JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Théorie géométrique, pour un corps non rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et rotations de ses particules

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 211-227.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__211_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Théorie géométrique, pour un corps non rigide, des déplacements bien continus, ainsi que des déformations et rotations de ses particules;

PAR J. BOUSSINESQ (1).

Sommaire. — I. Déplacements et déformation d'une particule élémentaire. — II. Existence, dans la particule, d'un trièdre de fibres principales et de feuillets principaux, qui reste rectangulaire. — III. Rotations de ce trièdre et dilatations principales de la particule. — IV. Cas particulier des grandes déformations que n'accompagne aucune rotation de la particule.

I. — Déplacements et déformation d'une particule élémentaire.

1. Soit un corps déformable comprenant une multitude de points matériels, assez rapprochés pour qu'il puisse être censé en posséder un dans toute *situation* (x, y, z) comprise à son intérieur; et admettons, de plus, que ces points matériels (x, y, z), ainsi distingués les uns des autres par les coordonnées x, y, z de leurs situations *primitives*, viennent à éprouver suivant les axes *fixes* des x, y, z trois *déplacements* respectifs ξ, η, ζ (accroissements de leurs coordonnées), bien définis et *continus*, c'est-à-dire exprimés par des fonctions de x, y, z graduellement variables ou à dérivées partielles premières en x, y, z

(1) Comme il est peu probable que je puisse jamais publier le *Cours sur l'élasticité*, qui a fait plusieurs fois déjà l'objet de mon enseignement à la Sorbonne, il m'a paru utile de résumer ici quelques idées particulièrement élémentaires de sa première Partie, en raison de l'extrême simplicité que j'ai réussi, ce me semble, à leur donner et de la précision, nouvelle (je crois) pour bien des géomètres, à laquelle j'ai amené la notion de la *rotation* des particules que Cauchy appelle leur *rotation moyenne*.

très sensiblement les mêmes dans toute étendue de grandeur un peu perceptible, comme serait celle d'une particule presque microscopique taillée idéalement dans le corps.

Si

$$x' = x + \xi, \qquad y' = y + \eta, \qquad z' = z + \zeta$$

sont les nouvelles cordonnées de l'un, M, de ces points, et

$$x'_1 = x_1 + \xi_1, \qquad y'_1 = y_1 + \eta_1, \qquad z'_1 = z_1 + \zeta_1,$$

celles d'un point, K, *voisin* (appartenant, par exemple, à la même particule), les projections *primitives* $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$ de la droite MK joignant le point (x, y, z) au point (x_1, y_1, z_1), projections que nous appellerons simplement h, k, l, détermineront entièrement, dans la particule, les *nouvelles* projections de la même droite, $x'_1 - x', y'_1 - y'$, $z'_1 - z'$, que nous appellerons pareillement h', k', l'. Car, à très peu près, l'on aura, par un développement de Taylor évident,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & h' = h + (\xi_1 - \xi) = h + \frac{d\xi}{dx} h + \frac{d\xi}{dy} k + \frac{d\xi}{dz} l, \\ & k' = k + \frac{d\eta}{dx} h + \ldots, \qquad l' = l + \frac{d\zeta}{dx} h + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Et ces *nouvelles* projections h', k', l' seront bien pareilles pour les droites de jonction de tous les couples de points chez lesquels les premières h, k, l l'étaient, vu la quasi-constance, *dans toute la particule*, des neuf dérivées partielles premières de ξ, η, ζ en x, y, z.

Appelons λ la longueur *primitive* et α, β, γ les trois cosinus directeurs *primitifs* de la droite considérée de jonction MK, de manière à avoir $h = \lambda\alpha$, $k = \lambda\beta$, $l = \lambda\gamma$. Soient, de plus, α', β', γ' les cosinus directeurs de la même droite de jonction *après les déplacements* et ∂ sa *dilatation* (linéaire), c'est-à-dire $1 + \partial$ le rapport, essentiellement positif, de sa nouvelle longueur à λ. Il viendra donc

$$h' = \lambda(1 + \partial)\alpha', \qquad k' = \lambda(1 + \partial)\beta', \qquad l' = \lambda(1 + \partial)\gamma';$$

et les expressions (1) ci-dessus de h', k', l' donneront, pour calculer les nouveaux cosinus directeurs α', β', γ' de la droite, ainsi que sa dilatation ∂ (positive ou négative), les trois formules fondamentales

$$(2)\quad \begin{cases} (1+\partial)\alpha' = \left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)\alpha + \frac{d\xi}{dy}\beta + \frac{d\xi}{dz}\gamma, \\ (1+\partial)\beta' = \frac{d\eta}{dx}\alpha + \ldots, \qquad (1+\partial)\gamma' = \frac{d\zeta}{dx}\alpha + \ldots. \end{cases}$$

2. La dilatation ∂ et la nouvelle direction $(\alpha', \beta', \gamma')$ de la droite MK ne dépendent donc, dans la particule, que de la direction primitive (α, β, γ). C'est dire que deux droites de la particule primitivement orientées de même ont encore une même orientation après les déplacements et se sont allongées ou accourcies dans un même rapport.

