JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. KOENIGS

La loi des courbures des profils superficiels conjugués dans les mouvements à un seul paramètre

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 103-158.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__103_0>

La loi des courbures des profils superficiels conjugués dans les mouvements à un seul paramètre;

Par G. KŒNIGS,

Professeur de Mécanique physique et expérimentale
à la Sorbonne,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Au Tome XXXV du *Recueil des Savants étrangers* a paru récemment mon *Mémoire sur les courbes conjuguées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides*, où j'ai étudié les couples formés de deux courbes qui, solidaires chacune de l'un des corps, restent tangentes entre elles au cours de leur mouvement relatif.

Entre autres questions concernant ces courbes, j'ai été amené à rechercher les lois de correspondance qui relient les éléments de courbure de deux courbes conjuguées (1).

Deux cas particuliers de ce problème avaient antérieurement occupé les géomètres : ce sont ceux qui se réalisent lorsque les deux corps solides glissent l'un sur l'autre, soit suivant deux plans superposés, soit suivant deux sphères concentriques solidaires chacune de l'un d'eux, ce dernier cas pouvant se caractériser en disant que les deux corps ont un point fixe en commun.

En limitant l'étude des circonstances du mouvement à ce qui se passe dans une face plane ou sphérique glissante (suivant le cas), on tombe sur le mouvement d'une figure plane ou sphérique sur son plan

---

(1) Dans ce qui suit, les renvois à ce Mémoire seront représentés par C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV).

ou sur sa sphère. Toute courbe solidaire de cette figure possède alors naturellement une enveloppe sur le plan ou sur la sphère que l'on regarde comme fixes. De là naît la double théorie des *profils conjugués curvilignes* plans ou sphériques, qui remonte à Euler et qui n'a pas, depuis ce grand géomètre, cessé d'occuper les savants.

Le problème que j'ai traité au Tome XXXV des *Savants étrangers* constitue une première généralisation de ces théories, aujourd'hui classiques, puisque j'en ai étendu la portée au cas d'un mouvement quelconque.

Je ne reviendrai pas ici sur les résultats obtenus dans mon travail, mais j'aurai fréquemment à les utiliser et à renvoyer à la lecture de ce Mémoire.

L'étude que j'y ai entreprise a, en effet, des attaches très étroites avec celle que j'entreprends ici, malgré que l'objet en soit très différent.

On peut remarquer d'abord que les profils conjugués sphériques ou plans dont on vient de parler sont les lignes de courbure des profils coniques ou cylindriques qui se rencontrent dans la réalisation pratique du guidage de ces deux cas particuliers de mouvement.

En fait, les courbures de ces profils plans ou sphériques ne sont rien autre que les courbures principales des profils superficiels cylindriques ou coniques précédents. De là résulte qu'une autre extension de la théorie des courbures des profils conjugués plans ou sphériques se présente sous la forme d'une théorie des relations entre les courbures des profils conjugués superficiels au cours d'un mouvement quelconque.

Si l'on considère en effet deux corps S et S' à l'état de mouvement relatif, toute surface (F) solidaire de S, enveloppe dans S' un certain profil conjugué (F') auquel elle est à tout instant circonscrite suivant une courbe variable (c). Cette surface (F') est parfaitement définie dès que l'on connaît la surface (F) et le mouvement de S par rapport à S'. On sait du reste que la relation entre les surfaces (F), (F') réalise une transformation de contact. Dès lors, les éléments de courbure de (F) étant connus, ainsi que les éléments du mouvement, les éléments de courbure de (F') doivent pouvoir être construits.

C'est cette dépendance entre les courbures de (F) et de (F') que je me suis proposé ici de découvrir.

Un des premiers éléments qui concourent à la solution du problème consiste en une certaine corrélation homographique qui existe sur la normale commune MN en un point de contact M des profils conjugués (F), (F').

On sait qu'une corrélation homographique n'est autre qu'une correspondance homographique entre les points d'une droite et les plans menés par cette droite, comme on en rencontre à propos de la distribution des plans tangents aux divers points d'une génératrice rectiligne d'une surface réglée. Les corrélations homographiques jouent un rôle important dans la géométrie des systèmes de droites ainsi que je l'ai mis en évidence moi-même dans ma Thèse inaugurale, en 1882, *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, travail cité au cours du présent Mémoire.

Par exemple, si l'on prend deux corrélations homographiques sur une même droite et si l'on considère les homologues M, M' d'un même plan variable Π dans les deux corrélations, il peut arriver que M, M' qui, en général se correspondent homographiquement, se correspondent *involutivement*. On dit, dans ce cas, que les corrélations sont *en involution*.

Il se trouve qu'étant donnés un complexe linéaire et une droite x de ce complexe, la correspondance entre un plan Π mené par x et son pôle définit une corrélation L, appelée la *corrélation normale* du complexe.

Si l'on considère, d'autre part, une surface réglée engendrée par des droites de ce complexe et contenant la droite x, cette surface elle-même définit, en vertu de sa distribution des plans tangents aux divers points de x, une nouvelle corrélation homographique H. C'est une proposition remarquable, dont j'ai développé les conséquences dans mon Mémoire précité de 1882, que *ces deux corrélations* L et H définies sur x, l'une par le complexe, l'autre par la surface, *sont en involution*.

On peut appliquer cette remarque à la surface réglée (Σ) engendrée par la normale MN aux surfaces (F), (F') aux divers points M de leur courbe de contact actuelle (c), car cette surface est constituée par des droites appartenant au complexe linéaire $\mathfrak{L}$, lieu des droites qui sont normales aux trajectoires de leurs points; par conséquent, la corrélation H des plans tangents de (Σ) aux divers points de la normale MN est en involution avec la corrélation normale L du complexe $\mathfrak{L}$ sur cette droite MN.

Si l'on appelle (C_1, Π_1), (C_2, Π_2) les centres de courbure et plans principaux de la surface (F), il se trouve que (C_2, Π_1) et (C_1, Π_2) [remarquer l'interversion des indices] sont des couples de la corrélation H; comme celle-ci est d'autre part en involution, comme on l'a dit, avec la corrélation L, *elle est par ces trois conditions pleinement déterminée*.

J'ai ici introduit la considération de la corrélation G, dite *rectangulaire* avec H qui se déduit de H par une rotation de 90° autour de la droite qui sert de support. Il résulte de ce qui précède que la corrélation G se trouve parfaitement déterminée et les couples principaux *eux-mêmes* (C_1, Π_1), (C_2, Π_2) (sans interversion d'indices) lui appartiennent.

Maintenant les corrélations G, H auraient tout aussi bien pu être définies au moyen de la surface (F') et il en résulte que *les couples principaux* (C'_1, Π'_1), (C'_2, Π'_2) *de la surface* (F') *appartiennent à cette corrélation* G.

Résultat remarquable, car il ramène la recherche des éléments de courbure de (F') à celle du dièdre droit formé par les plans principaux Π'_1, Π'_2 et *réduit à une seule inconnue* un problème qui en comportait trois dans le principe.

Reste à résoudre ce dernier point où se trouvent concentrés tout l'intérêt et toutes les difficultés du problème.

Lorsque, dans le cas des profils plans, on veut grouper en une formule simple les propriétés des courbures des profils conjugués, on considère, comme il est bien connu, toutes les courbes planes actuellement normales à une droite donnée, issue du centre instantané, et l'on étudie la correspondance existant entre le centre de courbure d'une telle courbe et le centre de courbure de son profil conjugué. On tombe, on le sait, sur une homographie singulière dont le point double unique est le centre instantané lui-même.

Ici aussi, il faut savoir grouper convenablement les surfaces pour arriver à une loi de correspondance simple. Seulement, pour y parvenir, il ne suffirait pas de grouper en un ensemble toutes les surfaces normales à une même droite donnée a, quelconque d'ailleurs, prise dans le complexe $\mathfrak{L}$. Il faut caractériser plus étroitement l'ensemble, en utilisant précisément les corrélations H et G au sujet desquelles un résultat si important a déjà été acquis.

Je considère donc, parmi toutes les surfaces (F) normales à la droite a, toutes celles qui *admettent* une même corrélation G sur cette normale.

Une telle corrélation est d'ailleurs définie (à cause de la propriété d'involution de sa rectangulaire H avec la corrélation normale L du complexe $\mathfrak{L}$) par son point central A et son plan central Ω *que l'on peut se donner tous deux a priori*, de même que dans le cas du mouvement plan on peut se donner *a priori* la normale issue du centre instantané. Les surfaces (F) qui admettent la corrélation G sont celles (la condition est nécessaire et suffisante) dont les couples principaux (C_1, H_1), (C_2, H_2) appartiennent à G. Alors, en vertu du théorème déjà acquis, le profil (F′) conjugué de (F) admet aussi la corrélation G. Le choix de la normale a et de la corrélation G sur elle se trouve synthétisé par le trièdre trirectangle Θ_0 dont a est une arête, A l'origine; les deux autres axes a_1, a_2 sont : le premier la normale à a en A dans le plan central Ω, le second la normale en A au plan Ω. Ce trièdre est arbitraire sauf cependant que son arête a appartient au complexe $\mathfrak{L}$. Son choix est équivalent à celui de la normale a et de la corrélation G. Le paramètre de distribution $\varkappa$ de cette dernière est une fonction très simple des éléments de ce trièdre.

Ceci posé, si l'on prend toutes les surfaces (F), (F′) conjuguées qui appartiennent à la corrélation G, il s'agit de savoir comment se correspondent les dièdres rectangles principaux (H_1, H_2) et (H'_1, H'_2) de ces surfaces.

Pour y parvenir, je remarque qu'il est permis de substituer à (F), (F′) des surfaces parallèles sans rien changer aux éléments des courbures et je prends alors les surfaces parallèles à (F), (F′), savoir : (F_0), (F'_0), qui font *actuellement* leur contact au point A. Ces surfaces possèdent des propriétés remarquables :

1° Elles ont même courbure totale en A, qui est égale à $-\frac{1}{\varkappa^2}$.

2° L'axe a_2 du trièdre Θ_0 est tout à la fois la tangente en A à leur courbe de contact et une tangente asymptotique commune.

Les secondes tangentes asymptotiques AD, AD′ de ces surfaces en A sont variables et *leur détermination est équivalente à celle des dièdres des plans principaux* (Π_1, Π_2), (Π'_1, Π'_2) car ces plans bissectent respectivement les angles de a_2 avec AD et avec AD′.

Or *la correspondance entre* AD *et* AD′ *est une homographie singulière à rayons doubles coïncidents.*

Le rayon double unique AW est le conjugué harmonique de a_2 par rapport à deux tangentes particulières AV, AU contenues dans le plan tangent commun; AV est la direction de la vitesse d'entraînement de A et AU est la caractéristique du plan tangent. Si l'on appelle ψ, ψ' les angles de AD et AD′ avec AW (rayon double), l'homographie est définie par une équation d'une forme déjà courante dans d'autres questions de cinématique, notamment dans le mouvement autour d'un point fixe, à savoir :

$$\cot\psi' - \cot\psi = -\Psi,$$

où Ψ est une fonction des éléments du trièdre Θ_0.

Mais la considération des surfaces (F_0), (F'_0) ne sert en réalité qu'à amener celle de ces faisceaux homographiques remarquables engendrés par AD et AD′.

En fait, si dans le plan tangent on construit un cercle de centre I tangent en A à l'axe a_1 du trièdre Θ_0, *les diamètres* $I\Delta$, $I\Delta'$ *de ce cercle, parallèles à* AD *et à* AD′ *donnent, en joignant leurs extrémités au point* A, *les angles droits qui sont les traces précisément des plans* (Π_1, Π_2), (Π'_1, Π'_2) respectivement. Une construction simple fournit ensuite les centres C_1, C_2, C'_1, C'_2 comme homologues de ces plans dans la corrélation G.

On voit par là que la construction effective des éléments de courbure de (F′) est un problème *désormais complètement résolu.*

J'ai indiqué, dans un Chapitre spécial, comment on peut construire Ψ lorsque le trièdre Θ_0 est connu [et il l'est lorsque (F) est donné]; pour cela j'ai utilisé une méthode déjà suivie par moi dans le Mémoire *Sur les courbes conjuguées*, inséré au Tome XXXV des *Savants étrangers.*

Au cours de ce dernier Mémoire, j'avais démontré l'existence de certains profils remarquables présentant la singularité d'être osculateurs à leurs profils conjugués tout du long de la courbe de contact.

L'étude présente m'a permis d'aborder le problème réciproque et de montrer que ces surfaces, qui vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, *sont les seules* qui possèdent cette propriété.

