a', b', c')\Sigma a'\lambda = 0,$$

égalités qui expriment précisément la transversalité de la discontinuité, et finalement les formules (31) du Chapitre II donnent $\delta'(a, b, c) = 0$.

Les cosinus directeurs a, b, c restent donc assurément continus à la traversée de l'onde; l'équation (35) et les deux autres analogues nous donnent $\delta'\Theta = 0$. D'après les équations (34), qui se réduisent à

$$\Sigma a''\lambda = 0,$$

la discontinuité se trouve dans le plan tangent en M à la membrane et c'est tout ce qu'on peut dire; elle peut n'être ni longitudinale ni transversale.

B. $\Sigma a'\lambda = 0$. Alors, la discontinuité se trouve dans le plan normal à l'onde; d'après l'équation (31), la vitesse de propagation peut différer de zéro. Les équations (30) et (30') deviennent

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0, \\ &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0, \\ &\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_2 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_2} = 0 \end{aligned}\right.$$

et

$$
(36')\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\lambda + a_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0,\\
&\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\mu + b_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0,\\
&\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)\nu + c_1 \frac{\delta'(\rho\Theta)}{k\rho_1} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Il nous faut alors distinguer deux cas suivant que $\delta'(\rho\Theta)$ est différent de zéro ou égal à zéro.

I. $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$. Les équations (36) et (36′) considérées deux à deux nous donnent dans ces conditions

$$
(37)\qquad \frac{\lambda}{(a_1, a_2)} = \frac{\mu}{(b_1, b_2)} = \frac{\nu}{(c_1, c_2)},
$$

$$
(38)\qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\dfrac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}}{\dfrac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \dfrac{V_0^2}{k^2}} = \mathcal{K},
$$

$\mathcal{K}$ désignant la valeur commune ± 1 des derniers rapports égaux. Les égalités (37) montrent que la discontinuité est longitudinale, mais il y a encore deux cas à distinguer suivant la valeur de $\mathcal{K}$.

1. $\mathcal{K} = +1$. Les égalités (38) nous donnent alors

$$
\delta'(a, b, c) = 0,
$$
$$
\rho_2\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) = \rho_1\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right).
$$

Si nous introduisons dans cette dernière égalité les vitesses $\mathfrak{V}_1$ ou $\mathfrak{V}_2$ de propagation de l'onde liées, comme nous l'avons vu, à V_0 par les égalités

$$
k(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2) = (H_1, H_2)V_0,
$$

on trouve aisément

$$
(39)\qquad \mathfrak{V}_1 = -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}.
$$

Nous appellerons ces ondes *ondes de première espèce;* elles sont analogues à celles que propagent les fluides. Les conditions de stabilité des membranes exigent que la quantité $\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}$ soit négative (¹); les vitesses de propagation (39) sont donc réelles. Ces formules sont identiques à celles que nous avons trouvées dans le cas du fil flexible (²).

Si $V_0 = 0$, la dernière des égalités (38) donne $\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \mathcal{K}$; on a donc forcément $\mathcal{K} = +1$.

2. $\mathcal{K} = -1$. Les égalités (38) nous donnent alors

$$a_1 + a_2 = 0, \quad b_1 + b_2 = 0, \quad c_1 + c_2 = 0,$$
$$\rho_2\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right) = -\rho_1\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right).$$

Les premières expriment que la courbe d'intersection de la membrane par le plan normal à l'onde présente en M un point de rebroussement; la dernière nous donne aisément

$$(40) \qquad \mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2}}.$$

Ces ondes rentrent dans la catégorie des *ondes de deuxième espèce* que peuvent aussi propager les membranes affectées de viscosité; il est intéressant, à ce point de vue, de comparer les formules (26) et (40). Nous avons rencontré pour la première fois ces ondes dans le mouvement des fils (³); ces ondes sont spéciales aux fils et aux membranes car les fluides ne présentent rien d'analogue.

II. $\delta'(\rho\Theta) = 0$. Les équations (36) et (36′) se réduisent alors aux suivantes

$$\left(\frac{\Theta_1}{H_1} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$
$$\left(\frac{\Theta_2}{H_2} - \rho H \frac{V_0^2}{k^2}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Nous voyons tout d'abord que, si la discontinuité n'est pas nulle, ce

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, t. II, p. 98.
(²) L. Roy, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 19 juin 1911, t. CLII, p. 1743.
(³) L. Roy, *loc. cit.*

que nous supposons, la vitesse de propagation ne peut être égale à zéro. En rapprochant ceci de ce que nous avons dit plus haut, quand nous suivions les conséquences de l'hypothèse $\mathcal{K} = +1$, nous arrivons donc à cette conclusion qu'une onde stationnaire, pour laquelle $\Sigma a'\lambda = 0$, est forcément de première espèce.

Les égalités précédentes nous donnent aisément

$$\mathcal{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}, \qquad \mathcal{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}}. \tag{41}$$

Ces ondes rentrent dans la catégorie des *ondes de troisième espèce* que peuvent aussi propager les membranes affectées de viscosité; il est intéressant à ce point de vue de comparer les formules (27) ou (27') et (41). Ces ondes ont été rencontrées pour la première fois par M. Jouguet dans le mouvement des fils ([1]).

§ IV. — De la relation supplémentaire.

Revenons, comme au paragraphe I du présent Chapitre, à la considération des deux régions a et b séparées par la courbe Γ' et en lesquelles nous avons partagé la membrane; la courbe Γ' a été tracée de telle sorte que l'onde de choc, entre les instants t et $t + dt$, se trouve tout entière dans la région a sans toucher la courbe Γ' en aucun point. Nous nous proposons tout d'abord de calculer la quantité de chaleur dQ_b dégagée par la partie b de la membrane pendant le temps dt.

D'après ce que nous avons vu antérieurement (Chap. I, § V), on a

$$\mathfrak{E}\, dQ_b = dt \int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) dm - d\mathcal{T}_{vb},$$

ce que nous pouvons écrire encore

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}\, dQ_b = dt \int_b \mathrm{T}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho\, \partial \mathrm{T}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{T}^2} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}\right) dm \\ - dt \int_b \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dm + d_{\mathrm{T}} \Phi_b - d\mathcal{T}_{vb}, \end{aligned} \tag{42}$$

([1]) E. Jouguet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLIII, 27 novembre 1911, p. 1062.

en nous souvenant que

$$d_T \Phi_b = dt \int_b \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} dm.$$

Soit alors η l'énergie interne par unité de masse définie par l'égalité

$$\mathfrak{E}\eta = \varphi - T\frac{\partial \varphi}{\partial T};$$

nous voyons que l'équation (42) devient

$$(43) \qquad \mathfrak{E}\, dQ_b = -dt\frac{\partial}{\partial t}\int_b \mathfrak{E}\eta\, dm + d_T\Phi_b - d\mathfrak{G}_{vb}.$$

D'après l'égalité (31) du Chapitre I appliquée à une modification réelle, on peut écrire

$$\begin{aligned} d_T\Phi_b - d\mathfrak{G}_{vb} = {} & dt\int\int_b \sum\left[(\mathfrak{M}\, x'_u - \mathfrak{N}\, x'_v)\frac{\partial U}{\partial u} + (-\mathfrak{N}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)\frac{\partial U}{\partial v}\right] du\, dv \\ = {} & -dt\int\int_b \sum\left[\frac{\partial(\mathfrak{M}\, x'_u - \mathfrak{N}\, x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)}{\partial v}\right] U\, du\, dv \\ & + dt\int_{C_b}\Sigma\left[\alpha(\mathfrak{M}\, x'_u - \mathfrak{N}\, x'_v) + \beta(-\mathfrak{N}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)\right] U\, d\sigma \\ & + dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}\, x'_u - \mathfrak{N}\, x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)\right] U\, d\sigma, \end{aligned}$$

et, si nous tenons compte des équations (4) et (5), nous aurons

$$\begin{aligned} (44) \quad d_T\Phi_b - d\mathfrak{G}_{vb} = {} & dt\int\int_b \Sigma\mathfrak{X}\, U\, du\, dv + dt\int_{C_b}\Sigma\mathfrak{G}_x U\, d\sigma \\ & + dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}\, x'_u - \mathfrak{N}\, x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}\, x'_u + \mathfrak{L}\, x'_v)\right] U\, d\sigma. \end{aligned}$$