D'où il suit :

1° Que toute *file* ou *fibre* élémentaire, *rectiligne*, de points matériels *reste rectiligne* et se contracte ou se dilate *uniformément;*

2° Que deux fibres voisines primitivement *parallèles* restent indéfiniment voisines et *parallèles*, et qu'elles éprouvent une dilatation ∂ *commune* (positive ou négative);

3° Que tout *feuillet* matériel *plan*, élémentaire, lieu de fibres parallèles croisées par une même fibre droite d'une autre direction, ne cesse pas de comprendre toutes ces fibres et *reste un feuillet plan ;*

4° Enfin, que deux pareils feuillets, parallèles avant les déplacements ou comprenant, chacun, de telles fibres respectivement parallèles dans les deux, ne cesseront pas d'être, dans la particule, deux plans matériels *constamment parallèles.*

Cela posé, taillons idéalement la particule en forme de parallélépipède, avec arêtes parallèles à trois fibres intérieures droites MA, MB, MC, émanées (non dans un plan unique) du même point central M (x, y, z); et supposons l'angle trièdre de celles-ci défini par les trois cosinus, compris entre 1 et -1, des angles plans BMC, CMA, AMB (aigus ou obtus). Après les déplacements, ces trois fibres MA, MB, MC auront éprouvé des dilatations que nous appellerons respectivement ∂_a, ∂_b, ∂_c, et les cosinus de leurs angles auront subi des accroissements dits respectivement les *glissements mutuels* des fibres MB et MC, MC et MA, MA et MB, glissements que nous appellerons g_a, g_b, g_c. Il est clair que le parallélépipède, en se déformant, sera toujours un parallélépipède, à arêtes sans cesse parallèles aux trois fibres intérieures MA, MB, MC; et que son angle solide d'où partiront trois arêtes orientées comme les fibres MA, MB, MC, angle sans cesse égal au trièdre MABC, aura ses changements de forme complètement définis, comme ceux même de MABC, par les trois glissements g_a, g_b, g_c, tandis que ces arêtes du parallélépipède auront éprouvé les trois dilatations ∂_a, ∂_b, ∂_c.

Par conséquent, la figure apparente de la particule, après les déformations, pourra être construite, si l'on donne, outre sa configuration primitive, les *six déformations élémentaires* g_a, g_b, g_c, ∂_a, ∂_b, ∂_c.

3. Mais il y a plus. C'est la configuration *interne*, elle-même, de la particule qui aura son changement défini au moyen des six mêmes déformations g_a, g_b, g_c, ∂_a, ∂_b, ∂_c.

Rapportons, en effet, chaque point matériel, K, de la particule aux trois fibres MA, MB, MC prises comme axes de coordonnées. Soient a, b, c, relativement à ce système d'axes, les trois coordonnées primitives de K. Nous aurons, pour représenter ces coordonnées et, d'abord, c, une fibre JK, parallèle soit à MC, soit à son prolongement en deçà de M, suivant que c est positif ou négatif, et issue d'un point J, du *feuillet* AMB, d'où elle aboutit à la molécule K; puis, pour représenter b, une fibre IJ du feuillet, parallèle de même à MB ou à son prolongement en deçà de M, suivant que b est positif ou négatif, et issue d'un point, I, de la fibre MA (ou de son prolongement en deçà de M), d'où elle va au pied J de la fibre précédente JK; enfin, pour représenter a, la portion MI, positive ou négative, de la fibre MA ou de son prolongement en sens opposé. Les trois fibres élémentaires $a = \mathrm{MI}$, $b = \mathrm{IJ}$, $c = \mathrm{JK}$ auront constamment, dans tous les états successifs de la particule, les directions des axes matériels (à orientations changeantes) MA, MB, MC, dont les angles respectifs BMC, CMA, AMB se trouveront sans cesse déterminés par les accroissements g_a, g_b, g_c de leurs cosinus à partir de l'état primitif. De plus, après les déplacements, les longueurs MI, IJ, JK auront éprouvé les trois dilatations ∂_a, ∂_b, ∂_c; en sorte que les nouvelles coordonnées, a', b', c', du point K, par rapport aux axes matériels mobiles MA, MB, MC, seront

$$(3) \qquad a' = a(1 + \partial_a) \qquad b' = b(1 + \partial_b), \qquad c' = c(1 + \partial_c).$$

Quand on aura construit, grâce aux trois données g_a, g_b, g_c, la nouvelle figure de l'angle trièdre MABC dont les arêtes servent sans cesse d'axes, les formules (3) feront donc connaître, pour le point matériel quelconque K (de la particule) à coordonnées primitives a, b, c, ses nouvelles coordonnées a', b', c', qui permettront de rattacher ce point au trièdre et, par suite, de se représenter la configuration complète du corps aux environs de la molécule M.