Cela ne veut pas dire qu'un profil (F) ne puisse *accidentellement* être osculateur à son profil conjugué. Mais il y a entre ce cas et celui de l'osculation continuelle une différence profonde que mon travail actuel met pleinement en lumière.

Les recherches présentes ont été l'objet de deux Notes que j'ai présentées à l'Académie des Sciences le 29 mai et le 20 novembre 1911 et qui sont insérées aux *Comptes rendus* des séances de ces jours.

Je me suis borné ici à exposer la théorie générale. Je me propose d'en faire l'application à des cas particuliers dans un Mémoire prochain, où je donnerai en outre une forme plus explicite aux résultats qui précèdent.

CHAPITRE I.

RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES CORRÉLATIONS HOMOGRAPHIQUES SUR UNE DROITE.

1. *Éléments métriques d'une corrélation homographique.* — Je crois devoir rappeler d'abord un certain nombre de propriétés des corrélations homographiques sur une droite dont la connaissance est depuis longtemps acquise, mais dont il convient de mettre certaines circonstances en relief, à cause du rôle important qu'elles vont jouer dans la question actuelle.

Si, à tout point M d'une droite x on fait correspondre homographiquement, ou projectivement, un plan Π mené par la droite, cette correspondance constitue une *corrélation homographique* sur la droite x.

Au point à l'infini sur la droite x correspond un plan appelé le *plan asymptote*. Le plan mené par la droite normalement au plan asymptote s'appelle le *plan central;* le point qui est homologue au plan central s'appelle le *point central*.

Soient A le point central, Ω le plan central, M un point de la droite, et appelons r le nombre qui mesure le vecteur AM sur un axe défini de la droite x. Soit également Π le plan homologue du point M et θ l'angle dont il faut faire tourner Ω dans le sens direct autour de l'axe pour l'appliquer sur le plan Π.

D'après la correspondance homographique qui relie M et Π il doit exister entre r et $\tang\theta$ une relation bilinéaire

$$ar \operatorname{tang}\theta + br + c \operatorname{tang}\theta + f = 0, \tag{1}$$

où a, b, c, f désignent des constantes. Mais d'après l'hypothèse faite sur le choix des origines pour les quantités r et θ, savoir A et Ω, si Π coïncide avec Ω, M doit coïncider avec A, en sorte que r et $\operatorname{tang}\theta$ doivent s'annuler ensemble. De là déjà la conséquence

$$f = 0.$$

Mais de plus, quand M va à l'infini, $r = \infty$, Π doit être rectangulaire avec Ω, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\operatorname{tang}\theta = \infty$;

$\frac{1}{r}$ et $\cot\theta$ s'annulent ensemble, d'où $a = 0$.

En divisant alors par $-b$ l'équation (1) où l'on fait $a = 0$, $f = 0$ et posant

$$-\frac{c}{b} = k,$$

l'équation (1) s'écrit

$$r = k \operatorname{tang}\theta. \tag{2}$$

La quantité k, évidemment homogène à une ligne, s'appelle le *paramètre de distribution.*

On peut donner de ce paramètre une autre définition.

Si l'on prend deux plans rectangulaires Π, Π' passant par l'axe x; si M, M' sont leurs points homologues, θ, θ' les angles de Π, Π' avec le plan Ω; r, r' les mesures des vecteurs AM, AM', on a

$$r = k \operatorname{tang}\theta, \qquad r' = k \operatorname{tang}\theta',$$

d'où

$$rr' = k^2 \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta',$$

mais comme $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$ à cause de l'orthogonalité des plans Π, Π', il en résulte que

$$\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\theta' = -1,$$

et il vient

$$rr' = -k^2. \tag{3}$$

Donc si *deux plans rectangulaires* Π, Π′ *pivotent autour d'un axe x, leurs points homologues* M, M′ *dans une corrélation homographique définie* a priori *sur x, décrivent une involution sur la droite x.*

La relation (3) montre que les points doubles de cette involution sont donnés par la formule

$$r^2 = -k^2.$$

Les points doubles D, D′ sont donc imaginaires et situés à une distance du point central A, de part et d'autre, égale à

$$k\sqrt{-1},$$

Ces points D, D′ sont les homologues des deux plans isotropes menés par la droite x.

2. *Corrélations singulières.* — Parmi l'ensemble de corrélations homographiques que l'on peut concevoir sur une droite, il en est de *singulières*.

Prenons une corrélation homographique quelconque définie par l'équation

$$ar \operatorname{tang}\theta + br + c \operatorname{tang}\theta + f = 0,$$

dans l'hypothèse d'un choix quelconque d'origines, tant pour la quantité r que pour l'angle θ. On peut mettre cette relation sous la forme

$$(ar + c)(a \operatorname{tang}\theta + b) + af - bc = 0.$$

Si la quantité

$$af - bc = 0 \tag{4}$$

est nulle, la relation qui sert de définition à la corrélation se décompose en deux,

$$ar + c = 0 \quad \text{ou bien} \quad a \operatorname{tang}\theta + b = 0,$$

Il y a alors un *point singulier* $r = -\frac{c}{a}$ et un *plan singulier* $\operatorname{tang} \theta = -\frac{b}{a}$.

Pour que le système constitué par un point M de la droite x et un plan Π mené par cette droite appartienne à la corrélation, *il faut et il suffit, ou bien que* M *coïncide avec le point singulier, ou bien que* Π *coïncide avec le plan singulier.*

3. *Corrélations en involution.* — Étant données sur une droite deux corrélations homographiques H et H′, on peut considérer les points M et M′ qui sont homologues d'un même plan Π, le premier dans H, le second dans H′. Ces points M et M′ décrivent sur la droite x deux divisions homographiques.

Lorsque cette homographie est une involution, les corrélations H, H′ sont dites *en involution.*

On pourrait parvenir à la même notion par une voie qui se présente comme dualistiquement réciproque de la première.

On a appelé M, M′ les points homologues du plan Π dans H et H′ respectivement. Soit Π_1 le plan homologue de M dans H′; les plans Π, Π_1, lorsque M varie, engendrent autour de x deux faisceaux homographiques. Il s'agit de montrer que l'homographie de ces faisceaux est involutive, c'est-à-dire symétrique, en même temps que celle des points M et M′.

Or, en effet, dans le cas de l'involution supposée entre les points M et M′, si un même plan Π est homologue de M dans H et de M′ dans H′, réciproquement le même plan Π_1 est homologue de M dans H′ et de M′ dans H.

De là résulte aussitôt que, dans l'homographie entre les plans Π, Π_1, Π est l'homologue de Π_1 aussi bien que Π_1 est l'homologue de Π. Il y a bien symétrie.

C'est du reste ce que donne le calcul. Si en effet

$$\begin{aligned} a\,r\,\operatorname{tang}\theta + b\,r + c\,\operatorname{tang}\theta + f &= 0,\\ a'r'\operatorname{tang}\theta' + b'r' + c'\operatorname{tang}\theta' + f' &= 0 \end{aligned}$$

sont les équations des deux corrélations homographiques, l'élimination de $\operatorname{tang}\theta$, entre ces deux équations où l'on fait $\theta' = \theta$, donnera l'équation entre r et r' de l'homographie qui relie M et M', soit

$$(ab'-ba')rr'+(af'-bc')r+(cb'-fa')r'+cf'-fc'=0, \tag{5}$$

et en faisant au contraire $r'=r$ et éliminant r, on aura

$$\begin{aligned}(ac'-ca')\tan\theta\tan\theta' \\ +(af'-cb')\tan\theta+(bc'-fa')\tan\theta'+bf'-b'f=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Or l'équation

$$af'-bc'-cb'+fa'=0 \tag{7}$$

exprime que chacune de ces correspondances est involutive ([1]).

On peut se rendre compte que la condition d'involution d'une corrélation avec une autre qui est singulière se traduit par ce fait que *le point et le plan singuliers de la corrélation singulière doivent être deux éléments correspondants de la corrélation donnée non singulière.*

En effet, soient la corrélation non singulière

$$ar\tan\theta+br+c\tan\theta+f=0$$

et la corrélation singulière

$$(r-r_0)(\tan\theta-\tan\theta_0)=r\tan\theta-r\tan\theta_0-r_0\tan\theta+r_0\tan\theta_0=0.$$

On a ici

$$a'=1,\qquad b'=-\tan\theta_0,\qquad c'=-r_0,\qquad f'=r_0\tan\theta_0;$$

d'où, pour la condition d'involution,

$$0=af'-bc'-cb'+fa'=ar_0\tan\theta_0+br_0+c\tan\theta_0+f=0,$$

([1]) On peut remarquer que le premier membre de cette relation est la forme polaire de la forme quadratique

$$af-bc$$

dont l'évanouissement exprime la singularité de l'homographie.

J'ai développé ces considérations et diverses autres propriétés des corrélations homographiques dans mon Mémoire sur les *Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, inséré en 1882 aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, et plus tard, en 1887, dans mon travail *Sur la Géométrie réglée et ses applications*, inséré aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*

ce qui exprime bien que le point singulier, pour lequel $r = r_0$, et le plan singulier, pour lequel $\theta = \theta_0$, sont deux éléments homologues de la corrélation donnée.

Si deux corrélations sont singulières, leur involution s'exprime par la coïncidence de leurs points singuliers ou bien par la coïncidence de leurs plans singuliers.

4. *Conditions qui définissent une corrélation homographique.* — La condition, pour une homographie, d'être en involution avec une autre, singulière ou non, se traduisant par une équation linéaire en a, b, c, f, il en résulte que la condition d'être en involution avec trois corrélations homographiques données définit complètement une corrélation homographique.

Par exemple, une corrélation homographique est définie par la condition d'admettre deux couples donnés d'éléments et d'être de plus en involution avec une corrélation homographique donnée.

C'est ainsi que si l'on se donne sur une droite le point central A d'une corrélation H et son plan central Ω, avec la condition que H soit en involution avec une corrélation donnée, H est, par là même, pleinement déterminée. En effet, non seulement H doit admettre le couple d'éléments correspondants A et Ω, mais aussi le couple d'éléments constitué par le plan normal à Ω et le point à l'infini sur la droite.

5. *Corrélations homographiques rectangulaires.* — Une corrélation homographique H étant donnée sur une droite x, appelons M et Π un point et son homologue dans H. Le plan Π_1 rectangulaire avec Π et passant par x correspond homographiquement à M dans une nouvelle corrélation G, dont on peut dire qu'elle résulte de H par une rotation de 90° autour de x. De cette corrélation G nous dirons qu'elle est *rectangulaire* avec H.

Il est clair que H dérive de G comme G dérive de H et que H est aussi bien rectangulaire avec G.

Lorsque l'on passe d'une corrélation à sa rectangulaire, le point central reste le même, les plans centraux et asymptotes s'échangent et le paramètre de distribution ne change pas.

6. *Corrélation créée sur toute génératrice d'une surface réglée par la distribution des plans tangents.* — Il nous reste à rappeler deux circonstances géométriques où interviennent les corrélations homographiques et les considérations qui s'y rapportent.

En premier lieu, si x est une génératrice rectiligne d'une surface réglée, la correspondance existant entre un point de x et le plan tangent à la surface en ce point donne naissance à une corrélation homographique.

Soit x' la génératrice de la surface infiniment voisine de x. Tout plan Π mené par x coupe x' en un point P qui est infiniment voisin d'un point M de x, lequel correspond au plan Π suivant la loi d'une corrélation homographique. Le point M est le point où le plan Π touche la surface.

Si deux surfaces réglées ont deux génératrices consécutives en commun, il suit de ce qui précède que la corrélation homographique qui relie M et Π sera la même dans les deux surfaces qui, ayant dès lors même plan tangent en chacun des points de x, se raccordent suivant cette droite.

7. *Corrélation normale d'un complexe.* — Tout complexe de droites définit sur chacune de ses droites une corrélation homographique que, dans mon Mémoire *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1882), j'ai appelée la *corrélation normale*.

Si l'on envisage une droite x d'un complexe, tout plan Π mené par x contient une courbe plane enveloppe des droites du complexe contenues dans ce plan. Cette courbe enveloppe touche en particulier la droite x en un point M, qui correspond homographiquement au plan Π. Telle est la corrélation normale que le complexe définit sur la droite x.

On peut concevoir un peu différemment cette corrélation homographique. En effet, si l'on considère les droites du complexe issues de M, elles forment un cône qui contient naturellement la droite x. Le plan tangent à ce cône suivant x est précisément le plan Π. De la sorte, la corrélation normale peut être considérée à un second point de vue qui est placé dualistiquement à l'égard du premier.