Posons

$$\mathfrak{P}^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

il viendra

$$\int\int \Sigma\mathfrak{X}\, U\, du\, dv = \int \Sigma X U\, dm - \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\mathfrak{P}^2}{2} dm \quad (^1),$$

(1) Cette égalité jointe à l'égalité (44) met en évidence un résultat intéressant; si nous appelons $\mathfrak{K}$ la demi-force vive d'une portion de la membrane, l'équa-

de sorte que les égalités (43) et (44) nous donneront

$$(45)\quad \mathfrak{E}\, dQ_b = -dt\frac{\partial}{\partial t}\int_b\left(\frac{\mathfrak{V}^2}{2}+\mathfrak{E}\eta\right)dm + dt\int_b \Sigma \mathrm{X}\,\mathrm{U}\,dm + dt\int_{C_b}\Sigma \mathfrak{E}_x \mathrm{U}\,d\sigma$$
$$+\,dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma.$$

Cela posé, faisons, comme M. Duhem en Hydrodynamique (1), l'hypothèse que l'égalité (45), établie pour la partie b qui n'est le siège d'aucune discontinuité, reste valable pour la partie a qui est le siège d'une onde de choc. Appliquons-la à une portion de la région $a = a_0 + a_1 + a_2$ telle qu'elle a été définie au paragraphe I et limitée par deux lignes N_1N_2, $N'_1N'_2$ normales à l'onde Σ, dont nous représentons par n_1n_2, $n'_1n'_2$ les images dans le plan des (u, v) (*fig.* 3).

Les différents termes du second membre de l'égalité (45) s'évaluent comme ceux de l'équation (7) et l'on trouve

$$(46)\qquad \mathfrak{E}\, dQ_a = dt\int\left[\rho \mathrm{H}\mathrm{V}_0\,\delta'\left(\frac{\mathfrak{V}^2}{2}+\mathfrak{E}\eta\right)+\Sigma\,\delta'(\mathrm{Q}_x\mathrm{U})\right]d\sigma.$$

l'intégration s'étendant à la partie de la courbe s comprise entre les deux lignes n_1n_2, $n'_1n'_2$. Nous voyons que cette quantité de chaleur est de l'ordre de dt.

---

tion (44) peut s'écrire

$$d\mathfrak{G}_{vb} + dt\int \Sigma \mathrm{X}\,\mathrm{U}\,dm + dt\int \Sigma \mathfrak{E}_x \mathrm{U}\,d\sigma$$
$$+\,dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)+\beta'(-\mathfrak{N}x'_u+\mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma - d\mathfrak{M}_b - d_{\mathrm{T}}\Phi_b = 0.$$

Or, l'équation fondamentale de l'Énergétique appliquée à une modification réelle donne

$$d\mathfrak{G}_{vb} + d\mathfrak{G}_{cb} - d\mathfrak{M}_b - d_{\mathrm{T}}\Phi_b = 0.$$

En comparant ces deux égalités, on voit que le travail élémentaire des actions exercées par la partie a de la membrane sur la partie b est exprimé par l'intégrale

$$dt\int_{C'}\Sigma\left[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)+\beta'(-\mathfrak{N}x'_u+\mathfrak{P}x'_v)\right]\mathrm{U}\,d\sigma.$$

(1) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 2e Partie, Ch. I, § 8.

Mais on a aussi, d'après l'égalité (37) du Chapitre I,

$$dQ_a = -dt\int K\frac{dT}{dn}\,ds + dt\int \mathcal{K}(T-T_0)\,dS, \tag{47}$$

la première intégrale s'étendant au contour $N_1N_2N'_2N'_1N_1$ de la portion de membrane considérée et la seconde à la surface limitée par ce

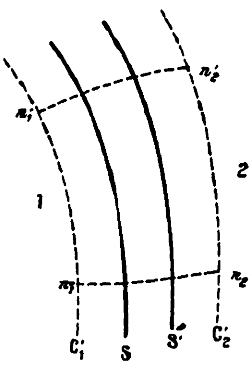

Fig. 3.

contour; comme l'aire de cette surface est de l'ordre de dt, le dernier terme de cette égalité est négligeable.

Les égalités (46) et (47) nous donnent alors

$$\mathfrak{E}\int K\frac{dT}{dn}\,ds + \int\left[\rho H V_0\,\delta'\left(\frac{\mathfrak{V}^2}{2}+\mathfrak{E}\eta\right)+\Sigma\,\delta'(Q_x U)\right]d\sigma = 0. \tag{48}$$

Supposons que la température absolue T puisse être discontinue à la traversée de l'onde et posons, suivant notre notation,

$$\delta' T = T_2 - T_1.$$

Si le coefficient de conductibilité interne K est différent de zéro, les principes de la théorie analytique de la chaleur exigent qu'on ait

$$\delta' T = 0,$$

car il ne peut y avoir de différence de température finie entre deux portions contiguës d'un milieu dont les densités sont du même ordre de grandeur. Supposons donc qu'on ait

$$K = 0,$$

égalité qui exprime l'hypothèse d'adiabatie.

Dans ces conditions, l'égalité (48) se réduit à son second terme et, comme elle doit être vérifiée quelle que soit la longueur du chemin d'intégration, il en résulte qu'on doit avoir en tous les points de l'onde

$$(49) \qquad \rho H V_0 \delta'\left(\frac{\mathfrak{P}^2}{2} + \mathfrak{E}\eta\right) + \Sigma\, \delta'(Q_x U) = 0.$$

Or on a

$$\delta' \mathfrak{P}^2 = \Sigma (U_1 + U_2)\, \delta' U,$$
$$2\,\delta'(Q_x U) = (Q_{x_1} + Q_{x_2})\, \delta' U + (U_1 + U_2)\, \delta' Q_x.$$

Mais, que la membrane soit ou non affectée de viscosité, on a, d'après les équations (19) et (28),

$$\rho H V_0 \delta' U + \delta' Q_x = 0$$

et deux autres égalités analogues; nous avons donc

$$2\,\delta'(Q_x U) = -(Q_{x_1} + Q_{x_2}) \frac{\delta' Q_x}{\rho H V_0} - \rho H V_0 (U_1 + U_2)\, \delta' U$$

et

$$\Sigma\, \delta'(Q_x U) = -\frac{1}{2\rho H V_0} \Sigma\, \delta' Q_x^2 - \rho H V_0 \delta' \frac{\mathfrak{P}^2}{2}.$$

L'égalité (49) devient ainsi

$$(50) \qquad 2\rho^2 H^2 V_0^2 \mathfrak{E}\, \delta'\eta - \Sigma\, \delta' Q_x^2 = 0;$$

c'est la forme la plus générale de la loi adiabatique dynamique; nous allons voir les différentes formes qu'elle prend dans chaque cas particulier de propagation que nous avons rencontré.

§ V. — Loi adiabatique dynamique [1].

Supposons d'abord la membrane affectée de viscosité; nous avons dans ce cas

$$k\mathfrak{V} = H V_0,$$
$$Q_x = a \frac{H}{k} \mathfrak{A} + a' \mathfrak{B};$$

[1] *La loi adiabatique dynamique dans le mouvement des membranes flexibles* (*Comptes rendus*, t. CLIV, 6 mai 1912, p. 1213).

