JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 1-58.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat;

PAR P. DUHEM.

INTRODUCTION.

1. On lit ce qui suit dans les œuvres de Fermat (1) : « *Synthèse pour les réfractions.* — Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est, comme on dit, conforme à l'expérience; mais, pour la démontrer, il a dû s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à ses raisonnements, à savoir que le mouvement de la lumière se ferait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares; or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle.

» En cherchant, pour établir la véritable loi des réfractions, à partir du principe contraire, à savoir que le mouvement de la lumière se fait

(1) *Œuvres de* FERMAT, publiées par Paul Tannery et Ch. Henry, t. III, 1896, pp. 151-152.

plus facilement et plus vite dans les milieux rares que dans les denses, nous sommes retombés précisément sur la loi que Descartes a énoncée...

» Notre démonstration s'appuie sur ce seul postulat que la nature opère par les moyens et les voies les plus faciles et les plus aisées, car c'est ainsi que nous croyons qu'il doit être énoncé et non pas comme on le fait d'ordinaire en disant que la nature opère toujours par les lignes les plus courtes.

» En effet, de même qu'en spéculant sur les mouvements naturels des graves, Galilée en mesure les rapports aussi bien par le temps que par l'espace, de même nous ne considérons par les espaces ou les lignes les plus courtes, mais celles qui peuvent être parcourues le plus facilement, le plus commodément et dans le temps le plus court. »

Ce que Fermat avait démontré, tous les cours d'Optique géométrique le reproduisent : La lumière va d'un point situé dans un premier milieu à un point situé dans un second milieu, en se réfractant au passage d'une surface plane qui sépare ces deux milieux ; si l'on veut que le parcours s'accomplisse dans le moindre temps possible, il faut, bien entendu, que le chemin parcouru à l'intérieur de chacun des deux milieux soit rectiligne et que, de plus, le sinus de l'angle d'incidence soit au sinus de l'angle de réfraction comme la vitesse de la lumière dans le premier milieu est à la vitesse de la lumière dans le second milieu.

Il est évident que la propagation rectiligne de la lumière au sein d'un milieu homogène, que la réflexion d'un rayon de lumière sur un miroir plan satisfont également à cette condition : Le passage d'un point à un autre se fait plus vite en suivant le rayon lumineux qu'en suivant n'importe quel autre chemin. Aussi a-t-on pris l'habitude d'énoncer, sous le nom de Principe de Fermat, la proposition suivante : *Lorsque la lumière va d'un point à un autre en traversant un certain nombre de milieux homogènes, en se réfléchissant sur un certain nombre de miroirs, en se réfractant au travers des surfaces qui séparent ces milieux les uns des autres, elle emploie moins de temps à ce parcours que n'en exigerait tout trajet, infiniment voisin de celui qu'elle adopte, établi entre les deux mêmes points et assujetti à subir les mêmes réflexions et les mêmes réfractions.*

Il s'en faut bien, cependant, que ce principe soit justifié.

Ce qui est établi en un grand nombre de Traités d'Optique, c'est la proposition suivante : *Lorsqu'on remplace le trajet suivi par la lumière par un trajet infiniment voisin, la variation première de la durée du parcours est égale à zéro.* Mais en l'absence de tout enseignement sur le signe de la variation seconde, cette proposition ne permet pas de décider si la durée de parcours du rayon lumineux est ou non un minimum. C'est une remarque que H. von Helmholtz (1), G. Kirchhoff (2) et M. S. Czapski (3) ont eu soin de faire.

En la *première Partie* de ce travail, nous nous proposons de déterminer avec précision certaines conditions où l'on peut affirmer que le trajet dont nous venons de parler correspond à une durée minimum; nous indiquerons également certaines autres conditions où cette durée n'est pas un minimum, en sorte qu'en ces conditions-là, le principe énoncé par Fermat est assurément faux. Ce principe n'a donc pas la généralité que lui attribuait son auteur.

Il est clair que nos démonstrations pourront toujours, sans perdre aucunement de leur force, supposer que toute partie d'un rayon lumineux qui n'éprouve ni réflexion ni réfraction est rectiligne.

En une *seconde Partie,* nous étendrons notre analyse au trajet que suit un rayon de lumière au sein d'un milieu isotrope, mais continuement hétérogène.

Un *appendice à la seconde Partie* transportera à quelques problèmes de Mécanique les résultats obtenus en cette Partie.

2. Toute notre analyse repose sur quelques LEMMES très simples que nous allons établir tout d'abord.

Soit

$$\Psi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

(1) H. von Helmholtz, *Mathematisch-physikalische Excurse* (*Handbuch der physiologischen Optik*, Leipzig, 1867, p. 241). — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bd. II, pp. 152-153.

(2) Gustav Kirchhoff, *Vorlesungen über die mathematische Optik*, Leipzig, 1891, p. 65.

(3) Siegfried Czapski, *Theorie der optischen Instrumente nach Abbe*, Breslau, 1893, pp. 14-15.

l'équation d'une surface; au voisinage d'un point $M(x, y, z)$ qui lui appartient, cette surface partage l'espace en deux régions, l'une où la fonction $\Psi(x, y, z)$ est positive, l'autre où la fonction $\Psi(x, y, z)$ est négative.

Par le point M, menons un segment MM′ dont A, B, C soient les cosinus directeurs et dont l soit la longueur; au point $M'(x', y', z')$, la fonction $\Psi(x, y, z)$ prend une valeur :

$$(2)\qquad \Psi(x', y', z') = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)l + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)}\frac{l^2}{2} + \theta l^3.$$

Dans cette égalité, (2) désigne un carré symbolique formé suivant des règles bien connues; θ est une quantité qui ne croît pas au delà de toute limite lorsqu'on fait tendre l vers zéro en gardant à A, B, C des valeurs invariables.

Supposons maintenant que les cosinus directeurs A, B, C vérifient l'égalité

$$(3)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C = 0,$$

en sorte que la droite MM′ soit tangente au point M à la surface représentée par l'égalité (1). L'égalité (2) se réduira à la forme

$$(4)\qquad \Psi(x', y', z') = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)}\frac{l^2}{2} + \theta l^3.$$

On en déduira sans peine les propositions suivantes :

Considérons la tangente, de cosinus directeurs A, B, C, *menée à la surface* $\Psi(x, y, z) = 0$ *par un point* M *de cette surface, et la section normale de cette surface menée par ladite tangente.*

Si, au voisinage du point M, *cette section n'est pas concave du côté où* $\Psi(x, y, z)$ *est positif, on a sûrement*

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} \leq 0.$$

Si, au contraire, elle n'est pas convexe de ce même côté, on a sûrement

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} \leqq 0. \tag{5 bis}$$

Supposons maintenant que la section normale en question ait, correspondant au point **M**, un centre de courbure à distance finie. Soit $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure. Soit n la normale menée en M à la surface $\Psi(x, y, z) = 0$, et dirigée du côté de cette surface où $\Psi(x, y, z)$ est positif. *Nous aurons l'égalité*

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} = \frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\Psi}{dn}, \tag{6}$$

si la section normale est convexe du côté où $\Psi(x, y, z)$ est positif, et l'égalité

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}A + \frac{\partial\Psi}{\partial y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial z}C\right)^{(2)} = -\frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{d\Psi}{dn}, \tag{6 bis}$$

si la section normale est concave du côté où $\Psi(x, y, z)$ est positif.

PREMIÈRE PARTIE.

LA LUMIÈRE TRAVERSE UN NOMBRE FINI DE MILIEUX HOMOGÈNES ET ÉPROUVE UN NOMBRE FINI DE RÉFLEXIONS ET DE RÉFRACTIONS.

3. *Rappel des lois de la réflexion et de la réfraction.* — Nous commencerons par mettre les lois de la réflexion et de la réfraction sous la forme la plus propre à l'analyse que nous voulons développer.

Soit

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

l'équation d'un miroir; supposons, ce qui est toujours permis, que l'on ait choisi la fonction $\psi(x, y, z)$ de telle sorte qu'elle soit positive du côté par où vient la lumière.

En (x, y, z), ce miroir reçoit un rayon incident qui, suivi dans le sens où marche la lumière, admet les cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0; le rayon réfléchi, suivi également dans le sens de parcours de la lumière, a pour cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1. Il est facile de voir que *les lois de la réflexion sont exactement équivalentes aux trois égalités*

$$(8) \qquad \alpha_1 - \alpha_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \beta_1 - \beta_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \gamma_1 - \gamma_0 = k\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

où k est un coefficient positif.

Soit maintenant

$$(9) \qquad \Psi(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une surface qui sépare deux milieux homogènes 1 et 2; la vitesse de la lumière a pour valeur V_1 dans le milieu 1 et V_2 dans le milieu 2. La fonction $\Psi(X, Y, Z)$ a été choisie de telle manière qu'elle soit positive du côté 1 par où la lumière est censée venir. Du côté 1, est un rayon incident dont α_1, β_1, γ_1 sont, lorsqu'on le suit dans le même sens que la lumière, les cosinus directeurs. Ce rayon donne, dans le milieu 2, un rayon réfracté qui, suivi également dans le sens où marche la lumière, a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2.

Les lois de la réfraction équivalent aux trois égalités

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} V_1\alpha_2 - V_2\alpha_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial X}, \\ V_1\beta_2 - V_2\beta_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial Y}, \\ V_1\gamma_2 - V_2\gamma_1 &= -K\frac{\partial\Psi}{\partial Z}, \end{aligned}\right.$$

où K *est un coefficient qui a le signe de la différence* $V_1 - V_2$.

4. *Expression de la durée de parcours du rayon lumineux et de la variation première de cette durée.* — Nous supposerons que le rayon lumineux qui joint deux points donnés éprouve une seule réflexion et une seule réfraction. Le lecteur verra sans aucune peine que notre raisonnement, entièrement général, se peut appliquer au cas d'un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.

Soit $A(\xi, \eta, \zeta)$ un point situé dans le milieu 1. Du point A faisons partir une droite, de cosinus directeurs α_0, β_0, γ_0, qui, après avoir parcouru dans le milieu 1 un trajet $Am = R_0$, rencontre au point $m(x, y, z)$ un miroir ψ dont la surface est représentée par l'équation (7).

Du point m part une autre droite, de cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1, également tracée dans le milieu 1; après avoir parcouru dans ce milieu un trajet $mM = R_1$, elle va rencontrer au point $M(X, Y, Z)$ une surface Ψ, représentée par l'équation (9), qui sépare le milieu 1 du milieu 2.

Du point M part, dans le milieu 2, une droite de cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2; après avoir parcouru, au sein du milieu 2, un trajet $MA' = R_2$, cette droite parvient au point $A'(\xi', \eta', \zeta')$.

Si V_1 est la vitesse de la lumière dans le milieu 1 et V_2 la vitesse de la lumière dans le milieu 2, le temps employé par la lumière pour parcourir le trajet $AmMA'$ est

$$T = \frac{R_0 + R_1}{V_1} + \frac{R_2}{V_2}. \tag{11}$$

Au trajet considéré substituons un trajet infiniment voisin analogue, et calculons la variation δT qu'éprouve cette durée. Si nous observons que l'on a

$$\alpha_0 = -\frac{\partial R_0}{\partial \xi} = \frac{\partial R_0}{\partial x}, \quad \ldots,$$

$$\alpha_1 = -\frac{\partial R_1}{\partial x} = \frac{\partial R_1}{\partial X}, \quad \ldots,$$

$$\alpha_2 = -\frac{\partial R_2}{\partial X} = \frac{\partial R_2}{\partial \xi'}, \quad \ldots$$

on trouve sans peine

$$\begin{aligned}
\delta T = & -\frac{1}{V_1}(\alpha_0\,\delta\xi + \beta_0\,\delta\eta + \gamma_0\,\delta\zeta) \\
& + \frac{1}{V_1}[(\alpha_0 - \alpha_1)\,\delta x + (\beta_0 - \beta_1)\,\delta y + (\gamma_0 - \gamma_1)\,\delta z \\
& + \frac{1}{V_1 V_2}[(V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\,\delta X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\,\delta Y + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\,\delta Z] \\
& + \frac{1}{V_2}(\alpha_2\,\delta\xi' + \beta_2\,\delta\eta' + \gamma_2\,\delta\zeta').
\end{aligned} \tag{12}$$

En outre, le déplacement du point m doit se faire sur la surface ψ et le déplacement du point M sur la surface Ψ, ce qu'expriment les conditions

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\,\delta z = 0, \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z = 0. \end{cases}$$

Les deux points A et A′ étant, tout d'abord, maintenus fixes, ce qu'expriment les égalités

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\eta = 0, \quad \delta\zeta = 0,$$
$$\delta\xi' = 0, \quad \delta\eta' = 0, \quad \delta\zeta' = 0,$$

cherchons quelles conditions doit remplir le trajet AmMA′ pour que toute déformation infiniment petite de ce trajet annule δT.

En vertu de l'expression (12) de δT, cette question revient à celle-ci : Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$V_2[(\alpha_0-\alpha_1)\,\delta x + (\beta_0-\beta_1)\,\delta y + (\gamma_0-\gamma_1)\,\delta z]$$
$$+ (V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\,\delta X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\,\delta Y + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\,\delta Z = 0,$$

linéaire et homogène en δx, δy, δz, δX, δY, δZ, résulte des conditions (13) ?

La réponse est connue : Il faut et il suffit pour cela qu'il existe deux quantités k, K telles que l'on puisse écrire les égalités (8) et (10). D'où ce théorème démontré depuis longtemps :

Si l'on veut, entre deux points donnés, mener un trajet brisé qui ait un de ses sommets sur un miroir et l'autre à la surface de séparation de deux milieux homogènes; si l'on veut, en outre, que le temps qu'emploierait la lumière à parcourir ce trajet éprouve une variation infiniment petite d'ordre supérieur au premier lorsque le trajet éprouve une déformation infiniment petite quelconque, il faut et il suffit qu'en sa réflexion comme en sa réfraction, le trajet vérifie les lois imposées par l'Optique.