4. Considérons spécialement les points (a, b, c) de la particule qui constituent, avant les déplacements, une surface matérielle quelconque, par exemple, une *nappe* dont l'équation, $f(a, b, c) = 0$, soit algébrique et de degré n. Après les déplacements ξ, η, ζ, cette nappe aura évidemment pour équation, par rapport au trièdre de référence MABC pris avec sa nouvelle figure, la relation que donne

$$f(a, b, c) = 0$$

par la substitution à a, b, c de leurs valeurs tirées de (3), savoir

$$f\left(\frac{a'}{1+\partial_a}, \frac{b'}{1+\partial_b}, \frac{c'}{1+\partial_c}\right) = 0.$$

La nappe transformée est donc du même degré que la nappe primitive et d'une équation peu différente (de structure). Ainsi, *les déformations subies par toute surface matérielle algébrique tracée dans la particule, lui laissent son degré et une forme analogue à la première.*

Supposons maintenant que cette surface soit, primitivement, l'ellipsoïde

$$\frac{a^2}{\varepsilon^2} + \frac{b^2}{\varepsilon'^2} + \frac{c^2}{\varepsilon''^2} = 1, \tag{4}$$

ayant trois demi-diamètres conjugués, ε, ε', ε'', suivant les fibres (quelconques) MA, MB, MC de la particule. Elle deviendra, après les déplacements,

$$\frac{a'^2}{\varepsilon^2(1+\partial_a)^2} + \frac{b'^2}{\varepsilon'^2(1+\partial_b)^2} + \frac{c'^2}{\varepsilon''^2(1+\partial_c)^2} = 1. \tag{5}$$

Donc, *toute particule taillée en forme d'ellipsoïde reste ellipsoïdale;* et ce sont, *dans ses états* successifs, *les mêmes fibres* qui *constituent ses systèmes de diamètres conjugués.*

En effet, on peut choisir comme état primitif n'importe quel état de la particule, pour passer de celui-là à tout autre; et l'on voit que les fibres constituant un système de diamètres conjugués dans le premier en constituent également un dans tous les autres.

II. — Existence, dans la particule, d'un trièdre de fibres principales et de feuillets principaux, qui reste rectangulaire.

5. Mais donnons désormais à la particule, dans l'état primitif, la forme sphérique, en choisissant $\varepsilon'' = \varepsilon' = \varepsilon$. Tous ses systèmes de diamètres conjugués seront rectangulaires, y compris celui qui, après les déplacements proposés ξ, η, ζ, devient le système des axes de l'ellipsoïde transformé (5). Donc, *le système particulier de fibres rectangulaires qui, dans la particule sphérique, fournit après déformation les axes de l'ellipsoïde, constitue un trièdre trirectangle, dont la figure n'est pas altérée par cette déformation.*

Nous admettrons qu'on ait précisément choisi ces fibres pour MA, MB, MC; et, par définition même, les trois glissements mutuels g_a, g_b, g_c seront nuls, chacune des trois, MA, ou MB, ou MC, étant restée normale aux deux autres et aussi, par suite, au feuillet matériel BMC, ou CMA, ou AMB, qui lui était déjà perpendiculaire avant les déplacements.

Il existe donc, pour toute particule qui subit une déformation *déterminée*, trois directions, rectangulaires entre elles, dites *directions principales*, et rien que trois, généralement, suivant lesquelles les fibres de la particule conservent leur normalité aux feuillets qui leur étaient perpendiculaires avant la déformation. Par suite, celle-ci se fait *symétriquement* de part et d'autre des feuillets en question, de BMC, par exemple. Car si l'on admet, pour fixer les idées, qu'on maintienne le feuillet BMC dans son plan, deux points matériels symétriques K et K_1 situés de part et d'autre, ou dont la fibre de jonction KJK_1 était perpendiculaire au feuillet en son milieu J, se déplaceront sans cesser d'être symétriques, leur droite de jonction KJK_1 conservant sa normalité au feuillet et ses deux moitiés KJ, K_1J se dilatant (ou se contractant) pareillement.

Ainsi, la déformation de la particule se fait toujours symétriquement de part et d'autre de trois certains feuillets rectangulaires, qu'on appellera les *plans principaux*, et qui seront ceux s'intersectant suivant les *fibres principales*.

6. Il était inévitable que les fibres principales émanées de M constituassent les demi-axes de la particule d'abord sphérique et devenue ellipsoïdale. Car, tandis que, dans la sphère, toutes les fibres émanées du centre étaient normales aux feuillets plans menés à leurs extrémités tangentiellement à la particule, les demi-axes de l'ellipsoïde seuls, d'après leur définition même, offriront cette normalité aux feuillets plans qui leur sont sans cesse tangents, et, par conséquent, l'auront seuls conservée : ce qui est justement la propriété caractéristique des fibres principales.

