JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE BOREL

Le calcul des intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 159-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__159_0>

Le calcul des intégrales définies;

Par Émile BOREL.

INTRODUCTION.

I. — Remarques historiques.

Les résultats acquis, dès la fin du XIX[e] siècle, ont surabondamment prouvé combien était simpliste l'opinion d'après laquelle il serait possible de limiter le champ des Mathématiques à l'étude d'une catégorie déterminée de fonctions : fonctions continues, fonctions dérivables, fonctions analytiques, etc. Pour qu'une telle limitation ne fût pas à la fois arbitraire et vaine, il faudrait, en effet, qu'on pût être assuré de son invariance, à l'égard du moins d'une catégorie déterminée de transformations analytiques. Or, si l'on n'a pas le droit d'affirmer qu'une telle limitation sera toujours impossible, on doit reconnaître que sa réalisation prochaine est peu vraisemblable dans l'état actuel de la Science. Cette réalisation exigerait, entre autre choses, une étude approfondie au point de vue arithmétique de tous les nombres irrationnels qui peuvent s'introduire en Algèbre et en Analyse, et une telle étude est à peine ébauchée (¹). En effet, l'introduction d'un nombre irrationnel α d'une complication particulière dans une équation fort simple, telle que la suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

(¹) Voir, par exemple, mes *Leçons sur la Théorie de la croissance*, dernier Chapitre.

entraîne une conséquence inattendue : en partant de conditions *analytiques*, l'équation définit une fonction des variables x et y *qui n'est analytique pour aucun système de valeurs de ces variables* (1) Dans un autre ordre d'idées, M. Lebesgue a tiré, de la considération des développements décimaux des nombres irrationnels les plus généraux, des conséquences presque paradoxales; en particulier, il en a déduit la définition d'une fonction qui n'est susceptible d'aucune représentation analytique (2).

C'est cette quasi-impossibilité d'établir une démarcation précise entre les êtres analytiques regardés comme « simples » et les autres, qui a été l'origine de travaux qui ont considérablement accru nos connaissances en Analyse. Ces travaux étaient nécessaires; ils ne sont pas d'ailleurs définitifs sur tous les points et il sera encore utile, à mon avis, de s'occuper de ce qu'on a pu appeler la *pathologie* des fonctions. Mais il est permis de penser que le but définitif de ces recherches *pathologiques* doit être la délimitation des fonctions considérées comme *saines* (3). Là encore, nous nous heurtons à des difficultés qui sont loin d'être résolues.

Je voudrais essayer d'indiquer, dans ce Mémoire, un point de vue différent, qui n'est pas entièrement nouveau, mais qu'il m'a semblé possible, en utilisant divers travaux publiés dans ces vingt dernières années, de présenter sous une forme qui me paraît neuve. J'en donnerai, d'ailleurs, immédiatement une application concrète au calcul des intégrales définies, de manière à bien montrer qu'il ne s'agit pas d'une pure théorie spéculative, mais que la conception que je propose peut conduire à des résultats positifs et précis, indépendamment de toute opinion sur cette conception même.

---

(1) BOREL, *Comptes rendus*, t. CXXI, 19 décembre 1895.

(2) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal de M. Jordan, 1905, p. 214). Sur le sens qu'il faut donner au mot *définition*, M. Lebesgue fait des observations fort justes qui entraînent des réserves sur le sens que peut avoir son énoncé, dont l'intérêt, à mon point de vue, est surtout négatif.

(3) J'ai déjà exprimé, à diverses reprises, cette opinion, en particulier en ce qui concerne la régularité des modes de croissance (*Leçons sur les fonctions entières*, Note III).

L'idée qui m'a guidé est l'utilité qui me paraît évidente de distinguer entre les calculs qui peuvent être réellement effectués et ceux qui ne peuvent pas l'être. Les premiers, seuls, sont actuellement utilisables dans les applications des Mathématiques. Je ne veux pas dire, bien entendu, que les applications soient l'unique but des Mathématiques; rien n'est plus loin de ma pensée; et, admettrait-on ce point, il n'en resterait pas moins que certaines spéculations, aujourd'hui sans rapport visible avec aucune application, se révéleront peut-être demain comme très fécondes en résultats pratiques. Ce que je dis simplement, c'est qu'il y a un grand intérêt théorique et pratique à étudier à part les nombres et les fonctions *calculables*; nous verrons que ce champ d'études est beaucoup plus étendu qu'on n'aurait pu le penser il y a quelques années; c'est pourquoi je me suis décidé à cette publication, à laquelle je réfléchis depuis fort longtemps.

Ces réflexions, je n'ai pas besoin de le dire, n'ont pu être indépendantes de mes lectures, ni surtout de mes conversations. Il ne m'est pas possible de signaler tous ceux qui, par leurs paroles ou par leurs écrits, ont eu une part dans la formation des idées que je vais exposer: je ne les connais d'ailleurs pas tous, car ces influences sont parfois inconscientes. Je manquerais cependant à un devoir élémentaire de probité, si je ne signalais pas certaines conversations amicales dont il n'est pas resté de trace écrite et qui ont certainement joué un rôle essentiel : je veux parler de conversations avec M. Jules Drach qui remontent à plus de vingt ans et ont été souvent reprises depuis; et ensuite, dans l'ordre chronologique, de conversations avec M. René Baire et avec M. Henri Lebesgue. Je conserve, cela va sans dire, toute la responsabilité de ce qui pourra paraître critiquable dans les considérations auxquelles je consacre cette Introduction; mais je voudrais, si quelqu'une d'entre elles retient l'attention, qu'on sache qu'elle n'aurait probablement pas vu le jour sous sa forme actuelle, si je n'avais pas eu la bonne fortune d'échanger des idées avec les amis dont je viens de donner les noms.

II. — Nombres calculables.

Nous dirons qu'un nombre α est calculable lorsque, étant donné un nombre entier quelconque n, on sait obtenir ([1]) un nombre rationnel qui diffère de α de moins de $\frac{1}{n}$. Les nombres rationnels sont évidemment les plus simples des nombres calculables; lorsqu'un nombre n'est pas rationnel, on en calcule généralement les valeurs approchées, en faisant usage, soit des fractions décimales, soit des fractions continues. On peut se demander s'il faut considérer à part ceux des nombres irrationnels pour lesquels *la loi* d'un de ces développements est connue; il est clair qu'il en résulte un avantage pratique considérable, mais il faut observer que cet avantage est entièrement limité à un mode unique de représentation; le système décimal, en particulier, n'a aucune valeur théorique spéciale; il n'en est pas de même pour le développement en fraction continue, qui est unique en son genre, mais, d'autre part, un tel développement n'est pas invariant relativement à des opérations arithmétiques très simples ([2]). Il en ré-

([1]) Je laisse intentionnellement de côté la plus ou moins grande longueur pratique des opérations; l'essentiel est que chacune de ces opérations soit exécutable en un temps fini, par une méthode sûre et sans ambiguïté. Par exemple, un nombre décimal β, tel que sa $n^{\text{ième}}$ décimale soit égale à la décimale de π de rang $n!$ doit être regardé comme défini, bien que son calcul, avec seulement une dizaine de chiffres exacts, puisse exiger, dans l'état actuel de l'Analyse, un temps dépassant de beaucoup la longueur de la vie humaine. En réalité, la difficulté est la même pour tous les nombres incommensurables; si les premières décimales sont parfois aisées à calculer, l'impossibilité pratique reparaît si l'on exige quelques milliers de chiffres. Au point de vue pratique, on peut dire que les nombres dont on a effectivement besoin peuvent, en général, être effectivement calculés avec l'approximation désirable; d'autre part, il n'y a pas lieu d'élever des exigences de nature pratique, lorsqu'il s'agit de nombres dont l'importance pratique est nulle, comme le nombre β dont il vient d'être question.

([2]) Quelques recherches relatives à cette invariance ont été entreprises par M. Châtelet (*Bulletin de la Société mathématique*, 1912, t. XL, p. 1). Mais, malgré l'intérêt des résultats obtenus, ceux-ci sont encore très particuliers et leur extension paraît présenter de grandes difficultés. C'est là une des questions les plus importantes de l'Arithmétique, et il serait très désirable que les recherches de M. Châtelet soient continuées et étendues.

sulte que la connaissance de la loi d'un développement décimal (non périodique) doit être actuellement considérée comme n'ayant aucune valeur théorique [1] ni pratique, tandis que la connaissance de la loi d'un développement en fraction continue a un certain intérêt théorique, mais un intérêt pratique à peu près nul.

Le premier des problèmes qui se pose au sujet des nombres calculables est celui de l'égalité de deux de ces nombres [2]. Si deux nombres calculables sont inégaux, on s'en apercevra évidemment en calculant chacun d'eux avec une approximation suffisante, déterminée, mais généralement inconnue *a priori*. On réaliserait un progrès évident en déterminant une limite inférieure de la différence qui peut exister entre deux nombres calculables, dont les définitions satisfont à des conditions connues. Cette limite existe évidemment si les conditions sont telles qu'elles ne définissent qu'un nombre fini de nombres calculables ; j'ai déjà indiqué ailleurs cette manière de poser la question [3] ; je veux seulement faire observer ici que la fonction qui définit l'écart minimum de deux nombres de *hauteur* donnée [4] est calculable, pour chaque valeur finie de la hauteur, mais que son calcul effectif serait d'une longueur impraticable, s'il fallait le réaliser empiriquement, c'est-à-dire en calculant tous les nombres dont la hauteur

---

(1) Je suppose ici, bien entendu, que cette loi serait *tout* ce qu'on saurait sur le nombre. Au contraire, il y aurait un très grand intérêt théorique à connaître la loi des chiffres décimaux d'un nombre défini autrement que par cette loi, de $\sqrt{2}$ par exemple. Mais c'est là un sujet de recherches très difficile, et qui ne pourra être abordé qu'après celui dont il vient d'être question dans la note précédente.

(2) La connaissance des lois dont il vient d'être question permettrait de résoudre cette question pour deux nombres donnés *sous la même forme*, mais le problème n'a alors aucun intérêt. Ce qui importe, c'est de savoir reconnaître si deux nombres sont égaux, lorsqu'ils sont obtenus par des modes de calcul différents.

(3) *Comptes rendus*, décembre 1903.

(4) Je rappelle que la hauteur d'un nombre est une fonction croissante du nombre d'opérations nécessaires pour définir le nombre à partir de l'unité ; la définition est seulement assujettie aux conditions suivantes : 1° tout nombre calculable doit avoir une hauteur finie ; 2° il y a un nombre fini de nombres dont la hauteur est inférieure à une valeur donnée.

ne dépasse pas la valeur finie considérée. On n'est même pas absolument sûr, au point de vue théorique, qu'il ne se présenterait pas des difficultés insolubles, car on peut concevoir deux nombres tels que les suivants :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

ayant un nombre quelconque de chiffres décimaux identiques, et dont on ne saurait pas prouver l'égalité ([1]). Il serait donc tout à fait désirable qu'on ait quelques résultats généraux non empiriques sur la limitation inférieure de l'écart en fonction de la hauteur ([2]). C'est un problème qui mérite d'attirer l'attention des analystes, malgré sa difficulté.

Un autre problème, bien plus difficile que le précédent et cependant plus souvent signalé comme digne d'intérêt, consiste à se demander si un nombre calculable appartient ou non à une catégorie énumérable ([3]) particulière : si le nombre π, ou la constante d'Euler C est ou non un nombre rationnel, ou quadratique, ou algébrique ? On sait que la question est résolue pour π, et ne l'est pas pour C. Il

---

([1]) Il ne semble pas que ces difficultés se présentent *effectivement* dans la réalité ; pratiquement, toutes les fois que les mathématiciens ont constaté l'égalité *numérique* de deux nombres (à une approximation suffisante), ils ont su démontrer l'égalité rigoureuse. C'est là un fait important : dans tous les cas où l'on sait définir deux nombres dont les développements décimaux ont une centaine de chiffres communs, on sait aussi, ou bien qu'ils sont égaux, ou bien qu'ils sont inégaux en vertu de leur définition même (par exemple, l'un d'eux peut être défini comme égal à l'autre augmenté de 10^{-1000}). Il serait fort intéressant de pouvoir donner un exemple de deux nombres dont les développements décimaux coïncident *pratiquement*, sans que l'on sache s'ils sont égaux ou non. Ceci se rattache à la question de savoir dans quelle mesure une vérification empirique assure de l'exactitude d'un théorème d'Analyse, tel que le fameux théorème de Riemann sur les fonctions (§ 5).

([2]) Voir mes *Leçons sur la théorie de la croissance*, loc. cit.

([3]) J'emploie le terme *énumérable* dans le sens que j'ai donné aux mots : *effectivement énumérable*, réservant au terme *dénombrable* son sens usuel, sans m'inquiéter ici des critiques qu'on peut faire à cette notion d'ensemble dénombrable non effectivement énumérable (Voir *Annales de l'École Normale*, 1908, les *Paradoxes de la théorie des ensembles*).

ne semble pas possible, actuellement, d'aborder ce problème sous sa forme générale, pour les nombres qui peuvent être définis, à partir des nombres rationnels, par des conditions transcendantes. On peut le ramener au problème, à certains égards plus simple, qui consiste à *limiter la hauteur* des nombres rationnels qui peuvent être définis à partir des nombres entiers par des opérations algébriques ou analytiques de nature déterminée; il est clair que si les procédés de définition sont tels qu'ils ne conduisent qu'à un nombre *fini* de nombres, la hauteur de ceux de ces nombres qui sont rationnels est limitée : mais cette remarque bien simple, si elle permet d'entrevoir la possibilité d'une solution, ne fournit, malheureusement, aucune méthode pour l'obtenir.