Dans le cas particulier d'un complexe linéaire, le plan Π est le polaire du point M et la corrélation normale est alors celle qui relie, sur toute droite du complexe, un point de cette droite et son plan polaire. Un théorème fondamental, dont j'ai développé les principales conséquences dans mon Mémoire précité *Sur les Propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, établit une relation essentielle entre la corrélation normale d'un complexe et celle qui résulte de la distribution des plans tangents pour toute surface réglée engendrée par les droites de ce complexe.

Voici ce théorème :

Si x est une génératrice rectiligne d'une surface réglée engendrée par les droites d'un complexe, la corrélation qui naît sur la droite x de la distribution des plans tangents à la surface est en involution avec la corrélation normale que le complexe définit sur la même droite.

Pour la démonstration et les conséquences de ce théorème, je ne puis que renvoyer à mon Mémoire précité de 1882.

CHAPITRE II.

CORRÉLATIONS HOMOGRAPHIQUES SUR LA NORMALE.

8. *Courbe de contact de deux profils superficiels conjugués.* — Après avoir, dans ce premier Chapitre préliminaire, rappelé les notions essentielles qui concernent les corrélations homographiques sur une droite, il nous est actuellement possible d'entrer dans le vif du problème spécial qui nous occupe ici.

Deux corps solides S et S′ sont à l'état de mouvement relatif. Toute surface (F) solidaire de S possède dans S′ une enveloppe (F′) appelée son *profil superficiel conjugué*.

A chaque instant ces deux profils superficiels sont circonscrits l'un à l'autre suivant une *courbe de contact* (c).

La propriété caractéristique de cette ligne consiste en ce que, *en tous les points de la ligne* (c), *la vitesse d'entraînement est tangente à la* *surface* (F) [ou à la surface (F′), puisque (F) et (F′) y admettent le même plan tangent].

Cette propriété équivaut à dire que, en tous les points de la courbe (c), la normale à la surface (F) [et (F′)] est une de celles qui sont *actuellement normales* aux trajectoires de leurs points et dont l'ensemble constitue le complexe linéaire $\mathcal{L}$ attaché au mouvement hélicoïdal tangent.

De la sorte, les normales à la surface (F) [et (F′)] en tous les points de la courbe (c) forment une surface réglée (Σ) contenue tout entière dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$, c'est-à-dire dont toutes les droites appartiennent à ce complexe.

9. *Éléments géométriques portés par la normale.* — Prenons sur la courbe (c) un point particulier M; soit a la normale au point M aux surfaces (F) et (F′).

Sur cette normale a se trouvent les éléments de courbure de la surface (F) et ceux de la surface (F′), savoir :

Les plans principaux Π_1 et Π_2 de (F), ainsi que les centres de courbure correspondants C_1 et C_2; les plans principaux Π'_1 et Π'_2 de (F′) ainsi que les centres de courbure correspondants C'_1 et C'_2.

Il y a en outre un autre élément particulièrement important; c'est la corrélation homographique H qui naît de la distribution des plans tangents à la surface (Σ) en tous les points de a.

A cette corrélation H nous associerons du reste sa corrélation rectangulaire G.

Le complexe linéaire $\mathcal{L}$ définit, sur la droite a qui lui appartient, une corrélation normale L. D'après le théorème énoncé plus haut, la corrélation H doit être en involution avec cette corrélation normale L.

On verra, dans un instant, comment se coordonnent sur la normale a les divers éléments que nous venons d'y reconnaître.

10. *Congruence des normales.* — Il est une remarque essentielle et qui domine cette théorie : c'est que, si l'on substitue à (F) un profil parallèle (F_1), le profil conjugué nouveau (F'_1) est, lui aussi, parallèle au profil conjugué ancien (F′).

De cette substitution, toutefois, il ne résulte aucune modification pour chacun des éléments ci-dessus introduits.

Cela tient à ce que toutes les surfaces parallèles à (F) ont *la même congruence de normales.*

Nous sommes dès lors amenés à présenter les éléments ci-dessus introduits en nous plaçant au point de vue des congruences.

Les éléments Π_1, Π_2, C_1, C_2 constituent les éléments focaux de la congruence des normales qui sont relatifs à la normale a de la surface (F).

Imaginons que dans le plan Π_2 et par le point C_1 on mène une droite arbitraire x_1, puis, par le point C_2, dans le plan Π_1 une droite x_2. La congruence linéaire qui admettrait x_1 et x_2 comme directrices est tangente à la congruence des normales en la droite a, ce qui signifie qu'une droite a' de la congruence des normales infiniment voisine de a peut être regardée, au second ordre près, comme appartenant à la congruence linéaire tangente, c'est-à-dire comme une sécante des droites x_1 et x_2.

11. *Détermination de la corrélation* Π. — Appliquons ceci à l'hypothèse où a' serait la génératrice de la surface (Σ) infiniment voisine de la droite a.

Les droites a, a' n'appartiennent pas seulement à la congruence des normales, elles appartiennent aussi au complexe linéaire $\mathfrak{C}$, comme il a été déjà dit et cela d'après la définition même de (Σ).

Puisque a coupe les deux droites x_1 et x_2 et que a' elle-même peut être regardée comme coupant ces deux droites, les droites x_1^0, x_2^0, conjuguées de x_1, x_2 dans le complexe $\mathfrak{C}$ coupent elles aussi a et a'.

On doit de plus remarquer que si l'on appelle C_1^0, C_2^0 les pôles des plans Π_1 et Π_2 dans le complexe, ces points sont respectivement ceux où la droite a est coupée par les droites x_2^0 et x_1^0; de même si l'on appelle Π_1^0 et Π_2^0 les plans polaires de C_1, C_2 dans le complexe $\mathfrak{C}$, ces plans passent par a et contiennent, le premier Π_1^0 la droite x_1^0, le second Π_2^0 la droite x_2^0. En effet, la droite x_1 étant issue du point C_1 dans le plan Π_2, sa conjuguée x_1^0 doit être contenue dans le plan Π_1^0 et passer au point C_2^0, tandis que x_2 étant issue du point C_2 dans le plan Π_1, sa conjuguée x_2^0 doit être issue du point C_1^0 dans le plan Π_2^0.

En résumé, des points C_1, C_2, C_2^0, C_1^0 de a sont respectivement issues les droites x_1, x_2, x_1^0, x_2^0, qui coupent la droite a' infiniment voisine de a sur (Σ); ces quatre droites sont respectivement tangentes en ces quatre points à cette surface. En conséquence, les plans Π_2, Π_1, Π_1^0, Π_2^0, menés par a et par ces quatre droites respectivement, sont les quatre plans tangents à (Σ) aux quatre points considérés. Dès lors, puisqu'on a appelé H la corrélation homographique qui donne la distribution des plans tangents à la surface (Σ) aux divers points de sa génératrice a, on peut énoncer le théorème suivant :

Les quatre couples d'éléments

$$(C_1, \Pi_2)\,(C_2, \Pi_1)\,(C_1^0, \Pi_2^0)\,(C_2^0, \Pi_1^0)$$

appartiennent à la corrélation H.

On aurait pu parvenir autrement à ce résultat en utilisant le théorème du Chapitre I, d'après lequel les corrélations H et L doivent être en involution.

Il est clair d'abord que puisque x_1, x_2 sont des sécantes de a, a' ce sont des tangentes en C_1, C_2 à la surface (Σ) et, par suite, Π_2 est le plan tangent en C_1, Π_1 le plan tangent en C_2, en sorte qu'on reconnaît tout de suite que (C_1, Π_2), (C_2, Π_1) sont deux couples d'éléments appartenant à H.

Maintenant, puisque L et H sont en involution, les homologues dans L des éléments d'un couple de H sont de nouveau les éléments d'un couple de H, ce qui fait que (C_2^0, Π_1^0), (C_1^0, Π_2^0) sont deux autres couples de H.

Ainsi la connaissance de deux couples de H suffit pour en faire connaître deux autres et donner par là la détermination complète de H.

Ce fait est très important puisqu'*il permet de déduire* H *de la connaissance des éléments de courbure de* (F) *et de celle du complexe linéaire* $\mathfrak{L}$, *attaché au mouvement hélicoïdal tangent.*

12. *Construction de la tangente à la courbe de contact.* — Une première application de ce résultat est celle qu'on en peut faire à la construction de la tangente au point M de la courbe de contact (c).

La tangente à cette courbe est en effet dans le plan tangent en M à la surface (Σ), c'est-à-dire dans le plan homologue de M dans la corrélation H; de plus, elle est normale à a. Donc :

La tangente à la courbe de contact (c) *au point* M *où* (F) *touche son enveloppe* (F') *est la perpendiculaire élevée à la normale* a *dans le plan homologue du point* M *dans la corrélation* H.

Si l'on substitue à (F) les diverses surfaces parallèles, le point M décrit la droite a tandis que la tangente en M à la courbe de contact décrit le paraboloïde hyperbolique de raccordement de la surface (Σ) le long de a, paraboloïde dont un plan directeur est précisément normal à a, tandis que le second est parallèle au plan asymptote de la corrélation H.

13. *Rôle de* H *et de* G *dans la détermination des éléments de courbure de* (F'). — Mais l'application la plus importante, celle qui tient le plus étroitement à la question que nous voulons solutionner ici, c'est celle qui concerne le rôle de la corrélation H dans la détermination des éléments de courbure du profil conjugué (F').

Il est clair que nous aurions pu parvenir à définir H en partant de la surface (F') au lieu de la surface (F) et reconnaître tout d'abord que la corrélation H admet aussi les éléments correspondants

$$(C'_1, \Pi'_2)\,(C'_2, \Pi'_1),$$

en sorte que la corrélation H se trouve déjà assujettir les éléments de courbure de la surface (F').

L'introduction de la corrélation G, rectangulaire avec H, et dont la détermination est équivalente à celle de H, permet de mettre sous une forme plus compréhensive les résultats.

Puisque Π_1, Π_2 sont rectangulaires, ainsi que Π'_1 et Π'_2; puisque, d'autre part, les couples d'éléments

$$(C_1, \Pi_2)\,(C_2 \Pi_1)\,(C'_1, \Pi'_2)\,(C'_2, \Pi'_1)$$

appartiennent à H, on peut conclure aussitôt ce théorème fondamental :

La corrélation G, *rectangulaire avec la corrélation* H, *admet* *comme couples d'éléments homologues*

$$(C_1, \Pi_1)(C_2, \Pi_2)(C'_1, \Pi'_1)(C'_2, \Pi'_2),$$

c'est-à-dire que tout centre de courbure principal tant de (F′) *que de* (F) *admet pour homologue dans* G *son plan de section principale correspondant.*

Ce résultat d'un énoncé si simple constitue un pas important vers la solution complète de notre problème, puisqu'il nous suffira désormais de connaître le dièdre rectangulaire des plans principaux Π'_1, Π'_2 de (F′) pour être à même de construire aussitôt les centres de courbure C'_1, C'_2 correspondants, attendu que ceux-ci ne sont autres que les homologues des faces de ce dièdre dans la corrélation G, corrélation que nous savons construire dès que nous aurons H, laquelle, à son tour, est pleinement définie par la condition d'admettre les couples (C_1, Π_2), (C_2, Π_1) formés des éléments de courbure de (F), et d'être en involution avec la corrélation normale du complexe linéaire $\mathcal{L}$ attaché au mouvement hélicoïdal tangent.

Ainsi, par le moyen de ce théorème, notre problème qui comportait trois inconnues, savoir le dièdre $\Pi'_1\Pi'_2$ et les points C'_1, C'_2 n'en comporte plus qu'une qui est la variable de position du dièdre rectangle des plans principaux.

14. *Sur le choix du groupement des surfaces en vue de la formulation d'une loi des courbures.* — Lorsque, dans la cinématique du mouvement d'une figure plane dans son plan, on veut arriver à formuler la loi des courbures à laquelle Euler, Savary, Bobillier ont attaché leurs noms, on sait qu'on groupe ensemble toutes les courbes qui, à un instant donné, sont normales à une même droite a issue du centre instantané I. On prend comme élément variable le centre de courbure C de l'une de ces courbes et l'on cherche comment lui correspond le centre de courbure C′ de la courbe conjuguée. On sait comment on arrive à constater que C et C′ se correspondent homographiquement sur la droite a, avec cette circonstance spéciale que les deux points doubles de cette homographie coïncident entre eux et avec le centre instantané I, par lequel doit passer, ainsi qu'on l'a dit, la normale a.

C'est un procédé analogue qu'il conviendra de suivre ici. Mais on conçoit que, si l'on se bornait à grouper toutes les surfaces (F) qui sont à un moment donné normales à une même droite a du complexe $\mathfrak{L}$, la loi de correspondance affecterait une forme singulièrement complexe puisqu'il y subsisterait d'arbitraires les trois paramètres de position sur a des éléments de courbure de (F), auxquels il faudrait faire correspondre les trois paramètres analogues pour (F′). Mais le théorème précédent suggère une voie à suivre beaucoup plus simple et qui, en fait, conduit à des résultats beaucoup plus maniables.