De plus, un tel rayon *normal* à l'ellipsoïde se distingue des autres, obliques, en ce que *sa différentielle*, obtenue en passant de lui à ses voisins, *est nulle*, c'est-à-dire d'un ordre de petitesse supérieur à celui du déplacement de son pied sur la surface ou du changement corrélatif de sa direction. Et comme ici, l'inégalité relative des rayons, tous fibres émanées de M, est due uniquement à la dilatation linéaire ∂ qu'ils ont subie dans la déformation, il en résulte que les *fibres principales* différeront de fibres quelconques émanées de M et définies respectivement par leurs cosinus directeurs primitifs α, β, γ, en ce qu'on aura, *pour elles et pour elles seules,* l'équation $d\partial = 0$, où ∂ désigne la dilatation générale des fibres, exprimée en fonction de α, β, γ, et où α, β, γ varieront infiniment peu de toutes les manières possibles, à partir de leurs valeurs relatives à la fibre principale considérée [1].

---

[1] Le changement de direction et la dilatation de chaque *rayon* matériel émané de M, dans la particule sphérique devenue ellipsoïdale, s'obtiennent aisément, par rapport au trièdre MABC des fibres principales, en combinant deux constructions planes basées sur les formules (3) et que j'ai fait connaître dans un court Mémoire inséré en 1877 au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (*Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point;* t. III, p. 147 à 152). Ces constructions planes rendent immédiate, par exemple, la recherche des

III. — Rotations de ce trièdre et dilatations principales de la particule.

7. Concevons les mouvements effectifs des divers points de la particule rapportés à des axes locaux que nous appellerons *axes des* h, k, l, issus du point mobile M et constamment *parallèles* aux axes généraux *fixes* des x, y, z. Par rapport à de tels axes qu'entraîne la translation du point M ou de la particule, ces mouvements se réduiront évidemment : 1° à celui de *déformation*, censé se faire de part et d'autre des trois plans principaux BMC, CMA, AMB *maintenus, un instant, fixes*, ou propre à donner ainsi *la vraie configuration nouvelle de la particule*, sans se compliquer d'aucune rotation du trièdre MABC qui a ces trois plans pour faces; et, 2° à une *rotation*, autour du sommet M, de la figure du trièdre (lié à la particule), rotation capable d'amener ensuite les trois plans principaux dans leurs directions et situations définitives.

Or, x, y, z étant les coordonnées primitives et ξ, η, ζ les déplacements de M par rapport aux axes fixes, x_1, y_1, z_1 et ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées et déplacements analogues du point voisin quelconque K,

$$h = x_1 - x, \quad k = y_1 - y, \quad l = z_1 - z \quad \text{et} \quad \xi_1 - \xi, \quad \eta_1 - \eta, \quad \zeta_1 - \zeta$$

étant aussi, par suite, les coordonnées primitives et les déplacements de K par rapport aux axes mobiles, cherchons, en fonction de h, k, l, les expressions que recevront $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$, pendant ces deux mouvements bien distincts, supposés produits l'un après l'autre.

8. Donnons-nous les trois dilatations principales $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ de la particule, ou dilatations respectives des trois fibres principales MA, MB, MC, ainsi que *leurs* cosinus directeurs $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ par rapport aux x, y, z ou aux h, k, l, cosinus directeurs des fibres MA, MB, MC elles-mêmes, *à orientation constante durant la déformation supposée.*

---

rayons *les plus déviés* et, par suite, celle des fibres qui éprouvent dans la déformation les plus grands glissements relatifs, ou dont les angles mutuels changent le plus.

Entre les deux systèmes de coordonnées primitives a, b, c et h, k, l, nous aurons évidemment les relations

$$a=\alpha_1 h+\beta_1 k+\gamma_1 l,\qquad b=\alpha_2 h+\ldots,\qquad c=\alpha_3 h+\ldots.$$

D'autre part, des relations analogues existent entre les déplacements corrélatifs à la déformation, que nous appelons $\xi_1-\xi$, $\eta_1-\eta$, $\zeta_1-\zeta$ suivant les h, k, l et qui, d'après (3), se réduisent, suivant les a, b, c, à $\partial_a a$, $\partial_b b$, $\partial_c c$ ou à $\partial_1 a$, $\partial_2 b$, $\partial_3 c$. Ces relations sont

$$\xi_1-\xi=\alpha_1\partial_1 a+\alpha_2\partial_2 b+\alpha_3\partial_3 c,\quad \eta_1-\eta=\beta_1\partial_1 a+\ldots,\quad \zeta_1-\zeta=\gamma_1\partial_1 a+\ldots.$$

Remplaçons, dans celles-ci, a, b, c par leurs valeurs précédentes en h, k, l; et, si nous posons, pour abréger,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A=\alpha_1^2\partial_1+\alpha_2^2\partial_2+\alpha_3^2\partial_3, && B=\beta_1^2\partial_1+\ldots, && C=\gamma_1^2\partial_1+\ldots,\\ &D=\beta_1\gamma_1\partial_1+\beta_2\gamma_2\partial_2+\beta_3\gamma_3\partial_3, && E=\gamma_1\alpha_1\partial_1+\ldots, && F=\alpha_1\beta_1\partial_1+\ldots,\end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(7)\quad \xi_1-\xi=Ah+Fk+El,\quad \eta_1-\eta=Fh+Bk+El,\quad \zeta_1-\zeta=Eh+Dk+Cl\text{ (}^1\text{)}.$$

9. Tels sont les déplacements partiels que produit suivant les h, k, l la déformation *pure*, abstraction faite du changement d'orientation qu'éprouve le trièdre MABC des fibres principales. Il n'y a donc plus, pour avoir les déplacements totaux $\xi_1-\xi$, $\eta_1-\eta$, $\zeta_1-\zeta$, qu'à y joindre ceux qu'engendre la rotation effective de ce trièdre, censée se faire une fois qu'est produite la nouvelle configuration de la particule.