Nous déduisons de cette dernière égalité

$$\Sigma Q_x^2 = \frac{H^2}{k^2}\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2,$$

d'où, puisque $\delta'\mathcal{B} = 0$,

$$\Sigma \delta' Q_x^2 = \frac{H^2}{k^2}\delta'\mathcal{A}^2.$$

L'équation (50) devient ainsi

$$2\rho^2 k^4 \mathcal{V}^2 \mathfrak{E}\delta'\eta - H^2\delta'\mathcal{A}^2 = 0. \tag{51}$$

I. $\delta'\mathcal{A} \neq 0$. Alors l'onde est de seconde espèce et la vitesse de propagation $\mathcal{V}$ donnée par la formule (25); l'équation précédente devient ainsi

$$\mathcal{V}^2(\rho k^2 \mathfrak{E}\delta'\eta - H\delta'\mathcal{A}) = 0,$$

de sorte que, si $\mathcal{V} \neq 0$, on a

$$\rho k^2 \mathfrak{E}\delta'\eta - H\delta'\mathcal{A} = 0. \tag{52}$$

II. $\delta'\mathcal{A} = 0$. Alors, l'onde est de troisième espèce et, d'après les formules (27'), la vitesse $\mathcal{V}$ ne peut être nulle; l'équation (51) donne

$$\delta'\eta = 0. \tag{53}$$

Comme l'énergie interne est une fonction finie de la densité et de la température et qu'on a déjà $\delta'\rho = 0$, il résulte de l'équation (53) qu'on a en outre $\delta' T = 0$. Ainsi, ni la densité ni la température n'éprouvent de discontinuité à la traversée d'une onde de troisième espèce se propageant sur une membrane affectée de viscosité; il en est donc de même de toute fonction de (ρ, T) telle que la tension, et comme on a forcément $\delta' T = 0$ si $K \neq 0$, on voit que la proposition énoncée s'applique à une membrane quelconque conductrice ou non conductrice de la chaleur (¹).

Supposons maintenant la membrane dénuée de viscosité; nous avons dans ce cas

$$(Q_x, Q_y, Q_z) = k\Theta(a, b, c),$$

et par suite

$$\Sigma\delta' Q_x^2 = k^2\delta'\Theta^2.$$

(¹) Puisque $\delta'\Theta = 0$, il s'ensuit que les formules (27') se réduisent à la formule unique $\mathcal{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}$.

L'équation (50) devient ainsi

$$2\rho^2 H^2 V_0^2 \mathfrak{C}\, \delta'\eta - k^2 \delta' \Theta^2 = 0. \tag{54}$$

Envisageons alors les différents cas qui peuvent se présenter :

A. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Nous avons vu qu'on a $V_0 = 0$; l'équation (54) nous montre que $\delta'\Theta = 0$, ce que nous savions déjà.

B. $\Sigma a'\lambda = 0$. Nous devons distinguer deux cas suivant que $\delta'(\rho\Theta)$ est différent de zéro ou égal à zéro.

I. $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$; nous savons qu'il y a encore deux cas à distinguer :

1. $\mathcal{K} = +1$. Alors l'onde est de première espèce et l'on a

$$V_0^2 = -k^2 \frac{\rho_1\rho_2}{\rho^2 H^2} \frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho};$$

l'équation (54) devient ainsi

$$V_0^2 [2\rho_1\rho_2 \mathfrak{C}\, \delta'\eta + (\Theta_1 + \Theta_2)\, \delta'\rho] = 0.$$

ou, si $V_0 \neq 0$,

$$2\rho_1\rho_2 \mathfrak{C}\, \delta'\eta + (\Theta_1 + \Theta_2)\, \delta'\rho = 0, \tag{55}$$

relation analogue à celle trouvée par Hugoniot dans le mouvement rectiligne des gaz et généralisée par M. Jouguet.

2. $\mathcal{K} = -1$. L'onde est de deuxième espèce et l'on a

$$V_0^2 = k^2 \frac{\rho_1\rho_2}{\rho^2 H^2} \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\rho_1 + \rho_2};$$

comme V_0 est forcément différent de zéro, l'équation (54) devient

$$2\rho_1\rho_2 \mathfrak{C}\, \delta'\eta - (\rho_1 + \rho_2)\, \delta'\Theta = 0. \tag{56}$$

Cette relation est analogue à celle trouvée par M. Jouguet dans le mouvement des fils [1].

II. $\delta'(\rho\Theta) = 0$. L'onde est de troisième espèce et sa vitesse de propagation différente de zéro. Nous avons dans ce cas

$$V_0^2 = k^2 \frac{\rho_1\Theta_1}{\rho^2 H^2} = k^2 \frac{\rho_2\Theta_2}{\rho^2 H^2} = k^2 \frac{\rho_1\Theta_1 + \rho_2\Theta_2}{2\rho^2 H^2}$$

---

[1] E. Jouguet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLIII, 23 octobre 1911, p. 761.

et l'équation (54) nous donne

$$(57) \qquad (\rho_1\Theta_1 + \rho_2\Theta_2)\mathfrak{C}\delta'\eta - \delta'\Theta^2 = 0,$$

ce qui est encore une autre forme de la loi adiabatique dynamique. En particulier, si $\delta'\rho = 0$, on a aussi $\delta'\Theta = 0$, en vertu de l'hypothèse faite $\delta'(\rho\Theta) = 0$; on a donc également $\delta'\mathrm{T} = 0$ et l'équation (57) se trouve identiquement vérifiée. Les conclusions deviennent donc identiques à celles qui résultent de la considération des ondes de troisième espèce, quand la viscosité n'est pas nulle.

CHAPITRE IV.

LES ONDES D'ACCÉLÉRATION.

§ I. — Cas d'une membrane affectée de viscosité.

Supposons qu'à l'instant t la membrane soit le siège d'une onde d'accélération persistante Σ; pour étudier les propriétés de cette onde au point de vue dynamique, nous ne pouvons pas encore faire usage des équations du mouvement que nous avons établies au Chapitre I. En effet, l'établissement de ces équations repose sur la transformation de la dernière intégrale de l'équation [Chap. I, équ. (32)]

$$(1) \quad \iint \sum \mathfrak{X}\, \delta x\, du\, dv + \int \sum \mathfrak{T}_x\, \delta x\, d\sigma$$
$$- \iint \sum \left[(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) \frac{\partial\, \delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{L} x'_v) \frac{\partial\, \delta x}{\partial v} \right] du\, dv = 0,$$

intégrale à laquelle nous avons appliqué la formule de Green après une intégration par parties. Or, cette transformation suppose essentiellement que les fonctions $(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)$, $(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{L} x'_v)$, ... soient continues en tous les points de l'aire limitée par le contour C à laquelle s'étend l'intégration, condition qui ne se trouve pas remplie dans le cas actuel, puisque les fonctions $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ sont discontinues le long de Σ par l'intermédiaire des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, qui dépendent des dérivées secondes des coordonnées. Pour étudier les ondes d'accélération dans une membrane affectée de viscosité, nous devons donc reprendre l'établissement des équations du mouvement à partir de l'équation (1).

Comme nous l'avons fait dans la théorie des ondes de choc, partageons encore la membrane en deux régions a et b, la région b n'ayant aucun point commun avec l'onde Σ. La première a est limitée par le contour $\Gamma' + \Gamma_a$, la seconde b par le contour $\Gamma' + \Gamma_b$ et l'on a $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$, le contour Γ_a pouvant même ne pas exister, si l'onde Σ n'atteint pas le contour Γ. Désignons encore par C', C_a, C_b les images respectives des contours Γ', Γ_a, Γ_b dans le plan des (u, v), telles que $C = C_a + C_b$.

Choisissons tout de suite la région a et soient ε_1, ε_2 des quantités

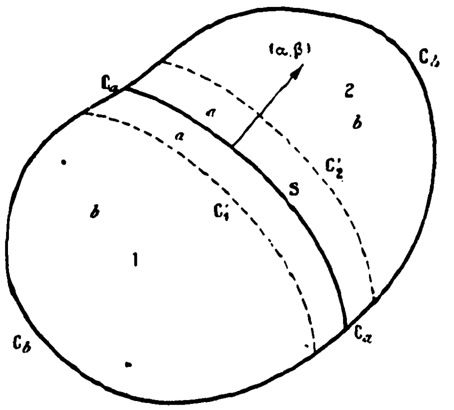

Fig. 4.

finies positives : nous prendrons comme courbe C' l'ensemble de deux courbes, l'une C'_1 située dans la région 1 à la distance $\varepsilon_1 dt$ de s, l'autre C'_2 située dans la région 2 à la distance $\varepsilon_2 dt$ de s. La région a sera alors représentée par l'aire comprise entre les deux courbes C'_1, C'_2, aire qui n'aura aucun point de contact avec le contour C si l'image s de l'onde Σ est une courbe fermée ; aire qui sera, au contraire, partiellement limitée par une portion C_a de C, comme dans le cas de la figure, si l'onde atteint le contour de la membrane (*fig.* 4).