Rendons maintenant aux points A et A′ la faculté de se déplacer, mais imposons au trajet variable $AmMA'$ les conditions de toujours vérifier, au point m, les lois de la réflexion et, au point M, les lois de la réfraction. En vertu des conditions (8), (10) et (13), l'égalité (12) se réduira à

$$\delta T = -\frac{1}{V_1}(\alpha_0\,\delta\xi + \beta_0\,\delta\eta + \gamma_0\,\delta\zeta) + \frac{1}{V_2}(\alpha_2\,\delta\xi' + \beta_2\,\delta\eta' + \gamma_2\,\delta\zeta'). \tag{14}$$

Cette égalité donne immédiatement les théorèmes bien connus de Malus, de Dupin et de Hamilton.

3. *Variation seconde de la durée de parcours.* — Formons maintenant, pour une déformation infiniment petite quelconque du trajet $AmMA'$, l'expression $\delta^2 T$ de la variation seconde de la durée de parcours.

Nous avons évidemment, en vertu de l'égalité (11),

$$\delta^2 T = \frac{1}{V_1}(\delta^2 R_0 + \delta^2 R_1) + \frac{1}{V_2}\delta^2 R_2. \tag{15}$$

D'autre part, l'égalité

$$R_0^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

nous donne aisément

$$\begin{aligned}\delta^2 R_0 = {} & \frac{x-\xi}{R_0}(\delta^2 x - \delta^2\xi) + \frac{y-\eta}{R_0}(\delta^2 y - \delta^2\eta) + \frac{z-\zeta}{R_0}(\delta^2 z - \delta^2\zeta)\\ & + \frac{1}{R_0}[(\delta x - \delta\xi)^2 + (\delta y - \delta\eta)^2 + (\delta z - \delta\zeta)^2]\\ & - \frac{1}{R_0}\left[\frac{x-\xi}{R_0}(\delta x - \delta\xi) + \frac{y-\eta}{R_0}(\delta y - \delta\eta) + \frac{z-\zeta}{R_0}(\delta z - \delta\zeta)\right]^2.\end{aligned}$$

Convenons de désigner par R_0 non seulement la longueur, mais encore la direction du rayon Am; par Δ_0 la grandeur et la direction du segment dont $(\delta x - \delta\xi)$, $(\delta y - \delta\eta)$, $(\delta z - \delta\zeta)$ sont les composantes.

Nous aurons

$$(\delta x - \delta\xi)^2 + (\delta y - \delta\eta)^2 + (\delta z - \delta\zeta)^2 = \Delta_0^2.$$

$$\frac{x-\xi}{R_0}(\delta x - \delta\xi) + \frac{y-\eta}{R_0}(\delta y - \delta\eta) + \frac{z-\zeta}{R_0}(\delta z - \delta\zeta) = \Delta_0 \cos(\Delta_0, R_0),$$

en sorte que l'égalité précédente deviendra

$$\delta^2 R_0 = \alpha_0(\delta^2 x - \delta^2\xi) + \beta_0(\delta^2 y - \delta^2\eta) + \gamma_0(\delta^2 z - \delta^2\zeta) + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{R_0}.$$

Si nous désignons de même par Δ_1 la grandeur et la direction du segment infiniment petit dont $(\delta X - \delta x)$, $(\delta Y - \delta y)$, $(\delta X - \delta z)$ sont les composantes; par Δ_2, la grandeur et la direction du segment infiniment petit dont $(\delta\xi' - \delta x)$, $(\delta\eta' - \delta y)$, $(\delta\zeta' - \delta z)$ sont les composantes, nous pourrons donner de $\delta^2 R_1$, $\delta^2 R_2$ des expressions analogues à celle de $\delta^2 R_0$. L'égalité (15) deviendra alors

$$(16)\quad \begin{aligned} \delta^2 T = {} & \frac{\alpha_2 \delta^2\xi' + \beta_2 \delta^2\eta' + \gamma_2 \delta^2\zeta'}{V_2} - \frac{\alpha_0 \delta^2\xi + \beta_0 \delta^2\eta + \gamma_0 \delta^2\zeta}{V_1} \\ & + \frac{1}{V_1}[(\alpha_0 - \alpha_1)\delta^2 x + (\beta_0 - \beta_1)\delta^2 y + (\gamma_0 - \gamma_1)\delta^2 z] \\ & + \frac{1}{V_1 V_2}[(V_2\alpha_1 - V_1\alpha_2)\delta^2 X + (V_2\beta_1 - V_1\beta_2)\delta^2 Y \\ & \qquad + (V_2\gamma_1 - V_1\gamma_2)\delta^2 Z] \\ & + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{\Delta_2^2 \sin^2(\Delta_2, R_2)}{V_2 R_2}. \end{aligned}$$

En outre, le point m est assujetti à demeurer sur la surface ψ, et le point M à demeurer sur la surface Ψ, ce qu'expriment les conditions (13) et les conditions

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\delta^2 x + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\delta^2 y + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\delta^2 z + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} = 0, \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\delta^2 X + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta^2 Y + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta^2 Z + \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} = 0. \end{cases}$$

qui s'en déduisent.

Ce que nous venons de dire n'impose aucune condition particulière au trajet A mMA′ à partir duquel se fait la déformation infinitésimale. Imaginons maintenant que ce trajet soit celui d'un rayon lumineux, en sorte que les égalités (8) soient vérifiées au point m et les égalités (10) au point M. En vertu de ces égalités et des conditions (17), l'expression (16) de $\delta^2 T$ va devenir

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad \delta^2 T = & -\frac{1}{V_1}(\alpha_0 \delta^2 \xi + \beta_0 \delta^2 \eta + \gamma_0 \delta^2 \zeta) \\
& + \frac{1}{V_2}(\alpha_2 \delta^2 \xi' + \beta_2 \delta^2 \eta' + \gamma_2 \delta^2 \zeta') \\
& + \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} \\
& - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} \\
& + \frac{\Delta_0^2 \sin^2(\Delta_0, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{\Delta_2^2 \sin^2(\Delta_2, R_2)}{V_2 R_2}.
\end{aligned}
$$

Dans le cas particulier où les deux points A, A′ sont maintenus immobiles, le segment Δ_0 est identique en grandeur et direction au segment mm' ou d, de composantes δx, δy, δz, que décrit le point m; le segment Δ_2 a même grandeur que le segment MM′ ou D, de composantes δX, δY, δZ, que décrit le point M, mais ces deux segments Δ_2, D, ont des directions opposées. Dans ce cas, donc, l'égalité (18) se réduit à la forme

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad \delta^2 T = & \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} \\
& - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} \\
& + \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}.
\end{aligned}
$$

6. Théorème. — *Si toutes les surfaces réfléchissantes et réfringentes qui composent le système optique sont des surfaces planes, le principe de Fermat est certainement exact.*

Dans ce cas, en effet, les fonctions $\psi(x, y, z)$, $\Psi(X, Y, Z)$ sont des fonctions linéaires, en sorte qu'on a, quels que soient δx, δy, δz, δX, δY, δZ,

$$
\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} = 0,
$$
$$
\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial \Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} = 0.
$$

L'égalité (19) montre alors que $\delta^2 T$ est assurément positif, à moins qu'on n'ait simultanément toutes les égalités

$$(20)\quad \begin{cases} d\,\sin(d,\ R_0) = 0, \\ \Delta_1 \sin(\Delta_1,\ R_1) = 0, \\ D\,\sin(D,\ R_2) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons évidemment exclure de notre analyse le cas où quelqu'une des incidences serait rasante.

La première incidence n'étant pas rasante, $\sin(d,\ R_0)$ ne peut être nul, en sorte que la première égalité donne nécessairement

$$d = 0.$$

d étant nul, le segment Δ_1 se réduit au segment dont δX, δY, δZ sont les composantes, c'est-à-dire au segment D; d'ailleurs, la seconde incidence n'étant pas rasante, $\sin(D,\ R_1)$ ne peut être nul, en sorte que la seconde égalité (20) exigerait qu'on eût

$$D = 0.$$

Quel que soit le nombre des incidences successives, on trouverait, en raisonnant ainsi de proche en proche, que les égalités (20) ne peuvent être vérifiées à moins que tous les points d'incidence ne demeurent fixes, ce qui exclut toute déformation du trajet.

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

7. Théorème II. — *Si un système ne contient pas plus de deux surfaces qui rompent le rayon; si, d'ailleurs, aucune des deux rencontres avec ces surfaces n'a lieu sous l'incidence rasante; si, enfin, on s'est donné le trajet* AmMA' *d'un rayon lumineux, on pourra toujours prendre, sur la direction donnée* Am, *le point* A *assez voisin du premier point d'incidence* m, *et, sur la direction donnée* MA', *le point* A' *assez voisin du dernier point d'émergence* M, *pour que le principe de Fermat, appliqué à ces deux points, soit sûrement exact.*

Soient a, b, c les cosinus directeurs du déplacement d, et A, B, C les cosinus directeurs du déplacement D; nous aurons

$$(21)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\,\delta z\right)^{(2)} = \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\,a + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\,b + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\,c\right)^{(2)} d^2, \\ \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\,\delta X + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\,\delta Y + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\,\delta Z\right)^{(2)} = \left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}\,A + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}\,B + \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z}\,C\right)^{(2)} D^2. \end{cases}$$

Ces égalités donnent à l'égalité (19) la forme suivante :

$$(22)\quad \begin{aligned} \delta^2 T = {} & \left[\frac{\sin^2(d, R_0)}{R_0} + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,a + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,b + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,c\right)^{(2)}\right]\frac{d^2}{V_1} \\ & + \left[\frac{\sin^2(D, R_2)}{R_2} - \frac{K}{V_1}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\,A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\,B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,C\right)^{(2)}\right]\frac{D^2}{V_2} \\ & + \frac{\sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1}\,\Delta_1^2. \end{aligned}$$

Au point m, la section normale pratiquée dans la surface ψ et dont la tangente en m a pour cosinus directeurs a, b, c, a un rayon de courbure, fini ou infini, que nous désignons par r. Selon les égalités (6) et (6 *bis*), la quantité

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,a + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,b + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,c\right)^{(2)}$$

a même valeur absolue que $\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn}$. Calculée donc pour tous les déplacements infinitésimaux d issus du point m, la valeur absolue de cette quantité admet une limite supérieure. D'autre part, l'incidence en m n'étant pas rasante, $\sin(d, R_0)$ admet une limite inférieure positive. On pourra donc toujours assigner à R_0 une limite supérieure assez petite pour qu'on ait sûrement

$$\frac{\sin^2(d, R_0)}{R_0} + k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,a + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,b + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,c\right)^{(2)} > 0.$$

On voit de même qu'on pourra assigner à R_2 une limite supérieure assez petite pour qu'on ait sûrement

$$\frac{\sin^2(D, R_2)}{R_2} - \frac{K}{V_1}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\,A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\,B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\,C\right)^{(2)} > 0.$$

Cela fait, la quantité $\delta^2 T$ donnée par l'égalité précédente sera assurément positive, à moins qu'on n'ait

$$d = 0, \qquad D = 0,$$

en sorte que le théorème énoncé se trouve démontré.

Remarque. — *Si le système optique se réduisait à une seule surface réfléchissante ou à une seule surface réfringente, il suffirait, pour que le principe de Fermat fût exact, que l'un des deux points extrêmes du trajet lumineux fût suffisamment voisin de la surface de rupture; l'autre en pourrait être aussi éloigné qu'on voudra.*

8. Théorème III. — *Si aucune des surfaces réfléchissantes n'admet, au point d'incidence, de section normale qui soit concave du côté éclairé; si aucune des surfaces réfringentes n'admet, au point d'incidence, de section normale qui soit concave du côté du milieu le plus réfringent, le rayon considéré vérifie assurément le principe de Fermat. On suppose exclue toute incidence rasante.*

Considérons d'abord un point m où le rayon lumineux rencontre une surface réfléchissante ψ.

La fonction $\psi(x, y, z)$ a été choisie, par hypothèse, de manière à devenir positive du côté éclairé de la surface; dans ces conditions, nous savons (n° 4) que le coefficient k est positif.

D'autre part, aucune section normale de la surface n'est concave du côté éclairé, c'est-à-dire du côté où $\psi(x, y, z)$ est positif, on a donc [condition (5)]

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} \quad 0.$$

Ces deux renseignements réunis donnent

$$k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} \quad 0. \tag{23}$$

Considérons maintenant un point M où le rayon rencontre une surface réfringente Ψ. La fonction $\Psi(X, Y, Z)$ a été choisie de manière à devenir positive du côté d'où vient la lumière; soient 1 le milieu qui se trouve de ce côté et 2 le milieu qui se trouve de l'autre côté.

Nous savons (nº 4) que le coefficient K a le signe de $V_1 - V_2$.

Nous savons qu'aucune section normale pratiquée au point M dans la surface Ψ n'est concave du côté du milieu le plus réfringent.