En conséquence, afin d'obtenir une coordination meilleure des résultats, nous grouperons ensemble les diverses surfaces (F) qui, non seulement seront normales à une même droite a du complexe $\mathfrak{L}$, mais encore qui donneront lieu sur cette droite à la même corrélation H et, par suite, à la même corrélation G. Nous dirons de ces surfaces qu'elles *admettent* la même corrélation G.

Dans ces conditions, les surfaces (F′) conjuguées des (F) sont elles aussi normales à a et y admettent également la corrélation G.

Dès lors, *la correspondance entre les éléments de courbure des* (F) *et des* (F′) *se réduira à celle qui relie les dièdres rectangles de leurs plans principaux.*

Faisons du reste bien remarquer que, pour qu'une surface (F) puisse être réputée *admettre* la corrélation G, il est nécessaire et suffisant que les couples (C_1, Π_1), (C_2, Π_2), formés de ses éléments principaux, appartiennent à la corrélation G.

S'il en est en effet ainsi, la corrélation rectangulaire admet les couples (C_1, Π_2), (C_2, Π_1) et si, comme on doit le supposer, elle est en involution avec la corrélation L du complexe, elle n'est autre que la corrélation appelée H dans les numéros précédents et qui définit la distribution des plans tangents à la surface (Σ) le long de la droite a.

Ainsi, de même que dans la cinématique du plan on se donne *a priori* la normale a, *laquelle doit être issue du centre instantané de rotation* I, de même ici nous nous donnerons *a priori* la corrélation G *sur une droite a du complexe* $\mathfrak{L}$.

Mais cette corrélation n'est pas arbitraire. *Sa rectangulaire* H *doit, en effet, être en involution avec la corrélation normale* L *du complexe* $\mathfrak{L}$ et, par suite, elle se trouve elle-même en involution avec la corrélation L_0 rectangulaire avec L. Tel est l'assujettissement de la corrélation G. A part cela, elle est quelconque.

Le meilleur moyen de nous donner G, c'est de nous donner d'abord la droite a, choisie arbitrairement dans le complexe $\mathfrak{C}$, puis le point central A et le plan central Ω. La condition d'être en involution avec L_0 achève de définir G, c'est-à-dire son paramètre de distribution $\varkappa$.

15. *Calcul du paramètre de* G. *Trièdre central.* — Nous allons du reste chercher à déterminer la valeur de ce paramètre. Je considère à cet effet le trièdre trirectangle Θ_0 dont A (point central de G) est le sommet, a une première arête, une seconde arête a_1 étant la normale élevée en A à a dans le plan Ω, et enfin la troisième arête a_2 étant la normale en A au plan central Ω.

Ce trièdre Θ_0, lié au complexe $\mathfrak{C}$ par son arête a, est, à cela près, arbitraire et, lui connu, la corrélation G est pleinement déterminée. Nous l'appellerons le *trièdre central* de la corrélation G en raison de ses relations avec les éléments centraux de cette corrélation.

Considérons le trièdre Θ, solidaire du corps S et coïncidant *actuellement* avec Θ_0 : nous appellerons axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ les axes de ce trièdre qui coïncident actuellement avec les axes de même nom du trièdre Θ_0; enfin P sera le point du corps S qui coïncide actuellement avec le point A; P est ainsi l'origine du trièdre Θ.

Dans le mouvement de S par rapport à S' le point P possède une vitesse dont les projections sur les axes du trièdre Θ seront représentées par

$$u, \quad u_1, \quad u_2$$

respectivement. On peut remarquer que u, projection sur l'axe a du trièdre Θ, est *actuellement* nulle, mais sa dérivée par rapport au temps, $u' = \frac{du}{dt}$, ne l'est point, ainsi que nous aurons l'occasion de l'expliquer plus loin.

Nous représenterons aussi par ω, ω_1, ω_2 les projections sur les axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ de la vitesse angulaire représentée à la manière ordinaire par un vecteur. Dans ces conditions, si l'on désigne par X, X_1, X_2 les coordonnées d'un point M du corps S par rapport aux axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ, la vitesse d'entraînement de M aura comme projections sur les axes a, a_1, a_2

$$(8)\qquad \begin{cases} u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1, \\ u_1 + \omega_2 X - \omega X_2, \\ u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X. \end{cases}$$

Le plan polaire du point M dans le complexe $\mathfrak{C}$ qui est, comme on sait, le plan normal en M à la vitesse de M aura, comme équation, les coordonnées courantes étant Y, Y_1, Y_2,

$$(9)\qquad \begin{cases} (u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1)(Y - X) \\ +(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2)(Y_1 - X_1) \\ +(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X)(Y_2 - X_2) = 0. \end{cases}$$

Si, en particulier, ce point M est sur la droite a on a

$$X_1 = X_2 = 0,$$

et il vient

$$u(Y - X) + (u_1 + \omega_2 X) Y_1 + (u_2 - \omega_1 X) Y_2 = 0,$$

et comme $u = 0$, cela se réduit à

$$(10)\qquad (u_1 + \omega_2 X) Y_1 + (u_2 - \omega_1 X) Y_2 = 0,$$

équation du plan Π, polaire du point $M(0, 0, X)$. On voit que $\tang\theta$, où θ est l'angle du plan Π avec le plan Ω, est égal à la valeur de $Y_2 : Y_1$, en sorte que l'équation de la corrélation L s'écrit

$$(11)\qquad (u_1 + \omega_2 r) + (u_2 - \omega_1 r)\tang\theta = 0,$$

en mettant r au lieu de X.

D'un autre côté, puisque le plan Ω [ou (a, a_1)] est le plan central de la corrélation G, celui de H est le plan (a, a_2) obtenu en faisant tourner le plan Ω de $\frac{\pi}{2}$ autour de a. En conservant A et Ω pour origines, et $\varkappa$ étant toujours le paramètre de distribution de G, égal à celui de H, l'équation de la corrélation H s'écrira

$$(12)\qquad r - \varkappa \tang\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ou

$$(13)\qquad r \tang\theta + \varkappa = 0.$$

En exprimant l'involution des corrélations H et L au moyen de l'équation déjà trouvée au Chapitre I,

$$af' - bc' - cb' + fa' = 0, \tag{14}$$

où l'on doit faire ici,

$$\begin{array}{llll} a = -\omega_1, & b = \omega_2, & c = u_2, & f = u_1, \\ a' = 1, & b' = 0, & c' = 0, & f' = x, \end{array}$$

on trouve

$$-\omega_1 x + u_1 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{u_1}{\omega_1}. \tag{15}$$

En conséquence, *le paramètre de distribution de la corrélation* G, *lorsqu'on se donne son point central et son plan central, est égal au rapport des projections, sur l'axe a_1 du trièdre central, de la vitesse du point central considéré comme appartenant au corps* S *et du vecteur représentatif de la vitesse angulaire dans le mouvement de* S *par rapport à* S'.

CHAPITRE III.

CORRESPONDANCE ENTRE LES DIÈDRES DROITS PRINCIPAUX DES PROFILS SUPERFICIELS CONJUGUÉS.

16. *Introduction d'un couple particulier de surfaces conjuguées.* — Conformément à la méthode indiquée au n° **14**, nous allons nous occuper de la correspondance existant entre les dièdres droits principaux de deux profils conjugués (F), (F') admettant la même corrélation G sur la normale commune a, celle-ci prise dans le complexe linéaire $\mathfrak{L}$.

Nous devrons, dans cette recherche, utiliser la remarque déjà faite qu'on peut sans inconvénient substituer aux profils considérés des surfaces qui leur soient parallèles. Il n'en résulte aucune modification pour les éléments de courbure. Nous verrons cependant qu'on peut y puiser des moyens de simplifications. Il est, du reste, à peine besoin de faire remarquer que deux surfaces parallèles appartiennent en même temps à une corrélation G donnée, puisqu'elles ont les mêmes éléments de courbure.

Parmi les surfaces parallèles à la surface (F), nous prendrons, en particulier, celle qui fait ACTUELLEMENT son contact avec sa conjuguée au point central A de la corrélation G. Nous appellerons (F_0) cette surface et (F'_0) sa conjuguée.

Ces surfaces présentent, comme on va le voir, des affections toutes spéciales :

En premier lieu, si l'on appelle (c_0) leur courbe de contact actuelle, la tangente en A à cette courbe de contact est, d'après le n° **12**, la normale élevée en A à la droite a dans le plan central de H; c'est donc la droite a_2. Ainsi :

La tangente en A *à la courbe de contact* (c_0) *des surfaces* (F_0), (F'_0) *qui font actuellement leur contact au point central* A *est l'axe* a_2 *du trièdre central de la corrélation* G.

17. *Courbure totale des surfaces* (F_0) *et* (F'_0). — Une autre propriété des surfaces (F_0), (F'_0) a trait à leur courbure totale au point A.

Les vecteurs $\overline{AC_1}$, $\overline{AC_2}$, $\overline{AC'_1}$, $\overline{AC'_2}$ portés par la normale a sont les propres rayons de courbure de ces surfaces. Nous désignerons par r_1, r_2, r'_1, r'_2 les nombres qui les mesurent, et par θ_1, θ_2, θ'_1, θ'_2 les angles que font avec le plan central Ω les plans principaux correspondants Π_1, Π_2, Π'_1, Π'_2 de ces surfaces.

Puisque (C_1, Π_1), (C_2, Π_2), (C'_1, Π'_1), (C'_2, Π'_2) sont des couples d'éléments homologues de la corrélation G, nous devrons avoir

$$(16)\qquad \begin{cases} r_1 = \varkappa \operatorname{tang}\theta_1, & r_2 = \varkappa \operatorname{tang}\theta_2, \\ r'_1 = \varkappa \operatorname{tang}\theta'_1, & r'_2 = \varkappa \operatorname{tang}\theta'_2, \end{cases}$$

sans oublier que les dièdres Π_1, Π_2 et Π'_1, Π'_2 étant rectangles, on a

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}, \qquad \theta'_2 = \theta'_1 + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\theta_1 \operatorname{tang}\theta_2 = \operatorname{tang}\theta'_1 \operatorname{tang}\theta'_2 = -1.$$

Dès lors on tire des formules (16) celles-ci,

$$r_1 r_2 = r'_1 r'_2 = -\varkappa^2,$$

ou encore

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r'_1 r'_2} = -\frac{1}{\varkappa^2}. \tag{17}$$

Donc :

Les profils conjugués (F_0), (F'_0) *qui font* ACTUELLEMENT *leur contact au point central* A *de la corrélation* G *qu'ils admettent, ont leurs courbures totales en ce point égales, négatives et égales en valeur absolue à l'inverse du carré du paramètre de distribution* $\varkappa$ *de la corrélation* G.

18. *Les tangentes asymptotiques des surfaces* (F_0) *et* (F'_0). — Puisque les surfaces (F_0) et (F'_0) ont au point A chacune une courbure totale négative, leurs courbures principales en ce point sont opposées et leurs tangentes asymptotiques y sont réelles.

Nous allons constater que cette remarque peut être précisée et complétée de la manière la plus élégante et la plus simple.

Reprenons en effet la considération du trièdre Θ solidaire du corps S, et qui coïncide *actuellement* avec le trièdre central Θ_0. Ce trièdre Θ nous a déjà servi au n° **15**.

Rapportée à ce trièdre Θ, la surface (F_0), qui passe au point A et y admet l'axe a du trièdre Θ pour normale, aura une équation de la forme suivante en coordonnées rectangulaires X, X_1, X_2,

$$X = \frac{1}{2}(RX_1^2 + 2SX_1X_2 + TX_2^2) + \star. \tag{18}$$

où l'étoile indique des termes en X_1, X_2 d'ordre 3, 4, etc.

Si l'on prend de même un trièdre Θ' solidaire du corps S', coïncidant *actuellement* avec le trièdre Θ_0, l'équation de la surface (F'_0) rapportée à ce trièdre Θ' sera

$$X' = \frac{1}{2}(R'X'^2_1 + 2S'X'_1X'_2 + T'X'^2_2) + \star. \tag{19}$$

Si l'on désigne par P, Q les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial X_1}$, $\frac{\partial X}{\partial X_2}$, ces dérivées P, Q s'annulent au point A, tandis que R, S, T sont les valeurs en A des dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1 \partial X_2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_2^2}$. Semblablement, pour la surface (F'_0), les dérivées partielles $P' = \frac{\partial X'}{\partial X'_1}$, $Q' = \frac{\partial X'}{\partial X'_2}$ sont nulles en A, tandis que R′, S′, T′ sont les valeurs en ce point des dérivées partielles $\frac{\partial^2 X'}{\partial X'^2_1}$, $\frac{\partial^2 X'}{\partial X'_1 \partial X'_2}$, $\frac{\partial^2 X'}{\partial X'^2_2}$.