Dans ces conditions, les intégrales doubles de l'équation (1) s'étendent à l'image totale $a + b$ de la membrane et l'intégrale curviligne au contour $C_a + C_b$. Les intégrales relatives à la région b et au contour C_b sont de l'ordre de $\delta(x, y, z)$, car on doit admettre que les quantités $\frac{\partial\delta(x, y, z)}{\partial(u, v)}$ et $\delta(x, y, z)$ sont du même ordre ; celles relatives à la région a et au contour C_a sont de l'ordre de $dt\,\delta(x, y, z)$. Celles-ci sont donc négligeables vis-à-vis des premières, de sorte que l'équation (1) peut s'écrire plus explicitement

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int\!\!\int_b \Sigma\mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv + \int_{C_b} \Sigma\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma \\ &-\int\!\!\int_b \sum\left[(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right]du\,dv = 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ sont continues en tous les points de la région b et de son contour $C' + C_b$; nous pouvons donc appliquer à la dernière intégrale de l'équation (2) la transformation qui était illégitime quand cette intégrale s'étendait à l'image entière $a + b$ de la membrane. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int_b \Sigma\mathfrak{X}\,\delta x\,du\,dv + \int_{C_b} \Sigma\mathfrak{T}_x\,\delta x\,d\sigma \\ &-\int_{C_b} \Sigma[\alpha(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)]\,\delta x\,d\sigma \\ &-\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)]\,\delta x\,d\sigma \\ &+\int\!\!\int_b \sum\left[\frac{\partial(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)}{\partial u} + \frac{\partial(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)}{\partial v}\right]\delta x\,du\,dv = 0, \end{aligned}$$

α', β' désignant, comme au Chapitre III, les cosinus directeurs de la demi-normale au contour $C' = C'_1 + C'_2$ menée vers l'extérieur de la région b.

Imposons, tout d'abord, à la membrane un déplacement virtuel qui laisse immobile tous les points de la région a et de son contour $C' + C_a$; la troisième ligne de l'équation précédente disparaît, et cette équation ainsi simplifiée nous montre, comme au paragraphe IV du Chapitre I, qu'on doit avoir :

1° En tous les points de la région b

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X} + \dfrac{\partial(\mathfrak{M}x'_u - \mathfrak{N}x'_v)}{\partial u} + \dfrac{\partial(-\mathfrak{N}x'_u + \mathfrak{P}x'_v)}{\partial v} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}\right.$$

2° en tous les points du contour C_b

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}_x - \alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) - \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, donnons à la membrane un déplacement virtuel quelconque; multiplions les équations (3) respectivement par $\delta(x, y, z)\,du\,dv$, ajoutons-les membre à membre et intégrons dans la région b. Une intégration par parties transforme l'équation ainsi obtenue en une autre identique à l'équation (6) du Chapitre III; en tenant compte, en outre, des équations (4), l'équation dont il s'agit devient

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int_b \Sigma \mathcal{X}\,\delta x\,du\,dv + \int_{C_b} \Sigma \mathcal{E}_x\,\delta x\,d\sigma \\ &-\int\!\!\int_b \sum \left[(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial u} + (-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)\frac{\partial\,\delta x}{\partial v}\right] du\,dv \\ &\qquad + \int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

En comparant cette dernière équation à l'équation (2), il vient immédiatement

$$\int_{C'} \Sigma[\alpha'(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta'(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0.$$

Or, le long de C'_1, on peut prendre $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$; le long de C'_2, $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$; de plus, on peut substituer s à C'_1 et C'_2 comme chemin d'intégration. L'équation précédente peut donc s'écrire

$$\int \Sigma\,\delta'[\alpha(\mathfrak{M} x'_u - \mathfrak{N} x'_v) + \beta(-\mathfrak{N} x'_u + \mathfrak{P} x'_v)]\,\delta x\,d\sigma = 0,$$

l'intégration s'étendant à la courbe s. Cette dernière équation devant être vérifiée pour tout déplacement virtuel, on doit donc avoir tout le long de s

$$\alpha(x'_u\,\delta'\mathfrak{M} - x'_v\,\delta'\mathfrak{N}) + \beta(-x'_u\,\delta'\mathfrak{N} + x'_v\,\delta'\mathfrak{P}) = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou, en tenant compte de ce que les quantités $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ ne sont discontinues que par l'intermédiaire des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$,

$$\alpha(x'_u\delta'\mathcal{E} - x'_v\delta'\mathcal{F}) + \beta(-x'_u\delta'\mathcal{F} + x'_v\delta'\mathcal{G}) = 0,$$
$$\alpha(y'_u\delta'\mathcal{E} - y'_v\delta'\mathcal{F}) + \beta(-y'_u\delta'\mathcal{F} + y'_v\delta'\mathcal{G}) = 0,$$
$$\alpha(z'_u\delta'\mathcal{E} - z'_v\delta'\mathcal{F}) + \beta(-z'_u\delta'\mathcal{F} + z'_v\delta'\mathcal{G}) = 0.$$

Supposons qu'on ait $\alpha = 1$, $\beta = 0$; ces équations se réduisent à trois équations linéaires et homogènes par rapport à $\delta'\mathcal{E}$, $\delta'\mathcal{F}$ qui, prises deux à deux, constituent trois systèmes d'équations linéaires dont les déterminants ne peuvent être tous les trois nuls, puisqu'ils sont proportionnels aux cosinus directeurs a'', b'', c'' de la normale à la membrane. On doit donc avoir

$$(5) \qquad \delta'\mathcal{E} = 0, \qquad \delta'\mathcal{F} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \delta'\mathcal{G} = 0.$$

Reportons-nous aux expressions [Chap. I, équ. (24)] des actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; celles-ci sont discontinues par l'intermédiaire des quantités E′, F′, G′. Les équations (5) s'écrivent donc plus explicitement

$$\Lambda G\delta'\theta + M\delta'G' = 0,$$
$$\Lambda F\delta'\theta + M\delta'F' = 0,$$
$$\Lambda E\delta'\theta + M\delta'E' = 0,$$

avec

$$\delta'\theta = \frac{G\delta'E' - 2F\delta'F' + E\delta'G'}{2H^2}.$$

Nous avons ainsi un système de trois équations linéaires et homogènes en δ'(E′, F′, G′) dont le déterminant n'est pas nul, sans quoi la fonction dissipative $2\mathfrak{O}$ cesserait d'être une forme quadratique définie positive. La seule solution de ce système est donc

$$\delta'E' = 0, \qquad \delta'F' = 0, \qquad \delta'G' = 0.$$

D'après les formules (42) du Chapitre II, ces équations s'écrivent

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &V_0(\alpha H\Sigma a\lambda + n\Sigma a'\lambda) = 0,\\ &V_0[2\alpha\beta H\Sigma a\lambda + (-m\alpha + n\beta)\Sigma a'\lambda] = 0,\\ &V_0(\beta H\Sigma a\lambda - m\Sigma a'\lambda) = 0. \end{aligned} \right.$$

Supposons d'abord $V_0 \neq 0$; la première et la troisième de ces équations constituent un système de deux équations linéaires et homogènes en $\Sigma a\lambda$, $\Sigma a'\lambda$, dont le déterminant $-Hk^2$ n'est pas nul; la seule solution est donc

$$(7) \qquad \Sigma a\lambda = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0$$

et la deuxième des équations (6) se trouve vérifiée. En vertu des formules (21) et (21') du Chapitre II, les égalités (7) entraînent les suivantes

$$(7') \qquad \Sigma x'_u\lambda = 0, \qquad \Sigma x'_v\lambda = 0.$$

Ces égalités (7) ou (7') expriment que la discontinuité est normale à la membrane.