Je n'insiste pas davantage sur ces difficultés, qui sont aux frontières du sujet qui nous occupe; je ne ferai que mentionner d'autres difficultés qui, à mon sens du moins, sont au delà des frontières des Mathématiques. Je fais allusion aux *définitions* telles que la suivante, qu'on peut varier à l'infini : le nombre a est égal à *zéro* si la constante d'Euler C est un nombre algébrique et à *un* dans le cas contraire. En d'autres termes, on fait dépendre la valeur du nombre *défini* d'une certaine éventualité inconnue ; la seule raison pour laquelle on regarde la *définition* comme mathématique est que l'éventualité inconnue est de nature mathématique et que, par suite, le nombre a est susceptible d'une *définition* analytique; il suffirait d'un peu de patience pour écrire explicitement une formule donnant ce nombre a; mais cette formule renfermerait plusieurs passages à la limite superposés et ne serait évidemment pas calculable. La *définition* analytique n'a donc aucune valeur mathématique ; elle est simplement la traduction, en un langage plus compliqué, de la *définition* primitive, de sorte qu'on est, de toute façon, ramené à faire dépendre la valeur du nombre a de la solution d'un problème pour le traitement duquel on ne possède aucune méthode régulière. Le fait que ce problème est mathématique me paraît être une circonstance accessoire et il me semble qu'on aurait une définition tout à fait analogue en disant que le nombre a est égal à *zéro* ou à *un*, suivant que le cuivre est ou non un corps composé. Il est, en effet, aussi peu vraisemblable pour les mathématiciens que C soit algébrique, qu'il est peu vraisemblable pour les chimistes que le cuivre soit un corps composé ; mais la preuve rigoureuse paraît presque également difficile dans les deux cas ([1]).

Nous nous en tiendrons donc à la définition des nombres calculables donnée au début de ce paragraphe ; les commentaires dont nous l'avons fait suivre n'avaient comme but que de mettre en évidence les restrictions que comporte une telle définition ; mais ces restrictions n'ont rien d'arbitraire ; elles s'imposent si l'on veut distinguer les mathématiques réelles de spéculations *logiques* purement verbales, dans lesquelles on ne se préoccupe que d'une qualité purement négative : l'absence de contradiction.

III. — Les fonctions calculables et les fonctions à définition asymptotique.

Nous dirons qu'une fonction est calculable, lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de la variable ([2]). En d'autres termes, si α est un nombre calculable, on doit savoir calculer la valeur de $f(\alpha)$ à $\frac{1}{n}$ près, quel que soit n. On ne doit pas perdre de vue que,

([1]) On pourrait objecter à cet exemple, ainsi qu'à tout autre exemple tiré des sciences physiques, les difficultés possibles d'interprétation : la notion de corps simple peut être entièrement modifiée; la continuité des phénomènes est une autre difficulté qui paraît être très profonde : entre deux alternatives naturelles, il y a toujours place pour le doute : le seul moyen sûr d'échapper au doute est de substituer au phénomène naturel un phénomène au moins en partie conventionnel et artificiel. Par exemple, on ne peut pas parler avec certitude du nombre des petites planètes qui seront découvertes avant le 31 décembre 1920, à minuit (temps de Paris), car une découverte peut avoir lieu précisément à minuit; et, d'autre part, il peut y avoir doute sur la valeur d'une observation particulière; mais on peut parler avec précision des découvertes qui auront été annoncées à cette date dans une publication déterminée, si cette publication, par suite de conventions humaines, paraît à des dates régulières telles qu'il ne puisse pas y avoir d'ambiguïté à redouter.

([2]) Nous ne parlons que d'une variable pour abréger le langage ; il ne se présente aucune difficulté pour l'extension à n variables ou même à une infinité énumérable, sous certaines restrictions de convergence évidentes.

par définition, donner le nombre calculable α, c'est simplement donner le moyen d'obtenir α avec une approximation arbitraire. Une fonction ne peut donc être calculable que si elle est continue ([1]), au moins pour les valeurs calculables de la variable.

Si l'on donne les valeurs d'une fonction pour les valeurs calculables de la variable et si cette fonction est supposée continue, ses valeurs pour *toutes* les valeurs de la variable sont par cela même *déterminées*. On peut se demander si l'on peut attribuer un sens quelconque à la valeur d'une fonction complètement discontinue pour les valeurs non calculables de la variable, même si cette fonction était continue dans le champ des valeurs calculables. Il semble qu'on doive chercher à écarter, *a priori*, une singularité artificielle analogue à la suivante : une fonction serait égale à x pour x calculable et à x^2 pour x non calculable. En d'autres termes, la valeur de la fonction pour les valeurs non calculables serait égale à la limite d'une certaine fonction continue bien définie pour les valeurs calculables. Une telle convention apparaît, en effet, comme une discontinuité artificielle, analogue à celle qui consisterait à considérer une fonction de la variable complexe z, égale dans tout le plan à z, sauf pour $z = 0$, où sa valeur serait 27 ; on convient généralement de laisser de côté de telles fonctions qui ne posséderaient pas la propriété fondamentale des fonctions analytiques : deux fonctions analytiques qui coïncident dans le voisinage d'un point ont même domaine d'existence et coïncident dans tout ce domaine. De même, il peut sembler naturel de convenir qu'une fonction continue pour toutes les valeurs calculables doit être considérée comme continue pour les valeurs non calculables ; elle est par cela même *définie* pour ces valeurs autant qu'elle peut l'être.

Aux fonctions calculables, on peut opposer *les fonctions à définition asymptotique*. Je propose d'appeler ainsi les fonctions dont la valeur, pour une valeur déterminée de la variable, ne dépend que de la manière dont se comporte *à l'infini* un développement convergent de cette valeur de la variable. C'est là le type qui est le plus éloigné des

---

([1]) Pour que le calcul de la fonction soit effectivement possible à une approximation donnée, il faut, de plus, supposer connue la mesure de la continuité de la fonction, c'est-à-dire l'ordre infinitésimal (au sens généralisé) de la variation de la fonction comparée à la variation de la variable.

fonctions calculables; on pourrait évidemment concevoir des types mixtes ; je ne m'y attarderai pas.

Un nombre peut être considéré comme défini par une suite énumérable d'entiers, tels que deux nombres soient infiniment voisins si, pour des valeurs de plus en plus grandes de n, les n premiers entiers de la suite coïncident, pour les deux nombres. On peut supposer que la valeur de la fonction est en partie déterminée par les n premiers entiers, ou, au contraire que, quel que soit n, elle ne dépend pas de ces n premiers entiers; ce sont les deux types extrêmes de la fonction continue et de la fonction à définition purement asymptotique. Pour compliquer encore, on pourrait essayer de ranger les entiers sous la forme d'une suite bien ordonnée correspondant à un nombre transfini de deuxième classe (variable) et admettre que, quel que soit le nombre α de deuxième classe, il est des valeurs de x telles que $f(x)$ ne dépende pas de la valeur des α premiers termes de la suite. Mais bien des réserves seraient à faire sur la légitimité d'une telle définition; je me bornerai aux définitions asymptotiques simples.

La plus classique des fonctions à définition asymptotique est la fonction souvent considérée qui est égale à 0 ou à 1, suivant que la variable x est un nombre rationnel ou irrationnel; nous y reviendrons tout à l'heure. On peut déduire des développements des nombres en fraction décimale ou en fraction continue bien des définitions plus ou moins compliquées, dans lesquelles intervient la loi asymptotique de ces développements. Un tel développement définit une suite énumérable de nombres entiers; on peut considérer, par exemple, une fonction de plusieurs nombres de cette suite dont les rangs varient suivant une certaine loi et envisager la plus grande ou la plus petite limite vers laquelle tend cette fonction, lorsque les rangs des nombres qui y figurent augmentent indéfiniment. C'est là un type déjà très général et qu'on pourrait encore compliquer. Je n'ai pas l'intention d'aborder ici l'étude générale de telles fonctions; je voudrais seulement faire observer que cette étude me paraît être du ressort de la théorie des probabilités. En effet, on ne peut se borner aux valeurs calculables de la variable; et une valeur non calculable ne peut être conçue comme définie que par le hasard; les propriétés de la fonction sont donc représentées par des coefficients de probabilité.

Un cas particulier important est celui où la fonction coïncide avec une fonction continue pour toutes les valeurs non calculables et diffère de cette fonction seulement pour certaines valeurs calculables. Tel est le cas d'une fonction égale, pour x irrationnel, à 1 ou à x et, pour x rationnel, à 0 ou à une fonction déterminée du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible égale à x. Dans ce cas, il est clair que, si un nombre est donné par une série dont on ignore la loi, il y a une probabilité égale à l'unité pour que ce nombre soit irrationnel, et l'on doit, par conséquent, choisir, dans le doute, comme valeur approchée de la fonction, la valeur qui correspond à cette hypothèse, infiniment plus probable que l'hypothèse contraire.

Une fonction à définition asymptotique est parfois immédiatement connue pour un grand nombre de valeurs calculables, lorsque ces valeurs sont données sous une forme particulière qui peut être, suivant les cas, arithmétique, algébrique ou analytique. Par exemple, on peut convenir qu'une fonction de deux variables x et y est nulle, sauf si $x + iy$ est égale à une période d'une fonction $\wp(u, g_2, g_3)$ à invariants rationnels, auquel cas la fonction est égale à 1. Il est clair que, si l'on se donne des nombres rationnels g_2 et g_3, ils définissent certains systèmes de valeurs x et y pour lesquels la fonction est connue. Mais si l'on donne, par une autre voie, un système de nombres x et y, nous ne connaissons actuellement aucun moyen de déterminer la valeur correspondante de la fonction (¹); le problème ainsi posé n'a qu'un rapport assez lointain avec la définition de la fonction; il mérite d'être étudié en lui-même, indépendamment de cette définition. On pourrait concevoir de même des fonctions non calculables à propos desquelles on serait ainsi amené à se poser les problèmes les plus divers; en ce sens, la théorie des fonctions non calculables comprendrait la Science tout entière (²) : c'est une raison sans doute suffisante pour ne pas l'aborder dans sa généralité; nous verrons plus loin sous

(¹) Nous savons simplement calculer g_2 et g_3 avec une approximation indéfinie; c'est une propriété asymptotique de ces nombres d'être rationnels ou non.

(²) On peut dire en effet : telle fonction est égale à 0 ou à 1 pour $x = 0$, suivant que telle proposition (par exemple le dernier théorème de Fermat) est vraie ou fausse.

quelles conditions certaines fonctions non calculables peuvent être maniées.

IV. — Les ensembles mesurables.

La notion d'ensemble est un cas particulier de la notion générale de fonction; tout ensemble définit une fonction, égale à o pour les points de l'ensemble et égale à 1 pour les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble. Inversement, toute fonction égale à *zéro* ou à *un* pour les points d'un domaine sépare les points de ce domaine en deux catégories, c'est-à-dire définit deux ensembles complémentaires. Une fonction quelconque définit une courbe, c'est-à-dire un ensemble particulier.

Si une fonction ne prenant que les valeurs o et 1 est continue en un point, elle est évidemment constante dans un intervalle contenant ce point; l'étude des fonctions continues conduit donc à celle des ensemble formés d'intervalles, les extrémités de ces intervalles jouant le rôle des points de discontinuité. On peut, d'ailleurs, considérer soit un ensemble E formé d'intervalles, soit l'ensemble E' complémentaire de E, soit enfin combiner les deux modes de formation; nous reviendrons sur ce point.

Je voudrais auparavant faire observer que si l'on applique à la définition des ensembles les remarques faites sur la définition des fonctions et qu'on appelle *bien définis* les ensembles qui correspondent aux fonctions calculables, on voit que les seuls ensembles *bien définis* sont ceux dont la définition peut être obtenue au moyen d'intervalles (additifs ou soustractifs), les *extrémités* des intervalles devant être étudiées à part. Si l'on ne tient pas compte de ces extrémités, on peut dire que l'ensemble est défini à un ensemble dénombrable près [1]. Relativement aux ensembles énumérables, les difficultés soulevées par leur définition sont différentes suivant qu'ils sont réductibles ou denses dans un intervalle. Le cas le plus simple de l'ensemble réductible est l'ensemble comprenant un seul point a. Si un point x quel-

---

[1] Cet ensemble est même *effectivement énumérable*, car il est toujours possible, en tenant compte des longueurs et des situations respectives des intervalles, de fixer un ordre précis dans lequel on les supposera rangés.

conque est donné par un procédé quelconque, et si x diffère de a, on s'en apercevra au bout d'un nombre d'opérations fini (mais non connu d'avance); si x coïncide avec a, la démonstration de ce fait ne résultera pas en général d'un calcul d'approximation fini, mais des définitions théoriques de x et de a (*Cf.*, p. 163). L'ensemble formé d'un seul point, serait-ce le point *zéro*, n'est donc pas bien défini en ce sens que le problème de savoir si un nombre donné appartient ou non à l'ensemble peut exiger, soit une infinité d'opérations, soit la résolution d'un problème difficile ou actuellement insoluble. Les difficultés sont plus grandes encore lorsqu'il s'agit d'un ensemble dense, par exemple de l'ensemble des nombres rationnels; étant donné un nombre x défini analytiquement, on ne sait généralement pas reconnaître s'il appartient ou non à l'ensemble ([1]).