Ceci posé, d'après les résultats les plus classiques, les éléments de courbure de la surface (F_0) au point A sont fournis par le système d'équations

$$\frac{R\cos\theta + S\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{S\cos\theta + T\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{r}, \tag{20}$$

où r représente l'une des quantités déjà appelées r_1, r_2 et θ l'un des angles correspondants θ_1, θ_2.

Mais puisque les couples (C_1, H_1), (C_2, H_2) vérifient les relations (16), qui expriment qu'ils appartiennent à la corrélation G, on peut adjoindre aux équations (20) la suivante

$$r = \varkappa \operatorname{tang}\theta, \tag{21}$$

qui doit s'accorder avec elles.

En tirant alors r de cette équation (21) pour en porter la valeur dans les équations (20) on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &S(\operatorname{tang}^2\theta - 1) + (R - T)\operatorname{tang}\theta = 0,\\ &S\operatorname{tang}^2\theta - \frac{1}{\varkappa} + R\operatorname{tang}\theta = 0. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Ces deux équations du second degré en tangθ doivent admettre les mêmes racines tangθ_1, tangθ_2; puisque le coefficient de tang$^2\theta$ est le même dans les deux, on a donc

$$S = \frac{1}{\varkappa} \tag{23}$$

et

$$T = 0. \tag{24}$$

En opérant de même pour la surface (F'_0) on trouverait

$$S' = \frac{1}{\varkappa}, \tag{25}$$

$$T' = 0. \tag{26}$$

Or, si l'on se reporte aux équations (18) et (19), on reconnaît que le faisceau des tangentes asymptotiques est représenté pour chacune de ces surfaces par les équations respectives

$$(27)\qquad R\,X_1^2 + 2S\,X_1X_2 + TX_2^2 = 0,$$

$$(28)\qquad R'X_1^2 + 2S'X_1X_2 + T'X_2^2 = 0.$$

Les conditions $T = 0$, $T' = 0$ expriment donc ce fait remarquable que la droite

$$X_1 = 0,$$

c'est-à-dire l'axe a_2 du trièdre Θ_0, est une tangente asymptotique commune.

De là ce théorème :

Les profils conjugués (F_0), (F'_0) *qui admettent la corrélation* G *et font* ACTUELLEMENT *leur contact au point central* A *de cette corrélation admettent en ce point une tangente asymptotique commune, à savoir : l'axe* a_2 *du trièdre central, axe qui a déjà été reconnu tangent en* A *à la courbe de contact* (c_0).

On peut ajouter que, d'après les équations (20), les rayons principaux r_1, r_2 sont donnés par l'équation

$$\left(\frac{1}{r} - T\right)\left(\frac{1}{r} - R\right) = S^2,$$

qui, en vertu des équations (23), (24), se réduit à

$$(29)\qquad \frac{1}{r^2} - \frac{R}{r} - \frac{1}{x^2} = 0,$$

tandis qu'on aurait pour la surface (F'_0) l'équation

$$(29')\qquad \frac{1}{r'^2} - \frac{R'}{r'} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

On voit ainsi que les relations

$$S = S' = \frac{1}{x}$$

ne sont qu'une nouvelle vérification des équations déjà démontrées plus haut

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r'_1 r'_2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Faisons encore remarquer que, en l'espèce, les coefficients R, R', les seuls par lesquels se différentient les propriétés du second ordre des surfaces (F_0), (F'_0), représentent respectivement les courbures moyennes des deux surfaces, car des équations (29), (29') on peut conclure

$$(30) \qquad R = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \qquad R' = \frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}.$$

19. *Rôle des secondes tangentes asymptotiques des surfaces* (F_0), (F'_0). — Puisqu'il apparaît que les propriétés infinitésimales des surfaces (F_0), (F'_0) ne se différentient que par les valeurs des coefficients R, R', dans les équations (18), (19) de ces surfaces qui, grâce aux équations (23), (24), (25), (26) prennent la forme

$$X = \frac{1}{2}\left(RX_1^2 + \frac{2}{\varkappa}X_1X_2\right) + \star,$$
$$X' = \frac{1}{2}\left(R'X_1'^2 + \frac{2}{\varkappa}X'_1X'_2\right) + \star,$$

on peut conclure qu'une correspondance entre les éléments du second ordre de ces surfaces se traduit par une correspondance analytique entre les quantités R et R'.

Du reste, cette forme donnée à notre problème est en entière harmonie avec la méthode que nous nous étions proposée au début de ce Chapitre.

Soient en effet AD, AD' les secondes tangentes asymptotiques de ces surfaces (F_0), (F'_0) au point A ; soient φ, φ' les angles qu'elles font avec l'axe a_1 du trièdre central; d'après les équations (27), (28), où l'on fait

$$T = T' = 0, \qquad S = S' = \frac{1}{\varkappa},$$

les angles φ, φ' sont liés à R, R' par les relations

$$(31) \qquad \begin{cases} R + \dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi = 0, \\ R' + \dfrac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi' = 0, \end{cases}$$

en sorte que la correspondance entre R et R' revient géométriquement à une correspondance entre les secondes tangentes asymptotiques AD, AD′.

Comme, du reste, les plans principaux Π_1, Π_2 bissectent l'angle de l'axe a_2 et de la droite AD, et que, de même, les plans principaux Π'_1, Π'_2 bissectent l'angle de a_2 et de la droite AD′, on voit que la correspondance entre R et R′ ou, ce qui revient au même, entre les tangentes AD, AD′, réalisera sous une forme éminemment simple la correspondance entre les dièdres droits formés par les plans principaux.

20. *Recherche directe des éléments de courbure.* — Pour établir la correspondance cherchée, nous allons procéder à une recherche directe des éléments de courbure de la surface (F'_0) et, POUR COMMENCER, *d'une surface* (F′) *quelconque*, nous réservant d'exprimer, au moment voulu, que le contact se faisant au point A, les profils sont les surfaces appelées (F_0), (F'_0) aux numéros précédents.

Nous prendrons encore le trièdre Θ solidaire du corps S qui a été déjà à deux reprises utilisé.

Soit $M(X, X_1, X_2)$ un point de la surface (F); en conservant les notations P, Q pour les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial X_1}$, $\frac{\partial X}{\partial X_2}$ (*voir* n° **18**), les équations de la normale en M à la surface (F) seront

$$(32) \qquad \begin{cases} Y_1 + PY = X_1 + PX, \\ Y_2 + QY = X_2 + QX; \end{cases}$$

nous appelons, comme on voit, Y, Y_1, Y_2 les coordonnées rectangulaires courantes d'un point de la normale.

Si le point M se trouve sur la courbe actuelle (c) de contact de (F) avec son profil conjugué, cette normale MN est aussi normale à la surface conjuguée (F′). C'est ce qu'on exprimera en écrivant qu'au point M la vitesse d'entraînement, dont les formules (8), n° **15**, donnent les projections, est située dans le plan tangent; de là l'équation *essentielle*,

$$(33) \quad -(u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1) + P(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + Q(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X) = 0.$$

On sait, du reste, que la valeur actuelle de u est nulle, puisque l'axe a du trièdre Θ est *actuellement* une droite *normale à la trajectoire de* *chacun de ses points*, c'est-à-dire une droite du complexe $\mathfrak{C}$. La dérivée $u' = \frac{du}{dt}$ ne serait nulle que si cette droite demeurait encore normale à la trajectoire de chacun de ses points à l'époque suivante. Dans ce cas, elle appartiendrait non seulement au complexe $\mathfrak{C}$, mais aussi au complexe linéaire infiniment voisin. Ce serait donc une de ces droites que j'ai appelées *normales stationnaires* dans mon Mémoire des *Savants étrangers* ([1]).

Nous aurons occasion de revenir sur ce point.

A chaque instant, l'équation (33) définit sur (F) la courbe (c), et, du fait que M est sur cette courbe, MN n'est pas seulement normale à (F), elle est aussi normale en M à (F').

Nous allons chercher à déplacer MN DANS LE CORPS S', de manière que cette droite engendre un élément de surface développable; nous aurons ainsi les éléments de courbure de (F').

Il nous faudra trouver sur MN un point C' mobile avec MN qui ait, DANS S', une vitesse dirigée suivant la droite MN elle-même.

Soient Y, Y_1, Y_2 les coordonnées de ce point C', par rapport au trièdre Θ; ces coordonnées vérifient tout d'abord les équations (32) de la normale MN. Comme les projections de la vitesse du point C', *dans un mouvement par rapport à* S', projections faites sur les axes du trièdre Θ, ont pour valeurs

$$u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}, \qquad u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt}, \qquad u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt},$$

on exprimera que cette vitesse est dirigée suivant la normale MN en écrivant

$$\frac{u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1}{-1} + \frac{dY}{dt} = \frac{u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt}}{P} = \frac{u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt}}{Q},$$

ou encore

$$(34) \quad \begin{cases} u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + \frac{dY_1}{dt} + P\left(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}\right) = 0, \\ u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + \frac{dY_2}{dt} + Q\left(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1 + \frac{dY}{dt}\right) = 0. \end{cases}$$

([1]) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 36.

On peut transformer aisément ces équations, car en différentiant les équations (32) de la normale nous aurons

$$\frac{dY_1}{dt} + P\frac{dY}{dt} = -Y\frac{dP}{dt} + \frac{d}{dt}(X_1 + PX),$$

$$\frac{dY_2}{dt} + Q\frac{dY}{dt} = -Y\frac{dQ}{dt} + \frac{d}{dt}(X_2 + QX),$$

en sorte que les équations (34) deviennent

$$(35)\quad \begin{cases} u_1 + \omega_2 Y - \omega Y_2 + P(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1) - Y\dfrac{dP}{dt} + \dfrac{d}{dt}(X_1 + PX) = 0, \\ u_2 + \omega Y_1 - \omega_1 Y + Q(u + \omega_1 Y_2 - \omega_2 Y_1) - Y\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{d}{dt}(X_2 + QX) = 0. \end{cases}$$

Enfin, il ne faut pas oublier qu'au cours du mouvement, le point M ne doit pas cesser d'être situé sur la courbe de contact (c) des surfaces (F), (F′), sans cela MN cesserait d'être normale à la fois à (F) et à (F′). L'équation (33), qui exprime cette condition, doit donc être toujours vérifiée.

Nous ferons même, au sujet de cette équation, une remarque importante. Si à chaque époque t du mouvement il y a sur la surface (F) une courbe (c) de contact avec sa conjuguée (F′), inversement, la surface (F) étant balayée par cette courbe (c) au cours du mouvement, tout point M de cette surface (F) devient, à une certaine époque t, un point de contact de (F) avec son profil conjugué. A cet égard, t peut être considéré comme une fonction du point M ou de ses coordonnées. C'est précisément l'équation (33) qui définit ainsi t en fonction de X_1, X_2.

Les dérivées partielles de t en X_1 et X_2 s'obtiendront donc en appliquant la méthode ordinaire des fonctions implicites. Il nous sera utile de faire ici ce calcul.

Désignons par Φ, pour abréger, le premier membre de l'équation (33),

$$(36)\quad \Phi = -(u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1) + P(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + Q(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X).$$

Il viendra, en convenant d'appeler R, S, T les dérivées partielles $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_1 \partial X_2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial X_2^2}$,

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial X_1} &= Q\omega - PQ\omega_1 + (1+P^2)\omega_2 \\
&\quad + R(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + S(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial X_2} &= -P\omega - (1+Q^2)\omega_1 - PQ\omega_2 \\
&\quad + S(u_1 + \omega_2 X - \omega X_2) + T(u_2 + \omega X_1 - \omega_1 X),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial t} &= -(u' + \omega'_1 X_2 - \omega'_2 X_1) \\
&\quad + P(u'_1 + \omega'_2 X - \omega' X_2) + Q(u'_2 + \omega' X_1 - \omega'_1 X);
\end{aligned}\right.$$

on a désigné par u', u'_1, u'_2, ω', ω'_1, ω'_2 les dérivées de u, u_1, u_2, ω, ω_1, ω_2 par rapport au temps t.