Ainsi, quand une membrane affectée de viscosité est le siège d'une onde d'accélération, les actions de viscosité restent continues à la traversée de l'onde. Les seules discontinuités que puisse propager l'onde sont des discontinuités normales à la membrane.

Supposons maintenant $V_0 = 0$: les équations (6) se trouvent vérifiées d'elles-mêmes.

Pour obtenir la vitesse de propagation de l'onde, reportons-nous aux équations (3); la première s'écrit plus explicitement

$$\rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + x'_u\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right) \\ + \mathfrak{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{N}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{P}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Écrivons cette équation pour un point infiniment voisin de Σ situé dans la région 1, puis pour un autre infiniment voisin de Σ et du précédent mais situé dans la région 2; enfin, retranchons membre à membre les deux équations ainsi écrites. Les composantes X, Y, Z de la force appliquée par unité de masse ne dépendent, dans le cas le plus général, que du temps, des coordonnées et de leurs dérivées premières; elles sont donc continues à la traversée de l'onde et nous avons ainsi

$$-\rho H\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x'_u\delta'\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\delta'\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right) \\ + \mathfrak{M}\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{N}\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{P}\delta'\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Tenons compte alors des formules (35), (37) et (41) du Chapitre II et posons encore, comme au Chapitre III,

$$(8)\qquad \mathcal{A} = \mathfrak{M}\alpha^2 - 2\mathfrak{N}\alpha\beta + \mathfrak{L}\beta^2 = \frac{k^2}{\mathrm{H}}\Theta + 2\mathrm{H}(\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2);$$

nous obtiendrons la première des équations

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\lambda + x'_u\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \\ \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\mu + y'_u\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + y'_v\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \\ \left(\mathcal{A} - \rho\dfrac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)\nu + z'_u\delta'\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right) + z'_v\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u} + \dfrac{\partial\mathfrak{L}}{\partial v}\right) = 0, \end{cases}$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue.

Supposons tout d'abord $\mathrm{V}_0 \neq 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{V} \neq 0$; dans ce cas, les composantes de la discontinuité vérifient les formules (7) et (7'). Les équations (9) multipliées respectivement par λ, μ, ν, puis ajoutées membre à membre, nous donnent alors

$$(10)\qquad \left(\mathcal{A} - \rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathfrak{V}^2\right)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0.$$

On en conclut que la discontinuité se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{k^2}\frac{\mathcal{A}}{\rho}},$$

ou, d'après la formule (8),

$$(11)\qquad \mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{\mathrm{H}^2}{k^2}\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

C'est l'expression que nous avions trouvée [Chap. III, équ. (27)] pour la vitesse de propagation des ondes de choc de troisième espèce.

Supposons maintenant $\mathrm{V}_0 = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{V} = 0$; les formules (7) ou (7') ne sont plus valables, mais multiplions les équations (9) respectivement par les cosinus directeurs a'', b'', c'' de la normale à la membrane et ajoutons-les membre à membre. En vertu des conditions de perpendicularité $\Sigma a''(x'_u, x'_v) = 0$, il vient

$$(12)\qquad \mathcal{A}\Sigma a''\lambda = 0.$$

Vraisemblablement, on doit supposer $\mathcal{A} > 0$, sans quoi les vitesses de propagation données par la formule (11) seraient imaginaires. Dans ces conditions, l'égalité (12) exige qu'on ait $\Sigma a''\lambda = 0$.

Nous arrivons donc à ce résultat qu'une onde d'accélération stationnaire est caractérisée par une discontinuité qui se trouve nécessairement dans le plan tangent.

§ II. — De la relation supplémentaire.

Comme au Chapitre II, supposons que l'onde d'accélération soit du premier ordre pour la température absolue T; nous savons qu'il existera une quantité τ telle qu'on ait

$$\delta' \frac{\partial T}{\partial(u, v, t)} = (\alpha, \beta, -V_0)\tau. \tag{13}$$

Si $K = 0$, les développements qui nous ont conduits (Chap. I, § V) à la relation supplémentaire demeurent valables et celle-ci devient

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathcal{K}(T - T_0) + \frac{1}{\mathfrak{E}}\left(T \frac{\partial \Theta}{\partial T}\theta + 2\Phi\right). \tag{14}$$

Si $K \neq 0$, la transformation, au moyen de la formule de Green, de l'intégrale $\int_\gamma K \frac{dT}{dn}$ en intégrale double est illégitime, puisqu'elle suppose la continuité des dérivées premières en chaque point de l'aire d'intégration. Aussi devons-nous reprendre l'établissement de la relation supplémentaire à l'endroit même où nous avons fait cette transformation.

Nous avons d'une manière générale [Chap. I, équ. (36) et (37)] et pour une portion quelconque de la membrane

$$dQ = dt \int\int \left(\frac{T}{\mathfrak{E}} \frac{\partial \Theta}{\partial T}\theta - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{2\Phi}{\mathfrak{E}}\right) H\, du\, dv, \tag{15}$$

$$dQ = -dt \int K \frac{dT}{dn} ds + dt \int\int \mathcal{K}(T - T_0) H\, du\, dv. \tag{16}$$

Appliquons ces formules à la région a de la membrane représentée dans le plan des (u, v) par l'aire limitée par le contour $C_a + C'_1 + C'_2$ (*fig.* 4). D'après la formule (15) et les hypothèses faites quant à l'ordre de la discontinuité, la quantité sous le signe $\int\int$ est finie; comme l'aire d'intégration est de l'ordre dt, nous voyons que la quantité de chaleur dQ dégagée par la région a pendant le temps dt est de l'ordre de dt^2. Il doit donc en être de même de la valeur de dQ donnée par la formule (16).

Considérons donc cette dernière formule : le deuxième terme est de l'ordre de dt^2 puisque la quantité sous le signe $\int\int$ est finie. Le premier s'écrit, d'après la formule (37′) du Chapitre I,

$$-dt \int_{C_a+C'_1+C'_2} \frac{K}{H}\left[\alpha''\left(G\frac{\partial T}{\partial u} - F\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \beta''\left(-F\frac{\partial T}{\partial u} + E\frac{\partial T}{\partial v}\right)\right]d\sigma,$$

α'', β'' désignant les cosinus directeurs de la demi-normale extérieure au contour $C_a + C'_1 + C'_2$ de la région a. L'intégrale relative à la portion C_a du contour est de l'ordre de dt et fournit, par suite, dans l'expression précédente un contingent de l'ordre de dt^2. Le long de C'_1 on a très sensiblement $\alpha'' = -\alpha$, $\beta'' = -\beta$; le long de C'_2, $\alpha'' = \alpha$, $\beta'' = \beta$. En substituant la courbe s à C'_1 et C'_2 comme chemin d'intégration, on voit que la portion $C'_1 + C'_2$ du contour fournit à l'expression précédente le contingent

$$-dt\int \frac{K}{H} k^2 \tau \, d\sigma,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe s. Nous voyons ainsi que la seconde expression de dQ donnée par la formule (16) ne peut être de l'ordre de dt^2 que si

$$\tau = 0.$$

Donc, si l'on a $K \neq 0$, l'onde est au moins du second ordre pour la température et cette conclusion est vraie que la membrane soit ou non affectée de viscosité.

§ III. — Cas d'une membrane dénuée de viscosité.