Si l'on néglige les ensembles dénombrables, les ensembles *bien définis* sont précisément les ensembles que j'ai appelés autrefois *ensembles mesurables* ([2]). Depuis, M. Lebesgue a donné à ces ensembles le nom d'*ensembles mesurables* B et a considéré d'autres ensembles qu'il a nommés *ensembles mesurables*. J'adopterai cette dernière dénomination de M. Lebesgue, réservant le nom d'ensembles *bien définis*, pour les ensembles que j'avais appelés *mesurables*. La terminologie que j'avais adoptée dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* aurait pu, en effet, avoir l'inconvénient de laisser croire qu'on ne pouvait pas parler de la mesure d'un ensemble ne rentrant pas dans la catégorie des ensembles que j'appelais alors *mesurables* et que j'appelle maintenant *bien définis;* j'ai cependant indiqué, dans ce Livre même, en vertu de quels principes la définition de la mesure pouvait s'étendre à certains ensembles qui n'étaient pas bien définis

---

([1]) En réalité, la difficulté est *la même* pour *tout* ensemble dénombrable, qu'il se compose d'un seul point ou d'une infinité, lorsqu'on envisage le problème dans toute sa généralité, car il est aisé de former une expression analytique y qui s'annule dans le cas où x appartient à l'ensemble dénombrable et dans ce cas seulement. La question de savoir si x appartient à cet ensemble équivaut donc à celle de savoir si y appartient à l'ensemble formé du seul point *zéro*. Mais x peut être calculable et y non calculable; c'est la différence entre les deux cas.

([2]) *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III.

[c'est-à-dire non mesurables, avec le langage que j'adoptais alors ([1])]; et j'ai indiqué une application de ces principes à un ensemble de mesure nulle ([2]). Lorsque M. Lebesgue a donné sa définition, il a eu soin de faire observer que tout ensemble mesurable E était compris dans un ensemble bien défini E_1 (*mesurable* B, dans le langage de M. Lebesgue) et comprenait un ensemble bien défini E_2, les ensembles E_1 et E_2 ayant même mesure. Ceci entraîne que la mesure de E est égale à la mesure commune de E_1 et de E_2; la mesure des ensembles mesurables se déduit donc de celle des ensembles bien définis, et la classe des ensembles, dont la mesure peut être déduite de mes définitions primitives, est identique à la classe des ensembles, dont la mesure peut être déduite des définitions de M. Lebesgue. Ce qui différencie la définition de M. Lebesgue de la mienne, ce n'est donc pas l'étendue de la catégorie des ensembles auxquels ces définitions s'appliquent (*voir* ci-dessous, Chap. I, § V), c'est le fait que M. Lebesgue indique une marche théorique pour obtenir la mesure d'un ensemble mesurable défini d'une manière quelconque; tandis que je m'étais occupé seulement d'arriver à la mesure de certains ensembles, en utilisant la définition de ces ensembles qui se présentait naturellement à l'occasion de mes recherches de théorie des fonctions. Je pense que si l'on se place au point de vue que j'ai exposé dans cette Introduction, la plus grande généralité ainsi obtenue par M. Lebesgue est plus apparente que réelle; la théorie de la mesure des ensembles, et aussi celle du calcul des intégrales définies, me paraît pouvoir être exposée d'une manière plus simple et plus élémentaire et, en même temps, aussi réellement générale, en suivant la marche que j'avais primitivement adoptée. C'est le mode d'exposition que je suivrai; il me conduirait

---

([1]) « Si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1 de mesure α, nous pouvons dire que la mesure de E est supérieure à α, sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E, nous dirons que la mesure de E est inférieure à α. Les mots *supérieure* et *inférieure* n'excluent d'ailleurs pas l'égalité » (*Op. cit.*, p. 48).

([2]) « L'ensemble des points de divergence a pour mesure zéro, nous ne sommes pas assurés que cet ensemble soit mesurable; en employant le langage de la page 48, nous devrions dire que la mesure est inférieure ou égale à zéro; mais la mesure n'est jamais négative » (*Op. cit.*, p. 67).

logiquement à passer sous silence les travaux de M. Lebesgue. Mais aucun lecteur ne s'y trompera; sans qu'il soit nécessaire que je redise ici toute l'estime scientifique que j'ai pour M. Lebesgue ([1]), il est évident, pour tous, que ses idées ont réagi sur les miennes et que, même si la définition de l'intégrale que je propose paraît plus simple et plus naturelle, c'est à lui que la Science restera redevable de quelques-uns des progrès les plus essentiels que la théorie des fonctions ait faits dans ces dix dernières années.

CHAPITRE I.

LA THÉORIE DE LA MESURE.

J'adopterai un mode d'exposition synthétique, en ne supposant connues que les parties classiques élémentaires de l'Analyse ([2]); je serai ainsi amené à revenir sur certaines propositions que j'ai déjà démontrées ou énoncées; mais j'en donnerai le plus souvent des démonstrations nouvelles et plus simples.

I. — **Le premier théorème fondamental.**

La théorie de la mesure est basée sur le théorème suivant, que nous appellerons premier théorème fondamental ([3]).

Si l'on a, sur un segment de droite, une infinité dénombrable d'intervalles, tels que tout point de la droite soit intérieur à au moins l'un d'eux, on peut choisir parmi eux un nombre limité d'in-

---

([1]) Voir mon article de la *Revue générale des Sciences*, t. XX, 1909, p. 315 : *La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions.*

([2]) Voir la Préface de mes *Leçons sur la théorie des fonctions.*

([3]) On a donné parfois à ce théorème le nom de théorème de Heine-Borel, en raison de son analogie avec la démonstration donnée par Heine du fait que la continuité est uniforme (*Journal de Crelle*, 1872). Heine n'est d'ailleurs pas le seul à avoir utilisé implicitement ce théorème, dans un cas particulier, longtemps avant qu'il ait été énoncé sous une forme générale. M. Lebesgue a utilisé fré-

tervalles ayant la même propriété. Soit ab le segment donné ; tout point x de ab est, par hypothèse, *intérieur* à un intervalle $a_n b_n$, c'est-à-dire est compris entre a_n et b_n sans coïncider avec ces points ; le point a coïncide avec l'extrémité a_i d'un, au moins, des segments $a_i b_i$ et le point b avec l'extrémité b_j d'un, au moins, des segments $a_j b_j$ (on suppose que les points a, a_n sont respectivement à gauche des points b, b_n).

Cela étant, choisissons parmi les intervalles $a_i b_i$, tels que a_i coïncide avec a, celui pour lequel l'indice i est le moins élevé ; soit $a_{n_1} b_{n_1}$; soit, de même, $a_{n_2} b_{n_2}$ l'intervalle d'indice minimum renfermant le point b_{n_1}, et généralement $a_{n_k} b_{n_k}$ l'intervalle d'indice minimum renfermant $b_{n_{k-1}}$. Je dis qu'on atteint le point b au bout d'un nombre fini d'opérations, c'est-à-dire qu'il existe un nombre fini k tel que b_{n_k} coïncide avec b. Car si les b_{n_k} étaient un nombre infini, ils admettraient un point limite b' (qui pourrait être b) ; à ce point b', correspond un intervalle $a_n b_n$, tel que a_n soit à gauche de b' et b_n à droite de b' (ou coïncidant avec b' si b' est b) ; les b_{n_k} seraient donc compris à partir d'une certaine valeur de k à l'intérieur de l'intervalle $a_n b_n$ et, à partir de ce moment, les n_k devraient nécessairement être pris inférieurs à n, c'est-à-dire seraient en nombre limité.

Il résulte évidemment du théorème fondamental que *s'il est possible d'enfermer tous les points d'un intervalle ab à l'intérieur d'intervalles $a_n b_n$, la longueur totale de ces intervalles est supérieure à la longueur de ab*. C'est cette conséquence du théorème fondamental qui est essentielle dans la théorie de la mesure des ensembles (¹). Si

---

quemment le théorème généralisé dans l'énoncé duquel on supprime le mot *dénombrable*. On a proposé de donner à ce théorème généralisé le nom de *théorème de Borel-Lebesgue*. Voir aux *Comptes rendus* (t. 144, 1907), les Notes de MM. Lebesgue et Schœnflies ; l'article de M. Zoretti dans l'*Encyclopédie française* et le livre de M. Paul Montel, *Sur les séries de polynomes*.

(¹) Si l'on admettait les définitions idéalistes, c'est-à-dire si l'on considérait comme donné un ensemble *non dénombrable* d'intervalles, on pourrait observer que la somme des longueurs de ces intervalles dépasse forcément ab, et que par suite, en ce cas, la conséquence est vraie sans que le théorème fondamental soit nécessaire. C'est ainsi que j'avais été conduit, ayant en vue cette conséquence, à introduire l'hypothèse de l'énumérabilité des intervalles dans l'énoncé du théorème fondamental (voir ma *Thèse*).

l'on observe qu'il suffit d'agrandir un intervalle d'une fraction aussi petite qu'on veut de sa longueur, pour que les extrémités de l'intervalle primitif soient intérieures (au sens étroit) à l'intervalle agrandi, on peut donner aussi l'énoncé suivant, parfois plus commode :

Si tout point d'un intervalle ab appartient à l'un au moins des intervalles $a_n b_n$, la somme des longueurs des $a_n b_n$ n'est pas inférieure à la longueur de ab.

Dans ce dernier énoncé, les extrémités d'un intervalle sont considérées comme appartenant à cet intervalle.

II. — La mesure des ensembles bien définis.

Lorsqu'un ensemble est formé d'un seul intervalle, sa mesure n'est pas autre chose que le rapport de sa longueur à la longueur choisie comme unité. Ce rapport est un nombre calculable, si les abscisses des extrémités de l'intervalle, évaluées avec l'unité choisie, sont elles-mêmes des nombres calculables (¹).

Par définition, *la mesure d'un ensemble formé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs est égale à la somme de leurs mesures.* Il résulte du théorème fondamental que, si tous les points de l'ensemble sont intérieurs à un intervalle *ab*, la série qui définit la mesure est convergente et a une somme au plus égale à la mesure de *ab*. Nous choisirons, pour *ab* (*intervalle fondamental*, renfermant tous les ensembles que nous considérons), l'intervalle o — 1, de mesure égale à l'unité.

Il résulte de la définition, et des propriétés élémentaires des séries doubles à termes positifs, que *la mesure d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs est égale à la somme de leurs mesures.*

(¹) On pourrait concevoir un intervalle défini d'une manière telle que sa mesure soit calculable, sans que les abscisses de ses extrémités le soient; il suffit de supposer que ces abscisses sont x_1 et $x_1 + x_2$, x_1 n'étant pas calculable et x_2 étant calculable. Nous exclurons ce cas.

Les deux points précédents subsistent, lorsque les points communs sont en infinité dénombrable.

La mesure n'a été définie jusqu'ici que pour les ensembles formés d'intervalles (en nombre fini ou infini); si un tel ensemble E a pour mesure α, l'ensemble complémentaire par rapport à $0-1$ (l'ensemble des points de $0-1$, qui n'appartiennent pas à E) aura, par définition, pour mesure $1-\alpha$. Plus généralement, si deux ensembles, dont la mesure a été définie, sont tels que tous les points du second appartiennent au premier, *leur différence*, c'est-à-dire l'ensemble des points du premier qui n'appartiennent pas au second *a pour mesure la différence des mesures*. La définition de la mesure d'une somme d'ensembles sans partie commune s'étend aux nouvelles mesures ainsi définies, et la définition de la mesure de la différence s'étend aussi à ces nouvelles mesures; on arrive ainsi à obtenir la mesure de tout ensemble *bien défini* par les procédés même au moyen desquels l'ensemble a pu être bien défini.

J'ai indiqué cette marche dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions;* comme j'avais surtout en vue les applications, je me suis contenté d'affirmer que le théorème fondamental, ou des procédés tout à fait analogues à ceux qu'on a employés pour démontrer ce théorème, permettent de justifier ces définitions en prouvant qu'elles ne sont jamais contradictoires entre elles. Mais j'ai omis toute démonstration, car la rédaction détaillée me paraissait devoir être longue et fastidieuse. Cette justification résulte indirectement des travaux de M. Lebesgue, publiés depuis, auxquels je pourrais renvoyer; mais il me semble préférable de développer complètement la théorie en restant au point de vue des définitions constructives; car c'est la forme sous laquelle j'ai été naturellement conduit à ces considérations, à propos de questions qui se sont posées dans mes recherches de théorie des fonctions (notamment dans ma *Thèse*) et c'est aussi la forme sous laquelle les questions se posent dans les applications. J'exposerai cette méthode *constructive* sous deux formes différentes, la première plus analytique et la seconde plus synthétique. La marche analytique est plus longue, mais me paraît être plus instructive; je vais tâcher de la résumer en conservant seulement les points essentiels.

Les deux opérations fondamentales, par lesquelles on construit des ensembles bien définis au moyen d'intervalles, consistent à faire la somme d'une infinité énumérable d'ensembles déjà définis (sans point commun) et à prendre la différence de deux ensembles (dont l'un contient l'autre). Ces opérations peuvent évidemment être répétées une infinité énumérable de fois; on peut, d'ailleurs, concevoir des opérations qui supposent qu'on ait effectué préalablement une infinité énumérable d'opérations préliminaires, et ainsi de suite. On sait que tous les processus de ce genre sont susceptibles d'une étude générale, qui a été faite pour la première fois par M. Georges Cantor, à l'occasion des dérivés successifs d'un ensemble donné, et qui conduit à la notion des nombres transfinis de la seconde classe. Un nombre transfini de la seconde classe n'est pas autre chose qu'une notation abrégée, pour indiquer l'ordre dans lequel doivent être effectuées une infinité énumérable d'opérations, comportant une infinité énumérable de passages à la limite successifs ou superposés. Par exemple, la notation ω^2 désigne une infinité d'opérations $U_{n,p}$ correspondant aux couples d'entiers positifs n et p, et effectuées dans un ordre tel que l'opération $u_{n',p'}$ précède l'opération $u_{n,p}$ dans le cas où $n' < n$ et aussi dans le cas où $n' = n, p' < p$; l'opération $u_{1,0}$, par exemple, suppose donc effectuées préalablement les opérations $u_{0,p}$ quel que soit p, et fait intervenir les résultats de cette infinité d'opérations.