On aura d'après cela

$$(38)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial X_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X_1} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial X_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X_2} = 0.$$

Notons encore que si l'on adjoint au système des équations (35) l'équation obtenue en différentiant totalement l'équation (33) on obtiendra l'équation

$$(39)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial X_2}\frac{dX_2}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

21. *Introduction des simplifications tenant au choix actuel des axes.* — Introduisons actuellement les hypothèses simplifiantes d'après lesquelles l'axe a du trièdre est précisément la normale commune aux surfaces conjuguées (F), (F'), sans supposer toutefois encore qu'il s'agisse des surfaces (F_0), (F'_0) qui font leur contact au point A. Souvenons-nous aussi que, dans ce qui va suivre, il ne peut plus s'agir que des *valeurs actuelles* des quantités en jeu. Il faudra faire

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0, \qquad u = 0.$$

Les équations de la normale donnent d'abord, équation (32),

$$(40)\qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$

L'équation (33) se réduit à une identité, u étant *actuellement* nul.

Les équations (35), en y remplaçant $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$ par leurs valeurs

$$R\frac{dX_1}{dt}+S\frac{dX_2}{dt},\quad S\frac{dX_1}{dt}+T\frac{dX_2}{dt},$$

deviennent

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1+\omega_2 Y-(Y-X)\left(R\frac{dX_1}{dt}+S\frac{dX_2}{dt}\right)+\frac{dX_1}{dt}=0,\\ &u_2-\omega_1 Y-(Y-X)\left(S\frac{dX_1}{dt}+T\frac{dX_2}{dt}\right)+\frac{dX_2}{dt}=0,\end{aligned}\right.$$

quant à $\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial X_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ elles se réduisent à

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial X_1}&=\omega_2+R(u_1+\omega_2 X)+S(u_2-\omega_1 X)=\Xi_1,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial X_2}&=-\omega_1+S(u_1+\omega_2 X)+T(u_2-\omega_1 X)=\Xi_2,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t}&=-u',\end{aligned}\right.$$

Nous appellerons, pour abréger, Ξ_1, Ξ_2 ces valeurs actuelles de $\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial X_2}$, en sorte que les valeurs actuelles de $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$, d'après les formules (38), seront données par les équations suivantes, qui nous seront très utiles plus loin,

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} u'\frac{\partial t}{\partial X_1}&=\Xi_1,\\ u'\frac{\partial t}{\partial X_2}&=\Xi_2.\end{aligned}\right.$$

L'équation (39) enfin deviendra

$$(44)\qquad \Xi_1\frac{dX_1}{dt}+\Xi_2\frac{dX_2}{dt}-u'=0.$$

Si nous considérons la vitesse du point M sur la surface (F') dans le corps S', ses projections, données par les formules générales

$$\begin{aligned} &u_1+\omega_2 X-\omega\ X_2+\frac{dX_1}{dt},\\ &u_2+\omega\ X_1-\omega_1 X+\frac{dX_2}{dt},\\ &u\ +\omega_1 X_2-\omega_2 X_1+\frac{dX}{dt},\end{aligned}$$

se réduiront ici à

$$(45)\qquad \begin{cases} v_1 = u_1 + \omega_2 X + \dfrac{dX_1}{dt}, \\ v_2 = u_2 - \omega_1 X + \dfrac{dX_2}{dt}. \end{cases}$$

La troisième projection est d'ailleurs nulle, car la droite a est normale à la surface (F'). Nous avons, comme on voit, désigné par v_1, v_2 les projections de cette vitesse sur les axes a_1, a_2. Ce sont ces projections que nous introduisons dans les formules au lieu de $\dfrac{dX_1}{dt}$, $\dfrac{dX_2}{dt}$.

Avec ces notations, les équations (41), (44) se laissent écrire

$$(46)\qquad \begin{cases} v_1 - (Y - X)(R v_1 + S v_2 - \Xi_1) = 0, \\ v_2 - (Y - X)(S v_1 + T v_2 - \Xi_2) = 0, \\ \Xi_1 v_1 + \Xi_2 v_2 - \Xi = 0, \end{cases}$$

en posant encore

$$(47)\qquad \Xi = \Xi_1(u_1 + \omega_2 X) + \Xi_2(u_2 - \omega_1 X) + u'.$$

Le plan Π' qui passe par a et par la vitesse du point M [dans son mouvement sur (F')] est un plan principal de la surface (F'), tandis que $Y - X$, qui mesure le vecteur $\overline{MC'}$, n'est autre que le rayon de courbure correspondant que je désignerai par ρ' :

$$(48)\qquad Y - X = \rho'.$$

L'angle que fait le plan principal Π' avec le plan Ω étant désigné par θ' on aura

$$(49)\qquad \begin{cases} v_1 = m\cos\theta', \\ v_2 = m\sin\theta', \end{cases}$$

où m est précisément la grandeur même de la vitesse de M.

Introduisons ces expressions de v_1, v_2 dans les formules (46), elles deviennent

$$(50)\qquad \begin{cases} \cos\theta' - \rho'\left(R\cos\theta' + S\sin\theta' - \dfrac{\Xi_1}{m}\right) = 0, \\ \sin\theta' - \rho'\left(S\cos\theta' + T\sin\theta' - \dfrac{\Xi_2}{m}\right) = 0, \\ \Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta' - \dfrac{\Xi}{m} = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination de $\frac{1}{m}$ au moyen de la dernière de ces équations, les deux premières deviennent

$$(51)\quad \begin{cases} \cos\theta' - \rho'\left[R\cos\theta' + S\sin\theta' - \frac{\Xi_1}{\Xi}(\Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta')\right] = 0, \\ \sin\theta' - \rho'\left[S\cos\theta' + T\sin\theta' - \frac{\Xi_2}{\Xi}(\Xi_1\cos\theta' + \Xi_2\sin\theta')\right] = 0. \end{cases}$$

Telles sont les deux équations dont le système définit les éléments de courbure de (F').

22. *Remarque sur le cas des surfaces continuement osculatrices.* — Avant d'aller plus loin, nous pourrons examiner d'ores et déjà les circonstances d'un fait important, celui où les surfaces (F) (F') seraient osculatrices au point M, c'est-à-dire auraient les mêmes éléments de courbure.

Les éléments de courbure ρ, θ de la surface (F) seraient évidemment fournis par le système d'équations

$$(52)\quad \begin{cases} \cos\theta - \rho(R\cos\theta + S\sin\theta) = 0, \\ \sin\theta - \rho(S\cos\theta + T\sin\theta) = 0. \end{cases}$$

Si l'on rapproche ces équations des deux premières équations (50) qui fournissent ρ' et θ', on voit qu'on ne pourra avoir $\rho' = \rho$, $\theta' = \theta$ qu'à la condition d'avoir

$$\Xi_1 = 0, \qquad \Xi_2 = 0.$$

Or ici une distinction essentielle s'impose, selon que cette circonstance devra se présenter accidentellement ou bien continuement pendant tout le cours du mouvement.

Si cette circonstance a lieu pendant tout le cours du mouvement, l'époque t où un point X_1, X_2 de la surface (F) est sur la courbe de contact de (F) avec son profil conjugué est une fonction parfaitement déterminée des coordonnées de ce point admettant des dérivées partielles $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$ non constamment nulles.

Dès lors, les formules (43)

$$u'\frac{\partial t}{\partial X_1} = \Xi_1, \qquad u'\frac{\partial t}{\partial X_2} = \Xi_2,$$

donneront, comme conséquence de $\Xi_1 = 0$, $\Xi_2 = 0$,

$$u' = 0,$$

en sorte que, dans ce cas, la normale a à la surface (F) est une *normale stationnaire*.

Dans mon Mémoire des *Savants étrangers* sur *Les courbes conjuguées* (¹) j'ai considéré les surfaces solidaires du corps S possédant la propriété que les normales de la surface qui, à un instant donné t, font partie du complexe $\mathfrak{C}$ et sont ainsi, déjà, des normales aux trajectoires de leurs points, soient, par surcroît, des normales stationnaires. J'ai prouvé que ces surfaces, qui vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, possèdent la propriété d'être constamment osculatrices à leur profil conjugué tout du long de la courbe de contact.

On voit que le résultat précédent est la réciproque de ce théorème :

Les seules surfaces solidaires d'un corps solide en mouvement par rapport à un autre, qui ont constamment un contact du second ordre avec leur profil conjugué en tous les points de la courbe de contact, sont les surfaces dont les normales sont, chacune à une certaine époque, des normales stationnaires (²).

Ces surfaces remarquables peuvent se définir ainsi. Si l'on considère un point P du corps S, la direction de sa vitesse d'entraînement dans son mouvement par rapport au corps S′ décrit, dans le corps S lui-même, un cône de sommet P parfaitement déterminé, Γ_P. Les surfaces en question peuvent être définies par la condition d'être tangentes en chacun de leurs points P au cône Γ_P qui a ce point pour sommet. Cela équivaut, on le sait, à une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour ces surfaces, ainsi du reste que je l'ai déjà indiqué plus haut.

23. *Circonstances spéciales de l'osculation accidentelle.* — Mais

(¹) C. C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV, p. 185 et suivantes).

(²) J'ai énoncé ce théorème réciproque dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 20 novembre 1911.

lorsque l'osculation entre les surfaces (F) (F′) n'est plus une circonstance continuelle de leur contact, il n'y a plus de difficulté à admettre que $\frac{\partial t}{\partial X_1}$, $\frac{\partial t}{\partial X_2}$ deviennent *accidentellement* nulles en sorte que, dans ce cas, la conclusion $u' = 0$ ne s'impose plus.

Il pourra donc se faire que deux profils conjugués (F) (F′) soient *accidentellement* osculateurs, c'est-à-dire aient mêmes éléments de courbure, et cela à un instant donné et en un point donné, sans que, pour cela, on puisse en conclure que la normale en M est une normale stationnaire.

Il se présente cependant ici un fait spécial que nous ne saurions passer sous silence.

Si les éléments de courbure sont les mêmes pour les surfaces (F), (F′), il résulte, des deux premières formules (50), que Ξ_1, Ξ_2 sont nuls tous deux, ainsi qu'on l'a dit déjà. La dernière des équations (50) se réduit alors à

$$\frac{1}{m}\Xi = 0.$$

et comme, d'après l'équation (47), Ξ se réduit alors à u', l'équation précédente s'écrit

$$\frac{1}{m}u' = 0.$$

Du moment où u' n'est pas supposé nul, c'est $\frac{1}{m}$ qui doit l'être ; ainsi m est infini. Dire que m est infini, c'est dire que v_1 et v_2 le sont ainsi que $\frac{dX_1}{dt}$, $\frac{dX_2}{dt}$, d'après les formules (45).

Du reste cette conclusion concorde aussi avec le fait que, dans l'équation (44), Ξ_1, Ξ_2 puissent être nuls sans que u' le soit.

Il importait de mettre en évidence cette curieuse singularité dont on peut se rendre compte en remarquant que, puisque les surfaces (F), (F′) ont à l'époque t mêmes éléments du second ordre, on peut, sans changer leur position relative et, par conséquent, sans faire varier le paramètre t dont elle dépend, effectuer sur (F) et sur (F′) un déplacement de M dans lequel la normale MN engendre *en même temps* dans les deux surfaces un élément de surface développable. Si

ds est l'amplitude d'un tel déplacement, le quotient $m = \frac{ds}{dt}$ apparaît comme infini puisque t ne varie pas lorsqu'il s'effectue. La chose apparaît encore plus clairement si, au lieu de regarder t comme le temps, on le considère simplement comme le paramètre dont dépend la position relative des deux corps S et S'.

Cette circonstance remarquable méritait certainement d'être soulignée.

24. *Dernière simplification des formules. Relation homographique entre* R *et* R'. — Si nous n'avons pas encore introduit dans nos hypothèses les simplifications résultant de la considération des surfaces (F_0), (F'_0) spéciales qui font leur contact au point central A de G, c'est que nous voulions précisément, au préalable, étudier la question importante qui fait l'objet du numéro précédent.

Supposons donc maintenant qu'il s'agisse des surfaces (F_0), (F'_0) en sorte qu'on puisse prendre

$$X = 0, \qquad T = 0, \qquad S = \frac{1}{\varkappa} = \frac{\omega_1}{u_1}.$$

On a, dans ce cas,

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Xi_1 &= \omega_2 + R u_1 + \frac{1}{\varkappa} u_2, \\ \Xi_2 &= -\omega_1 + \frac{1}{\varkappa} u_1 = 0, \\ \Xi &= u' + u_1 \Xi_1. \end{aligned} \right.$$

La seconde des équations (51) se réduit alors à

$$\operatorname{tang} \theta' - \frac{\rho'}{\varkappa} = 0,$$

ce qui exprime que le couple constitué par le plan principal Π' et le centre de courbure C' correspondant appartient à la corrélation G. Reste donc la première des équations (51) qui devient, après division par $\cos\theta'$ et remplacement de ρ' par $\varkappa \operatorname{tang}\theta'$,

$$1 - \varkappa \operatorname{tang}\theta' \left(R + \frac{1}{\varkappa} \operatorname{tang}\theta' - \frac{\Xi_1^2}{\Xi} \right) = 0.$$

ou en ordonnant en tang θ'

(54) $$\operatorname{tang}^2\theta' + \left(R - \frac{\Xi_1^2}{\Xi}\right)\varkappa \operatorname{tang}\theta' - 1 = 0.$$

Telle est l'équation qui fournit les plans principaux Π'_1, Π'_2 de la surface (F'_0).