Si donc V_1 est supérieur à V_2, aucune de ces sections n'est concave du côté 2; partant, aucune n'est convexe du côté 1 où la surface Ψ est positive; dès lors, d'après la condition (5 *bis*), on a

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} A + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} B + \frac{\partial \Psi}{\partial z} C\right)^{(2)} \geqq 0.$$

Si, au contraire, V_1 est inférieur à V_2, aucune des sections normales n'est concave du côté 1 où la fonction Ψ est positive; on a donc, selon la condition (5),

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} A + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} B + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} C\right)^{(2)} \leqq 0.$$

Nous pouvons dès lors écrire, en toutes circonstances,

$$(V_1 - V_2)\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} A + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} B + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} C\right)^{(2)} \geqq 0$$

ou bien encore, puisque K a le signe de $(V_1 - V_2)$,

$$(24) \qquad K\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} A + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} B + \frac{\partial \Psi}{\partial Z} C\right)^{(2)} \geqq 0.$$

En vertu des conditions (21), (23) et (24), l'égalité (19) permet d'écrire la condition

$$(25) \qquad \delta^2 T \geqq \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\Delta_1^2 \sin^2(\Delta_1, R_1)}{V_1 R_1} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}.$$

Or, pour que le second membre de cette condition (25) fût égal à 0, il faudrait qu'on eût simultanément toutes les égalités (20), ce qui ne peut être, nous l'avons vu, à moins que le rayon ne soit maintenu entièrement invariable. Hors cette hypothèse, donc, $\delta^2 T$ est positif, et le théorème énoncé est démontré.

9. THÉORÈME IV. — *Un rayon subit un certain nombre de réflexions et de réfractions.*

Par le premier côté R_0 *du contour polygonal que forme ce rayon on mène un plan qui, sur le plan tangent en m à la première sur-*

face réfléchissante ou réfringente ψ, *trace une ligne droite* θ *de cosinus directeurs* a, b, c; *à cette tangente* θ *correspond, dans la surface* ψ, *une section normale* s.

Par le second côté R_1 *du contour polygonal et la droite* θ, *on mène un plan; ce plan trace une droite* Θ, *de cosinus directeurs* A, B, C, *sur le plan tangent en* M *à la seconde surface réfléchissante ou réfringente* Ψ; *à cette tangente* Θ *correspond, dans la surface* Ψ, *une section normale* S; *et ainsi de suite.*

Toutes celles des sections s, S, ... *qui sont pratiquées en des surfaces réfléchissantes ont un rayon de courbure fini et tournent leur concavité du côté éclairé.*

Toutes celles des sections s, S, ... *qui sont pratiquées en des surfaces réfringentes ont un rayon de courbure fini et tournent leur concavité du côté du milieu le plus réfringent.*

En ces conditions, sans changer les directions ni du premier rayon incident R_0 *ni du dernier rayon émergent* R_2, *on peut éloigner assez le point* A *sur le premier et le point* A' *sur le second pour que le principe de Fermat cesse de s'appliquer au rayon qui unit ces deux points.*

Nous allons définir, en effet, une déformation infiniment petite imposée au trajet $AmMA'$ qui, si l'on éloigne suffisamment les deux points A, A', assurera à $\delta^2 T$ une valeur négative.

Au point m nous donnerons un déplacement, de longueur arbitraire d, qui ait pour tangente la ligne θ; ce déplacement amènera le point m en m'.

Du point m', nous mènerons une parallèle au rayon R_1; cette parallèle rencontrera en M' la tangente Θ; MM' sera le déplacement D que nous imposerons au point M.

Nous continuerons de même, s'il y a lieu, pour déterminer les déplacements imposés aux divers points d'incidence.

Le segment désigné par Δ_1 est celui qu'il faut composer avec le segment mm' ou d pour obtenir le segment MM' ou D; il résulte de la construction précédente qu'il est parallèle au rayon R_1, en sorte qu'on a

$$\sin(\Delta_1, R_1) = 0.$$

Il en serait de même des sinus analogues.

Quel que soit donc le nombre des réflexions et des réfractions subies par le rayon, toutes les quantités analogues à Δ_1, sauf la première d et la dernière D, disparaissent de l'expression (19) de δ^2T qui se réduit à

$$\begin{aligned}\delta^2 T = & \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} \\ & - \frac{K}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\delta X + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\delta Y + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\delta Z\right)^{(2)} \\ & + \frac{d^2 \sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{D^2 \sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}.\end{aligned}$$

D'ailleurs, les déplacements de chacun des points d'incidence sont, par le procédé qui a servi à les produire, dans un rapport fini et bien déterminé au déplacement d du premier, en sorte qu'on peut écrire :

$$D = \lambda d,$$

λ étant une quantité positive et finie.

Si l'on tient compte, en outre, des égalités (21), l'expression précédente de δ^2T deviendra

$$(26) \qquad \begin{aligned}\delta^2 T = \Big[& \frac{k}{V_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} \\ & - \frac{K\lambda^2}{V_1 V_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} \\ & + \frac{\sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} + \frac{\lambda^2 \sin^2(D, R_2)}{VR_2}\Big] d^2.\end{aligned}$$

La surface ψ est concave du côté éclairé, qui est aussi le côté où la fonction $\psi(x, y, z)$ est positive. Si nous désignons par r le rayon de courbure, supposé fini, de la section s, l'égalité (6) nous donnera

$$(27) \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}a + \frac{\partial\psi}{\partial y}b + \frac{\partial\psi}{\partial z}c\right)^{(2)} = -\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dn}.$$

Un raisonnement analogue à celui qui nous a fourni la condition (24) nous donnera ici l'inégalité

$$K\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} > 0.$$

Si N est la normale en M à la surface Ψ, menée du côté où la fonction

$\Psi(X, Y, Z)$ est positive, et si $\mathcal{R}$ est le rayon de courbure de la section S, les égalités (6) et (6 *bis*) nous montrent que la valeur absolue de

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)}$$

est égale à $\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}$. Ce renseignement, joint à l'égalité précédente, permet d'écrire

$$K\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}A + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}B + \frac{\partial\Psi}{\partial Z}C\right)^{(2)} = \frac{|K|}{\mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}. \tag{28}$$

Les égalités (26), (27) et (28) donnent

$$\delta^2 T = -\left[\frac{k}{V_1 r}\frac{d\psi}{dn} + \frac{|K|\lambda^2}{V_1 V_2 \mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN} - \frac{\sin^2(d, R_0)}{V_1 R_0} - \frac{\lambda^2\sin^2(D, R_2)}{V_2 R_2}\right]d^2. \tag{29}$$

Comme k est positif (n° 4), la somme

$$\frac{k}{V_1 r}\frac{d\psi}{dn} + \frac{|K|\lambda^2}{V_1 V_2 \mathcal{R}}\frac{d\Psi}{dN}$$

est une quantité positive bien déterminée; on voit alors qu'on peut toujours choisir les quantités R_0, R_2 assez grandes pour que $\delta^2 T$ soit sûrement négatif, ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Il est trois cas particuliers auxquels ce théorème s'applique d'une manière immédiate :

1° *Le système se compose d'une seule surface réfléchissante; par le point d'incidence passe une section normale, de rayon de courbure fini, concave du côté éclairé.*

2° *Le système se compose d'une seule surface réfringente; par le point d'incidence passe une section normale, de rayon de courbure fini, concave du côté où se trouve le milieu le plus réfringent.*

3° *Le système se compose d'un nombre quelconque de surfaces réfléchissantes ou réfringentes; toute surface réfléchissante est entièrement concave du côté éclairé; toute surface réfringente est entièrement concave du côté où se trouve le milieu le plus réfringent; en outre, les deux rayons de courbure principaux de chaque surface sont finis.*

En ces trois cas, on peut prendre le point de départ et le point d'arrivée de la lumière assez éloignés des deux surfaces extrêmes du système optique pour que le principe de Fermat soit sûrement en défaut.

SECONDE PARTIE.

LE RAYON LUMINEUX TRAVERSE UN MILIEU ISOTROPE, MAIS CONTINUEMENT HÉTÉROGÈNE.

10. *Établissement des équations qui déterminent la forme du rayon lumineux.* — Considérons un milieu isotrope et continuement hétérogène. Soit $V(x, y, z)$ la valeur qu'aurait la vitesse de la lumière en un milieu homogène dont la constitution serait celle que notre milieu hétérogène présente au point (x, y, z).

Rappelons brièvement, afin que nos raisonnements ne présentent pas, même en apparence, de cercle vicieux, comment on peut établir *directement* les équations que le rayon lumineux doit vérifier en un semblable milieu.

Soient V_0, V la plus petite valeur et la plus grande que $V(x, y, z)$ prenne au sein de ce milieu; divisons la différence $(V - V_0)$ en n parties égales et soit ε la valeur commune de ces parties :

$$V - V_0 = n\varepsilon.$$

Traçons les surfaces d'égal indice

$$\begin{array}{lll}
\Psi_0 & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0, \\
\Psi_1 & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + \varepsilon = V_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Psi_p & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + p\varepsilon = V_p, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi_n & \text{ou} & V(x, y, z) = V_0 + n\varepsilon = V_n = V.
\end{array}$$

Notre milieu continuement hétérogène est ainsi partagé en n couches; chacune de ces couches est comprise entre deux surfaces d'égal indice consécutives; si l'on fait croître n au delà de toute limite, l'épaisseur de chacune de ces couches tend vers zéro.

A la première couche, comprise entre les surfaces Ψ_0, Ψ_1, nous substituons un corps optiquement homogène où la vitesse de la lumière soit V_1; en général, à la $p^{\text{ième}}$ couche, comprise entre les surfaces Ψ_{p-1}, Ψ_p, nous substituons un corps optiquement homogène où la vitesse de la lumière soit V_p. Nous obtenons ainsi un assemblage discontinu de milieux homogènes. Lorsque nous ferons croître n au delà de toute limite, cet assemblage tendra vers le milieu continuement hétérogène que nous voulons étudier.

Un rayon lumineux, au sein de ce milieu discontinu, aura la forme d'une ligne brisée. Lorsque le nombre n croîtra au delà de toute limite, cette ligne brisée tendra vers une certaine courbe. Cette ligne courbe sera la figure qu'affecte le rayon lumineux au sein du milieu isotrope et continuement hétérogène que l'on considère.

Désignons par R_p la partie du rayon brisé qui traverse la $p^{\text{ième}}$ couche et par α_p, β_p, γ_p ses cosinus directeurs.

Soit $M_p(x, y, z)$ le point de la surface Ψ_p où le rayon R_p rencontre cette surface et se réfracte pour donner le rayon R_{p+1}. Les cosinus directeurs de la normale en ce point à la surface Ψ_p sont respectivement proportionnels aux valeurs que les quantités

$$\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \tag{30}$$

prennent en ce même point.

En vertu des lois de la réfraction exprimées par les égalités (10), ces quantités (30) doivent être respectivement proportionnelles aux trois quantités

$$V_{p+1}\alpha_p - V_p\alpha_{p+1}, \quad V_{p+1}\beta_p - V_p\beta_{p+1}, \quad V_{p+1}\gamma_p - V_p\gamma_{p+1}$$

ou encore aux trois rapports

$$\frac{V_{p+1}\alpha_p - V_p\alpha_{p+1}}{R_p}, \quad \frac{V_{p+1}\beta_p - V_p\beta_{p+1}}{R_p}, \quad \frac{V_{p+1}\gamma_p - V_p\gamma_{p+1}}{R_p}. \tag{31}$$

Lorsqu'on fait croître n indéfiniment, on doit avoir proportionnalité entre les quantités (30) et les valeurs limites des quantités (31).

Déterminons ces valeurs limites.

Soit s la longueur du rayon curviligne, comptée à partir d'une origine arbitraire, jusqu'au point $M(x, y, z)$, position limite du point M_p. Soient

$$a(s) = \frac{dx}{ds}, \qquad b(s) = \frac{dy}{ds}, \qquad c(s) = \frac{dz}{ds} \tag{32}$$

les cosinus directeurs de la tangente au rayon en ce point; ce sont évidemment les valeurs limites des cosinus α_p, β_p, γ_p.

Les rapports

$$\frac{\alpha_{p+1} - \alpha_p}{R_p}, \quad \frac{\beta_{p+1} - \beta_p}{R_p}, \quad \frac{\gamma_{p+1} - \gamma_p}{R_p}$$

ont pour limites respectives $\frac{da}{ds}$, $\frac{db}{ds}$, $\frac{dc}{ds}$.

Quant au rapport $\frac{V_{p+1} - V_p}{R_p}$, il a évidemment pour limite

$$\frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c.$$

Il doit donc exister, en chaque point du rayon curviligne, un facteur μ tel qu'on ait les trois égalités

$$\left\{\begin{aligned} &V \frac{da}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) a - \mu \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ &V \frac{db}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) b - \mu \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ &V \frac{dc}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right) c - \mu \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

La valeur du facteur μ s'obtient aisément si l'on tient compte de l'égalité

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

et de l'égalité

$$a \frac{da}{ds} + b \frac{db}{ds} + c \frac{dc}{ds} = 0$$

qui s'en déduit. Si nous multiplions respectivement, en effet, les égalités (33) par a, b, c, et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons l'égalité

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right)(1 + \mu) = 0.$$

La quantité $\left(\frac{\partial V}{\partial x} a + \frac{\partial V}{\partial y} b + \frac{\partial V}{\partial z} c\right)$ ne peut être égale à 0 qu'aux points exceptionnels où le rayon touche une surface d'égal indice. Nous devons donc avoir

$$\mu = -1.$$

Dès lors, si nous posons

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} F &= V\frac{da}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)a + \frac{\partial V}{\partial x}, \\ G &= V\frac{db}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)b + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ H &= V\frac{dc}{ds} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)c + \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

les équations qui définissent le rayon lumineux sont les équations différentielles du second ordre

$$(35)\qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0.$$

11. *Rappel de quelques théorèmes connus.* — Au moyen de ces équations, établissons rapidement quelques théorèmes, connus depuis fort longtemps, dont nous aurons à faire usage tout à l'heure.