Pour étudier le cas d'une membrane dénuée de viscosité, nous pouvons faire usage des équations générales du mouvement, telles qu'elles ont été établies au Chapitre I; mais il est plus simple de partir des équations générales (9), en tenant compte des expressions simplifiées de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}) = \Theta \frac{(G, F, E)}{H}. \tag{17}$$

Tout d'abord, les égalités (8) nous donnent

$$\mathcal{A} = \frac{k^2}{H}\Theta; \tag{18}$$

nous avons d'autre part, d'après les formules (17),

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} &= G \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \Theta \frac{\partial G}{\partial u} - \Theta \frac{G}{H} \frac{\partial H}{\partial u},\\
H \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial (u, v)} &= F \frac{\partial \Theta}{\partial (u, v)} + \Theta \frac{\partial F}{\partial (u, v)} - \Theta \frac{F}{H} \frac{\partial H}{\partial (u, v)},\\
H \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v} &= E \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \Theta \frac{\partial E}{\partial v} - \Theta \frac{E}{H} \frac{\partial H}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\left\{\begin{aligned}
H\delta'\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) &= \delta'\left(G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) + \Theta\,\delta'\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) - \frac{\Theta}{H}\delta'\left(G\frac{\partial H}{\partial u} - F\frac{\partial H}{\partial v}\right),\\
H\delta'\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial v}\right) &= \delta'\left(-F\frac{\partial \Theta}{\partial u} + E\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) + \Theta\,\delta'\left(-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{\Theta}{H}\delta'\left(-F\frac{\partial H}{\partial u} + E\frac{\partial H}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Reportons-nous alors aux formules (42), (43), (46) du Chapitre II et nous trouverons aisément

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta'\left(G\frac{\partial \Theta}{\partial u} - F\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = m\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right),\\
&\delta'\left(-F\frac{\partial \Theta}{\partial u} + E\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) = n\left(-\frac{\rho}{H}k\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\Sigma a\lambda + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\tau\right),\\
&\delta'\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right) = -\beta k \Sigma a'\lambda, \qquad \delta'\left(-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\right) = \alpha k \Sigma a'\lambda,\\
&\delta'\left(G\frac{\partial H}{\partial u} - F\frac{\partial H}{\partial v}\right) = km\Sigma a\lambda, \qquad \delta'\left(-F\frac{\partial H}{\partial u} + E\frac{\partial H}{\partial v}\right) = kn\Sigma a\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Les égalités (18), (19), (20) permettent d'écrire les équations (9) sous une forme plus explicite ; en tenant compte, en outre, des formules (21) et (21′) du Chapitre II, nous voyons que les équations (9) deviennent

$$(21)\quad\begin{cases}\lambda\left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)+a\left[\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\dfrac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\dfrac{H}{\rho k}\dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\tau\right]+\dfrac{\Theta}{\rho}a'\Sigma a'\lambda=0,\\ \mu\left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)+b\left[\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\dfrac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\dfrac{H}{\rho k}\dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\tau\right]+\dfrac{\Theta}{\rho}b'\Sigma a'\lambda=0,\\ \nu\left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)+c\left[\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}+\dfrac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a\lambda-\dfrac{H}{\rho k}\dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\tau\right]+\dfrac{\Theta}{\rho}c'\Sigma a'\lambda=0.\end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par a', b', c' et ajoutons-les membre à membre, il vient

$$(22)\qquad \mathfrak{V}^2\Sigma a'\lambda=0.$$

Multiplions-les de même respectivement par a'', b'', c'', il viendra

$$(23)\qquad \left(\mathfrak{V}^2-\frac{\Theta}{\rho}\right)\Sigma a''\lambda=0.$$

Multiplions-les enfin par a, b, c, nous aurons

$$(24)\qquad \Sigma a\lambda\left(\mathfrak{V}^2+\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right)-\frac{H}{\rho k}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\tau=0.$$

Tenons compte de cette dernière égalité dans les équations (21), celles-ci deviendront

$$(25)\quad\begin{cases}\left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda-a\Sigma a\lambda)+\dfrac{\Theta}{\rho}a'\Sigma a'\lambda=0,\\ \left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)(\mu-b\Sigma a\lambda)+\dfrac{\Theta}{\rho}b'\Sigma a'\lambda=0,\\ \left(\mathfrak{V}^2-\dfrac{\Theta}{\rho}\right)(\nu-c\Sigma a\lambda)+\dfrac{\Theta}{\rho}c'\Sigma a'\lambda=0.\end{cases}$$

Ces équations vont nous permettre de discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Tout d'abord, si l'onde est stationnaire ($\mathfrak{V}=0$), l'équation (23) nous donne $\Sigma a''\lambda=0$; la discontinuité se trouve donc dans le plan tangent.

Comme pour les ondes de choc, nous considérerons deux cas principaux, suivant que la discontinuité ne se trouve pas ou se trouve dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda\neq 0$, ou $\Sigma a'\lambda=0$).

A. $\Sigma a'\lambda\neq 0$. L'équation (22) nous montre que $\mathfrak{V}=0$; l'onde est donc stationnaire. Si $K \neq 0$, nous savons que $\tau = 0$; l'équation (24) nous donne alors $\Sigma a \lambda = 0$. Comme la discontinuité se trouve déjà dans le plan tangent, elle est, de plus, tangente à l'onde Σ, c'est-à-dire transversale. C'est d'ailleurs ce que montrent les équations (25).

B. $\Sigma a' \lambda = 0$. L'équation (22) se trouve vérifiée, de sorte que la vitesse de propagation $\mathfrak{V}$ peut différer de zéro; nous distinguerons encore deux cas, suivant qu'on a $\Sigma a \lambda = 0$, ou $\Sigma a \lambda \neq 0$.

I. $\Sigma a \lambda = 0$. La discontinuité est normale à la membrane; la vitesse de propagation $\mathfrak{V}$ ne peut donc pas être nulle. L'équation (24) nous montre que $\tau = 0$; l'onde est donc au moins du second ordre pour la température et aussi pour la densité et la tension, d'après les formules (44) et (46) du Chapitre II. Les équations (25) se réduisent à

$$\left(\mathfrak{V}^2 - \frac{\Theta}{\rho}\right)(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

et nous donnent comme vitesse de propagation

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}. \tag{26}$$

II. $\Sigma a \lambda \neq 0$. Il nous faut encore subdiviser ce cas en deux autres suivant que K est différent de zéro ou égal à zéro.

1. $K \neq 0$. Nous savons alors que $\tau = 0$; l'équation (24) se réduit à

$$\Sigma a \lambda \left(\mathfrak{V}^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}\right) = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}}. \tag{27}$$

Cette formule correspond à celle donnée par Newton dans le mouvement des fluides.

2. $K = 0$. Alors, l'équation (14), où nous avons effacé le terme $2\mathfrak{D}$, est applicable. En y remplaçant θ par sa valeur $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$, nous obtenons

$$c\rho\delta' \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\mathfrak{E}\rho}\frac{\partial \Theta}{\partial T}\delta' \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

d'où, d'après les formules (44) et (45) du Chapitre II,

$$\mathfrak{V}\left(\tau - \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\frac{k}{\mathrm{H}}\Sigma a\lambda\right) = 0.$$

Cela posé, supposons $\mathfrak{V} \neq 0$; cette équation jointe à l'équation (24) nous donne

$$\Sigma a\lambda\left[\mathfrak{V}^2 + \frac{\partial\Theta}{\partial\rho} - \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)^2\right] = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)^2}, \tag{28}$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{-\frac{\mathrm{C}}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}}, \tag{28'}$$

en introduisant la chaleur spécifique à tension constante C (1). Dans

---

(1) L'équivalence des deux expressions (28) et (28') données pour $\mathfrak{V}$ peut se démontrer de la manière suivante : soit δq la quantité de chaleur dégagée dans une modification virtuelle par un élément de masse dm de la membrane; d'après la formule (36) du Chapitre I et vu l'expression de θ, on a

$$\delta q = -\left(\frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\delta\rho + c\,\delta\mathrm{T}\right)dm,$$

c désignant, dans le cas où il n'y a pas de viscosité, la chaleur spécifique à densité constante. On peut écrire aussi

$$\delta q = -(h\,\delta\Theta + \mathrm{C}\,\delta\mathrm{T})\,dm,$$

C désignant la chaleur spécifique à tension constante et h un autre coefficient calorifique. La comparaison de ces deux égalités jointes à l'égalité

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\delta\mathrm{T}$$

nous donne

$$h\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = \frac{\mathrm{T}}{\mathfrak{E}\rho^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}, \qquad h\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}} + \mathrm{C} = c,$$

d'où nous déduisons, en éliminant h,

$$-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathfrak{E}\rho^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)^2 = -\frac{\mathrm{C}}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}.$$

le cas actuel où la membrane est dénuée de viscosité, c s'appelle la chaleur spécifique à densité constante. Cette formule (28') correspond à celle donnée par Laplace dans le mouvement des fluides.