On doit considérer un nombre transfini comme bien défini, lorsque l'on connaît d'une manière précise l'ordre des opérations correspondantes ; il est alors aisé d'indiquer une notation désignant ce nombre. Il est évident que l'ensemble des nombres transfinis qui peuvent être bien définis est dénombrable ; mais il n'est pas effectivement énumérable ; c'est une des formes du paradoxe du transfini, sur lequel je me suis expliqué ailleurs ([1]). On démontre habituellement que tout ensemble dénombrable bien ordonné définit un nombre transfini ; mais il est aisé de voir que la démonstration suppose l'ensemble effectivement énumérable ([2]); en d'autres termes, il faut connaître une correspondance effective entre les éléments de l'ensemble et les entiers positifs; si l'on remplace chaque élément de l'ensemble par l'entier

([1]) *Annales de l'École Normale*, 1908.

([2]) Voir, par exemple, Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues.*

correspondant, ceci revient à ranger les entiers positifs sous la forme d'un ensemble bien ordonné, semblable à l'ensemble considéré, c'est-à-dire que l'on suppose la connaissance effective de la description des opérations de passage à la limite successives qui correspondent au nombre transfini, c'est-à-dire précisément la connaissance effective de ce nombre transfini.

Cette digression sur les nombres transfinis n'avait point d'autre but que de délimiter exactement la portée de la méthode employée, au point de vue adopté dans ce Mémoire; cette méthode s'étend évidemment à *tous* les nombres transfinis de la seconde classe, pour ceux qui attachent un sens à ces mots; d'autre part, dans l'enseignement élémentaire, l'exposition peut en être simplifiée en se bornant aux opérations d'ordre inférieur à ω^ω (ce qui correspond, dans la théorie des fonctions, aux fonctions de classe finie de M. Baire); cette limitation suffit dans la plupart des applications.

Le problème consiste maintenant, un ensemble bien défini étant construit au moyen d'intervalles par une série d'opérations correspondant à un nombre transfini déterminé, à évaluer la mesure de cet ensemble bien défini à partir de sa construction, et à montrer qu'on ne peut être conduit ainsi à aucune contradiction.

On est ainsi amené à faire la somme d'un certain nombre de séries ayant pour termes les longueurs des intervalles, puis de nouvelles séries ayant pour termes les sommes précédentes ou certaines de leurs différences deux à deux, et ainsi de suite (la notation du nombre transfini précisant ce que veut dire *ainsi de suite*). Bien entendu, les extrémités des intervalles sont définies par des nombres calculables; pour que les opérations qui donnent la mesure puissent être effectuées, il faut que toutes les séries qui interviennent soient convergentes [1]. De plus, pour que la définition de la mesure ne soit pas contradictoire, il est évidemment nécessaire qu'on soit assuré de trouver deux nombres égaux, si l'on définit la mesure d'un même ensemble E par

[1] Il serait même nécessaire que la *rapidité* de la convergence en fût connue d'une manière précise; nous avons déjà observé que cette exigence devrait être formulée à propos de tous les calculs par séries convergentes; dans la pratique, on se contente habituellement de constater la convergence empiriquement.

deux procédés différents. Or, il résulte de la définition adoptée que, si un ensemble E a pour mesure α, l'ensemble complémentaire (par rapport à $0-1$) a pour mesure $1-\alpha$; si donc on était amené à attribuer à un ensemble E, par deux procédés différents, deux mesures différentes α et β, on serait amené à attribuer à l'ensemble $0-1$ les mesures $1-\alpha+\beta$ et $1-\beta+\alpha$, nombres dont l'un est supérieur à l'unité [1]. Il suffit donc de faire voir que la définition de la mesure ne peut pas conduire à attribuer à l'ensemble des points compris entre 0 et 1 une mesure supérieure à *un;* la démonstration de ce fait comprendra celle de la convergence des séries à termes positifs qui interviennent dans la définition.

Considérons donc un processus arbitraire, mais bien déterminé, conduisant à la mesure de l'ensemble $(0-1)$ par une série d'opérations correspondant à un nombre transfini donné, c'est-à-dire comportant une infinité dénombrable de passages à la limite effectués dans un ordre connu, ces passages à la limite sont donc effectivement énumérables; les opérations comportent, en outre, des soustractions qui ne sont pas des passages à la limite, mais qui sont en quelque sorte enchevêtrées d'une manière arbitraire (mais connue aussi) au milieu de ces passages à la limite. Si nous voulons effectuer le calcul de la mesure avec une approximation donnée, c'est-à-dire en commettant une erreur inférieure à un nombre donné ε, nous sommes conduits à nous donner une série à termes positifs de somme ε

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

et à effectuer les opérations de passage à la limite (en infinité énumérable) avec des erreurs respectivement inférieures à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$; c'est cette marche que nous allons suivre pas à pas.

Nous rencontrons d'abord des ensembles formés par la réunion d'une infinité énumérable d'intervalles sans partie commune; la somme des longueurs d'un nombre fini d'entre eux est évidemment

(1) Les deux procédés de construction qui conduisent aux mesures α et β correspondent, en général, à deux nombres transfinis différents, dont l'un est supérieur à l'autre. Le procédé de construction qui conduirait à attribuer à $0-1$ une mesure supérieure à l'unité correspond au plus grand de ces deux nombres.

inférieure à l'unité; ils forment donc une série convergente, qu'on calculera à ε_j près, en ne conservant qu'un nombre fini de termes. Si l'on prend ensuite la différence des mesures de deux ensembles, dont les mesures sont connues respectivement à ε_j près et à ε_k près, l'erreur sur la différence sera au plus en valeur absolue $\varepsilon_j + \varepsilon_k$.

Avant d'effectuer des opérations sur les ensembles ainsi obtenus par une première application de la méthode de construction, il est utile d'examiner d'un peu plus près la structure de ces ensembles. Considérons d'abord ceux qui sont obtenus par des sommations (sans soustraction).

Chacun d'eux peut être considéré comme formé par la réunion de deux parties : des intervalles en nombre fini (*partie fondamentale*); des intervalles en nombre infini, dont la somme des longueurs est inférieure à ε_j (*partie complémentaire*). Pour faire la différence de deux tels ensembles dont l'un contient l'autre, on est conduit à faire d'abord la différence des deux parties fondamentales. Il pourra se faire que la partie à retrancher, dont tous les points appartiennent par hypothèse à l'ensemble dont on retranche, n'appartienne pas toute entière à la partie fondamentale de cet ensemble; mais les points qui n'appartiennent pas à cette partie fondamentale appartiennent à la partie complémentaire; ils constituent un nombre fini d'intervalles de longueur inférieure à ε_j.

On est ainsi conduit à considérer, comme *la partie fondamentale de l'ensemble-différence*, l'ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles qu'on obtient en faisant la différence des deux parties fondamentales, sans tenir compte, au cas où elles existeraient, des portions de la partie soustraite qui seraient à l'extérieur de la partie dont on soustrait. L'ensemble-différence est donc formé d'une partie fondamentale comprenant un nombre fini d'intervalles et d'une partie complémentaire de caractère nouveau, car elle comprend des intervalles additifs et des intervalles soustractifs; j'insiste un peu sur cette notion nouvelle, car elle est essentielle. Je considère la *somme* des parties complémentaires des ensembles dont on fait la différence (en ne comptant qu'une fois les parties communes), c'est un ensemble dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $\varepsilon_j + \varepsilon_k$. L'ensemble-différence peut alors être défini comme il suit :

il se compose de la partie fondamentale à laquelle on ajoute ou de laquelle on retranche, d'une manière qu'il ne sera pas nécessaire de préciser davantage, des points appartenant tous à cette partie complémentaire inférieure à $\varepsilon_j + \varepsilon_k$.

Considérons maintenant une infinité d'ensembles ainsi composés chacun d'une partie fondamentale (comprenant un nombre fini d'intervalles) et d'une partie complémentaire $\Sigma \varepsilon_j$ dont les points sont additifs ou soustractifs; les ε_j figurant dans les diverses parties complémentaires sont, bien entendu, tous distincts (1); je dis tout d'abord que, si l'on considère une infinité de tels ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun, la somme des longueurs de leurs parties fondamentales est une série convergente. Ces parties fondamentales peuvent avoir des parties communes; mais ces parties communes sont nécessairement intérieures (2) aux ε_j; la somme des longueurs d'un nombre fini des parties fondamentales est donc au plus égale à l'unité, augmentée de la somme des ε_j; la série est par suite convergente; nous avons, par hypothèse, fait correspondre à l'opération de passage à la limite qu'est la sommation de cette série convergente, un ε, soit ε_k; nous négligerons le reste de cette série convergente en prenant un nombre de termes tels que ce reste soit inférieur à ε_k; et la partie fondamentale de l'ensemble obtenu sera, par définition, la réunion des parties fondamentales, en nombre fini, qui subsistent lorsqu'on néglige ce reste; les autres parties fondamentales seront jointes à l'ensemble des parties complémentaires.

Nous obtenons donc, par un nouveau passage à la limite, un ensemble de même structure que ceux dont nous sommes partis; il est formé d'une partie fondamentale, comprenant un nombre fini d'intervalles, et d'une partie complémentaire consistant en intervalles com-

(1) Il n'est pas interdit de faire figurer une infinité de fois un même ensemble dans la définition; mais si un même passage à la limite est ainsi répété une infinité de fois, chacune de ces opérations occupe un rang distinct parmi l'infinité énumérable de toutes les opérations considérées, et il lui correspond par suite, chaque fois, un ε_j d'indice différent.

(2) Il peut même arriver que les parties fondamentales aient en commun plusieurs fois un même intervalle; il doit alors appartenir à plusieurs des ε distincts.

plémentaires $\Sigma\varepsilon_j$, dont les points sont additifs ou soustractifs. Il n'est pas besoin d'insister : la répétition des mêmes opérations conduira toujours à des résultats analogues ; on verra simplement apparaître, à chaque nouveau passage à la limite, un nouveau terme dans $\Sigma\varepsilon_j$; mais cette somme sera toujours inférieure à ε. En définitive, l'ensemble que l'on considère (et qui est actuellement l'ensemble $0-1$) est formé d'une partie fondamentale et d'une partie complémentaire inférieure à ε. Du moment que tous les points de l'ensemble $0-1$ sont intérieurs, soit aux intervalles de la partie fondamentale, soit aux intervalles de la partie complémentaire, la somme des longueurs de tous ces intervalles est, d'après le théorème fondamental, supérieure à 1 ; donc la mesure de la partie fondamentale est comprise entre $1-\varepsilon$ et 1.

Mais cette mesure peut aussi être obtenue de proche en proche par les opérations au moyen desquelles on a construit l'ensemble ; la seule difficulté provient de ce que, lorsqu'on réunit des ensembles sans points communs, il peut arriver que leurs parties fondamentales aient des parties communes, si ces parties communes appartiennent par ailleurs à des intervalles d'exclusion négatifs. Mais il suffit, pour écarter cette difficulté, d'observer que les portions parasites ainsi introduites étant certains intervalles complémentaires, leur somme algébrique (car elles peuvent devenir négatives dans les opérations de soustraction) est, au plus, égale à $\Sigma\varepsilon_j$, c'est-à-dire à ε. Le nombre auquel on est conduit, pour la mesure, diffère donc de moins de ε de la mesure de la partie fondamentale : nous avons vu que cette dernière mesure est comprise entre $1-\varepsilon$ et 1 ; la mesure de l'ensemble $0-1$, par le procédé considéré, est donc comprise entre $1-2\varepsilon$ et $1+\varepsilon$; mais cette mesure est un nombre fixe et ε est arbitraire ; ce nombre fixe est donc rigoureusement égal à 1, ce que nous voulions démontrer.

J'ai tenu à exposer d'abord la marche analytique qui me paraît la plus naturelle, et qui a l'avantage de devenir extrêmement simple et élémentaire lorsqu'on se borne à considérer les nombres transfinis inférieurs à ω^ω. L'exposition se trouve en ce cas très simplifiée et met nettement en évidence la structure des ensembles formés.

Lorsqu'on ne limite pas les nombres transfinis qu'on introduit, l'exposition synthétique que je vais maintenant indiquer est plus brève ; la méthode est la même et consiste toujours à déduire les ensembles nouveaux d'ensembles déja définis; seulement, au lieu de partir des intervalles et de suivre la construction de proche en proche, on suppose que la construction a été faite jusqu'à un certain point et possède certaines propriétés, et l'on démontre que ces propriétés subsistent lorsqu'on avance d'un pas nouveau.

Nous donnerons le nom de *corps ouvert* d'ensembles à une infinité d'ensembles A ayant les propriétés suivantes :

1° Chaque ensemble A se déduit d'autres ensembles A au moyen des opérations fondamentales (addition d'une infinité énumérable d'ensembles A sans point commun; différence de deux ensembles A dont l'un contient l'autre); on peut ainsi, de proche en proche, ramener chaque ensemble A à être défini à partir des ensembles élémentaires (intervalles).

2° Quel que soit le nombre positif ε, chaque ensemble A peut être regardé comme formé d'une partie fondamentale (nombre fini d'intervalles), à des ensembles près positifs ou négatifs enfermés dans des intervalles d'étendue totale inférieure à ε.