Si nous désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la bi-normale ν au rayon en un de ses points, ces cosinus seront, on le sait, déterminés par les deux égalités

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &al + bm + cn = 0, \\ &\frac{da}{ds}l + \frac{db}{ds}m + \frac{dc}{ds}n = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplions respectivement les égalités (35) par l, m, n, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (36). Nous trouvons l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial x}l + \frac{\partial V}{\partial y}m + \frac{\partial V}{\partial z}n = 0,$$

qui équivaut au Théorème I : *En chaque point du rayon, le plan osculateur au rayon est normal à la surface d'égal indice qui passe par ce point.*

Par le point $M(x, y, z)$ du rayon menons à ce rayon la normale principale N dans le sens où se trouve la concavité du rayon ; soient α, β, γ les cosinus directeurs de cette droite ; si, à partir du point M, on la suit dans ce sens sur une longueur R qui est le rayon de courbure du rayon lumineux, on atteint le centre de courbure C de ce rayon. On sait que l'on a

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{da}{ds}, \qquad \frac{\beta}{R} = \frac{db}{ds}, \qquad \frac{\gamma}{R} = \frac{dc}{ds}. \tag{36 bis}$$

Par le même point M passe une surface d'égal indice ; de ce point menons une normale n à cette surface ; si cette surface ne correspond pas à une valeur maximum ou minimum de l'indice, dirigeons cette normale dans le sens où $V(x, y, z)$ va en croissant et l'indice en décroissant ; nous aurons alors

$$\frac{dV}{dn} > 0. \tag{37}$$

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette demi-normale n ; nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dn}\lambda, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dn}\mu, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dn}\nu. \tag{38}$$

Si t est la direction, de cosinus directeurs a, b, c, de la tangente au rayon menée dans le sens des arcs croissants, nous aurons

$$\cos(n, t) = \lambda a + \mu b + \nu c. \tag{39}$$

Moyennant les égalités (36 *bis*), (38) et (39), les égalités (35) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{V}{R}\alpha + \frac{dV}{dn}[\lambda - a\cos(n, t)] = 0, \\ &\frac{V}{R}\beta + \frac{dV}{dn}[\mu - b\cos(n, t)] = 0, \\ &\frac{V}{R}\gamma + \frac{dV}{dn}[\nu - c\cos(n, t)] = 0. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Si nous multiplions respectivement ces égalités par α, β, γ et si nous ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en observant que

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$

et que

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \cos(n, N),$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}\cos(n, N). \tag{41}$$

Cette égalité, jointe à l'inégalité (37), nous donne, en premier lieu, cette inégalité

$$\cos(n, \mathrm{N}) < 0, \tag{42}$$

et ce théorème :

Théorème II. — *En chaque point d'un rayon lumineux, la normale principale, menée dans le sens où le rayon tourne sa concavité, fait un angle aigu avec la normale à la surface d'égal indice, menée dans le sens où l'indice va en diminuant.*

L'égalité (41) peut, d'ailleurs, s'énoncer ainsi :

Théorème III. — *Par un point quelconque* M, *du milieu, on mène la normale à la surface d'égal indice qui passe par ce point ; sur cette droite, à partir du point* M, *et dans le sens (opposé à* n*) où l'indice va en croissant, on porte une longueur*

$$\rho = \frac{\mathrm{V}}{\frac{d\mathrm{V}}{dn}}. \tag{43}$$

On atteint ainsi le point Γ. *Par le point* Γ *on mène un plan parallèle au plan tangent en* M *à la surface d'égal indice. Ce plan contient le centre de courbure* C *de tout rayon lumineux passant au point* M.

A ces théorèmes nous pouvons joindre la Réciproque suivante :

Les théorèmes I et III, qui résultent nécessairement des équations (35), *entraînent à leur tour l'exactitude de ces équations.*

En vertu du théorème III, en effet, la première des équations (35) ou, ce qui revient au même, la première des équations (10), devient

$$\cos(n, \mathrm{N})\alpha + \cos(n, t)a - \lambda = 0$$

ou, plus explicitement

$$\cos(n, \mathrm{N})\cos(x, \mathrm{N}) + \cos(n, t)\cos(x, t) - \cos(n, x) = 0.$$

Mais la tangente t au rayon, la normale principale N et la bi-normale ν

forment un trièdre trirectangle, en sorte que l'on a

$$\cos(n, x) = \cos(n, \mathrm{N}) \cos(x, \mathrm{N}) + \cos(n, t) \cos(x, t) + \cos(n, \nu) \cos(x, \nu).$$

L'équation précédente devient donc

$$\cos(n, \nu) \cos(x, \nu) = 0$$

et elle est vérifiée si le théorème I est exact, puisque ce théorème équivaut à l'égalité

$$\cos(n, \nu) = 0.$$

Les théorèmes I et III sont donc exactement équivalents aux équations différentielles (35) *du rayon lumineux.*

Nous aurons à faire usage de cette proposition.

12. *Remarques sur le cas où le rayon touche la surface d'égal indice.* — La quantité ρ, donnée par l'égalité (43), est le rayon de courbure de tout rayon lumineux qui vient, au point M, toucher la surface d'égal indice qui passe par ce point.

Ce rayon lumineux tourne sa concavité du côté où le milieu est plus réfringent que sur la surface même. Il n'en faut pas nécessairement conclure qu'au voisinage du point considéré, le rayon se trouve nécessairement du côté de la surface où l'indice est plus grand que sur la surface même.

En effet, la courbure du rayon lumineux

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{V}} \frac{d\mathrm{V}}{dn} \tag{43 bis}$$

ne dépend aucunement des dérivées secondes de la fonction $\mathrm{V}(x, y, z)$ au point considéré, et ce sont ces dérivées secondes qui déterminent la courbure de la surface au voisinage de ce point. On peut donc, sans changer la courbure du rayon, imaginer qu'on impose toutes les lois qu'on voudra à la courbure de la surface.

Considérons la section pratiquée dans la surface par le plan qui lui est normal et qui est, en même temps, osculateur au rayon. Si cette section n'est pas concave du côté où l'indice est plus grand que sur la surface, le rayon se trouve évidemment de ce côté de la surface; il en est encore de même si la section, tout en étant concave de ce côté, a une courbure moindre que celle du rayon. Mais si cette section, concave du côté des indices croissants, a une courbure supérieure à $\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}$ et, par conséquent, plus forte que celle du rayon lumineux, celui-ci se trouve, au voisinage du point de contact, du côté où l'indice est plus faible que sur la surface. *Il n'y a donc pas analogie entre ce phénomène et celui de la réflexion totale.*

Supposons :

1° Que la surface d'égal indice ait, au point M, au moins un de ses centres principaux de courbure situé du côté des indices croissants;

2° Si elle est à courbures opposées, que le centre de courbure γ qui se trouve du côté des plus forts indices soit compris entre le point M et le point Γ;

3° Si elle est entièrement concave du côté des plus forts indices, qu'elle ait un de ces centres principaux de courbure, γ, compris entre le point M et le point Γ, et l'autre centre principal de courbure, γ', situé au delà du point Γ par rapport au point M.

Nous voyons :

1° Que tout rayon lumineux, tangent à la surface d'égal indice, dont le plan osculateur correspond à une section normale dont le centre de courbure c est au delà du point Γ par rapport au point M (si la surface est à courbures opposées) ou entre les points Γ et γ' (si la surface est entièrement concave du côté des plus forts indices) demeure, au voisinage du point de contact, du côté de la surface où l'indice est plus fort que sur la surface;

2° Que tout rayon lumineux, tangent à la surface, pour lequel le centre de courbure c de la section normale est entre les points γ et Γ, demeure, au voisinage de la surface, du côté où l'indice est plus faible que sur la surface;

3° Au cas où le point c coïncide avec le point Γ, le rayon lumineux a, avec la surface d'égale indice, un contact du second ordre, en sorte qu'*il traverse cette surface à laquelle il est tangent.*

Il y a, en chaque point de la surface d'égal indice, deux sections normales pour lesquelles le centre de courbure c coïncide avec le point Γ;

les plans de ces deux sections forment quatre dièdres ayant pour plans bissecteurs les plans des sections normales principales.

Nous pouvons nommer ces deux sections les *sections de pénétration des rayons lumineux tangents à la surface d'égal indice.*

Sur une surface d'égal indice qui satisfait aux trois conditions précédemment énoncées, on pourra tracer deux familles de lignes telles qu'en chaque point il passe une ligne de chaque famille. Tout rayon lumineux qui vient toucher une de ces lignes traverse, au point de contact, la surface d'égal indice, et aucun autre rayon lumineux tangent ne peut traverser cette surface.

Si, au point M de la surface d'égal indice, la tangente à l'une de ces lignes fait un angle θ avec l'une des deux lignes de courbure qui passent en ce point; si cette ligne de courbure correspond à un rayon de courbure r et l'autre ligne de courbure à un rayon de courbure r', on aura

$$\frac{\cos\theta}{r} + \frac{\sin\theta}{r'} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dn}. \tag{44}$$

Ce sera l'équation des lignes en question.

Si la surface ne remplit pas les trois conditions prescrites, ces lignes seront imaginaires.

13. *Formation de la durée de parcours d'un trajet et de la variation première de cette durée.* — Soient A_0, A_1 deux points pris à l'intérieur d'un milieu continuement hétérogène; relions ces deux points par un trajet continu C ou A_0MA_1. Si ds désigne un élément de ce trajet et V la vitesse de la lumière en un point M de l'élément ds, le temps que la lumière emploierait à parcourir ce trajet aurait pour valeur

$$T = \int_C \frac{ds}{V}. \tag{45}$$

Soit C' ou $A'_0M'A'_1$ une autre courbe infiniment voisine de la courbe C. Imaginons que la courbe C' corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que les deux origines A_0, A'_0 se correspondent, et qu'il en soit de même des deux extrémités A_1, A'_1. Soient δx, δy, δz les composantes du segment infiniment petit MM' qui unit deux points correspondants M et M'; nous admettons que δx, δy, δz sont des fonctions continues de l'arc A_0M ou s; que ces fonctions admettent, quel que soit s, des dérivées finies; enfin que ces dérivées sont continues, sauf peut-être pour quelques valeurs isolées de s. Désignons, en particulier, par δx_0, δy_0, δz_0 les composantes du segment $A_0A'_0$ et par δx_1, δy_1, δz_1 les composantes du segment $A_1A'_1$.

La substitution de la courbe C' à la courbe C impose à la durée T une variation première

$$(46)\qquad \delta T = \int_C \left[\frac{\delta\, ds}{V} - \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)ds\right].$$

D'autre part, l'identité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne, en tenant compte des égalités (32),

$$\delta\, ds = a\,\delta\, dx + b\,\delta\, dy + c\,\delta\, dz.$$

Mais on sait que l'on peut écrire

$$(47)\qquad \delta\, dx = \frac{d\,\delta x}{ds}ds, \qquad \delta\, dy = \frac{d\,\delta y}{ds}ds, \qquad \delta\, dz = \frac{d\,\delta z}{ds}ds.$$

On a donc

$$\int_C \frac{\delta\, ds}{V} = \int_C \frac{1}{V}\left(a\frac{d\,\delta x}{ds} + b\frac{d\,\delta y}{ds} + c\frac{d\,\delta z}{ds}\right)ds.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en la suivante .

$$(47)\qquad \int_C \frac{\delta\, ds}{V} = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}$$
$$-\int_C \frac{1}{V^2}\left[V\left(\frac{da}{ds}\delta x + \frac{db}{ds}\delta y + \frac{dc}{ds}\delta z\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)(a\,\delta x + b\,\delta y + c\,\delta z)\right] ds.$$

Les égalités (34), (46) et (47) permettent d'écrire

$$(48)\qquad \delta T = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}$$
$$-\int_C \frac{1}{V^2}(F\,\delta x + G\,\delta y + H\,\delta z)\,ds.$$

Cette égalité va être le point de départ de notre analyse.

14. *La détermination du rayon lumineux ramenée à un problème de variation.* — Supposons, tout d'abord, que les deux points A_0, A_1 soient maintenus fixes; l'égalité (48) se réduira, en vertu des égalités (34), à

$$\delta T = -\int_C \frac{1}{V^2}(F\,\delta x + G\,\delta y + H\,\delta z)\,ds. \tag{49}$$

Si les équations (35) sont vérifiées en tout point de la courbe C, il est clair que toute déformation imposée à cette courbe, sans déplacement de ses extrémités, annulera δT.

Réciproquement, il est facile de voir que o est la seule valeur, variable d'une manière continue avec s, que puisse prendre chacune des trois quantités F, G, H, si l'on veut que δT s'annule en toute déformation qui change la figure de la courbe C sans en déplacer les extrémités.

Supposons, en effet, que l'une au moins de ces trois quantités, F par exemple, prenne, en un point M de la courbe C, une valeur, différente de o, que nous désignerons par F(M). Puisque, par hypothèse, F varie d'une manière continue le long de la courbe C, on peut, sur cette courbe, marquer un arc fini D, comprenant le point M et excluant les points A_0, A_1, en tout point duquel F diffère de o et ait le signe de F(M).

Cela posé, nous déformerons la courbe C de la manière suivante : Nous donnerons à δy et à δz, tout le long de la courbe, la valeur o; δx sera également nul en dehors de l'arc D et aux deux extrémités de cet arc; la valeur de δx le long de l'arc D, variable d'une manière continue avec s, sera partout différente de o et constamment de signe contraire à F(M).

L'égalité (49) se réduira alors à

$$\delta T = -\int_C \frac{F\,\delta x}{V^2}\,ds.$$

Or il est évident que la valeur du second membre n'est point nulle, mais positive.

Nous obtenons de la sorte le théorème bien connu que voici :

THÉORÈME IV. — *Une courbe est tracée, au sein d'un milieu isotrope et continuement hétérogène, entre deux points fixes; pour que toute déformation infiniment petite de cette courbe impose une variation première égale à 0 au temps que la lumière mettrait à parcourir la courbe, il faut et il suffit que la figure initiale de celle-ci soit celle d'un rayon lumineux.*

Rendons maintenant aux deux extrémités A_0, A_1 de la courbe C la faculté de se déplacer, mais supposons que cette courbe soit un rayon lumineux le long duquel les équations (35) sont constamment vérifiées. L'égalité (48) prend la forme

$$\delta T = -\frac{a_0\,\delta x_0 + b_0\,\delta y_0 + c_0\,\delta z_0}{V_0} + \frac{a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1}{V_1}. \tag{50}$$

On en déduit sans peine les théorèmes connus de Malus, de Dupin et de Hamilton.