Dans les deux cas que nous venons de considérer et correspondant à la même hypothèse $\Sigma a\lambda \neq 0$, que la vitesse $\mathfrak{v}$ soit nulle ou donnée par les formules (27) ou (28'), la quantité $\mathfrak{v}^2 - \frac{\Theta}{\rho}$ est différente de zéro ; les équations (25) se réduisent ainsi aux suivantes

$$(\lambda, \mu, \nu) - (a, b, c)\Sigma a\lambda = 0$$

et nous enseignent que la discontinuité est longitudinale. Les formules (26) et (27) n'avaient été obtenues jusqu'ici, à notre connaissance, qu'en partant des équations des petits mouvements d'une membrane plane [Chap. I, équ. (54)] de température uniforme.

Les résultats exposés dans ce paragraphe, relativement à la propagation des ondes d'accélération dans les membranes dénuées de viscosité, sont absolument généraux. Nous laissons au lecteur le soin de reconnaître, au moyen des formules que nous avons données antérieurement (Chap. II, § IX), que ces résultats s'étendent aux ondes d'un ordre quelconque $n > 1$ par rapport aux coordonnées. Nous les avons démontrés dans le cas de $n = 2$, uniquement pour simplifier les formules qui nous ont servi de point de départ dans ce paragraphe.

§ IV. — Les ondes d'ordre supérieur dans les membranes affectées de viscosité.

Supposons que la membrane soit le siège d'une onde Σ du troisième ordre par rapport aux coordonnées : les équations indéfinies du mouvement [Chap. I, équ. (33)] sont applicables en tout point de la membrane ; considérons, par exemple, la première de ces équations

$$(29)\quad \rho H\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + x'_u\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}\right) + x'_v\left(-\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial v}\right) + \mathfrak{M}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\mathfrak{N}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \mathfrak{L}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{L})}{\partial(u, v)}$ sont discontinues à la traversée de l'onde, par l'intermédiaire des dérivées $\dfrac{\partial(\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G})}{\partial(u,v)}$ qui dépendent des dérivées du troisième ordre des coordonnées ; écrivons alors l'équation (29) en deux points infiniment voisins et situés l'un dans la région 1, l'autre dans la région 2 ; en retranchant membre à membre les deux équations ainsi écrites, nous obtiendrons

$$x'_u\,\delta'\left(\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial v}\right)+x'_v\,\delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial v}\right)=0.$$

Tenons compte, alors, des égalités

$$\mathcal{M}=\Theta\frac{G}{H}+2H\mathcal{E},\qquad \mathcal{N}=\Theta\frac{F}{H}+2H\mathcal{F},\qquad \mathcal{P}=\Theta\frac{E}{H}+2H\mathcal{G},$$

et nous obtiendrons la première des équations

$$x'_u\,\delta'\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)+x'_v\,\delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}\right)=0,$$
$$y'_u\,\delta'\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)+y'_v\,\delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}\right)=0,$$
$$z'_u\,\delta'\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)+z'_v\,\delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}\right)=0,$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue. Ces équations considérées deux à deux constituent trois systèmes de deux équations linéaires et homogènes entre les quantités $\delta'\left(\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)$, $\delta'\left(-\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}+\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}\right)$, dont les déterminants ne peuvent pas être tous les trois nuls, puisqu'ils sont respectivement proportionnels à a'', b'', c''. On doit donc avoir

$$\delta'\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v}\right)=0,\qquad \delta'\left(-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}\right)=0. \tag{30}$$

Développons ces deux équations : les égalités (15) et (24) du Chapitre I nous donnent immédiatement

$$\delta'\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u}=-AG\frac{1}{\rho}\delta'\frac{\partial^2\rho}{\partial t\,\partial u}+M\delta'\frac{\partial^2 G}{\partial t\,\partial u},$$
$$\delta'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial(u,v)}=-AF\frac{1}{\rho}\delta'\frac{\partial^2\rho}{\partial t\,\partial(u,v)}+M\delta'\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial(u,v)},$$
$$\delta'\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v}=-AE\frac{1}{\rho}\delta'\frac{\partial^2\rho}{\partial t\,\partial v}+M\delta'\frac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial v}.$$

Tenons compte des formules (48) du Chapitre II et il viendra

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
k\delta'\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial u} &= -\mathrm{V}_0\left[\alpha\left(\Lambda\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}k^2+2\mathrm{MH}\beta^2\right)\Sigma a\lambda - 2\mathrm{M}\quad m\alpha\beta\quad \Sigma a'\lambda\right],\\
k\delta'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u} &= -\mathrm{V}_0\left[\alpha\left(\Lambda\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}k^2+2\mathrm{MH}\alpha\beta\right)\Sigma a\lambda + \mathrm{M}\alpha(-m\alpha+n\beta)\Sigma a'\lambda\right],\\
k\delta'\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v} &= -\mathrm{V}_0\left[\beta\left(\Lambda\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}k^2+2\mathrm{MH}\alpha\beta\right)\Sigma a\lambda + \mathrm{M}\beta(-m\alpha+n\beta)\Sigma a'\lambda\right],\\
k\delta'\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial v} &= -\mathrm{V}_0\left[\beta\left(\Lambda\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}k^2+2\mathrm{MH}\alpha^2\right)\Sigma a\lambda + 2\mathrm{M}\quad n\alpha\beta\quad \Sigma a'\lambda\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Dès lors, il est facile de voir que les équations (30) deviennent

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{V}_0(\Lambda m\Sigma a\lambda - \mathrm{MH}\beta\Sigma a'\lambda) = 0,\\
&\mathrm{V}_0(\Lambda n\,\Sigma a\lambda + \mathrm{MH}\alpha\Sigma a'\lambda) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons d'abord $\mathrm{V}_0 \neq 0$: le déterminant de ces deux équations en $\Sigma a\lambda$ et $\Sigma a'\lambda$ est différent de zéro, puisqu'il vaut $\Lambda\mathrm{MH}k^2$; la seule solution est donc

$$\Sigma a\lambda = 0, \qquad \Sigma a'\lambda = 0,$$

d'où

$$\Sigma x'_u\lambda = 0, \qquad \Sigma x'_v\lambda = 0.$$

Les égalités (31) nous montrent alors que les dérivées $\dfrac{\partial(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})}{\partial(u, v)}$ restent continues à la traversée de l'onde, et nous voyons qu'il en est également ainsi lorsque $\mathrm{V}_0 = 0$.

Donc, quand une membrane affectée de viscosité est le siège d'une onde du troisième ordre, les quantités $\dfrac{\partial(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P})}{\partial(u, v)}$ restent continues à la traversée de l'onde; les seules discontinuités qu'elle puisse propager sont des discontinuités normales à la membrane.

Si maintenant $\mathrm{V}_0 = 0$, les équations (32) sont vérifiées d'elles-mêmes.

Pour obtenir la vitesse de propagation de l'onde, reportons-nous à l'équation (29) et dérivons-la par rapport à u ; en n'écrivant que les quantités discontinues à la traversée de l'onde, nous obtiendrons

$$
-\rho\mathrm{H}\frac{\partial^3 x}{\partial t^2\,\partial u} + x'_u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathcal{M}}{\partial u} - \frac{\partial\mathcal{N}}{\partial v}\right) + x'_v\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial u} + \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial v}\right)
$$
$$
+\,\mathcal{M}\frac{\partial^3 x}{\partial u^3} - 2\,\mathcal{N}\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\,\partial v} + \mathcal{P}\frac{\partial^3 x}{\partial v^2\,\partial u} + \ldots = 0.
$$

Tenons compte des formules (47) du Chapitre II et nous aurons par différence, et en introduisant la quantité $\mathcal{A}$ définie par l'égalité (8), la première des équations