Or si R', S', T' sont les coefficients déjà considérés qui se rapportent à cette surface, ces plans seraient aussi donnés par l'équation

$$\operatorname{tang}^2\theta' + \frac{R' - T'}{S'}\operatorname{tang}\theta' - 1 = 0,$$

mais, puisque nous savons, formules (25) et (26), que

$$S' = \frac{1}{\varkappa}, \qquad T' = 0,$$

cette équation s'écrit

(55) $$\operatorname{tang}^2\theta' + \varkappa R' \operatorname{tang}\theta' - 1 = 0;$$

d'où, par comparaison avec (54),

(56) $$R' = R - \frac{\Xi_1^2}{\Xi} = \frac{R\Xi - \Xi_1^2}{\Xi}.$$

Si l'on se reporte aux formules (53) on trouve que

$$\Xi_1^2 = \left(R u_1 + \frac{u_2}{\varkappa} + \omega_2\right)^2 = \left(R u_1 + \frac{\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2}{u_1}\right)^2$$
$$= R^2 u_1^2 + 2R(\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2) + \left(\frac{\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2}{u_1}\right)^2$$

et

$$R\Xi = R(u' + u_1\Xi_1) = R^2 u_1^2 + R(\omega_2 u_1 + \omega_1 u_2) + R u',$$

d'où

$$R\Xi - \Xi_1^2 = -R(\omega_2 u_1 + u_2\omega_1) + R u' - \left(\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2.$$

On trouve en conséquence

(57) $$R' = -\frac{R(\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1 - u') + \left(\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2}{R u_1^2 + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1) + u'},$$

ou encore

(58) $$u_1^2 RR' + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1)(R + R') + u'(R' - R) + \left(\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1}\right)^2 = 0.$$

On peut opérer un groupement de termes et écrire

$$(59)\qquad \left(R + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}\right)\left(R' + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}\right) + \frac{u'}{u_1^2}(R' - R) = 0;$$

et en faisant pour abréger

$$A = R + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}, \qquad A' = R' + \frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2},$$

l'équation (59) devient

$$AA' + \frac{u'}{u_1^2}(A' - A) = 0.$$

ou

$$(60)\qquad \frac{1}{A'} - \frac{1}{A} = \frac{u_1^2}{u'},$$

formule qui rappelle tout à fait par sa forme la relation d'Euler.

On voit que A et A' ou R et R' se correspondent homographiquement et que, dans cette homographie, les éléments doubles coïncident.

Il est fort intéressant de voir se maintenir ici encore ce caractère qui se rencontre déjà dans l'équation d'Euler et que j'ai retrouvé dans toutes les homographies analogues qui se présentent dans la théorie des profils conjugués ([1]).

Ici l'élément double correspond à $A = 0$ ou

$$(61)\qquad R = -\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}.$$

23. *Correspondance homographique entre les secondes tangentes asymptotiques.* — L'intérêt de ces résultats ressortira surtout de leur interprétation géométrique. Rappelons qu'au n° **19** nous avons introduit la considération des secondes tangentes asymptotiques AD, AD' qui font avec l'axe a_1 des angles φ, φ' liés à R, R' par les formules (31) du n° **19**, que nous reproduisons ici

$$(31)\qquad R = -\frac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi, \qquad R' = -\frac{2}{\varkappa}\operatorname{tang}\varphi'.$$

La correspondance homographique entre R et R' se traduit évi-

([1]) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 97, 163.

demment par une correspondance homographique entre les tangentes AD, AD′, correspondance à rayons doubles coïncidents, le rayon double unique AW faisant avec l'axe a_1 un angle α donné par la formule

$$R = -\frac{2}{\varkappa}\tang\alpha = -\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}$$

ou

$$(62) \qquad \tang\alpha = \frac{1}{2}\varkappa\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1^2}.$$

Or

$$\varkappa = \frac{u_1}{\omega_1},$$

on a donc

$$(63) \qquad \tang\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1}{u_1\omega_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Soit AV la vitesse d'entraînement du point A; la droite AV, que l'on peut appeler la *caractéristique* du point A, a comme coefficient angulaire, dans le plan tangent à (F_0), $\frac{u_2}{u_1}$. Considérons, d'autre part, la caractéristique AU du plan tangent à la surface; c'est-à-dire la droite de contact de ce plan avec son enveloppe en le supposant solidaire du corps S et entraîné dans le mouvement de S par rapport à S′. Suivant la droite AU se fait la projection sur le plan tangent du vecteur représentatif de la vitesse angulaire. Le coefficient angulaire de AU est ainsi $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ et la formule (62) montre dès lors que *le rayon double* AW *est le conjugué harmonique de la tangente asymptotique fixe a_2 par rapport aux deux droites* AV, AU *qui sont les caractéristiques du point de contact* A *et du plan tangent commun en ce point aux deux surfaces.*

On reconnaît en même temps que, *lorsque la seconde tangente asymptotique coïncide avec* AW, *les droites* AU *et* AV *sont conjuguées, au sens de Dupin, sur les deux surfaces* (F_0) *et* (F'_0).

Réciproquement, il suffit que AU et AV soient conjuguées sur l'une des surfaces (F_0), (F'_0) pour que ces deux surfaces aient leurs secondes tangentes asymptotiques confondues avec AW et qu'elles soient osculatrices.

Si, dans l'équation (59), on remplace R et R′ par leurs valeurs (31) du n° **19** on trouve, en introduisant aussi l'angle α [équation (63)],

$$\frac{2}{x}(\tang\varphi' - \tang\alpha)(\tang\varphi - \tang\alpha) - \frac{u'}{u_1^2}(\tang\varphi' - \tang\varphi) = 0$$

ou

$$(64)\qquad (\tang\varphi' - \tang\alpha)(\tang\varphi - \tang\alpha) - \frac{u'}{2u_1\omega_1}(\tang\varphi' - \tang\varphi) = 0.$$

En supposant $u' \neq 0$ on peut écrire encore

$$(65)\qquad \frac{1}{\tang\varphi' - \tang\alpha} - \frac{1}{\tang\varphi - \tang\alpha} = -\frac{2u_1\omega_1}{u'}.$$

Mais on peut mettre sous une forme encore plus simple cette relation en comptant les angles non plus à partir de l'axe a, mais à partir de AW.

Nous poserons dans ce but

$$\varphi = \alpha + \psi, \qquad \varphi' = \alpha + \psi',$$

où ψ, ψ' seront maintenant les angles de AD, AD' avec AW.

On a les formules

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tang\varphi - \tang\alpha} &= \frac{1}{\tang(\psi + \alpha) - \tang\alpha}\\ &= \frac{1 - \tang\alpha\tang\psi}{(1 + \tang^2\alpha)\tang\psi} = \frac{\cos^2\alpha}{\tang\psi} - \sin\alpha\cos\alpha,\end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\tang\varphi' - \tang\alpha} = \frac{1}{\tang(\psi' + \alpha) - \tang\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\tang\psi'} - \sin\alpha\cos\alpha;$$

d'où

$$\frac{1}{\tang\varphi' - \tang\alpha} - \frac{1}{\tang\varphi - \tang\alpha} = \left(\frac{1}{\tang\psi'} - \frac{1}{\tang\psi}\right)\cos^2\alpha.$$

En sorte qu'en définitive la relation d'homographie entre les secondes tangentes asymptotiques AD, AD' s'écrit

$$(66)\qquad \frac{1}{\tang\psi'} - \frac{1}{\tang\psi} = -\frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha},$$

α étant l'angle défini par l'équation (63).

La valeur de $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tang}^2\alpha$ se déduit de (63)

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (u_1\omega_2 + u_2\omega_1)^2}{4u_1^2\omega_1^2},$$

et en posant

$$\Psi = \frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha} = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (u_1\omega_2 + u_2\omega_1)^2}{2u_1\omega_1 u'}, \tag{67}$$

l'équation d'homographie deviendra

$$\cot\psi' - \cot\psi = -\Psi. \tag{68}$$

La forme de cette équation rappelle celle que l'on rencontre dans la loi des courbures lors du mouvement autour d'un point fixe; cela tient à ce que toutes deux expriment des homographies à éléments doubles confondus.

La formule que nous venons de trouver fournit la réponse au problème que nous nous étions proposé.

On peut donner des formes plus géométriques à ces relations.

26. *Constructions géométriques.* — Si, dans le plan tangent, à la distance g de l'origine on mène une droite δ, parallèle à AW, les rayons AD, AD′ coupent cette droite δ en deux points D, D′ qui décrivent sur elle deux divisions homographiques dont le point double est unique et rejeté à l'infini sur la droite. C'est dire que le vecteur DD′ est constant; on calcule aisément cette distance constante qui est égale à

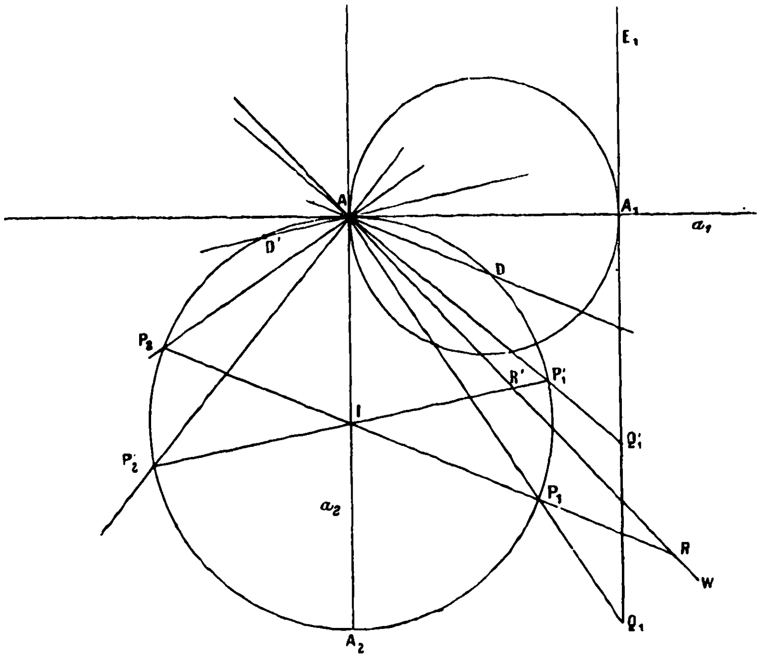
$$g\Psi,$$

où Ψ est défini par la formule (67).

On peut du reste construire aussi directement les plans principaux par le moyen d'une considération où ne figurent plus directement les surfaces (F_0), (F'_0), qui ne seront dès lors intervenues que pour nous donner la signification des droites AD, AD′.

Menons un cercle ayant son centre sur l'axe a_2 en I (*voir* la figure) et passant au point A; soit A_2 le second point de rencontre de l'axe a_2 avec ce cercle; soit D le point où il est coupé par la droite AD. Les traces AP_1, AP_2 des plans principaux doivent bissecter l'angle DAA_2, ces traces coupent donc le cercle en deux points P_1, P_2 diamétralement opposés, milieux des deux arcs sous-tendus par la corde DA_2, en sorte que le diamètre P_1IP_2 est parallèle à AD et qu'il fait avec a_1 le même angle φ. Si donc on fait la même construction pour la droite AD′, on aura transporté au point I en IP_1 et IP'_1 les droites AD, AD′ et les deux faisceaux homographiques des diamètres IP_1, IP'_1 seront identiques à ceux des droites AD et AD′. L'équation fondamentale (68) s'applique à eux, en construisant le rayon double IB issu de I, parallèle à la droite AW, et appelant ψ, ψ' les angles que forment avec le diamètre IB les diamètres IP_1, IP'_1. On peut remarquer que les diamètres IP_1, IP'_1 déterminent sur la droite AW un vecteur RR′ de longueur et de direction constantes facile à calculer. Par là, la correspondance et la construction se trouvent entièrement définies.

Fig. 1.