15. *Variation seconde de la durée de parcours d'un trajet.* — Venons maintenant au principal objet de notre recherche, qui est le suivant : Entre deux points donnés, le trajet du rayon lumineux est-il un trajet dont la durée de parcours soit minimum? Pour répondre à cette question, il nous faut former la variation seconde $\delta^2 T$ de la durée de parcours; si, pour toute déformation qui laisse immobiles les deux extrémités du trajet, cette quantité est positive, la réponse à la question posée est affirmative; elle est négative si certaines déformations font prendre à $\delta^2 T$ une valeur négative.

Nous formerons d'abord l'expression générale de $\delta^2 T$ sans supposer qu'on maintienne immobiles les extrémités de la courbe C.

L'égalité (46) nous donne

$$\begin{aligned}\delta^2 T = \int_C \Big[\frac{\delta^2 ds}{V} &- \frac{2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)\delta\, ds \\ &+ \frac{2}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)^2 ds \\ &- \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta z\right)^{(2)} ds \\ &- \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta^2 x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta^2 y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\delta^2 z\right) ds \Big].\end{aligned} \tag{51}$$

L'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

nous donne les deux égalités

$$ds\,\delta\,ds = dx\,\delta\,dx + dy\,\delta\,dy + dz\,\delta\,dz.$$

$$ds\,\delta^2\,ds + (\delta\,ds)^2 = dx\,\delta^2\,dx + dy\,\delta^2\,dy + dz\,\delta^2\,dz + (\delta\,dx)^2 + (\delta\,dy)^2 + (\delta\,dz)^2.$$

Si l'on observe qu'on a

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{dz}{ds} = c.$$

$$\delta\,dx = d\,\delta x, \qquad \delta\,dy = d\,\delta y. \qquad \delta\,dz = d\,\delta z,$$

$$\delta^2\,dx = d\delta^2 x, \qquad \delta^2\,dy = d\delta^2 y. \qquad \delta^2\,dz = d\delta^2 z,$$

les deux égalités précédemment écrites deviennent

$$(52)\qquad \delta\,ds = ad\,\delta x + bd\,\delta y + cd\,\delta z.$$

$$(53)\qquad \delta^2\,ds = ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z + \frac{(d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 - (ad\,\delta x + bd\,\delta y + cd\,\delta z)^2}{ds}.$$

En vertu de l'égalité (53), nous pouvons écrire

$$(54)\qquad \int_C \frac{\delta^2\,ds}{V} = \int_C \frac{ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z}{V} + \int_C \frac{(d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 - (ad\,\delta x + bd\,\delta y + cd\,\delta z)^2}{V}.$$

Mais une intégration par parties nous donne

$$(55)\qquad \int_C \frac{ad\delta^2 x + bd\delta^2 y + cd\delta^2 z}{V}$$
$$= -\frac{a_0\delta^2 x_0 + b_0\delta^2 y_0 + c_0\delta^2 z_0}{V_0} + \frac{a_1\delta^2 x_1 + b_1\delta^2 y_1 + c_1\delta^2 z_1}{V_1}$$
$$+ \int_C \frac{1}{V^2}\left\{ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)a - V\frac{da}{ds}\right]\delta^2 x \right.$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)b - V\frac{db}{ds}\right]\delta^2 y$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}a + \frac{\partial V}{\partial y}b + \frac{\partial V}{\partial z}c\right)c - V\frac{dc}{ds}\right]\delta^2 z \right\} ds.$$

D'autre part, désignons par p le segment dont les composantes sont $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$. Nous aurons

$$\begin{aligned}(d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 &= p^2,\\ a d\,\delta x + b d\,\delta y + c d\,\delta z &= p\cos(p, ds),\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(56)\qquad (d\,\delta x)^2 + (d\,\delta y)^2 + (d\,\delta z)^2 - (a d\,\delta x + b d\,\delta y + c d\,\delta z)^2 = p^2 \sin^2(p, ds).$$

Si nous tenons compte des égalités (34), (54), (55) et (56), l'égalité (51) devient

$$\begin{aligned}(57)\qquad \delta^2 T = {} & \frac{a_1\delta^2 x_1 + b_1\delta^2 y_1 + c_1\delta^2 z_1}{V_1} - \frac{a_0\delta^2 x_0 + b_0\delta^2 y_0 + c_0\delta^2 z_0}{V_0} && \text{(I)}\\ & - \int_C \frac{F\delta^2 x + G\delta^2 y + H\delta^2 z}{V^2}\,ds && \text{(II)}\\ & - 2\int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)\delta\,ds && \text{(III)}\\ & + 2\int_C \frac{1}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^2 ds && \text{(IV)}\\ & - \int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds && \text{(V)}\\ & + \int_C \frac{p^2\sin^2(p, ds)}{V\,ds}. && \text{(VI)}\end{aligned}$$

Cette expression entièrement générale de $\delta^2 T$ va se simplifier beaucoup dans le cas particulier qui nous intéresse.

En premier lieu, si nous supposons que la figure initiale de la courbe C soit celle d'un rayon lumineux, F, G, H sont nuls en tout point de cette courbe, et, au second membre de l'égalité (57), le terme (II) disparaît.

D'autre part, si l'on maintient immobiles les deux extrémités de la courbe C, le terme (I) est identiquement nul.

Mais, en cette dernière hypothèse, si l'on suppose en outre que la courbe C ne touche aucune surface d'égal indice, on peut assurément établir la correspondance point par point des deux courbes C et C′ de telle sorte qu'à tout point M de la courbe C corresponde un point M′ de la courbe C′, situé sur la même surface d'égal indice que le point M.

Cela revient à dire qu'on peut, sans diminuer en rien la généralité de la déformation imposée à une courbe C d'extrémités immobiles, assujettir δx, δy, δz à vérifier, en tout point de cette courbe C, la condition

$$(58)\qquad \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0.$$

Cette condition permet d'effacer, au second membre de l'égalité (57), les termes (III) et (IV).

Désignons par Δ la grandeur du déplacement dont δx, δy, δz sont les composantes, et par A, B, C les cosinus directeurs de ce déplacement; en vertu de la condition (58), ce seront les cosinus directeurs d'une tangente menée par le point M à la surface d'égal indice. Nous pourrons évidemment écrire

$$(59)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)}\Delta^2.$$

Si nous supposons simultanément remplies toutes les conditions que nous venons d'énumérer et si nous tenons compte de l'égalité (59), l'égalité (57) se réduira à la forme très simple :

$$(60)\qquad \delta^2 T = -\int_C \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)}\frac{\Delta^2}{V^2}\,ds + \int_C \frac{p^2\sin^2(p, ds)}{V\,ds}.$$

Cette égalité va nous permettre de justifier les théorèmes que nous avions en vue d'établir.

16. Théorème V. — *Si, entre les deux extrémités d'un rayon lumineux, aucune surface d'égal indice n'est rencontrée deux fois par le rayon; si, en outre, aucune surface d'égal indice ne présente, au point où elle est rencontrée par le rayon, de section normale qui soit concave du côté des indices croissants, le rayon lumineux dessine, entre les deux points fixes donnés, une ligne dont la durée de parcours par la lumière est minimum.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que, dans ces conditions, le second membre de l'égalité (60) est positif pour toute déformation de la courbe C.

Voyons quel est, en chaque point M du rayon, et pour chaque direction, tangente à la surface d'égal indice, du déplacement Δ, le signe de

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)}.$$

La surface d'égal indice qui passe au point M où V est la vitesse de la lumière est représentée par l'équation

$$\Psi(x, y, z) = V(x, y, z) - V = 0.$$

Le premier membre de cette équation devient positif du côté de la surface où $V(x, y, z)$ surpasse V, c'est-à-dire du côté des plus faibles indices. D'après l'hypothèse faite, aucune section normale pratiquée, au point M, dans la surface d'égal indice n'est convexe de ce côté. On a donc assurément, en vertu de l'inégalité (5 *bis*),

$$(61) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)} \geqq 0.$$

De plus, la section normale dont la tangente en M a pour cosinus directeurs A, B, C, a un rayon de courbure, fini ou infini, $\mathcal{R}$. En vertu de l'égalité (6 *bis*), on a

$$(62) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)} = -\frac{1}{\mathcal{R}}\frac{dV}{dn}.$$

La condition (61) et l'égalité (62), jointes à l'expression (60) de $\delta^2 T$, nous permet d'écrire

$$(63) \qquad \delta^2 T \geqq \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{V\,ds}.$$

Le signe d'égalité est, d'ailleurs, réservé au cas où tout déplacement Δ serait tangent à une section normale de rayon de courbure infini pratiquée dans la surface d'égal indice.

Le théorème que nous voulons établir est donc démontré si, par aucun point d'incidence, on ne peut mener une droite qui ait, avec la surface d'égal indice qui passe au même point, un contact d'ordre supérieur au premier.

Mais il importe de lever la restriction qui pèse encore sur notre théorème, afin de pouvoir l'appliquer, par exemple, au cas où toutes les surfaces d'égal indice seraient des plans. Elle sera levée si nous démontrons la proposition suivante :

17. *Il est impossible d'imposer au rayon lumineux considéré une déformation qui laisse immobiles ses deux extrémités, et qui vérifie en tous points les conditions*

$$\mathcal{R} = \infty, \tag{64}$$

$$p \sin(p, ds) = 0. \tag{65}$$

Examinons la condition (65). Elle se décompose en deux conditions dont la première est

$$p = 0$$

et équivaut aux trois égalités

$$d\,\delta x = 0, \qquad d\,\delta y = 0, \qquad d\,\delta z = 0, \tag{66}$$

tandis que la seconde est

$$\sin(p, ds) = 0.$$

Cette dernière exprime que les deux segments p et ds sont parallèles entre eux ou, en d'autres termes, que leurs composantes sont respectivement proportionnelles :

$$\frac{d\,\delta x}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dy} = \frac{d\,\delta z}{dz}. \tag{67}$$

D'ailleurs, les égalités (66) peuvent être regardées comme des cas particuliers des égalités (67); celles-ci équivalent donc à la condition (65).

Les égalités (67) peuvent encore s'écrire

$$\frac{\delta\,dx}{dx} = \frac{\delta\,dy}{dy} = \frac{\delta\,dz}{dz}. \tag{67 bis}$$

Cette nouvelle forme donnée aux équations (67) met en évidence leur signification géométrique. En effet, les cosinus directeurs de la tangente en M à la courbe C sont respectivement proportionnels à dx, dy, dz; les cosinus directeurs de la tangente en M' à la courbe C' sont respectivement proportionnels à $dx + \delta dx$, $dy + \delta dy$, $dz + \delta dz$. Les égalités (67 *bis*), équivalentes à la condition (65), expriment donc cette proposition : ***En leurs points correspondants* M, M', *les deux courbes* C, C' *ont des tangentes parallèles.***

Il est facile de trouver la valeur commune des trois rapports (67) ou (67 *bis*); l'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne

$$ds\,\delta\,ds = dx\,\delta\,dx + dy\,\delta\,dy + dz\,\delta\,dz.$$

On en déduit immédiatement que la valeur commune des trois rapports (67 *bis*) et, partant, des trois rapports (67) est

$$\frac{\delta\,ds}{ds}. \tag{67 ter}$$

Ces préliminaires posés, voici la proposition que nous allons établir : *Si une portion de la courbe C' se déduit d'une portion de la courbe C par une déformation telle que les conditions* (64) *et* (65) *soient vérifiées en chaque point, cette portion de la courbe C' appartient, comme la courbe* C, *au parcours d'un rayon lumineux.*

Soient M, M_1 deux points infiniment voisins pris sur le rayon C; soient V, V_1 les valeurs respectives de la vitesse de la lumière aux deux points M, M_1; supposons, pour fixer les idées, V_1 supérieur à V.

Le point M' qui, sur la courbe C', correspond au point M de la courbe C, se trouve, comme ce dernier point, sur la surface Ψ que représente l'équation

$$V(x, y, z) = V.$$

Le point M'_1 qui, sur la courbe C', correspond au point M_1 de la courbe C, appartient, comme ce dernier point, à la surface Ψ_1 dont l'équation est

$$V(x, y, z) = V_1.$$

En vertu de la condition (64), la droite dont MM' est un segment infiniment petit est tangente à une section normale de la surface Ψ, section dont le centre de courbure est rejeté à l'infini ; la surface Ψ n'étant pas à courbures opposées, il faut ou bien que son indicatrice en M se réduise à deux droites parallèles à MM′ ou bien que ses centres principaux de courbure relatifs au point M soient tous deux rejetés à l'infini ; si donc n et n' sont les normales en M et M′ à la surface Ψ, ces deux normales sont parallèles entre elles.

D'autre part, en vertu de la condition (65), les tangentes en M′ et M'_1 à la courbe C′ sont respectivement parallèles aux tangentes en M et M_1 à la courbe C, en sorte que le plan osculateur en M′ à la courbe C′ est parallèle au plan osculateur en M à la courbe C.

Mais, comme la courbe C est un rayon lumineux, le plan osculateur en M à cette courbe contient (théorème I) la normale n à la surface Ψ. Donc *le plan osculateur en* M′ *à la courbe* C′ *contient la normale* n' *menée par le même point à la surface d'égal indice* Ψ.

Soient C le centre de courbure relatif au point M pour la courbe C, et C′ le centre de courbure relatif au point M′ pour la courbe C′.