Évaluons ces derniers déplacements partiels, dans l'hypothèse *habi-*

---

[1] Jusqu'ici nos démonstrations et nos formules n'ont nullement supposé petits ni les déplacements, ni les déformations; elles s'appliqueront donc quelque grandes que soient les neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z, pourvu toutefois, d'après les relations (7) comparées à (1), que ces dérivées se réduisent à six distinctes, A, B, C, D, E, F, ou qu'elles donnent, dans la particule,

$$\frac{d\eta}{dz}=\frac{d\zeta}{dy},\ \frac{d\zeta}{dx}=\frac{d\xi}{dz},\ \frac{d\xi}{dy}=\frac{d\eta}{dx};$$

ce qui implique, comme on voit, *déformation pure, sans mélange de rotation*. Mais, à partir du numéro suivant, nos calculs deviendront seulement approchés, et supposeront négligeables les carrés et produits de ces neuf dérivées partielles (censées alors toutes distinctes) à côté de leurs premières puissances. On sait d'ailleurs que la théorie classique se borne à ce cas.

tuelle que *la rotation soit petite* et que *la déformation elle-même de la particule se soit trouvée assez faible pour n'avoir apporté aux coordonnées primitives* h, k, l *que de très petites altérations relatives* $\xi_1 - \xi$, $\eta_1 - \eta$, $\zeta_1 - \zeta$. Soient alors ω_x, ω_y, ω_z les trois composantes, suivant les x, y, z ou suivant les h, k, l, de la petite rotation effective Ω du trièdre des fibres principales autour de leur point M de croisement. On sait que les accroissements respectifs qui en résulteront, pour les trois coordonnées du point quelconque K (h, k, l) de la particule, seront

$$(8)\qquad \omega_y l - \omega_z k, \qquad \omega_z h - \omega_x l, \qquad \omega_x k - \omega_y h.$$

Ceux-ci s'ajoutent donc à (7) pour donner, comme déplacements totaux cherchés, relatifs aux axes mobiles des h, k, l à orientation fixe,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= Ah + (F - \omega_z)k + (E + \omega_y)l, \\ \eta_1 - \eta &= (F + \omega_z)h + Bk + (D - \omega_x)l, \\ \zeta_1 - \zeta &= (E - \omega_y)h + (D + \omega_x)k + Cl. \end{aligned}\right.$$

Ils sont les excédents $h' - h$, $k' - k$, $l' - l$ des nouvelles coordonnées des points de la particule, après les déplacements, sur les coordonnées primitives h, k, l; en sorte qu'ils égalent identiquement les derniers membres des formules (1) diminués respectivement de h, k, l. Or leur identification à ceux-ci donne, comme valeurs des neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z au centre M de la particule :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dx} = A, && \frac{d\xi}{dy} = F - \omega_z, && \frac{d\xi}{dz} = E + \omega_y; \\ &\frac{d\eta}{dx} = F + \omega_z, && \frac{d\eta}{dy} = B, && \frac{d\eta}{dz} = D - \omega_x; \\ &\frac{d\zeta}{dx} = E - \omega_y, && \frac{d\zeta}{dy} = D + \omega_x, && \frac{d\zeta}{dz} = C. \end{aligned}\right.$$

10. Ces relations reviennent à poser :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dx} = A, && \frac{d\eta}{dy} = B, && \frac{d\zeta}{dz} = C; \\ &\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = 2D, && \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = 2E, && \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = 2F; \\ &\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = -2\omega_x, && \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} = -2\omega_y, && \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = -2\omega_z. \end{aligned}\right.$$

Considérons d'abord les trois dernières formules (11), parce que leur interprétation est immédiate. Elles signifient que les demi-différences, bien connues,

$$(12) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right),$$

appelées par Cauchy *rotations moyennes*, peuvent être nommées simplement les *rotations de la particule* (x, y, z) du corps; car ce sont bien de vraies rotations, des mouvements d'ensemble, autour de M, d'une figure à trois dimensions appartenant à la particule; savoir, les rotations effectives ω_x, ω_y, ω_z du trièdre *géométrique* des fibres principales, *qui a constitué*, en quelque sorte, *la charpente idéale de la particule*, ou comme une substruction résistante formée de plans de symétrie et cachée sous la matière, substruction ou charpente dont la déformation de celle-ci a respecté intégralement les angles et la figure [1].