3° On peut faire correspondre à chaque ensemble A un nombre, qu'on appelle *sa mesure*, et qui se déduit des mesures des intervalles par les mêmes opérations constructives au moyen desquelles l'ensemble A se déduit des intervalles (la mesure d'un intervalle est égale à sa longueur). La mesure de la partie fondamentale d'un ensemble A tend vers la mesure de A lorsque ε tend vers zéro. Cette propriété entraîne comme conséquence que, si l'on peut obtenir A de plusieurs manières différentes à partir des intervalles, la valeur de la mesure déduite de ces diverses constructions est la même.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Si l'on adjoint à un corps ouvert la différence de deux ensembles A *de ce corps dont l'un contient l'autre, ou la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles* A *du corps (sans parties communes), on obtient un autre corps ouvert* (1) *ayant les mêmes propriétés,*

(1) Le *paradoxe du transfini* consiste précisément en ce que, par la répétition indéfinie de ce procédé, on n'obtiendra jamais un corps *fermé*, c'est-à-dire ne pouvant plus être étendu par la répétition des mêmes opérations. Pour les

ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que les nouveaux ensembles obtenus sont aussi des ensembles A.

Il est évident que la différence de deux ensembles A est un ensemble A; je dis qu'il en est de même de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, sans parties communes. Il suffira, en effet, de faire correspondre à chaque A_n un nombre ε_n tel que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente. Soit E_n la partie fondamentale de A_n; la série des mesures des E_n est convergente (car les parties communes aux E_n sont des intervalles dont la somme est, au plus, $\Sigma\varepsilon_n$); on pourra donc choisir n tel que la somme des mesures des E_{n+k} ($k > 0$) soit inférieure à ε. La réunion de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ forme un ensemble analogue E (formé d'un nombre fini d'intervalles); l'ensemble A, réunion des $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, ne diffère donc de E que par des ensembles complémentaires enfermés dans des intervalles au plus égaux à $\varepsilon + \Sigma\varepsilon_n$.

Je dis, de plus, que si l'on a démontré que la mesure de la partie fondamentale de A_n est aussi voisine qu'on veut de la mesure de A_n, la même propriété subsiste pour A. En effet, la mesure de A est, par définition, la somme des mesures des A_n sans parties communes; elle diffère donc aussi peu qu'on veut de la somme des mesures des E_n; mais cette dernière somme ne diffère de la mesure de E que de $\varepsilon + \Sigma\varepsilon_n$, au plus; la différence entre la mesure de E et la mesure de A peut donc être rendue aussi petite qu'on veut. La mesure de A est, par suite, indépendante du procédé particulier par lequel A a été obtenu; elle serait la même, si A était construit au moyen d'autres ensembles du corps ouvert primitif.

---

raisons que j'ai déjà exposées ailleurs (*Annales de l'École Normale*, 1908) et sur lesquelles je ne reviens pas, la conception d'un tel *corps fermé*, bien que n'étant pas contradictoire en soi, ne me paraît pas être une véritable conception mathématique, parce qu'il n'est pas possible de décrire exactement, par un nombre fini de mots, la construction d'un tel corps. D'autre part, on n'aura jamais besoin, dans aucune application, que d'un des corps ouverts que nous avons définis. Pour les mathématiciens qui admettent l'existence de *tous* les nombres transfinis de seconde classe, les considérations du texte permettent, par l'application transfinie du même procédé, d'obtenir *un corps fermé* ayant les mêmes propriétés que les *corps ouverts*.

III. — Le second théorème fondamental.

Les considérations précédentes s'étendent, sans difficulté, au cas de n dimensions ([1]). Je vais les énoncer en précisant les définitions.

J'appelle *ensemble élémentaire* l'ensemble des points dont les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifient les inégalités

$$a_1 \leqq x_1 \leqq b_1; \qquad \ldots, \qquad a_n \leqq x_n \leqq b_n.$$

Sa mesure est le produit

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n),$$

la réunion d'un nombre fini d'*ensembles élémentaires* constitue un *domaine simple.*

Les ensembles *bien définis* sont les ensembles qui peuvent être obtenus, à partir des ensembles élémentaires, au moyen des deux opérations fondamentales suivantes indéfiniment répétées :

1° Faire la différence des deux ensembles A et B déjà définis tels que tout point de B appartienne à A

$$(D) \qquad\qquad A - B;$$

2° Faire la somme d'une infinité d'ensembles déjà définis : A_1, A_2, ..., A_n, ..., sans parties communes

$$(S) \qquad\qquad A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant, que nous appellerons *second théorème fondamental :*

Étant donnés, dans un domaine borné, un ensemble bien défini quelconque E *et un nombre arbitraire* ε, *on peut trouver un domaine simple* D *tel que l'ensemble des points de* E, *qui n'appartiennent pas à* D, *et l'ensemble des points de* D *qui n'appartiennent pas à* E *puissent être enfermés dans une infinité dénombrable d'ensembles élémentaires, dont la somme des mesures soit inférieure à* ε.

([1]) L'extension au cas d'un nombre infini de dimensions est aisée avec les hypothèses de convergence bien connues.

Plus brièvement, *tout ensemble* E *équivaut, à* ε *près, à un domaine simple* D.

Il est quelquefois commode d'adjoindre aux opérations (D) et (S) l'opération (P), qui consiste à prendre la partie commune aux ensembles A et B

$$(P) \qquad (A, B).$$

Si l'on part du *corps* constitué par l'ensemble des intervalles (qu'on peut supposer à extrémités calculables, pour préciser), il est clair que le résultat de l'opération (P) effectuée sur deux éléments A et B du corps, c'est-à-dire sur deux intervalles, peut être obtenu en appliquant les opérations (D) et (S) à d'autres éléments du corps. Je dis que si cette propriété est vraie pour un corps, elle subsiste lorqu'on étend ce corps en lui adjoignant les résultats des opérations (D) ou (S) effectuées sur ces éléments. Cela est à peu près évident en ce qui concerne (D); détaillons le calcul pour (S); soit

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$
$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_p + \ldots.$$

On a évidemment

$$(A, B) = \Sigma\Sigma(A_n, B_p).$$

On peut donc adjoindre l'opération (P) aux opérations (D) et (S); on obtiendra toujours des ensembles *bien définis;* mais la mesure de ces ensembles résultera moins directement de leur définition.

IV. — Les ensembles à points multiples.

On sait que si l'on étend à un contour plan fermé C l'intégrale curviligne

$$J = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx,$$

on obtient, si C est un contour simple, la valeur, au signe près, de l'aire intérieure à C. Si le contour C a des boucles, la valeur de l'intégrale J est, en général,

$$J = nS_n + (n-1)S_{n-1} + \ldots + S_1 - S'_1 - 2S'_2 - \ldots - pS'_p,$$

$S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1, S'_1, \ldots, S'_p$ étant les sommes des aires de certains des domaines déterminés dans le plan par la courbe C. Chacun des points intérieurs à S_n est ainsi compté n fois.

On est ainsi naturellement conduit à envisager des ensembles, dont chaque point est affecté d'un nombre entier, représentant le nombre de fois que ce point figure dans l'ensemble. Nous nous bornerons au cas où ces nombres entiers sont tous positifs et nous les supposerons de plus, tout d'abord, inférieurs à un nombre fixe N.

Je signale en passant qu'on pourrait, en passant du cas des entiers au cas des nombres commensurables, puis incommensurables, déduire de ceci une théorie élémentaire de l'intégrale définie, au sens de M. Lebesgue; mais je ne m'y attarderai pas. Je vais, d'ailleurs, me borner, pour simplifier le langage, aux ensembles linéaires intérieurs à $0-1$.

Un tel ensemble sera obtenu, comme précédemment, par la réunion d'intervalles; mais les parties communes à deux ou plusieurs intervalles seront considérées comme comptant deux ou plusieurs fois. Nous continuerons à utiliser les opérations (D) et (S); pour ne pas introduire de nombres négatifs, nous ne considérerons que la différence $A - B$ d'ensembles A et B tels que tout point de B figure dans A à un degré de multiplicité au moins égal à celui qu'il a dans B; pour la somme, nous supposerons qu'il peut y avoir des parties communes, le degré de multiplicité de chaque point restant cependant inférieur à N.

Il est manifeste que l'ensemble des points de degré de multiplicité k est *bien défini;* si l'on désigne par σ_k sa mesure, la mesure de l'ensemble considéré est, par définition,

$$\sigma = \sum_1^N k\sigma_k.$$

Or, on a évidemment

$$\Sigma\sigma_k \leqq 1;$$

Il en résulte donc

$$\sigma \leqq N.$$

Si l'on avait $\Sigma\,\sigma_k < s$, il en résulterait $\sigma \leqq Ns$.

Cette inégalité conduit très aisément à un théorème que j'ai énoncé, il y a plusieurs années ([1]), et dont je n'avais pas encore publié la démonstration.

Si l'on a dans l'intervalle o — 1 *une infinité dénombrable d'ensembles* (bien définis) E_n *tels que la mesure de chacun d'eux soit supérieure ou égale à* σ, *l'ensemble* E *des points communs à une infinité d'entre eux a une mesure qui n'est pas inférieure à* σ.

L'ensemble E est évidemment bien défini; nous allons montrer que l'hypothèse où sa mesure σ' serait inférieure à σ conduit à une contradiction. Soient, en effet, e_0 l'ensemble des points qui n'appartiennent à aucun des E_i, e_k l'ensemble des points qui appartiennent à k d'entre eux (et n'appartiennent pas à $k+1$); il est clair que tout point de o — 1 appartient à l'un et à un seul des ensembles E, $e_0, e_1, \ldots, e_k, \ldots$; si donc on désigne par σ_k la mesure de e_k, on a

$$\sigma' + \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_k + \ldots = 1,$$

la série étant forcément convergente.

Le nombre σ' étant, par hypothèse, inférieur à σ, on peut choisir n assez grand pour qu'on ait

$$\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots < \frac{\sigma - \sigma'}{2},$$

et il en résulte

$$\sigma' + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots < \sigma - \frac{\sigma - \sigma'}{2}.$$

Ceci posé, considérons l'ensemble à points multiples $\mathcal{E}$ formé par la réunion de $E_1, E_2, \ldots, E_N$; sa mesure est supérieure ou égale à $N\sigma$, puisque la mesure de chacun des E_i est supérieure ou égale à σ. Nous allons évaluer cette mesure par une autre voie. Il est clair que l'ordre de multiplicité d'un point de $\mathcal{E}$ ne peut dépasser N et que cet ordre est, d'autre part, au plus égal à l'ordre de multiplicité du même point dans l'ensemble de *tous* les ensembles E_i (ce dernier ordre pouvant être infini). On aura donc une limite supérieure de la mesure de $\mathcal{E}$, en la calculant comme si tous les points de e_k avaient dans $\mathcal{E}$ un ordre de multiplicité égal à k lorsque k est inférieur à N, et égal à N lorsque

([1]) *Comptes rendus*, 7 décembre 1903.

k est égal ou supérieur à N, les points de E (d'ordre infini) étant aussi comptés comme d'ordre N dans $\mathcal{E}$. On trouve ainsi que la mesure de $\mathcal{E}$ est au plus égale à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + (N-1)\sigma_{N-1} + N(\sigma_N + \sigma_{N+1} + \ldots + \sigma');$$

mais, si N est supérieur à n, ceci est inférieur à

$$n(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n) + N(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \ldots + \sigma'),$$

c'est-à-dire à

$$n + N\left(\sigma - \frac{\sigma - \sigma'}{2}\right).$$

Or, n et σ étant fixes, on peut toujours prendre N assez grand pour que cette dernière expression soit inférieure à $N\sigma$; l'hypothèse $\sigma' < \sigma$ conduit donc à une contradiction.

Ce théorème conduit fort simplement à une propriété des séries, qui a dû être souvent rencontrée par ceux qui se sont occupés de ces questions, et dont j'ai indiqué une application à la théorie des fonctions, dans la Note que je viens de citer.

Soient une série convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1, et ε_n un nombre positif quelconque. Étant donné un nombre positif $\sigma < 1$, on peut évidemment déterminer un ensemble E_n, de mesure supérieure à σ et tel que, pour tous les points de E_n, il existe un nombre N, tel que les restes de la série de rang égal ou supérieur à N soient inférieurs à ε_n pour tous les points de E_n. En effet, à tout point x correspond un nombre ν, tel que les restes de rang égal ou supérieur à ν soient inférieurs à ε_n; l'ensemble des valeurs de x, correspondant à un nombre donné ν, forment un ensemble e_ν; la somme des mesures de ces ensembles est convergente et égale à 1; on peut donc prendre N assez grand pour que le reste de cette série convergente soit inférieur à $1 - \sigma$.

Ceci étant, donnons-nous des nombres ε_n tendant vers 0; à chacun d'eux correspond un ensemble E_n de mesure supérieure à σ; l'ensemble E des points communs à une infinité des E_n a une mesure supérieure à σ; sur l'ensemble E, la série est évidemment uniformément convergente; c'est la proposition dont je voulais parler. Nous en rencontrerons bientôt, par une autre voie encore plus simple, un cas particulier, dont l'importance me paraît surpasser celle de la proposition générale.