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\lambda+x'_u\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+x'_v\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\
&\alpha\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\mu+y'_u\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+y'_v\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\
&\alpha\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\nu+z'_u\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+z'_v\delta'\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,
\end{aligned}\right.$$

les deux autres s'obtenant d'une manière analogue. Nous aurions de même, en dérivant par rapport à v,

$$(33')\quad \left\{\begin{aligned}
&\beta\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\lambda+x'_u\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+x'_v\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\
&\beta\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\mu+y'_u\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+y'_v\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0,\\
&\beta\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)\nu+z'_u\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial v}\right)+z'_v\delta'\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial u}+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations (33) et (33′) sont analogues aux équations (9). Dès lors, la discussion s'achève comme au paragraphe I. Multiplions les équations (33) respectivement par λ, μ, ν et ajoutons-les membre à membre ; faisons de même pour les équations (33′), nous obtiendrons les deux équations

$$(\alpha,\beta)\left(\mathcal{A}-\rho\frac{k^2}{\mathrm{H}}\mathcal{V}^2\right)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=0,$$

si, du moins, $\mathcal{V}$ est différent de zéro. Nous voyons ainsi que les discontinuités normales à la membrane se propagent avec les vitesses

$$\mathcal{V}=\pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}+2\frac{\mathrm{H}^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}\alpha^2-2\mathcal{F}\alpha\beta+\mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$

Si, au contraire, l'onde est stationnaire ($\mathcal{V}=0$), les équations (33) et (33′) nous donnent

$$(\alpha,\beta)\,\mathcal{A}\,\Sigma a''\lambda=0,$$

égalités d'après lesquelles la discontinuité correspondante se trouve contenue dans le plan tangent.

Ces résultats, analogues à ceux que nous avons obtenus pour les ondes d'accélération, sont entièrement généraux et s'étendent aisément aux ondes d'un ordre supérieur à 3. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette affirmation.

§ V. — Résumé.

Pour terminer, jetons un coup d'œil récapitulatif sur les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus dans l'étude de la propagation des ondes dans les membranes. Nous considérerons successivement ce qui se passe quand la membrane est dénuée de viscosité et quand elle est affectée de viscosité. Nous avons dit, dans notre Introduction, que ce dernier cas correspond seul aux membranes réellement existantes.

MEMBRANE DÉNUÉE DE VISCOSITÉ.

Une membrane dénuée de viscosité peut être le siège d'ondes de choc ($n=1$) et d'ondes d'ordre supérieur ($n>1$).

Ondes de choc. — Ces ondes peuvent être de deux catégories, suivant que la discontinuité (λ, μ, ν) se trouve ou non dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda = ou \neq 0$).

I. $\Sigma a'\lambda = 0$. Les ondes de cette catégorie peuvent être de trois espèces distinctes caractérisées principalement par la valeur de l'angle des deux plans tangents en chaque point de l'onde Σ.

Les ondes de première espèce sont caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $\delta'(a, b, c) = 0$; les deux plans tangents sont donc confondus. Elles se propagent avec les vitesses

$$\mathcal{V}_1 = -\sqrt{-\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}, \qquad \mathcal{V}_2 = +\sqrt{-\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\delta'\Theta}{\delta'\rho}}$$

et sont analogues à celles que propagent les fluides parfaits. Les ondes stationnaires sont forcément de première espèce.

Les ondes de deuxième espèce sont caractérisées par les relations $\delta'(\rho\Theta) \neq 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$; les deux plans tangents sont donc opposés, de sorte que la courbe d'intersection de la membrane par un plan normal à l'onde présente sur Σ un point de rebroussement. Elles se propagent avec les vitesses

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\Theta_1+\Theta_2}{\rho_1+\rho_2}}$$

et sont analogues à celles que nous avons signalées dans le mouvement des fils parfaits. Les ondes des deux premières espèces sont longitudinales.

Les ondes de troisième espèce sont caractérisées par l'égalité $\delta'(\rho\Theta) = 0$, l'angle des deux plans tangents pouvant être quelconque. Elles se propagent avec les vitesses

$$\mathfrak{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\rho_1}}, \qquad \mathfrak{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_2}{\rho_2}}$$

et sont analogues à celles que M. Jouguet a signalées dans le mouvement des fils parfaits.

II. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Les ondes de cette catégorie sont stationnaires et caractérisées par un plan tangent unique dans lequel se trouve la discontinuité.

Ondes d'ordre supérieur. — Si l'onde est stationnaire, la discontinuité est contenue dans le plan tangent. Les ondes d'ordre supérieur peuvent être, comme les ondes de choc, de deux catégories, suivant que la discontinuité (λ, μ, ν) se trouve ou non dans le plan normal à l'onde ($\Sigma a'\lambda = 0$ *ou* $\neq 0$).

I. $\Sigma a'\lambda = 0$. Il faut distinguer deux cas, suivant qu'on a

$$\Sigma a\lambda = 0 \text{ ou } \neq 0.$$

A. $\Sigma a\lambda = 0$. La discontinuité est normale à l'onde et se propage avec la vitesse

$$\mathfrak{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho}}.$$

L'onde est au moins d'ordre n pour la température, la densité et la tension.

B. $\Sigma a\lambda \neq 0$. Si K est différent de zéro, l'onde est au moins d'ordre n

pour la température ; elle se propage avec la vitesse

$$\mathcal{V} = \pm\sqrt{-\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}}.$$

Si $K = 0$, l'onde est stationnaire ou se propage avec la vitesse

$$\mathcal{V} = \pm\sqrt{-\frac{C}{c}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}}.$$

Dans tous les cas, que l'onde soit stationnaire ou que sa vitesse soit donnée par l'une ou l'autre des deux formules précédentes, la discontinuité est longitudinale. Ces ondes sont analogues à celles que propagent les fluides parfaits.

II. $\Sigma a'\lambda \neq 0$. Les ondes de cette catégorie sont stationnaires ; la discontinuité se trouve donc dans le plan tangent. Si l'on a $K \neq 0$, la discontinuité est transversale.

MEMBRANE AFFECTÉE DE VISCOSITÉ.

Une membrane affectée de viscosité peut être le siège d'ondes de choc ($n = 1$) et d'ondes d'ordre supérieur ($n > 1$).

Ondes de choc. — La densité reste continue à la traversée de l'onde. La discontinuité (λ, μ, ν) est dirigée suivant l'intersection du plan normal à l'onde et du plan bissecteur des deux plans tangents qui traverse la membrane suivant Σ ; ces ondes rentrent donc dans la catégorie I ($\Sigma a'\lambda = 0$). De plus, les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont finies de part et d'autre de l'onde et nulles immédiatement en avant de celle-ci dans le sens de sa propagation. Ces ondes sont forcément de deuxième ou de troisième espèce ; leurs vitesses de propagation dépendent de la quantité

$$\mathcal{A} = \frac{k^2}{H}\Theta + 2H(\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2).$$

Les ondes de deuxième espèce, caractérisées par les relations $\delta'\mathcal{A} \neq 0$, $a_1 + a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$, se propagent avec les vitesses

$$\mathcal{V}_1 = -\sqrt{\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2\rho} + \frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}_2\alpha^2 - 2\mathcal{F}_2\alpha\beta + \mathcal{G}_2\beta^2}{\rho}},$$

$$\mathcal{V}_2 = +\sqrt{\frac{\Theta_1+\Theta_2}{2\rho} + \frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}_1\alpha^2 - 2\mathcal{F}_1\alpha\beta + \mathcal{G}_1\beta^2}{\rho}}.$$

Les ondes de troisième espèce, caractérisées par l'égalité $\delta'\mathcal{A} = 0$, l'angle des deux plans tangents pouvant être quelconque, se propagent avec la vitesse

$$\mathcal{V} = \pm\sqrt{\frac{\overline{\Theta}}{\rho}}.$$

Ondes d'ordre supérieur. — Ces ondes sont au moins d'ordre $n-1$ pour les actions de viscosité $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$. Si l'onde est stationnaire, la discontinuité (λ, μ, ν) est contenue dans le plan tangent; si l'onde se propage, la discontinuité est normale à la membrane et sa vitesse de propagation est

$$\mathcal{V} = \pm\sqrt{\frac{\Theta}{\rho} + 2\frac{H^2}{k^2}\,\frac{\mathcal{E}\alpha^2 - 2\mathcal{F}\alpha\beta + \mathcal{G}\beta^2}{\rho}}.$$