11. Passons maintenant aux six premières formules (11).

Définissons la déformation de la particule par le moyen des *six* dilatations ou glissements, que nous appellerons ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, de trois fibres, MX, MY, MZ, sensiblement parallèles aux axes généraux des x, y, z : nous les nommerons les *six déformations principales relatives aux* x, y, z. Pour fixer les idées (sans rien changer d'ailleurs aux résultats approchés cherchés ici), supposons ces fibres de la particule rigoureusement parallèles aux x, y, z dans l'état primitif, ou définies par les valeurs respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ des cosinus directeurs α, β, γ; et cherchons, avec leurs *petites* dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z, les variations, censées également petites, de leurs cosinus directeurs.

A cet effet, dégageons d'abord des formules (2) les expressions générales approchées de la *petite* dilatation ∂ d'une fibre *quelconque* et de ses nouveaux cosinus directeurs α', β', γ'. Il suffira, pour avoir ∂, d'ajouter ces trois équations (2), multipliées préalablement par α',

---

[1] Quant au même trièdre, mais *physique*, ou à faces et arêtes *matérialisées* dans les *feuillets* principaux et les *fibres* principales, il a éprouvé les trois dilatations ∂_1, ∂_2, ∂_3.

β', γ', puis d'observer : d'une part, que le cosinus $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ du petit angle des deux directions primitive et finale d'une même fibre se confond très sensiblement avec son maximum 1; d'autre part que, dans les termes du second membre où figurent les neuf petites dérivées de ξ, η, ζ en x, y, z, les facteurs α', β', γ' sont réductibles à α, β, γ. Après quoi, ∂ étant connu, les quotients des formules (2) par $1 + \partial$, ou leurs produits par $1 - \partial$ avec suppression des termes non linéaires, donneront α', β', γ'. On trouve ainsi :

$$\partial = \frac{d\xi}{dx}\alpha^2 + \frac{d\eta}{dy}\beta^2 + \frac{d\zeta}{dz}\gamma^2 + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\beta\gamma + \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)\gamma\alpha + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\alpha\beta, \tag{13}$$

$$\alpha' = \left(1 - \partial + \frac{d\xi}{dx}\right)\alpha + \frac{d\xi}{dy}\beta + \frac{d\xi}{dz}\gamma, \quad \beta' = \frac{d\eta}{dx}\alpha + \ldots, \quad \gamma' = \frac{d\zeta}{dx}\alpha + \ldots. \tag{14}$$

Or, l'application de la formule (13) aux trois fibres MX, MY, MZ donne d'abord

$$\partial_x = \frac{d\xi}{dx}, \qquad \partial_y = \frac{d\eta}{dy}, \qquad \partial_z = \frac{d\zeta}{dz}. \tag{15}$$

Et il résulte ensuite des formules (14), pour les nouveaux cosinus directeurs, par exemple, de MY et MZ,

$$\left(\frac{d\xi}{dy}, 1, \frac{d\zeta}{dy}\right), \quad \left(\frac{d\xi}{dz}, \frac{d\eta}{dz}, 1\right).$$

Le cosinus du nouvel angle YMZ, somme des produits deux à deux de ceux-ci, est donc sensiblement $\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}$, alors que le cosinus primitif était nul. L'augmentation de ce cosinus constituant le glissement g_x, auquel g_y et g_z seront analogues, on aura donc

$$g_x = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}, \qquad g_y = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}, \qquad g_z = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}. \tag{16}$$

Ainsi, les six premières formules (11) expriment que les trois dilatations linéaires ∂_x, ∂_y, ∂_z, relatives aux axes coordonnés, et les trois demi-glissements corrélatifs $\frac{1}{2}g_x$, $\frac{1}{2}g_y$, $\frac{1}{2}g_z$ sont précisément les six quantités A, B, C, D, E, F, que les formules (6) rattachent d'une manière simple aux trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 et à leurs cosinus directeurs par rapport aux x, y, z.

12. La voie géométrique principalement suivie ici nous a donc fait connaître les six déformations élémentaires $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z$ en fonction des trois dilatations principales $\partial_1, \partial_2, \partial_3$, censées données en grandeur et en direction. Or, il y a lieu, le plus souvent, de faire l'inverse, c'est-à-dire de chercher les dilatations principales et leurs cosinus directeurs, étant donnés les dilatations A, B, C relatives aux x, y, z et les demi-glissements corrélatifs D, E, F. Terminons ce travail en rappelant la marche à suivre pour cela, d'après le n° 6.