V. — Les ensembles de mesure nulle.

D'après ce qui précède, un ensemble bien défini est de mesure nulle, lorsqu'il peut être enfermé, quelle que soit ε, à l'intérieur d'ensembles élémentaires de mesure totale inférieure à ε. Inversement, tout ensemble qui a cette propriété fait partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle ; on ne peut donc lui attribuer une mesure autre que zéro. Cette remarque montre que, si l'on admet qu'il soit possible de considérer des ensembles autres que les ensembles bien définis, il peut exister des ensembles qui soient mesurables, en vertu de mes définitions, sans être bien définis; ce sont les ensembles qu'on obtient en ajoutant à un ensemble bien défini (de mesure non nulle) une portion *arbitraire* d'un ensemble bien défini de mesure nulle. La classe d'ensembles mesurables ainsi définie est équivalente à la classe d'ensembles que M. Lebesgue appelle *mesurables;* cette remarque a déjà été faite par M. Lebesgue; si je la rappelle, c'est pour éviter une confusion dont je suis responsable, car elle est la conséquence d'un langage mal choisi; j'avais appelé *mesurables*, dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, les ensembles que j'appelle maintenant *bien définis;* M. Lebesgue a donné à ces ensembles le nom de *mesurables* B et l'on a cru parfois que je n'avais pas défini la mesure pour les ensembles que je n'appelais pas mesurables, bien que j'indique dans ce même Ouvrage que, si un ensemble est complètement intérieur à un ensemble mesurable, on devra regarder sa mesure comme inférieure ou égale à celle de l'ensemble mesurable, sans s'inquiéter s'il est mesurable ou non. La mesure ainsi définie sera connue avec précision dans les cas où l'on pourra démontrer à la fois qu'elle est supérieure ou égale et qu'elle est inférieure ou égale à un même nombre; c'est, en particulier, le cas pour les ensembles faisant partie d'un ensemble bien défini de mesure nulle; c'est aussi le cas pour tous les ensembles mesurables de M. Lebesgue. Mais je n'insiste pas sur ce point, tenant à me borner aux ensembles bien définis.

Tout ensemble linéaire de mesure nulle est intérieur à l'un des ensembles de mesure nulle, que j'ai nommés réguliers et qui sont définis au moyen d'une infinité dénombrable de points fondamentaux $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. On définit d'abord un ensemble E_k au moyen d'intervalles entourant chacun des points fondamentaux et dont la somme σ_k est convergente; lorsque k augmente, l'intervalle attaché à un point fondamental quelconque A_n tend régulièrement vers zéro, sans jamais croître; lorsque σ_k tend vers zéro, l'ensemble E_k a pour limite, par définition, un ensemble régulier de mesure nulle. Je n'insisterai pas sur cette théorie, sur laquelle j'ai donné des indications suffisantes dans une Note des *Comptes rendus* (¹); l'extension de la théorie de la similitude aux ensembles à plusieurs dimensions appellerait d'ailleurs de nouvelles recherches. Il serait aussi du plus haut intérêt d'approfondir, sans complications inutiles, la théorie des ensembles à plusieurs dimensions, dont les projections sont de mesure nulle, par exemple des ensembles situés dans l'espace, dont les projections sur un plan quelconque sont de mesure nulle. Enfin, je puis signaler comme se rattachant au même ordre d'idées, la classification des ensembles de mesure nulle d'après la loi de décroissance asymptotique des intervalles au moyen desquels on peut les définir (²). Cette classification me paraît devoir être importante dans beaucoup de questions; mais je ne l'utiliserai pas dans ce Mémoire.

CHAPITRE II.

LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE.

Je me bornerai, bien entendu, à la considération des fonctions calculables, avec une restriction cependant, qui est capitale : si une fonction coïncide avec une fonction calculable presque partout, c'est-

(¹) *Comptes rendus*, 6 mars 1911.

(²) *Comptes rendus*, 26 février 1912 : *La classification des ensembles de mesure nulle et la théorie des fonctions monogènes uniformes.*

à-dire en tous les points qui n'appartiennent pas à un certain ensemble de mesure nulle, tout se passera, au point de vue de ses propriétés moyennes, comme si elle était calculable partout. En fait, nous constaterons qu'on peut ramener l'intégration des fonctions calculables à celle des polynomes, qui sont évidemment les plus simples des fonctions calculables.

I. — La définition des fonctions bornées et le troisième théorème fondamental.

Pour définir une fonction, on la considère généralement comme la limite d'une suite de fonctions connues; si l'on part des polynomes, considérés comme connus, on définira ainsi de proche en proche des fonctions de plus en plus compliquées. Un théorème de Weierstrass, dont nous n'aurons pas besoin, apprend que toute fonction continue peut être regardée comme limite vers laquelle tend *uniformément* une suite convergente de polynomes (¹); ceci prouverait, s'il en était besoin, que les fonctions continues et les limites de fonctions continues et les limites de ces limites, etc. rentrent comme cas particuliers dans l'ensemble des fonctions que nous considérons. Mais il est évident, sans qu'il soit besoin du théorème de Weierstrass, que cet ensemble comprend toutes les fonctions définissables analytiquement, puisque tout procédé de définition analytique se ramène à un processus limite portant sur des fonctions antérieurement définies; et l'on doit remonter ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive à des fonctions connues; or, les fonctions élémentaires, définies directement (comme les fonctions circulaires par exemple), sont développables en séries entières et sont, par suite, des limites de polynomes.

Considérons donc une fonction $f(x, y, z)$, que nous supposons bornée dans un domaine D; nous dirons que *cette fonction est asymptotiquement équivalente à des polynomes, si à tout groupe de nombres positifs* ε *et* α *on peut faire correspondre un polynome*

$$P(x, y, z; \varepsilon, \alpha),$$

(¹) Voir mes *Leçons sur les fonctions des variables réelles*, Ch. IV.

tel que l'ensemble des points où la valeur absolue de la différence $f - P$ est supérieure à ε, soit de mesure inférieure à α, c'est-à-dire soit intérieur à une infinité dénombrable d'ensembles élémentaires d'étendue totale inférieure à α. Si de plus la fonction est bornée, nous supposerons les polynomes bornés dans leur ensemble.

Le théorème fondamental de la théorie des fonctions bornées est alors le suivant :

TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL. — *La limite supposée bornée d'une suite de fonctions bornées asymptotiquement équivalentes à des polynomes est elle-même asymptotiquement équivalente à des polynomes.* En d'autres termes, *toute fonction* [*(bornée)* (1)] *définissable analytiquement est asymptotiquement équivalente à des polynomes.* Soient, en effet, $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ des fonctions données; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ des nombres positifs, dont la somme $\alpha = \Sigma\alpha_n$ est suffisamment petite; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ des nombres positifs décroissants et tendant vers zéro. Nous supposons que les fonctions f_n tendent vers une limite f en tout point de l'intervalle dans lequel elles sont définies. La fonction f étant bornée, on peut supposer que les fonctions f_n sont bornées dans leur ensemble. Sinon, on remplacerait par o les valeurs que prend chacune d'elles, lorsqu'elles sont comprises en dehors de l'intervalle $-M-\varepsilon$, $M+\varepsilon$, si f est compris entre $-M$, $+M$; cette opération ne peut, en effet, modifier leur limite; nous raisonnerons sur les nouvelles fonctions f_n qui sont aussi asymptotiquement équivalentes à des polynomes.

A la fonction f_n et aux nombres ε_n et α_n correspond un polynome P_n, tel que la valeur absolue de $f_n - P_n$ soit inférieure à ε_n, sauf peut-être dans un ensemble de mesure α_n. Si donc, on exclut du domaine donné D l'ensemble de mesure au plus égale à α formé par la réunion de ces ensembles de mesure au plus égale à α_n, dans le domaine restant D', la limite des P_n existera et sera égale à la limite des f_n.

Les polynomes P_n tendant vers une limite, à tout nombre η et à tout point $M(x, y, z)$ de D' correspond un nombre $N(\eta, M)$, tel que

(1) Voir, plus bas, § IV, comment les fonctions finies non bornées peuvent être définies comme limites de fonctions bornées.

les relations

$$n \geqq \mathrm{N}, \qquad n' \geqq \mathrm{N}$$

entraînent

$$(1) \qquad |\mathrm{P}_n(x, y, z) - \mathrm{P}_{n'}(x, y, z)| < \eta.$$

Lorsque η est donné, il correspondra en général des nombres N différents aux différents points M de $\mathrm{D}_,$, mais à tout point M correspond une valeur finie de N.

Je désigne l'ensemble $\Delta(\mathrm{N}')$ des points M pour lesquels N peut être pris inférieur à N', cet ensemble diffère aussi peu qu'on veut de D', lorsque N' augmente indéfiniment; s'il n'en était pas ainsi, c'est-à-dire si $\Delta(\mathrm{N}')$ n'avait pas pour limite D', lorsque N' augmente indéfiniment, il y aurait dans D' des points n'appartenant à aucun des $\Delta(\mathrm{N}')$, ce qui est absurde. On peut donc, étant donné un nombre arbitrairement petit β, faire correspondre à η un nombre N', tel que $\Delta(\mathrm{N}')$ diffère de D' de moins de β.

Si nous nous donnons les nombres arbitrairement petits $\alpha + \beta$ et $\eta + \varepsilon_1$, ce qui précède nous montre que le polynome $\mathrm{P}_{\mathrm{N}}(x, y, z)$ diffère de moins de $\eta + \varepsilon_1$ de la fonction f, limite de f_n, sauf peut-être dans un ensemble de mesure au plus égale à $\alpha + \beta$. La fonction limite des f_n est donc asymptotiquement équivalente à des polynomes [1].

Remarque. — Chaque inégalité (1) définit un domaine algébrique (un nombre limité d'intervalles dans le cas d'une variable), qui peut être remplacé, si l'on veut, par un domaine simple avec une erreur aussi petite qu'on veut. Les ensembles, dont la mesure intervient dans la démonstration, s'obtiennent au moyen de ces domaines simples; le calcul de leurs mesures ne présente aucune difficulté.

---

[1] On peut remarquer que, si l'on n'imposait pas aux polynomes la condition d'être bornés dans leur ensemble, la démonstration exigerait seulement que la limite existe, c'est-à-dire que f soit finie, mais non nécessairement que f soit bornée; elle subsisterait pourvu que l'ensemble des points singuliers, où les f_n seraient infinis et où la limite n'existerait pas, soit de mesure nulle.

II. — La définition de l'intégrale des fonctions bornées.

Le troisième théorème fondamental permet de définir d'une manière très simple l'intégrale des fonctions bornées, cette définition fournissant en même temps un procédé de calcul effectif. La marche suivie est exactement la même que pour la mesure des ensembles (Chap. I); les détails dans lesquels nous sommes entrés à cette occasion nous permettront d'être ici plus brefs.

Je suppose connue la définition élémentaire de l'intégration des polynomes et ses propriétés principales, notamment le premier théorème de la moyenne. J'appelle *intégrale élémentaire d'un polynome* l'expression

$$\int_a^x \int_b^y \int_c^z \mathrm{P}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

L'intégrale définie étendue à un domaine simple s'exprime au moyen d'un nombre fini d'intégrales élémentaires. Occupons-nous d'abord des intégrales élémentaires des fonctions bornées.

Considérons une suite de polynomes $\mathrm{P}_n(x, y, z)$ asymptotiquement convergente dans un domaine D se réduisant à un *ensemble élémentaire* (parallélépipède rectangle), et supposons, en outre, que l'ensemble des polynomes P_n soit borné dans D, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M, tel qu'on ait, quel que soit n et quels que soient x, y, z dans D,

$$|\mathrm{P}_n(x, y, z)| < \mathrm{M}.$$

Je dis que la suite des intégrales des P_n est uniformément convergente dans D; nous poserons, a, b, c étant le point de D dont les coordonnées sont les plus petites,

$$\mathrm{Q}_n(x, y, z) = \int_a^x \int_b^y \int_c^z \mathrm{P}_n(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

En effet, étant donnés les nombres ε et α, on peut déterminer N, tel que les inégalités

$$n \geqq \mathrm{N}, \qquad n' \geqq \mathrm{N}$$

entraînent

$$|P_n - P_{n'}| < \varepsilon,$$

sauf au plus dans un ensemble de mesure α.

On a, pour ces mêmes valeurs de n et n',

$$|Q_n - Q_{n'}| < \int_a^x \int_b^y \int_c^z |P_n - P_{n'}|\, dx\, dy\, dz < \varepsilon V + 2\alpha M,$$

V étant le volume de D. Les nombres V et M étant fixes, ε et α arbitrairement petits, la proposition est démontrée. Cette proposition légitime la *définition* suivante : *L'intégrale d'une fonction bornée dans un domaine élémentaire est égale à la limite des intégrales des termes d'une suite bornée de polynomes asymptotiquement convergente vers cette fonction.* Il est clair en effet que si deux suites bornées de polynomes convergent asymptotiquement vers une même fonction, l'ensemble des deux suites (suite obtenue en intercalant les termes successifs de l'une entre les termes de l'autre) est aussi une suite asymptotiquement convergente (car la réunion de deux ensembles de mesure inférieure à ε forme un ensemble de mesure inférieure à 2ε).

Il résulte du théorème de la moyenne et de notre second théorème fondamental que l'intégrale d'une fonction bornée, étendue à un ensemble bien défini quelconque, peut être définie comme égale à la limite de l'intégrale correspondant à un domaine simple, tendant vers cet ensemble bien défini. Car la valeur absolue de l'intégrale étendue à un ensemble élémentaire est au plus égale au produit de la mesure de cet ensemble par une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction dans le domaine total considéré. Cette définition ne peut donc conduire à aucune contradiction.

On peut arriver par une autre voie à la définition de l'intégrale d'une fonction bornée dans un domaine D non élémentaire ; il suffit de remplacer les polynomes par d'autres polynomes asymptotiquement équivalents aux premiers dans D et asymptotiquement équivalents à zéro dans le complémentaire de D, par rapport à un domaine parallélépipédique Δ contenant D.