Le plan osculateur et la tangente à la courbe C′ en M′ sont, en vertu de la condition (65), respectivement parallèles au plan osculateur et à la tangente à la courbe C au point M. La normale principale M′C′ ou N′ à la courbe C′ en M′ est donc parallèle à la normale MC ou N à la courbe C en M. On a ainsi

$$\cos(N, n) = \cos(N', n'). \tag{68}$$

Pour la même raison, la normale principale M'_1C' à la courbe C′ en M'_1 est parallèle à la normale principale M_1C à la courbe C en M_1. Les deux triangles MCM_1, $M'C'M'_1$ sont donc semblables. Si $R = MC$ et $R' = M'C'$ sont, en M et M′, les rayons de courbure respectifs des courbes C et C′, on a

$$\frac{R'}{R} = \frac{M'M'_1}{MM_1}.$$

Soient P, P′ les points où les normales n, n' percent la surface d'égal indice Ψ_1. Les deux triangles M_1MP, $M'_1M'P'$ ont leurs côtés parallèles et sont semblables, en sorte que l'égalité précédente peut encore s'écrire

$$\frac{R'}{R} = \frac{M'P'}{MP}.$$

Mais, d'autre part, nous avons

$$\frac{dV}{dn} = \frac{V_1 - V}{MP}, \qquad \frac{dV}{dn'} = \frac{V_1 - V}{M'P'}.$$

Nous voyons donc que les conditions (64) et (65) entraînent l'égalité

$$(69) \qquad \frac{R}{\frac{dV}{dn'}} = \frac{R'}{\frac{dV}{dn}}.$$

Si nous supposons maintenant que la courbe C soit un rayon lumineux, nous avons l'égalité

$$(41) \qquad \frac{1}{R} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn}\cos(n, N).$$

Les égalités (68) et (69) nous apprennent alors qu'*en tout point de la portion considérée de la courbe C', on a l'égalité*

$$\frac{1}{R'} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dn'}\cos(n', N').$$

En vertu de ce que nous avons vu au n° **11**, les deux propriétés de la courbe C' que nous venons de démontrer équivalent à celle-ci : La portion considérée de la courbe C' dessine un trajet de rayon lumineux.

Cette proposition n'est exacte, bien entendu, qu'aux infiniment petits du second ordre près.

Nous allons maintenant demander à l'Algèbre une seconde démonstration de cette même propriété, et cela de la manière suivante :

Si les équations (35) *sont vérifiées en tout point d'une certaine courbe* C *et si, dans le milieu considéré, l'on soumet une portion de cette courbe à une déformation telle que les conditions* (64) *et* (65) *soient vérifiées en tout point, les équations* (35) *sont encore, aux infiniment petits du second ordre près, vérifiées en tout point de la courbe déformée* C'.

Soient A, B, C les cosinus directeurs d'une tangente en M à la surface Ψ et supposons, comme l'exige la condition (64), que cette tangente corresponde à une section normale dont le centre de courbure soit rejeté à l'infini. Nous aurons, en vertu des égalités (58) et (62),

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &A^2+B^2+C^2=1,\\ &\frac{\partial V}{\partial x}A+\frac{\partial V}{\partial y}B+\frac{\partial V}{\partial z}C \quad =0,\\ &\left(\frac{\partial V}{\partial x}A+\frac{\partial V}{\partial y}B+\frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)}=0.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, soit A', B', C' un système quelconque de valeurs vérifiant les deux égalités

$$A'^2+B'^2+C'^2=1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}A'+\frac{\partial V}{\partial y}B'+\frac{\partial V}{\partial z}C'=0.$$

En vertu de la condition (61), on devra avoir

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}A'+\frac{\partial V}{\partial y}B'+\frac{\partial V}{\partial z}C'\right)^{(2)}\leqq 0.$$

On en tire sans peine cette conclusion: Tout système de valeurs de ΔA, ΔB, ΔC qui vérifie les deux premières équations

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} &A\,\Delta A+\ B\,\Delta B+\ C\,\Delta C=0,\\ &\frac{\partial V}{\partial x}\Delta A+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta B+\frac{\partial V}{\partial z}\Delta C=0,\\ &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}A+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}B+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}C\right)\Delta A\\ &+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}A+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}B+\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}C\right)\Delta B\\ &+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}A+\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}B+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}C\right)\Delta C=0,\end{aligned}\right.$$

vérifie aussi la troisième.

En d'autres termes, il doit exister deux quantités L et L' telles qu'on ait

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}A+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}B+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}C+L\frac{\partial V}{\partial x}+L'A=0,\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}A+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}B+\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}C+L\frac{\partial V}{\partial y}+L'B=0,\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}A+\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}B+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}C+L\frac{\partial V}{\partial z}+L'C=0.\end{aligned}\right.$$

Si, d'ailleurs, on multiplie respectivement ces équations par A, B, C et si l'on ajoute membre à membre les résultats, en tenant compte des égalités (70), on trouve

$$L' = 0. \tag{73}$$

Les composantes δx, δy, δz du déplacement MM' ou Δ du point M sont respectivement proportionnelles à A, B, C; les égalités (72) et (73) nous apprennent donc qu'il existe une quantité Λ telle que l'on ait les trois égalités

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial x},\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial y},\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\delta z = \Lambda\frac{\partial V}{\partial z}.
\end{aligned}\right. \tag{74}$$

Nous allons déterminer la valeur de Λ.

Exprimons, à cet effet, que $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)$ doit être nul en tout point de la courbe C soumise à la déformation; nous en conclurons que l'on a aussi, en tout point de cette courbe,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta z\right)a\\
&+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta z\right)b\\
&+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\delta z\right)c\\
&+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{d\,\delta x}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{d\,\delta y}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{d\,\delta z}{ds} = 0.
\end{aligned} \tag{75}$$

Mais les égalités (67), (67 *ter*) peuvent s'écrire

$$\frac{d\,\delta x}{ds} = a\frac{\delta\,ds}{ds}, \qquad \frac{d\,\delta y}{ds} = b\frac{\delta\,ds}{ds}, \qquad \frac{d\,\delta z}{ds} = c\frac{\delta\,ds}{ds}.$$

En vertu de ces égalités et des égalités (74), l'égalité (75) devient

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}a+\frac{\partial V}{\partial y}b+\frac{\partial V}{\partial z}c\right)\left(\Lambda+\frac{\delta\, ds}{ds}\right)=0.$$

Le facteur $\left(\frac{\partial V}{\partial x}a+\frac{\partial V}{\partial y}b+\frac{\partial V}{\partial z}c\right)$ n'est pas nul, car nous avons supposé que le rayon ne touchait jamais une surface d'égal indice. Nous avons donc

$$\Lambda+\frac{\delta\, ds}{ds}=0. \tag{76}$$

Considérons maintenant la quantité F donnée par la première égalité (34), et calculons la variation δF qu'elle éprouve lorsqu'on passe du point M de la courbe C au point correspondant M' de la courbe C'.

En vertu de la condition (65), que nous supposons imposée à la déformation, la tangente en M' à la courbe C' est parallèle à la tangente en M à la courbe C, en sorte que les variations de a, b, c sont nulles; V a aussi même valeur au point M et au point M'. On a donc

$$\begin{aligned}\delta F = V\delta\frac{da}{ds} &-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\delta x+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta y+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta z\right)(a^2-1)\\ &-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}\delta x+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y+\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta z\right)ab\\ &-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\delta x+\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial y}\delta y+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\delta z\right)ac.\end{aligned} \tag{77}$$

La quantité a ayant même valeur en deux points correspondants quelconques des courbes C et C', on a évidemment

$$\delta\frac{da}{ds}=\frac{da}{ds'}-\frac{da}{ds}=-\frac{da}{ds}\,\frac{ds'-ds}{ds}$$

ou encore

$$\delta\frac{da}{ds}=-\frac{da}{ds}\,\frac{\delta\, ds}{ds}. \tag{78}$$

En vertu des égalités (34), (76) et (78), l'égalité (77) devient la première des égalités

$$\delta F=-F\frac{\delta\, ds}{ds},\qquad \delta G=-G\frac{\delta\, ds}{ds},\qquad \delta H=-H\frac{\delta\, ds}{ds}. \tag{79}$$

Ces égalités ne supposent pas que la courbe C que l'on soumet à la déformation soit le tracé d'un rayon lumineux. Si l'on introduit maintenant cette supposition, les égalités

$$(35) \qquad F = 0, \qquad G = 0, \qquad H = 0$$

seront vérifiées en tout point de la courbe C, et alors les égalités (79) deviendront les égalités

$$(80) \qquad \delta F = 0, \qquad \delta G = 0, \qquad \delta H = 0$$

que nous avions annoncées.

La courbe C′ doit avoir, en commun avec la courbe C, au moins les deux extrémités A_0, A_1 ; elle peut avoir d'autres points communs avec la courbe C; elle peut même avoir certains arcs communs avec cette dernière courbe que l'on a pu ne pas déformer en son entier.

Soit donc un arc de la courbe C′, distinct de la courbe C, et rejoignant la courbe C en ses deux extrémités B_0, B_1.

Entre les deux points B_0, B_1, chacune des deux courbes C, C′ trace la marche d'un rayon lumineux en tout point duquel les équations (35) sont vérifiées.

Mais au point B_0 de la courbe C correspond le même point sur la courbe C′; au point B_1 sur la courbe C correspond le même point B_1 sur la courbe C′. Les deux courbes C et C′ auraient donc même tangente au point B_0 et même tangente au point B_1.

Je dis, dès lors, que les deux courbes C et C′ ne peuvent être distinctes, *du moins si les coordonnées x, y, z d'un point* M *de l'arc* $B_0 B_1$ *de la courbe* C *s'expriment en fonctions analytiques de l'arc s compté sur cette courbe, et si les coordonnées d'un point* M′ *de l'arc* $B_0 B_1$ *de la courbe* C′ *s'expriment en fonctions analytiques de l'arc s' compté sur cette courbe.*

En effet, en tout point de l'arc B_0 et B_1 de la courbe C, nous devons avoir les égalités (80); nous devons donc avoir aussi, en tout point de cet arc, la triple suite d'équations

$$(80') \qquad \frac{d}{ds}\,\delta F = 0, \qquad \frac{d}{ds}\,\delta G = 0, \qquad \frac{d}{ds}\,\delta H = 0,$$

$$(80'') \qquad \frac{d^2}{ds^2}\,\delta F = 0, \qquad \frac{d^2}{ds^2}\,\delta G = 0, \qquad \frac{d^2}{ds^2}\,\delta H = 0.$$

....

Appliquons les équations (80) au point B_0, en remarquant qu'en ce point

$$(81) \qquad \begin{cases} x' = x, & y' = y, & z' = z, \\ a' = a, & b' = b, & c' = c. \end{cases}$$

Les équations (80) nous donneront

$$(81') \qquad \frac{da'}{ds'} = \frac{da}{ds}, \quad \frac{db'}{ds'} = \frac{db}{ds'}, \quad \frac{dc'}{ds'} = \frac{dc}{ds}.$$

Si nous tenons compte des égalités (81) et (81'), les équations (80) nous donneront

$$(81'') \qquad \frac{d^2a'}{ds'^2} = \frac{d^2a}{ds^2}, \quad \frac{d^2b'}{ds'^2} = \frac{d^2b}{ds^2}, \quad \frac{d^2c'}{ds'^2} = \frac{d^2c}{ds^2}.$$

En vertu des égalités (81), (81'), (81''), les égalités (80'') deviendront

$$(81''') \qquad \frac{d^3a'}{ds'^3} = \frac{d^3a}{ds^3}, \quad \frac{d^3b'}{ds'^3} = \frac{d^3a}{ds^3}, \quad \frac{d^3c'}{ds'^3} = \frac{d^3a}{ds^3}.$$

Et ainsi de suite.

Au point B_0, donc, la fonction $x'(s)$ et toutes ses dérivées prennent les mêmes valeurs que la fonction $x(s)$ et toutes ses dérivées. Les deux fonctions sont donc identiques si elles sont analytiques. On en peut dire autant des deux fonctions $y(s)$, $y'(s)$ et des deux fonctions $z(s)$, $z'(s)$.

On remarquera que cette démonstration est rendue légitime par ce fait que la vitesse V de la lumière n'est pas nulle au point B_0.

Il est ainsi prouvé qu'on ne peut, à la courbe C, imposer une déformation qui vérifie en tout point les conditions (64) et (65); cela achève de démontrer le théorème qui a été énoncé au début du n° **16.**

18. Théorème VI. — *En un milieu continuement hétérogène et illimité est tracé un rayon lumineux plan, indéfini dans les deux sens, le long duquel la vitesse de la lumière a un sens unique de variation; lorsqu'on s'éloigne indéfiniment, dans un sens donné, suivant ce rayon, la vitesse de la lumière tend vers une limite déterminée non nulle; elle tend vers une limite déterminée, nécessairement différente, et non nulle, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment suivant le rayon, mais en sens contraire.*

Au point où le rayon rencontre une surface d'égal indice quelconque, la section normale pratiquée dans cette surface par un plan perpendiculaire à celui du rayon tourne sa concavité du côté des indices croissants; en outre, le rayon de courbure de cette section est, en général, fini.

Dans ces conditions, on peut, sur le rayon, prendre deux points tels que le principe de Fermat ne puisse être exact pour la partie du rayon qui est comprise entre ces deux points.