On a vu, à la fin de ce n° 6, qu'il faudra d'abord former l'expression générale de la dilatation ∂ des fibres émanées du centre M de la particule, puis, égaler à zéro sa différentielle totale en α, β, γ pour tous les rapports mutuels possibles de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. La formule (13) revient, vu les six premières (11), à

$$\partial = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta; \tag{17}$$

d'où il résulte, pour les demi-dérivées partielles de ∂ en α, β, γ,

$$A\alpha + F\beta + E\gamma, \qquad F\alpha + B\beta + D\gamma, \qquad E\alpha + D\beta + C\gamma. \tag{18}$$

Or, comme la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donne toujours

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0,$$

l'annulation identique de la différentielle totale de ∂, à partir de la direction (α, β, γ) d'une fibre principale, équivaut à écrire l'égalité des trois rapports des demi-dérivées partielles (18) à α, β, γ. Un quatrième rapport égal s'obtient en multipliant ceux-ci, *haut et bas*, par α, β, γ et ajoutant terme à terme; ce qui, vu (17), donne simplement ∂. Enfin, l'égalité à ∂ des trois premiers rapports conduit à écrire, en α, β, γ, les trois équations du premier degré, homogènes,

$$\left\{\begin{aligned} (\partial - A)\alpha - F\beta - E\gamma &= 0, \\ -F\alpha + (\partial - B)\beta - D\gamma &= 0, \\ -E\alpha - D\beta + (\partial - C)\gamma &= 0. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

La compatibilité de celles-ci exigeant l'annulation de leur déterminant, il vient, pour calculer les trois dilatations principales cherchées ∂_1, ∂_2, ∂_3, l'équation en ∂ du troisième degré

$$(20)\quad (\partial-A)(\partial-B)(\partial-C)-D^2(\partial-A)-E^2(\partial-B)-F^2(\partial-C)-2DEF=0.$$

La résolution de cette équation, qu'on sait, par avance, avoir ses trois racines réelles, fera donc connaître les trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3; après quoi, deux des trois équations (19) devenues ainsi compatibles détermineront les rapports mutuels de α, β, γ et, par suite, la direction (α, β, γ) de la fibre principale qui éprouve la dilatation considérée. On sait déjà que ces trois directions, (α_1, β_1, γ_1), (α_2, β_2, γ_2), (α_3, β_3, γ_3), seront mutuellement rectangulaires.

Le problème actuel, bien moins simple que son inverse traité précédemment, exige donc la résolution de l'équation du troisième degré (20).

13. Le premier membre de celle-ci, (20), ordonné suivant les puissances décroissantes de ∂, c'est-à-dire mis sous la forme

$$\partial^3-(A+B+C)\partial^2+(BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2)\partial$$
$$-(ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF),$$

est, comme on sait, identique au produit $(\partial-\partial_1)(\partial-\partial_2)(\partial-\partial_3)$, ou à

$$\partial^3-(\partial_1+\partial_2+\partial_3)\partial^2+(\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2)\partial-\partial_1\partial_2\partial_3;$$

ce qui donne, entre les trois dilatations principales ∂_1, ∂_2, ∂_3 de la particule et les six déformations élémentaires ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, ou A, B, C, 2D, 2E, 2F, relatives à des x, y, z rectangulaires quelconques, les trois relations, respectivement des premier, deuxième et troisième degrés :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \partial_1+\partial_2+\partial_3 &= A+B+C,\\ \partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2 &= BC+CA+AB-D^2-E^2-F^2,\\ \partial_1\partial_2\partial_3 &= ABC-D^2A-E^2B-F^2C+2DEF.\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces relations sont donc, dans la particule, des *invariants* de la déformation, c'est-à-dire des expressions indépendantes des x, y, z choisis. Le premier de ces invariants exprime, comme on sait, la *dilatation cubique* de la particule. Le second, du deuxième degré, est aussi très important, de même que celui-ci, également du second degré, qui résulte de sa combinaison avec le premier,

$$(22) \quad \begin{aligned} \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 &= (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)^2 - 2(\partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2) \\ &= (A + B + C)^2 - 2(BC + CA + AB - D^2 - E^2 - F^2) \\ &= A^2 + B^2 + C^2 + 2(D^2 + E^2 + F^2). \end{aligned}$$

On les vérifie, du reste, en y remplaçant A, B, C, D, E, F par leurs valeurs (6) en fonction des dilatations principales, et en constatant alors que les neuf cosinus directeurs de celles-ci s'éliminent à raison des six relations dues, entre eux, à la rectangularité des deux systèmes d'axes.

Il y a lieu de joindre aux invariants du deuxième degré ci-dessus, un invariant évident, du même degré, concernant, *non plus la déformation* de la particule, mais sa *rotation* Ω : c'est la somme de carrés

$$(23) \qquad \Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2.$$

Enfin, si l'on ajoute le double de celui-ci au précédent (22), en remplaçant A, B, C, D, E, F, ω_x, ω_y, ω_z par leurs valeurs tirées de (11), il vient l'invariant *mixte* assez intéressant, toujours du second degré,

$$(24) \quad \begin{aligned} \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 + 2\Omega^2 = {} & \frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{d\xi^2}{dy^2} + \frac{d\xi^2}{dz^2} \\ & + \frac{d\eta^2}{dx^2} + \frac{d\eta^2}{dy^2} + \frac{d\eta^2}{dz^2} + \frac{d\zeta^2}{dx^2} + \frac{d\zeta^2}{dy^2} + \frac{d\zeta^2}{dz^2}. \end{aligned}$$