Étant donnés des polynomes P_n et un domaine D, on détermine aisément des polynomes π_n différant aussi peu qu'on veut des P_n dans D et différant aussi peu qu'on veut de zéro dans la portion de Δ qui n'appartient pas à D (les régions dans lesquelles ces inégalités ne seraient pas vérifiées ayant des mesures inférieures à des nombres ε_n tendant vers zéro avec n).

En résumé, dans le cas d'une variable, toute fonction bornée définissable $f(x)$ est asymptotiquement équivalente à une suite de polynomes $P_n(x)$, suite qui est évidemment asymptotiquement convergente; par définition, l'intégrale indéfinie de $f(x)$ est la fonction continue définie par la suite uniformément convergente des $Q_n(x)$, intégrales des $P_n(x)$. On passe immédiatement de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie dans un domaine simple, puis dans un domaine quelconque au moyen du second théorème fondamental.

La méthode des approximations successives permet de ramener au calcul d'intégrales définies le calcul des solutions des équations différentielles, des équations intégrales et intégro-différentielles ; si ces opérations renferment des fonctions bornées bien définies quelconques, on pourra les remplacer par une suite asymptotiquement équivalente de polynomes, c'est-à-dire, lorsqu'on aura fixé une limite de l'approximation qu'on désire obtenir, effectuer seulement les calculs sur des polynomes [1].

---

[1] Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre la rédaction de ce Mémoire et son impression ont paru dans les *Comptes rendus* deux Notes sur l'intégration : *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables* par M. Frédéric Riesz (4 mars 1912) et *Sur les propriétés des fonctions mesurables* par M. N. Lusin (17 juin 1912). On trouvera dans ces Notes des renseignements bibliographiques intéressants sur des travaux antérieurs de MM. Weyl, F. Riesz, Egoroff et Lusin. Ce qui me paraît distinguer le point de vue de ces auteurs de celui que j'ai adopté, c'est que la définition de ce que j'appelle la *convergence asymptotique des suites de polynomes* ne repose que sur la mesure des domaines *algébriques* (dans le cas d'une variable, domaines formés d'un nombre *fini* d'intervalles). C'est cette conception nouvelle qui m'a permis d'exposer, d'une manière qui me paraît particulièrement simple, les déductions dont le principe se trouve dans mes premiers travaux sur la mesure et dans ma Note du 7 décembre 1903 (voir plus haut p. 188).

III. — Les propriétés de l'intégrale des fonctions bornées.

Il est manifeste que l'intégrale des fonctions bornées, telle que nous l'avons définie, possède les propriétés les plus importantes de l'intégrale des polynomes. Mais il en est une qu'elle ne peut évidemment posséder : l'intégrale $f(x)$ ne peut définir la fonction intégrée $g(x)$ qu'avec une précision limitée; car deux fonctions, qui ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle, ont la même intégrale (leur différence est asymptotiquement équivalente à une suite de polynomes, dont tous les termes sont identiquement nuls).

On peut se proposer de rechercher la plus simple des fonctions qui admet comme intégrale $f(x)$; cet énoncé a-t-il un sens?

Si $g(x)$ a pour intégrale $f(x)$, on a, quels que soient x_1 et x_2,

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx.$$

La fonction $g(x)$, la plus simple qui satisfasse à cette condition, est évidemment la fonction constante

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Je n'insisterai pas sur l'étude des fonctions dérivées à laquelle on est ainsi conduit, car je n'aurais rien à ajouter d'essentiel aux beaux résultats de M. Lebesgue, dont le principal me paraît être que la dérivée de $f(x)$ existe, sauf en un ensemble de points de mesure nulle au plus; il semble donc naturel de choisir pour $g(x)$ cette dérivée aux points où elle existe ; sa définition aux autres points (pourvu qu'elle reste bornée) ne modifie pas la valeur de l'intégrale (¹).

(¹) Je signale en corrigeant ces épreuves, deux Notes fort intéressantes de M. Denjoy, où ce jeune savant indique comment on peut résoudre d'une manière complète le problème inverse de la dérivation (intégrations de toutes les fonctions dérivées) (*Comptes rendus*, 1er et 22 avril 1912). Je me permets de signaler aussi la définition de la *dérivée en moyenne*, à laquelle j'ai été conduit par l'étude des fonctions qu'on rencontre dans la mécanique statistique (*Comptes rendus*, 29 avril 1912).

La propriété fondamentale de l'intégrale est de définir ce qu'on peut appeler la valeur moyenne d'une fonction dans un domaine; il faut, pour cela, diviser la valeur de l'intégrale définie par la mesure du domaine. Cette valeur moyenne, lorsqu'on la connaît seule et que le domaine est suffisamment petit, doit être considérée comme la valeur probable de la fonction en un point quelconque, si l'on n'a sur cette fonction aucun autre renseignement. On voit que la considération des intégrales définies prouve que, si les fonctions tant soit peu compliquées ne sont pas calculables, du moins leurs valeurs probables dans un intervalle si petit qu'il soit, mais fini, existent toujours et sont calculables. C'est la raison pour laquelle on peut se borner à considérer les fonctions élémentaires calculables, tant qu'on n'a pas à envisager l'influence spéciale de points de discontinuité où la fonction devient infinie. C'est ce qu'on a fait généralement jusqu'ici dans les applications des mathématiques à la philosophie naturelle; même dans les théories atomiques où interviennent des discontinuités, ce sont les valeurs moyennes qui jouent un rôle essentiel. Mais il n'est pas certain qu'on ne sera pas conduit à faire intervenir plus explicitement la discontinuité dans l'étude des phénomènes; c'est ce qui justifie l'étude, que nous allons faire, du cas des fonctions non bornées.

IV. — L'intégration des fonctions non bornées.

Une fonction non bornée peut admettre des points d'infinitude (où sa valeur est $+\infty$ ou $-\infty$) et des points d'indétermination; si l'ensemble de ces divers points n'était pas de mesure nulle, il est clair qu'on ne pourrait pas calculer l'intégrale de la fonction. Nous supposerons donc cet ensemble de mesure nulle. La fonction non bornée $f(x)$ est donc égale asymptotiquement à la limite de fonctions bornées; il suffit de considérer une fonction f_n égale à $f(x)$ si $|f(x)| < n$ et à $\pm n$ si $|f(x)| > n$, ou si $f(x)$ est infini ou indéterminé. Les fonctions $f_n(x)$ ont pour limite $f(x)$, sauf aux points d'infinitude ou d'indétermination; chacune de ces fonctions est bornée et bien définie, si $f(x)$ est défini analytiquement; on peut donc remplacer $f_n(x)$ par un polynome $P_n(x)$, tel que l'ensemble des $P_n(x)$ soit asymptotiquement équivalent à l'ensemble des $f_n(x)$, c'est-à-dire tende vers la limite $f(x)$, en excluant un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut. On peut définir l'intégrale de $f(x)$ comme la limite de l'intégrale de $P_n(x)$, si cette limite existe; comme les P_n ne sont pas bornés, nous ne savons pas si cette limite existe. Cette définition est équivalente à la définition de M. Lebesgue.

Nous allons en donner une autre, qui donnera le même résultat quand elles s'appliqueront toutes deux, mais dont le champ d'application est plus étendu. Nous éviterons de considérer les séries divergentes (à somme infinie ou indéterminée); car on ne peut pas limiter l'étendue du domaine de divergence d'une telle série; par exemple, les séries

$$x + x + x + x + x + \ldots,$$
$$x - x + x - x + x - \ldots$$

divergent partout, sauf pour $x = 0$. Nous préférons, pour ce motif, considérer plutôt des séries dont les termes sont eux-mêmes des fonctions non bornées, ces séries étant généralement convergentes.

On sait comment on définit, dans les éléments, l'intégrale d'une fonction non bornée, telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - c}}$; ou bien

$$f(x) = \frac{1}{x - c} \sin \frac{1}{x - c};$$

on pose :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' = 0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx.$$

L'intégrale existe, par définition, lorsque les limites existent. J'ai proposé de remplacer cette définition par la suivante; on sait que si l'on pose

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \qquad x_0 = a, \qquad x_n = b,$$

on a, par définition, n augmentant indéfiniment et les h_i tendant vers zéro,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum h_i f(\xi_i).$$

Lorsqu'il y a un point singulier c, on entourera ce point d'un *intervalle d'exclusion*, $c-\varepsilon$, $c+\varepsilon'$, et l'on supposera que les points de division x_i sont tous extérieurs à cet intervalle. Si l'on a

$$x_{i-1} < c-\varepsilon < c+\varepsilon' < x_i,$$

on posera

$$h_i = x_i - (c+\varepsilon') + c - \varepsilon - x_{i-1} = x_i - x_{i-1} - \varepsilon - \varepsilon',$$

et l'on supposera ξ_i compris entre x_{i-1} et $c-\varepsilon$, ou entre $c+\varepsilon'$ et x_i, mais non entre $c-\varepsilon$ et $c+\varepsilon'$.

Si la *somme de Riemann*, ainsi définie, tend vers une limite, quels que soient ε et ε' et si cette limite tend elle-même vers une limite lorsque ε et ε' tendent vers zéro, cette dernière limite est, par définition, l'intégrale.

Il est manifeste que cette modification de la définition est purement formelle, lorsqu'il n'y a qu'un nombre limité de points singuliers; il n'en est pas de même, si les points singuliers sont denses dans un intervalle; il faut d'ailleurs supposer en ce cas, non seulement que chaque intervalle d'exclusion tend vers zéro, mais que leur somme tend aussi vers zéro. On est ainsi conduit à la définition suivante (qui s'étendrait sans changement au cas des intégrales multiples, mais qui, en ce cas, paraît moins utile) :

Soit $f(x)$ une fonction non bornée, non intégrable au sens de Riemann; supposons qu'on puisse déterminer dans le champ d'intégration une infinité énumérable de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ayant la propriété suivante : si l'on entoure le point A_n d'un intervalle d'exclusion $B_n C_n$, tel que la série $\Sigma B_n C_n$ soit convergente et de somme ε, les sommes de Riemann généralisées tendent vers une limite, quels que soient les intervalles, et cette limite tend elle-même vers une limite, lorsque ε tend vers zéro; cette dernière limite est, par définition, l'intégrale, au sens de Riemann, généralisée. Les sommes de Riemann généralisées sont les sommes

$$\Sigma h_i f(\xi_i),$$

dans lesquelles on suppose :

1° Que les points de division x_i n'appartiennent pas aux intervalles d'exclusion ;

2° Que h_i est égal à $x_i - x_{i-1}$, diminué, s'il y a lieu, de la longueur des intervalles d'exclusion;

3° Que ξ_i est situé entre x_{i-1} et x_i, mais n'appartient pas non plus aux intervalles d'exclusion.

On étudie la limite de ces sommes de Riemann dans l'hypothèse que les h_i tendent vers zéro et l'on fait tendre ensuite vers zéro les intervalles d'exclusion.

V. — Comparaison avec l'intégrale de M. Lebesgue.

Il est aisé de voir que, dans le cas des intégrables multiples, la nouvelle définition est équivalente à celle de M. Lebesgue; on sait, en effet, que l'intégrale multiple d'une fonction ne peut converger que si l'intégrale de la valeur absolue converge; et, dans une somme absolument convergente, l'ordre des termes est indifférent.

Au contraire, dans le cas des intégrales simples, l'intégrale, au sens de M. Lebesgue, ne peut exister que si l'intégrale de la valeur absolue existe, tandis qu'il n'en est pas de même pour l'intégrale au sens de Riemann. Ceci tient, on le sait, à ce que la définition de Riemann conduit, en somme, à une série dont la convergence peut être assurée par l'alternance des signes. Tel est le cas pour la fonction $\frac{\sin x}{x}$ à l'infini ou pour la fonction $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ pour $x = 0$.

Il est clair que la propriété d'être intégrable au sens de M. Lebesgue, c'est-à-dire d'avoir une valeur absolue intégrable, étant une propriété plus restrictive, est, par cela même, plus commode à utiliser dans certaines applications, de même que les séries absolument convergentes sont plus aisées à manier que les séries simplement convergentes. Mais ce n'est peut-être pas une raison pour qu'on néglige complètement l'étude des intégrales ou des séries qui ne convergent pas absolument.

Si deux fonctions sont intégrables au sens de Riemann généralisé, et si leur somme est intégrable, l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales. Mais la somme peut ne pas être intégrable avec notre définition, parce que les intervalles d'exclusion de l'une des fonctions peuvent être, dans des cas particuliers, choisis précisément de manière à rendre divergente l'intégrale de l'autre fonction. On peut convenir d'étendre la définition et de dire que : si une fonction n'est pas intégrable d'après la définition du paragraphe précédent, mais peut être décomposée en la somme de deux fonctions intégrables d'après cette définition, son intégrale est, par définition, la somme des intégrales de ces fonctions. Pour que cette nouvelle extension de la notion d'intégrale de Riemann généralisée ne soit pas contradictoire, il faut faire voir qu'elle ne peut pas conduire à attribuer deux valeurs différentes à l'intégrale d'une même fonction. Or, c'est ce qui est aisé à démontrer. Soit

$$f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2;$$

par hypothèse, les intégrales riemanniennes généralisées de f_1 et de f_2 existent, et aussi celles de g_1 et de g_2. Il s'agit de prouver qu'on a

$$\int f_1\,dx + \int f_2\,dx = \int g_1\,dx + \int g_2\,dx.$$

Désignons respectivement par (A_1), (A_2), (B_1), (B_2) les ensembles de points singuliers qui interviennent dans les définitions des intégrales de f_1, f_2, g_1, g_2. Par définition, à tout nombre ε correspondent des nombres ε_1, ε_2, η_1, η_2, tels que si l'étendue des intervalles d'exclusion correspondant aux (A_1) est inférieure à ε_1, la limite des sommes riemanniennes correspondantes diffère de moins de ε de l'intégrale $\int f_1\,dx$: mais, si l'on excluait, dans le calcul de cette intégrale, des intervalles arbitraires correspondant aux (A_2), (B_1), (B_2), on ne sait pas si la convergence subsisterait. Ce qu'il suffit de faire voir, c'est qu'il est possible de changer infiniment peu la valeur de cette intégrale par un *choix particulier* des intervalles d'exclusion (B_1), ce choix particulier étant assujetti seulement à avoir une étendue inférieure à η_1. Or, cela est évident, car l'intégrale riemannienne généralisée d'une fonction f_1, possède évidemment la propriété fondamentale

$$\int_a^b f_1\,dx = \int_a^c f_1\,dx + \int_c^b f_1\,dx,$$

chacune des intégrales du second membre existant si celle du premier membre existe. Les intégrales de f_1 dans l'intérieur de chacun des intervalles d'exclusion (B_1) existent donc, et l'on peut prendre chacun de ces intervalles assez petit pour que la valeur correspondante de l'intégrale soit aussi petite qu'on veut.