Soit M un point où le rayon rencontre la surface d'égal indice Ψ; le plan du rayon est normal à la surface Ψ, en sorte que la normale ν à ce plan est tangente à la surface Ψ. Nous pouvons donc imposer au rayon une déformation telle que le déplacement Δ ou MM' de chaque point M soit normal au plan du rayon. Ce déplacement est tangent à une section normale de la surface Ψ; cette section est concave du côté des plus forts indices et son rayon de courbure $\mathcal{R}$ est, en général, fini. Si A, B, C sont les cosinus directeurs de la normale au plan du rayon, nous avons,

$$\delta x = A\Delta, \qquad \delta y = B\Delta, \qquad \delta z = C\Delta.$$

A, B, C ayant même valeur en tout point du rayon, on a

$$d\,\delta x = A\frac{d\Delta}{ds}ds, \qquad d\,\delta y = B\frac{d\Delta}{ds}ds, \qquad d\,\delta z = C\frac{d\Delta}{ds}ds.$$

En vertu de ces égalités, de l'égalité

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

et de l'égalité (56), on peut écrire

$$p^2\sin^2(p, ds) = \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds^2. \tag{82}$$

D'autre part, un raisonnement semblable à celui qui a fourni l'égalité (62) donne ici l'égalité

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}A + \frac{\partial V}{\partial y}B + \frac{\partial V}{\partial z}C\right)^{(2)} = \frac{1}{\mathcal{R}}\frac{dV}{dn} \tag{83}$$

où $\frac{dV}{dn}$ est positif.

En vertu des égalités (82) et (83), l'égalité (60) va devenir

$$(84)\qquad \delta^2 T = -\int_C \frac{1}{V^2 \mathfrak{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 ds + \int_C \frac{1}{V}\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds.$$

Sur le rayon indéfini marquons, arbitrairement d'ailleurs, deux points fixes B_0, B_1. Soient A_0, A_1 deux points pris hors du segment B_0B_1, l'un en deçà de B_0, l'autre au delà de B_1.

Choisissons la fonction $\Delta(s)$ de la manière suivante : Nulle en A_0, elle croît sans cesse lorsqu'on s'approche du point B_0 pour atteindre, en ce point, une certaine valeur D; $\frac{d\Delta}{ds}$ n'est, d'ailleurs, infini en aucun point de l'arc A_0B_0; $\Delta(s)$ garde invariablement cette valeur D tout le long de l'arc B_0B_1; de B_1 en A_1, $\Delta(s)$ diminue sans cesse pour atteindre, en A_1, la valeur 0; en cette diminution, $\frac{d\Delta}{ds}$ n'est jamais infini.

Nous voyons alors :

1° Que l'on a

$$\int_{B_0B_1} \frac{1}{V^2\mathfrak{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 ds = D^2 P,$$

P étant une certaine quantité positive qui demeure invariable si les deux points B_0, B_1 demeurent fixes sur le rayon considéré;

2° Que l'on a

$$\int_{B_0B_1} \frac{1}{V}\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds = 0;$$

3° Que l'on a

$$\int_{A_0B_0} \frac{1}{V^2\mathfrak{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 ds > 0, \qquad \int_{B_1A_1} \frac{1}{V^2\mathfrak{R}} \frac{dV}{dn} \Delta^2 ds < 0.$$

Dès lors, l'égalité (84) donne l'inégalité

$$(85)\qquad \delta^2 T < \int_{A_0B_0} \frac{1}{V}\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1A_1} \frac{1}{V}\left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds - PD^2.$$

Soit U la limite inférieure des valeurs de V le long du rayon indéfini dans les deux sens.

Nous pourrons, *a fortiori*, remplacer l'inégalité (85) par l'inégalité

$$(86)\qquad \delta^2 T < \frac{1}{U}\left| \int_{A_0B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds \right| - PD^2.$$

Éloignons maintenant le point A_0 du point B_0, suivant le rayon, et amenons-le ainsi à une nouvelle position α_0, de telle sorte que le rapport de l'arc $\alpha_0 B_0$ à l'arc $A_0 B_0$ ait une certaine valeur λ supérieure à 1.

A tout point M, de l'arc $A_0 B_0$, faisons correspondre un point μ, de l'arc $\alpha_0 B_0$, tel que l'arc μB_0 soit λ fois l'arc MB_0.

A deux points infiniment voisins M, M', séparés par une distance ds, de l'arc $A_0 B_0$ correspondront deux points infiniment voisins μ, μ' de l'arc $\alpha_0 B_0$, et la distance $d\sigma$ de ces deux points aura pour valeur λds.

Pour définir la déformation de l'arc $\alpha_0 B_0$, nous donnerons au point μ un déplacement $\mathfrak{D}$, normal au plan du rayon, et égal au déplacement Δ du point correspondant M de l'arc $A_0 B_0$. Visiblement, en ces deux points correspondants μ et M, nous aurons

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{ds}.$$

Nous aurons donc

$$\int_{\alpha_0 B_0} \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds. \tag{87}$$

En substituant de même à l'arc $B_1 A_1$ un arc $B_1 \alpha_1$ qui soit λ fois plus grand, nous aurons

$$\int_{B_1 \alpha_1} \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}\right)^2 d\sigma = \frac{1}{\lambda}\int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds. \tag{87 bis}$$

Si Θ est la durée de parcours de la partie $\alpha_0 \alpha_1$ du rayon, on aura, en la déformation considérée, l'inégalité suivante, analogue à l'inégalité (86), et où U, P, D auront les même valeurs qu'en l'égalité (86) :

$$\delta^2\Theta < \frac{1}{U}\left[\int_{\alpha_0 B_0} \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \int_{B_1 \alpha_1} \left(\frac{d\mathfrak{D}}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\right] - PD^2.$$

En vertu des égalités (87) et (87 *bis*), cette inégalité peut s'écrire

$$\delta^2\Theta < \frac{1}{\lambda U}\left[\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds\right] - PD^2. \tag{88}$$

Au second membre de cette inégalité (88), toutes les quantités, sauf λ, demeurent invariables lorsqu'on fait varier λ. Or, on peut prendre λ assez grand pour que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\lambda > \frac{1}{UPD^2}\left[\int_{A_0 B_0} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds + \int_{B_1 A_1} \left(\frac{d\Delta}{ds}\right)^2 ds\right].$$

Dès lors, on aura

$$\delta^2 \Theta < 0,$$

et le rayon lumineux ne tracera pas, entre les deux points α_0, α_1, un trajet que la lumière parcourre en un temps minimum. C'est le théorème que nous avions énoncé.

Remarquons, en vue d'une proposition que nous démontrerons tout à l'heure, une particularité de la déformation qui vient d'être imposée au rayon lumineux.

On a, en général,

$$(52) \qquad \delta\, ds = a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z.$$

Ici, les égalités

$$d\,\delta x = A \frac{d\Delta}{ds} ds, \qquad d\,\delta y = B \frac{d\Delta}{ds} ds, \qquad d\,\delta z = C \frac{d\Delta}{ds} ds,$$
$$Aa + Bb + Cc = 0$$

donnent

$$(89) \qquad \delta\, ds = 0.$$

La déformation considérée laisse invariable la longueur de chacun des éléments du rayon.

APPENDICE A LA SECONDE PARTIE.

APPLICATION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS A QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

19. *Application aux brachistochrones.* — Les théorèmes démontrés dans la seconde Partie de ce travail s'appliquent immédiatement à la détermination des lignes brachistochrones dans une région de l'espace où les forces agissantes admettent une fonction potentielle Ω. Si l'on désigne par Ω_0 la valeur de Ω au point de départ A_0 de la trajectoire, la vitesse V en un point quelconque est donnée par la loi de la force vive :

$$(90) \qquad V^2 + \Omega = \Omega_0.$$

Les surfaces d'égale vitesse sont les surfaces d'égal niveau potentiel; une section normale, pratiquée dans une surface d'égal niveau potentiel est concave ou convexe dans le sens où la vitesse du mobile augmente, selon qu'elle est concave ou convexe dans le sens où la fonction potentielle diminue, ou encore selon qu'elle est concave ou convexe dans le sens où le champ est dirigé.

Il n'y a pas de difficulté à étendre au problème des brachistochrones le théorème V, démontré aux nos **16** et **17**. A la vérité, le raisonnement donné à la fin du n° **17** suppose que la vitesse n'est pas nulle au point désigné par B_0; or ce point pourrait coïncider avec le point A_0, et ici, la vitesse est nulle en A_0; mais, pour démontrer le théorème en question, on pourrait reprendre la même démonstration à partir du point B_1, qui ne peut se confondre avec le point A_0; or, on suppose que la ligne C ne touche aucune surface d'égale vitesse ou d'égale fonction potentielle; elle ne rencontre donc pas deux fois la même surface d'égal niveau potentiel; en aucun point, la vitesse ne peut reprendre une valeur déjà prise, en particulier la valeur o prise au point A_0; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Une ligne joignant deux points et ne touchant aucune surface équipotentielle vérifie les équations différentielles des brachistochrones. Aucune surface équipotentielle ne présente, au point où elle est rencontrée par cette ligne, de section normale qui soit convexe dans le sens où le champ est dirigé. Dans ces conditions, la ligne considérée est vraiment, entre les deux points donnés, une brachistochrone.*

L'extension du théorème VI au cas actuel ne semble pas pouvoir être justifiée d'une manière générale, parce que la vitesse V est nulle au point A_0, en sorte que la quantité U qui figure aux inégalités (86) et (88) devrait être remplacée par o.

20. *Application à l'équilibre des fils flexibles et inextensibles. Conditions d'équilibre du fil.* — La théorie de l'équilibre des fils flexibles et inextensibles prête à des considérations fort semblables à celles que nous avons appliquées aux rayons lumineux. Indiquons sommairement ces considérations.

Soit Ω, comme au numéro précédent, la fonction potentielle des forces agissantes, et considérons la quantité

$$(91) \qquad W = \int_C \Omega\, ds,$$

où l'intégrale s'étend à une courbe C reliant deux points donnés A_0, A_1.

La Mécanique nous enseigne, par le principe des déplacements virtuels, qu'entre les deux points donnés A_0, A_1, la courbe C dessinera la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible si toute déformation infiniment petite de cette courbe, qui laisse immobiles les extrémités A_0, A_1, et invariable la longueur $\int_C ds$ de la courbe, vérifie l'équation

$$(92) \qquad \delta W = 0.$$

En vertu de l'égalité

$$\delta\, ds = a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z,$$

cette égalité (92) peut s'écrire

$$(93) \qquad \int_C \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\delta z\right) ds + \int_C \Omega(a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Elle ne doit pas avoir lieu quels que soient δx, δy, δz, mais seulement toutes les fois que ces quantités vérifient l'équation

$$(94) \qquad \int_C \delta\, ds = \int_C (a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Il doit donc exister une constante K telle qu'en ajoutant membre à membre l'équation (93) et l'équation (94), après avoir multiplié celle-ci par K, on obtienne une équation vérifiée quels que soient δx, δy, δz.

Cette équation est

$$(95) \qquad \int_C \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\delta z\right) ds + \int_C (\Omega + K)(a\, d\,\delta x + b\, d\,\delta y + c\, d\,\delta z) = 0.$$

Désignons par $\varpi(x, y, z)$ la somme

$$(96) \qquad \varpi(x, y, z) = \Omega(x, y, z) + K.$$

et posons

$$
(97)\qquad \left\{
\begin{aligned}
f &= \mathfrak{T}\frac{da}{ds} + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)a - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x},\\
g &= \mathfrak{T}\frac{db}{ds} + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)b - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y},\\
h &= \mathfrak{T}\frac{dc}{ds} + \left(\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}a + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}b + \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}c\right)c - \frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Des intégrations par parties donneront aisément à l'équation (95) la forme

$$
(98)\qquad \int_C (f\,\delta x + g\,\delta y + h\,\delta z)\,ds = 0.
$$

Pour l'équilibre du fil, il faut et il suffit que cette équation (98) soit vérifiée quels que soient δx, δy, δz. Selon une démonstration semblable à celle qui a été donnée au nº **14**, cela revient à dire que, pour l'équilibre du fil, il faut et il suffit que l'on ait, en chaque point de ce fil, les trois équations

$$
(99)\qquad f = 0, \qquad g = 0, \qquad h = 0.
$$

On démontre, en outre, ou, mieux, ON ADMET *qu'en chaque point du fil, la tension $\mathfrak{T}(x, y, z)$ doit être positive :*

$$
(100)\qquad \mathfrak{T}(x, y, z) > 0.
$$

La comparaison des formules (97) aux formules (34) et des équations (99) aux équations (35) montre que l'on passe du problème qui consiste à déterminer la figure d'un rayon lumineux reliant deux points donnés au problème qui consiste à déterminer la figure d'un fil flexible et inextensible reliant ces deux mêmes points, en substituant la fonction $\mathfrak{T}(x, y, z)$ à la fonction $\frac{1}{V(x, y, z)}$. L'analogie est complétée par ce fait que ces fonctions doivent être toutes deux positives. Tous les théorèmes établis aux nºs **11** et **12** pour les rayons lumineux s'étendent aux fils flexibles et inextensibles.

Tout ce que nous venons de rappeler en ce numéro **20** est bien connu.

21. *Stabilité de l'équilibre du fil. Cas où cette stabilité est assurée.* — Le théorème connu de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet nous permet de formuler la proposition suivante :

L'équilibre du fil qui relie deux points donnés est assurément stable si la ligne qu'il dessine est, *parmi toutes les lignes de même longueur qu'on peut tracer entre les mêmes points*, une de celles qui rendent minimum la quantité W donnée par l'égalité (91).

Si, dans cette grandeur W, on remplace la fonction $\Omega(x, y, z)$ par la fonction $\varpi(x, y, z)$ que définit l'égalité (96), on y ajoute simplement la quantité

$$K\int_C ds,$$

qui demeure constante toutes les fois que la courbe C se déforme sans changer de longueur. La figure d'équilibre du fil sera donc stable si, parmi *toutes les lignes de même longueur* reliant les deux points A_0, A_1, elle rend minimun la quantité

$$Z = \int_C \varpi(x, y, z)\, ds. \tag{101}$$

A fortiori, cet équilibre sera stable si la figure d'équilibre du fil est telle que, parmi *toutes les lignes* reliant les deux points A_0, A_1, elle rende minimum la quantité Z.