IV. — Cas particulier des grandes déformations que n'accompagne aucune rotation de la particule.

14. Il est intéressant de voir la signification simple que prennent, en toute rigueur, les trois directions rectangulaires (α, β, γ), définies par les équations (19), ainsi que les racines ∂ correspondantes de l'équation (20), dans le cas particulier de déformations de la particule aussi grandes qu'on voudra, mais produites de manière que les dérivées premières en x, y, z des déplacements ξ, η, ζ vérifient, dans cette particule, la triple égalité

$$\frac{d\eta}{dz}=\frac{d\zeta}{dy},\qquad \frac{d\zeta}{dx}=\frac{d\xi}{dz},\qquad \frac{d\xi}{dy}=\frac{d\eta}{dx}. \tag{25}$$

Alors, en appelant respectivement D, E, F ces six dérivées *obliques*, égales deux à deux, et A, B, C les trois dérivées *directes* $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$, il y a bien toujours, comme solutions (α, β, γ) du système (20) et (19), trois directions rectangulaires, savoir, celles des axes de la surface du second degré à centre dont l'équation est

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=\text{const.}$$

Or, d'autre part, les équations (2) (p. 213), qui déterminent les nouveaux cosinus directeurs $(\alpha', \beta', \gamma')$ et la dilatation ∂ d'une fibre quelconque, deviennent

$$(1+\partial)\alpha'=\alpha+(A\alpha+F\beta+E\gamma),\quad (1+\partial)\beta'=\beta+\ldots,\quad (1+\partial)\gamma'=\gamma+\ldots; \tag{26}$$

et si, pour ne rien préjuger sur la signification physique (dans la question) des racines ∂ de (20) qui rendent compatible le système (19); on désigne provisoirement ces racines par ρ, les équations (26) prennent, vu (19), la forme

$$(1+\partial)\alpha'=(1+\rho)\alpha,\qquad (1+\partial)\beta'=(1+\rho)\beta,\qquad (1+\partial)\gamma'=(1+\rho)\gamma, \tag{27}$$

où, le binome $1+\partial$ étant positif, α', β', γ' ont respectivement mêmes signes et, entre eux, mêmes rapports que $(1+\rho)\alpha$, $(1+\rho)\beta$, $(1+\rho)\gamma$.

15. Il en résulte la proportionnalité de α', β', γ' à α, β, γ. Donc, dans la particule, chacune des trois fibres rectangulaires MA, MB, MC orientées suivant les trois directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, a gardé sa direction ou pris la direction contraire. Or, il est impossible qu'une seule des trois ait renversé sa direction; car cette fibre aurait alors percé le feuillet déterminé par le plan des deux autres. D'ailleurs, dans le cas où deux fibres auraient renversé leurs directions, une rotation d'une demi-circonférence autour de la troisième, rotation qu'on peut supposer effectuée par la particule, amènerait ces deux fibres dans leurs directions premières; et, d'après ce qu'on vient de voir, il n'est pas possible que la troisième fibre se trouve alors renversée. Donc, en résumé, si l'on fait tout au plus abstraction d'une rotation de 180°, on aura $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, et les formules (27) donneront alors $\rho = \partial$.

Ainsi, dans une particule où les neuf dérivées partielles de ξ, η, ζ en x, y, z se trouvent réduites à six distinctes par la triple égalité (25), les équations (19) font connaître trois fibres rectangulaires qui gardent leurs directions, malgré les déplacements opérés, si grands qu'ils soient; et, pour chacune d'elles, la racine correspondante ∂ de l'équation (20) exprime la dilatation linéaire subie. Les équations (20) et (19) déterminent donc alors *rigoureusement*, en grandeur et en direction, les trois dilatations principales, quelque grands que soient déplacements et déformations.

En joignant ce résultat à celui qu'exprimaient, au n° 8, les formules (7), on voit que *les trois relations* (25) *caractérisent parfaitement le fait d'une déformation pure, sans mélange de rotations.*

Il résultera d'ailleurs, évidemment, des équations (19) et (20), pour les fortes déformations *sans rotation*, l'existence des invariants (21), (22) et (24), dans tous les systèmes d'axes rectangulaires des x, y, z.

A ce propos, on remarquera que la *dilatation cubique*, accroissement de volume d'une particule par unité de son volume primitif, peut être obtenue au moyen d'un parallélépipède taillé, dans la particule, suivant les trois feuillets principaux BMC, CMA, AMB, et qu'elle admet, par suite, l'expression

$$(1+\partial_1)(1+\partial_2)(1+\partial_3)-1 = (\partial_1+\partial_2+\partial_3)+(\partial_2\partial_3+\partial_3\partial_1+\partial_1\partial_2)+(\partial_1\partial_2\partial_3).$$

Elle sera donc la somme algébrique des trois invariants (21) [1].

---

[1] Le présent Mémoire a été résumé dans une Note insérée aux *Comptes rendus* (t. 154, 15 avril 1912, p. 949).