Il est donc possible de faire un *choix particulier* des intervalles d'exclusion (A_1), (A_2), (B_1), (B_2), tels que chacune des intégrales soit calculée, à moins de $2\,\varepsilon$ près, lorsqu'on exclut tous ces intervalles; il en résulte que

$$\int f_1\,dx + \int f_2\,dx - \int g_1\,dx - \int g_2\,dx$$

diffère de moins de $8\,\varepsilon$ de la même expression, où les intégrales seraient étendues seulement au domaine qui subsiste lorsqu'on enlève tous les intervalles d'exclusion ; or, cette expression est alors égale à

$$\int (f_1 + f_2 - g_1 - g_2)\,dx = 0.$$

L'égalité à démontrer est donc vérifiée à $8\,\varepsilon$ près; elle est donc rigoureusement établie.

Comme exemple de fonctions f_1 et f_2, telles que leur somme ne soit pas directement intégrable alors que chacune d'elles l'est, on peut prendre

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x},$$

$$f_2(x) = \sum_1^\infty \frac{e^{-n}}{\sqrt{2-(2n+1)x}}.$$

Si l'on désirait considérer une infinité de fonctions non bornées telles que, non seulement la somme, mais les produits deux à deux de deux fonctions quelconques de l'ensemble appartiennent à l'ensemble, il faudrait partir d'un nombre fini (ou infini) de fonctions telles que chacune soit intégrable ainsi que toutes ses puissances. Tel est le cas des fonctions telles que la suivante :

$$\sum e^{-n}\log\left|x - \frac{1}{n}\right|.$$

On est naturellement conduit par ce qui précède à étudier les séries généralement convergentes de fonctions non bornées, c'est-à-dire les séries qui convergent presque partout, les portions exclues étant les points singuliers et un certain entourage asymptotique de ces points. C'est en réalité cette étude qui m'avait conduit à considérer, pour la première fois, des ensembles de mesure nulle et à utiliser leurs principales propriétés, étude d'où j'ai déduit ensuite la définition précise de la mesure. Je reviendrai plus bas (Ch. III, § III) sur ce sujet, et sur les conséquences qu'on peut en tirer pour l'étude des fonctions de variables complexes. Je voudrais simplement faire observer ici que si l'on suppose que l'ensemble des points de divergence soit de mesure nulle, le troisième théorème fondamental subsiste, avec cette différence toutefois que, lorsque α tend vers o, les polynomes P_n ne sont pas bornés dans leur ensemble.

On n'est donc pas assuré de l'existence de l'intégrale; il faut effectivement que la fonction ne croisse pas trop vite dans le voisinage des points singuliers. La convergence est assurée, si l'ordre des points singuliers est inférieur à un nombre fixe inférieur à 1; elle peut être réalisée aussi dans certains cas où cet ordre est asymptotique à l'unité (par valeurs inférieures), par exemple, pour la fonction

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\left(x - \frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{n}}}.$$

CHAPITRE III.

LE CALCUL EFFECTIF DES INTÉGRALES. APPLICATIONS.

I. — Le calcul par la définition.

Pour qu'une intégrale puisse être effectivement calculée par les méthodes précédentes, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'ensemble des points où la fonction à intégrer n'est pas calculable soit de mesure nulle. Ceci pourrait sembler impossible, si l'on considère qu'une fonction ne peut être calculable que pour les valeurs calculables des variables et que l'ensemble de ces valeurs est de mesure nulle; mais l'on peut regarder une fonction comme calculable pour certaines valeurs non calculables des variables, si l'on sait que, pour ces valeurs, la fonction coïncide avec une fonction continue calculable. A ce point de vue, notre troisième théorème fondamental apparaît comme indispensable: sans ce théorème (ou une proposition équivalente), il serait complètement dénué de sens de parler d'intégrale d'une fonction discontinue, car les opérations par lesquelles pourrait être calculée cette intégrale seraient absolument inexécutables, non seulement au point de vue pratique, mais au point de vue théorique : je veux dire qu'on ne pourrait imaginer aucun moyen, si long fût-il, de les exécuter.

Voici, en nous bornant à une variable pour simplifier l'écriture, comment se pose pratiquement le problème. Une fonction $f(x)$ est définie comme la limite de fonctions connues (ou du moins plus simples) $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Nous admettons qu'on sache calculer les intégrales de chacune de ces fonctions avec une approximation donnée. Le problème de l'intégration de $f(x)$ est immédiatement résolu dans le cas où la suite $f_n(x)$ converge uniformément et où l'on a la mesure de cette convergence uniforme. S'il n'en est pas ainsi, on devra tout d'abord chercher à obtenir une limite supérieure M du module de f et des f_n. On cherchera ensuite, au moyen de la démonstration même du fait que f_n tend vers une limite, à déterminer un nombre ε_n supérieur *en général* à $f - f_n$, et l'on désignera par α_n l'étendue du domaine où $f - f_n$ dépasse ε_n; on aura alors

$$\left|\int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx\right| < \alpha_n \mathrm{M} + \varepsilon_n(b-a).$$

On aura une approximation donnée en prenant n assez grand pour que ε_n et α_n soient inférieurs à des nombres fixés, et en calculant l'intégrale de f_n avec une approximation suffisante.

On voit que le calcul sera le plus avantageux possible, si l'on sait s'arranger pour que ε_n et α_n soient sensiblement du même ordre de grandeur. Il est difficile de donner sur ce point des indications générales. Mais les choses se simplifient beaucoup si l'on se borne à la considération d'une catégorie déterminée de fonctions, même si cette catégorie est très étendue. On pourrait aisément reprendre à ce point de vue l'exposition donnée dans ce Mémoire (voir plus haut Chap. I, § II).

II. — L'emploi des probabilités dénombrables.

Pour calculer certaines intégrales, il est plus commode d'utiliser la notion de probabilité. J'ai montré ailleurs (¹) comment on peut évaluer la probabilité pour qu'un nombre x (compris entre 0 et 1) satisfasse à une condition déterminée, ce nombre x étant défini par une infinité dénombrable de conditions simples, dont les probabilités respectives sont connues. Cette théorie se superpose tout à fait à la théorie de la mesure; de même, on pourrait développer une théorie de l'espérance mathématique dans les cas dénombrables qui se superposerait à la théorie de l'intégrale définie. Le premier cas revient à ne s'occuper que de l'intégration des fonctions prenant seulement les valeurs 0 et 1; le problème de l'intégration de ces fonctions est identique au problème de la mesure des ensembles. J'ai indiqué des exemples de calculs de ce genre dans le Mémoire que je viens de citer. Je n'y reviendrai pas; je voudrais seulement signaler brièvement une question qui me paraît intéressante : est-il possible de définir une fonction $f(x)$ qui soit intégrable au moyen des probabilités dénombrables, sans pouvoir être ramenée aux fonctions calculables? Tel serait le cas pour une fonction telle que, dans tout intervalle si petit qu'il soit, les valeurs 0 et 1 seraient également probables. Son intégrale entre les limites 0 et 1 serait alors évidemment égale à $\frac{1}{2}$, tandis que sa valeur, si l'on n'en savait rien de plus que ce que nous venons de dire, ne pourrait être connue pour aucune valeur de la variable (et, en tous cas, quelle que soit sa définition, ne pourrait jamais être connue pour toutes les valeurs, mais seulement au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable).

Mais il ne semble pas qu'il soit possible d'arriver, au moyen des probabilités dénombrables, à la définition d'une telle fonction; on se

(¹) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1909, t. XXVII, p. 247 à 271. — Voir aussi *Comptes rendus*, t. 154, 29 avril 1912, p. 1150.

trouve, en effet, soit dans le cas de convergence, soit dans le cas de divergence, et la probabilité limite (désignée par A_∞ dans le Mémoire cité) est égale, suivant le cas, à o ou à l'unité, sans avoir jamais une valeur intermédiaire. Il faudrait donc tout au moins compliquer notablement les définitions de ce Mémoire et arriver à définir des probabilités successives dépendant les unes des autres suivant une loi suffisamment compliquée pour que l'on soit à la fois dans le cas de convergence et dans le cas de divergence. Mais cela ne paraît pas aisé.

Ce résultat peut paraître contradictoire avec celui qu'a obtenu M. Lebesgue, qui est arrivé à « nommer » une fonction non définissable analytiquement; mais il faut observer que la fonction de M. Lebesgue ne diffère qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle d'une fonction définissable analytiquement; elle est donc équivalente à une telle fonction au point de vue de l'intégration [1].

La question peut être posée sous une forme équivalente, peut-être plus saisissante : est-il possible, ou non, de définir avec propriété *asymptotique* des nombres irrationnels, telle que cette propriété et son contraire soient également probables ? Par propriété asymptotique on entend, s'il s'agit, par exemple, de nombres décimaux, une propriété dont la définition ne dépend pas des n premières décimales, quel que soit n, c'est-à-dire reste la même pour tous les nombres dans lesquels ces n premières décimales seules diffèrent. On peut dire aussi qu'une propriété asymptotique est entièrement homogène au continu, c'est-à-dire se présente sous la même forme pour deux intervalles égaux se déduisant l'un de l'autre par une translation commensurable. Il me paraît résulter, des considérations développées dans ce Mémoire et de la théorie des probabilités dénombrables, que les seuls ensembles homogènes au continu sont les ensembles de mesure nulle;

---

[1] Je laisse ici de côté les objections qu'on peut faire à l'*existence* de la fonction « nommée » par M. Lebesgue. M. Lebesgue indique lui-même la différence qu'il y a entre *nommer* et *définir* une fonction; mais je serais volontiers plus catégorique que lui ; partout où interviennent effectivement *tous* les nombres transfinis de seconde classe (et non pas seulement ceux qui sont inférieurs à l'un d'eux fixé d'avance), on me paraît sortir du domaine des Mathématiques. Voir mon article sur *La philosophie des Mathématiques et l'infini* (*Revue du mois*, 10 août 1912).

on ne peut obtenir des ensembles de mesure non nulle qu'en faisant intervenir explicitement certains intervalles, c'est-à-dire que les seuls ensembles de mesure non nulle qui puissent être définis sont mesurables.

Je ne me dissimule pas que les raisons que j'invoque à l'appui de cette conclusion ne paraîtront pas satisfaisantes à tous ; il me semble néanmoins qu'elle s'impose à ceux qui considèrent qu'une définition mathématique doit fournir quelque procédé de calcul.

III. — L'extension de l'intégrale de Cauchy.

Je voudrais, en terminant, dire quelques mots d'une question qui a été, en réalité, l'origine de toutes mes recherches sur la mesure, aussi bien des recherches anciennes qui m'ont conduit à la notion fondamentale d'ensemble mesurable, que des recherches récentes exposées dans ce Mémoire. Cette question est l'étude des séries de fonctions monogènes ayant une infinité de points singuliers denses dans une aire et cependant convergentes en général dans cette aire; et, par extension, l'étude de fonctions définies *a priori* (au sens de Riemann) et monogènes *en général* dans une aire. Dire qu'une fonction

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

est monogène *en général*, c'est dire que l'on peut définir des *domaines d'exclusion* d'étendue aussi petite que l'on veut tels que, dans le domaine restant, les fonctions P et Q admettent des dérivées satisfaisant aux conditions fondamentales de Cauchy :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le problème de l'étude générale de telles fonctions $f(z)$ exige l'extension des propriétés essentielles des intégrales de Cauchy :

$$\int f(z)\,dz, \quad \int \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

Je suis arrivé, pour la première fois, à cette extension au moyen de la théorie de l'intégration développée ci-dessus (voir *Comptes rendus*, 26 février 1912). Depuis, je suis arrivé à un mode d'exposition qui rend cette théorie des fonctions monogènes non analytiques, indépendante des théories nouvelles de l'intégrale définie. C'est ce mode d'exposition que j'adopterai dans le Mémoire détaillé qui paraîtra aux *Acta mathematica*. Mais j'ai tenu à indiquer ici le lien entre ces deux questions, car, pour les géomètres qui sont familiers avec la théorie des ensembles mesurables, le mode d'exposition où l'on utilise cette théorie sera sans doute plus intuitif; ils le reconstitueront sans peine en utilisant mes Notes des *Comptes rendus* déjà citées ainsi que les suivantes : *Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi analytiques* (3 juin 1912) et *Sur la théorie du potentiel logarithmique* (17 juin 1912). Je me bornerai donc à renvoyer à ces Notes et au Mémoire à paraître dans les *Acta mathematica*.