Il suffit alors de se souvenir que l'on passe du problème du rayon lumineux au problème du fil flexible et inextensible en substituant la fonction $\varpi(x, y, z)$ à la fonction $\frac{1}{V(x, y, z)}$ pour pouvoir aussitôt étendre au second problème le théorème V démontré au n° **16**.

Quelques remarques préliminaires :

La formule de correspondance

$$\varpi(x, y, z) = \frac{1}{V(x, y, z)}$$

nous montre que ϖ augmente en tout déplacement où V diminue, et inversement. Dire qu'en un point M la surface

$$V(x, y, z) = \text{const.}$$

qui passe par ce point ne présente aucune section normale qui soit convexe du côté où V augmente, c'est dire qu'en ce point la surface

$$\mathfrak{E}(x, y, z) = \text{const.}$$

ne présente aucune section normale qui soit convexe du côté où $\mathfrak{E}$ diminue; c'est dire aussi, en vertu de l'égalité (96), que la surface d'égal niveau potentiel

$$\Omega(x, y, z) = \text{const.}$$

ne présente aucune section normale qui soit convexe du côté où Ω diminue, c'est-à-dire dans le sens où le champ est dirigé.

Sous le bénéfice de ces remarques, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Un fil flexible et inextensible en équilibre relie deux points; entre ces deux points, il rencontre une seule fois chacune des surfaces d'égal niveau potentiel; au point où elle est rencontrée par le fil, aucune de ces surfaces ne présente de section normale qui soit convexe dans le sens où le champ se dirige. Ce fil est assurément en équilibre stable.*

22. *Cas où l'équilibre du fil est instable.* — La réciproque du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet n'a pas été démontrée pour les fils. Il n'est pas établi que l'équilibre du fil soit instable lorsque la figure du fil n'est pas, parmi toutes les lignes de mêmes extrémités et de même longueur, telle qu'elle rende W minimum. Pour la commodité du langage, nous nous exprimerons comme si cette proposition avait été démontrée; en d'autres termes, lorsque la figure du fil ne sera pas, parmi toutes les lignes de mêmes extrémités et de même longueur, tellement tracée que W soit minimum, *nous conviendrons de dire* que l'équilibre du fil est instable.

La figure du fil en équilibre est déjà telle, nous le savons, que toute déformation qui laisse les extrémités du fil immobile et vérifie la condition

$$\int_C \delta\, ds = 0, \tag{94}$$

vérifie aussi la condition

$$\delta W = 0. \tag{92}$$

Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si une déformation qui laisse immobiles les extrémités du fil et vérifie les deux conditions

$$\int \delta\, ds = 0, \tag{94}$$

$$\int_C \delta^2\, ds = 0, \tag{102}$$

vérifie aussi la condition

$$\delta^2 W < 0, \tag{103}$$

l'équilibre du fil est instable.

Considérons la quantité Z définie par l'égalité (101); en vertu de l'égalité (96), qui définit la fonction $\varpi(x, y, z)$, et de l'égalité (91), qui définit la fonction W, on a

$$Z = W + K \int_C ds$$

et, par conséquent,

$$\delta^2 Z = \delta^2 W + K \int_C \delta^2\, ds.$$

En toute déformation qui vérifie la condition (102), $\delta^2 Z$ est identique à $\delta^2 W$; on peut donc répéter la proposition précédente en substituant, dans l'inégalité (103), $\delta^2 Z$ à $\delta^2 W$.

Cette proposition, d'ailleurs, ne peut être exacte sans que la suivante le soit :

Si une déformation, imposée au fil à partir de sa position d'équilibre, laisse les extrémités immobiles, vérifie, en tout point du fil, les conditions

$$\delta\, ds = 0, \tag{89}$$

$$\delta^2\, ds = 0, \tag{104}$$

et donne l'inégalité

$$\int_C \delta^2 \varpi\, ds < 0, \tag{105}$$

l'équilibre du fil est instable.

Or on a

$$\delta^2 \varpi = \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} + \frac{\partial \varpi}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial \varpi}{\partial z}\delta^2 z. \tag{106}$$

D'autre part, l'égalité (104), en vertu des égalités (53) et (56), donne

$$(107) \qquad 0 = a\,d\,\delta^2 x + b\,d\,\delta^2 y + c\,d\,\delta^2 z + \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds}.$$

Les égalités (106) et (107) permettent d'écrire

$$(108) \quad \begin{aligned} \delta^2 \mathfrak{T} = {} & \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} + \mathfrak{T}\frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds^2} \\ & + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\delta^2 z + \mathfrak{T}\left(a\frac{d\,\delta^2 x}{ds} + b\frac{d\,\delta^2 y}{ds} + c\frac{d\,\delta^2 z}{ds}\right). \end{aligned}$$

Mais la première des égalités (97) permet aisément d'écrire

$$\mathfrak{T} a \frac{d\,\delta^2 x}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x = \frac{d}{ds}(\mathfrak{T} a\,\delta^2 x) - f\,\delta^2 x$$

ou bien, puisque les égalités (99) sont vérifiées en tout point de la courbe C, position d'équilibre du fil,

$$\mathfrak{T} a \frac{d\,\delta^2 x}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x = \frac{d}{ds}(\mathfrak{T} a\,\delta^2 x).$$

Cette égalité et deux égalités analogues, jointes à la remarque que $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ s'annulent aux deux extrémités du fil, donne l'égalité

$$(109) \quad \int_C \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta^2 x + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\delta^2 z\right) ds + \mathfrak{T}(a\,d\,\delta^2 x + b\,d\,\delta^2 y + c\,d\,\delta^2 z)\right] = 0.$$

Si l'on use des égalités (108) et (109) pour transformer l'inégalité (105), on parvient au théorème suivant :

Si l'on peut imposer à la courbe C une déformation qui en laisse les extrémités invariables, qui vérifie en tout point les deux conditions

$$(89) \qquad \delta\,ds = 0,$$

$$(104) \qquad \delta^2\,ds = 0$$

et qui donne l'inégalité

$$(109) \quad \int_C \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds + \int_C \mathfrak{T}\frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds} < 0,$$

l'équilibre du fil est assurément instable.

Le premier membre de l'égalité (109) dépend de $\delta x, \delta y, \delta z$, mais nullement de $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z$.

Dès lors, imaginons qu'on ait, tout le long de la courbe C, choisi des valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$ qui vérifient l'égalité (89) et l'inégalité (109). Ce choix laisse entièrement arbitraires les valeurs de $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z$ en tout point de la courbe. On pourra évidemment choisir ces dernières valeurs de telle sorte qu'elles s'annulent aux deux extrémités de la courbe C et qu'elles vérifient, en tout point de cette courbe, l'égalité

$$a\, d\delta^2 x + b\, d\delta^2 y + c\, d\delta^2 z = -\frac{\sin^2(p, ds)}{ds}. \tag{110}$$

Il suffira, par exemple, d'opérer de la manière suivante :

1° On prend pour $\delta^2 x(s)$ une fonction assujettie seulement à s'annuler aux deux extrémités de la courbe C et à vérifier l'équation

$$\int_C \frac{a}{c}\frac{d\delta^2 x}{ds}\, ds = -\int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{c\, ds}. \tag{111}$$

Cela est évidemment possible d'une infinité de manières.

2° On prend pour $\delta^2 y(s)$ une fonction assujettie seulement à s'annuler aux deux extrémités de la courbe C et à vérifier l'équation

$$\int_C \frac{b}{c}\frac{d\delta^2 y}{ds}\, ds = 0. \tag{112}$$

Cela est encore possible d'une infinité de manières.

3° Une quadrature détermine la fonction $\delta^2 z(s)$ assujettie à s'annuler à l'origine A_0 de cette courbe C et à vérifier en tout point l'égalité

$$\frac{d\delta^2 z}{ds} = -\frac{a}{c}\frac{d\delta^2 x}{ds} - \frac{b}{c}\frac{d\delta^2 y}{ds} - \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{c\, ds^2} \tag{113}$$

dont le second membre est une fonction connue de s.

A l'extrémité A_1 de la courbe, $\delta^2 z$ aura alors pour valeur

$$\delta^2 z_1 = -\int_C \frac{a}{c}\frac{d\delta^2 x}{ds}\, ds - \int_C \frac{b}{c}\frac{d\delta^2 y}{ds}\, ds - \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds},$$

et selon les égalités (111) et (112), cette valeur est égale à zéro.

Si aux valeurs précédemment choisies de δx, δy, δz nous associons, par ce procédé ou par tout autre procédé équivalent, un système de valeurs de $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ qui, en chaque point de la courbe C, vérifie l'équation (110), nous aurons imposé à la courbe C une déformation qui vérifiera les conditions (89) et (104), et pour laquelle l'inégalité (109) sera exacte.

D'où le théorème suivant :

Si l'on peut imposer à la courbe C *une déformation qui en laisse immobiles les extrémités, qui vérifie en tout point la condition*

$$(89) \qquad \delta\, ds = 0,$$

et qui donne l'inégalité

$$(109) \qquad \int_C \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z}\delta z \right)^{(2)} ds + \int_C \varpi \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{ds} < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

A la fonction $\varpi(x, y, z)$ substituons la fonction $V(x, y, z)$ donnée par l'égalité

$$(114) \qquad \varpi(x, y, z) = \frac{1}{V(x, y, z)}.$$

Nous aurons

$$(115) \qquad \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varpi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varpi}{\partial z}\delta z \right)^{(2)} = -\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z \right)^{(2)} + \frac{2}{V^3}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z \right)^2.$$

Cette égalité (115), jointe au théorème précédent, permet d'énoncer la proposition suivante :

Si l'on peut imposer à la courbe C *une déformation qui en laisse les extrémités immobiles, qui vérifie, en son point de la courbe, les deux conditions*

$$(89) \qquad \delta\, ds = 0,$$

$$(116) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z = 0.$$

et qui donne l'inégalité

$$(117)\qquad \int_C \frac{p^2 \sin^2(p, ds)}{V\, ds} - \int_C \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right)^{(2)} ds < 0,$$

l'équilibre du fil est instable.

La condition (116) peut encore, en vertu de l'égalité (114), s'écrire

$$(116\ bis)\qquad \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z}\delta z = 0.$$

Celle-ci, à son tour, en vertu de l'égalité (96), peut s'écrire

$$(116\ ter)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\delta z = 0.$$

Ces conditions équivalentes (116), (116 *bis*) et (117 *ter*) expriment que le déplacement δx, δy, δz est, en chaque point, tangent à la surface d'égale tension ou d'égal niveau potentiel qui passe par ce point.

La dernière proposition établie va nous permettre de transformer, en vue de l'appliquer au problème du fil flexible et inextensible, ce qui a été démontré au n° **18** pour un rayon de lumière; la déformation imposée à ce rayon de lumière vérifie en effet, comme nous nous en sommes alors assuré, la condition (89).

Pour faire cette transformation, nous considérerons un espace indéfini où s'exerce une force qui dépend d'une fonction potentielle $\Omega(x, y, z)$. Nous devrons supposer, en premier lieu, que cette fonction, si loin qu'on aille en l'espace considéré, demeure toujours finie. Nous pourrons donc choisir une constante K de telle sorte que la fonction

$$(96)\qquad \mathfrak{C}(x, y, z) = \Omega(x, y, z) + K$$

demeure comprise, dans tout l'espace, entre deux valeurs positives; il en sera alors de même de son inverse $V(x, y, z)$.

Il nous faudra, en second lieu, admettre que l'on peut tracer, dans ce champ, une ligne plane, infinie dans les deux sens, qui ne rencontre pas deux fois une même surface équipotentielle, et qui vérifie, en tout point, les équations (99) de l'équilibre des fils.

En troisième lieu, nous devrons admettre qu'au point de rencontre de la courbe avec une surface équipotentielle, celle-ci est coupée, par un plan normal à celui de la courbe, suivant une section dont le rayon de courbure est fini et dont la concavité est tournée du côté où V diminue. C'est dire que la convexité de cette courbe est tournée dans le sens où $\mathfrak{E}$ et Ω diminuent, c'est-à-dire dans le sens où le champ se dirige.

Dès lors, notre théorème VI se transformera en la proposition suivante :

THÉORÈME IX. — *En un espace illimité s'exerce une force dont la fonction potentielle demeure limitée même en un point qui s'éloigne indéfiniment. En cet espace, est tracée une courbe plane C, infinie dans les deux sens, qui ne rencontre pas deux fois la même surface de niveau, et qui vérifie en tout point les conditions d'équilibre d'un fil flexible, inextensible, de tension positive. A l'intersection de la courbe C avec une surface d'égal niveau potentiel, la section de celle-ci par un plan normal à la courbe C est une ligne de rayon de courbure généralement fini, et qui tourne sa convexité dans le sens où le champ se dirige. Sur une telle courbe C, on peut marquer deux points A_0, A_1 assez éloignés l'un de l'autre pour qu'un fil flexible et inextensible, placé suivant l'arc de courbe que terminent ces deux points, soit en équilibre instable.*

NOTE.

Le précédent travail était achevé d'imprimer lorsque nous avons eu connaissance d'un Mémoire publié, en 1867, par A. Lévistal. En ce Mémoire, Lévistal démontre (¹), par un élégant emploi de la surface aplanétique et pour le cas d'une seule réflexion ou d'une seule réfraction, que le temps de parcours employé par la lumière pour aller d'un point à un autre n'est pas toujours un minimum. Lévistal a rappelé ce théorème en une Note de son édition des *Leçons d'Optique physique* de Verdet (²).

(¹) A. LÉVISTAL, *Recherches d'Optique géométrique*. Premier Mémoire, nº 43 (*Annales de l'École Normale supér.*, 1re série, t. IV, 1867, p. 250-251).

(²) E. VERDET, *Leçons d'Optique physique*, t. I, 1869, p. 27; Paris (Publié par A. Lévistal).