On peut même construire sur la même figure les cotes des centres de courbure C_1, C_2, C'_1, C'_2. En effet, θ étant toujours l'angle d'un plan principal avec le plan central, sa trace fait avec l'axe a_1 l'angle θ; s'il s'agit du plan Π_1, θ_1 sera l'angle de AP_1 avec l'axe de a_1. Alors r_1 est donné par la formule

$$r_1 = \varkappa \tang \theta_1.$$

Construisons le cercle ayant son centre sur l'axe a_1, passant en A et coupant de rechef cet axe au point A_1 d'abscisse $\varkappa$ en grandeur et signe. Menons en A_1 la tangente A_1E_1 à ce cercle. La droite AP_1 coupe A_1E_1 en un point Q_1 dont l'ordonnée mesurée positivement selon l'axe a_2 est égale à $\varkappa \tang \theta_1$, c'est-à-dire à r_1. On portera cette longueur dans un sens ou dans l'autre suivant son signe sur la normale a; on aura ainsi C_1. De même pour les autres.

Le problème que je m'étais proposé est ainsi complètement résolu théoriquement et constructivement.

Il faut toutefois savoir construire la quantité Ψ qui figure dans la formule fondamentale et c'est là l'objet que nous nous proposons dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DU PARAMÈTRE FONDAMENTAL.

27. *Le paramètre Ψ fonction du trièdre central.* — Nous appellerons *fondamental* le paramètre Ψ qui figure seul dans la formule fondamentale. Il dépend de la droite a et de la corrélation G; comme celle-ci est parfaitement définie par son trièdre trirectangle central Θ_0, on peut dire que Ψ est une fonction de ce trièdre central. C'est ainsi que, lorsqu'il s'agit de la relation d'Euler, le paramètre μ qui figure dans la formule

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \frac{1}{\mu},$$

dépend du choix de la normale et se trouve être égal à $\mu = k \sin \theta$, où k est la fonction que l'on sait des courbures des courbes roulantes.

Dans le cas actuel, le paramètre Ψ dépend de beaucoup plus d'éléments et son expression est nécessairement plus compliquée.

La signification des quantités ω_1, ω_2, u_1, u_2 qui y figurent est immédiate; celle de u' est un peu plus cachée. Nous allons en chercher le sens cinématique.

28. *Signification cinématique de la quantité u'.* — Conservons encore notre trièdre Θ, qui nous a été déjà si utile, de façon à nous rendre compte de la signification de u', car c'en est une assez peu nette que d'être la dérivée de u par rapport au temps.

Soit M un point de coordonnées X, X_1, X_2; ce point, mobile à la fois dans S et dans S′, possède dans S une accélération dont les projections sur les axes a, a_1, a_2 du trièdre Θ sont égales respectivement à

$$(69) \qquad J_{0M} = \frac{d^2X}{dt^2}, \qquad J_{1M} = \frac{d^2X_1}{dt^2}, \qquad J_{2M} = \frac{d^2X_2}{dt^2}.$$

Nous représenterons de même par J'_{0M}, J'_{1M}, J'_{2M} les projections sur les mêmes axes de l'accélération du point M dans son mouvement dans le corps S′. Les expressions de ces quantités sont fournies par les formules de Bour [1],

$$(70) \qquad \left\{ \begin{aligned} J'_{0M} &= \omega_1 v'_{2M} - \omega_2 v'_{1M} + \frac{dv'_{0M}}{dt}, \\ J'_{1M} &= \omega_2 v'_{0M} - \omega\, v'_{2M} + \frac{dv'_{1M}}{dt}, \\ J'_{2M} &= \omega\, v'_{1M} - \omega_1 v'_{0M} + \frac{dv'_{2M}}{dt}, \end{aligned} \right.$$

où v'_{0M}, v'_{1M} v'_{2M} sont les projections sur les axes a, a_1, a_2 de la vitesse du point M dans son mouvement dans le corps S′; ces projections sont du reste données par les formules

$$(71) \qquad \left\{ \begin{aligned} v'_{0M} &= u + \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1 + \frac{dX}{dt}, \\ v'_{1M} &= u_1 + \omega_2 X - \omega\, X_2 + \frac{dX_1}{dt}, \\ v'_{2M} &= u_2 + \omega\, X_1 - \omega_1 X + \frac{dX_2}{dt}. \end{aligned} \right.$$

En portant ces valeurs dans les formules (70) on obtiendra les expressions explicites des J'; mais l'expression de J'_{0M} nous suffira, on trouve

$$\begin{aligned} J'_{0M} = {} & u' + \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1 + \omega'_1 X_2 - \omega'_2 X_1 \\ & + \frac{\partial H}{\partial X} + 2\left(\omega_1 \frac{dX_2}{dt} - \omega_2 \frac{dX_1}{dt}\right) + \frac{d^2X}{dt^2}, \end{aligned}$$

[1] *Voir* nos *Leçons de Cinématique*, p. 130.

en posant

$$2H = (\omega X + \omega_1 X_1 + \omega_2 X_2)^2 - (\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)(X^2 + X_1^2 + X_2^2),$$

et u', ω'_1, ω'_2, désignant les dérivées de u, ω_1, ω_2.

Nous allons appliquer cette formule au point P du corps S qui coïncide constamment avec l'origine du trièdre Θ, auquel cas X, X_1, X_2 sont constamment nuls. La formule précédente donne dans ce cas

$$J'_{0P} = u' + \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1. \tag{72}$$

Considérons de même le point P′ du corps S′ qui coïncide actuellement, lui aussi, avec le point A. Puisque ce point est fixe dans le corps S′, sa vitesse dans ce corps est nulle; en désignant par X, X_1, X_2 ses coordonnées, on a donc

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= v'_{0P'} = u \;+ \omega_1 X_2 - \omega_2 X_1 + \frac{dX}{dt},\\ 0 &= v'_{1P'} = u_1 + \omega_2 X \;- \omega\; X_2 + \frac{dX_1}{dt},\\ 0 &= v'_{2P'} = u_2 + \omega\; X_1 - \omega_1 X \;+ \frac{dX_2}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{73}$$

En différentiant la première des équations (73), il viendra

$$0 = u' + \omega'_1 X_2 - \omega'_2 X_1 + \omega_1 \frac{dX_2}{dt} - \omega_2 \frac{dX_1}{dt} + \frac{d^2 X}{dt^2}, \tag{74}$$

mais X, X_1, X_2 étant actuellement nuls, puisque P′ est actuellement en A, on a, d'après les équations (73),

$$\frac{dX_1}{dt} = -u_1, \qquad \frac{dX_2}{dt} = -u_2$$

en sorte que $J_{0P'}$ étant la projection sur l'axe a de l'accélération du point P′ dans son mouvement dans le corps S, on a, d'après (74),

$$J_{0P'} = \frac{d^2X}{dt^2} = -u' + \omega_1 u_2 - \omega_2 u_1. \tag{75}$$

On a ainsi dans (72), (75) les expressions des projections sur l'axe a des accélérations respectives du point P dans le corps S′, du point P′ dans le corps S, où P, P′ sont les points respectivement solidaires de S et de S' qui coïncident actuellement entre eux et avec le point A, sommet du trièdre central. On obtient par une simple soustraction :

$$(76) \qquad u' = \frac{1}{2}(J'_{0P} - J_{0P'}).$$

De là ce théorème :

La quantité u' est la demi-projection sur l'axe a du trièdre central de l'excès géométrique de l'accélération du point P *dans le corps* S' *sur celle du point* P' *dans le corps* S, *en appelant* P, P' *les points des corps* S *et* S' *qui coïncident actuellement avec le point* A.

Cette définition de u' est indépendante, comme on voit, de toute hypothèse sur le choix des axes de coordonnées.

29. *Introduction d'un nouveau trièdre de référence.* — Dans les recherches précédentes nous avons utilisé deux trièdres Θ, Θ' solidaires des corps S et S' et coïncidant actuellement avec le trièdre Θ_0. Ces trièdres avaient une importance en quelque sorte LOCALE puisque leur notion reposait sur celle du trièdre central Θ_0.

Nous allons maintenant adopter un trièdre dont le choix ne repose plus sur des considérations spéciales à tel axe particulier du corps S. Nous prendrons le trièdre T que j'ai déjà utilisé dans mes recherches sur les courbes conjuguées [1].

Je rappelle rapidement en quoi consiste ce trièdre. Considérons à un instant donné du mouvement le mouvement hélicoïdal ou torsion tangente; d représentera son axe et h son pas.

La droite d décrit dans chacun des corps S, S' une surface; ces deux surfaces (Φ), (Φ'), appelées quelquefois *axoïdes* pour rappeler qu'elles sont le lieu de l'axe d dans l'un et l'autre corps, se raccordent à chaque instant suivant l'axe d qu'elles ont en commun.

La corrélation homographique qui naît de la distribution des plans tangents tout le long de d est la même pour toutes les deux, soient O son point central et k son paramètre de distribution.

On prend O comme origine du trièdre T, d comme axe Oz, le plan

[1] C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 17.

central pour plan zOx et la normale commune au point central commun O des deux surfaces comme axe Oy.

Ce trièdre T est mobile à la fois dans le corps S et dans le corps S′, en sorte qu'on peut parler des mouvements $\boxed{T, S}$ et $\boxed{T, S'}$ de T par rapport à S et S′, ainsi que de leurs inverses $\boxed{S, T}$, $\boxed{S', T}$.

Le mouvement $\boxed{S, S'}$ de S par rapport à S′ peut être regardé comme résultant des mouvements $\boxed{S, T}$ et $\boxed{T, S'}$.

Désignons, suivant les notations usuelles qui sont aussi celles que j'ai employées dans mon Mémoire sur les courbes conjuguées, par p, q, r les projections sur les axes du trièdre T du vecteur représentatif de la rotation dans le mouvement $\boxed{T, S}$ et par ξ, η, ζ les projections, sur les mêmes axes, de la vitesse, au cours du même mouvement, du point O origine du trièdre T.

Pareillement, p', q', r', ξ', η', ζ' désigneront les mêmes quantités pour le mouvement $\boxed{T, S'}$, en sorte que dorénavant l'accent prime cessera de représenter les dérivées, sauf avis exprès.

Eu égard au choix du trièdre T, on démontre aisément (¹) que les deux groupes de quantités $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$; $p', q', r', \xi', \eta', \zeta'$ sont reliés par les relations suivantes qui sont nécessaires et suffisantes :

$$(77)\qquad \left\{\begin{array}{llll} p'=p, & q'=q=0, & r'\neq r & \text{(en général)},\\ \xi'=\xi, & \eta'=\eta=0, & \zeta'\neq\zeta & \text{(en général)}, \end{array}\right.$$

en sorte que les deux mouvements $\boxed{T, S}$, $\boxed{T, S'}$ ne diffèrent que par les valeurs de ζ et de r. D'ailleurs, le pas du mouvement hélicoïdal tangent au mouvement $\boxed{S, S'}$ et la vitesse angulaire ont pour valeurs

$$(78)\qquad h=\frac{\zeta'-\zeta}{r'-r},\qquad \omega=r'-r,$$

tandis que le paramètre, déjà désigné par k, de la corrélation qui naît de la distribution des plans tangents aux axoïdes (Φ) (Φ'), a pour

(¹) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 27.

valeur

$$k = -\frac{\xi'}{p'} = -\frac{\xi}{p}. \tag{79}$$

J'ajouterai que j'adopte également la notation (1)

$$h_1 = -\frac{dh}{p\,dt}. \tag{80}$$

Avec ces notations, la vitesse d'entraînement d'un point $M(x, y, z)$ dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ admet comme projections sur les axes Ox, Oy, Oz du trièdre T,

$$-(r'-r)y, \quad (r'-r)x, \quad h(r'-r).$$

Dès lors, le plan polaire de ce point M dans le complexe $\mathcal{L}$, qui est normal en M à cette vitesse, aura pour équation

$$-yX + xY + h(Z-z) = 0. \tag{81}$$

J'ai introduit (2) dans mon Mémoire précité la considération des normales stationnaires; elles appartiennent au complexe $\mathcal{L}$ et au complexe linéaire $\mathcal{L}'$ relatif à l'instant infiniment voisin. Elles font donc partie d'une congruence linéaire et appartiennent à tous les complexes linéaires d'un faisceau dont font partie les complexes $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$. Un des complexes de ce faisceau, que j'ai appelé le complexe *auxiliaire* $\mathcal{L}_1$, a une définition particulièrement simple.

L'axe de ce complexe est parallèle à Oy, est tracé dans le plan de xy et a pour abscisse $x = h_1$. De plus, son pas ou paramètre est égal à $h - k$, en sorte que le plan polaire du point $M(x, y, z)$, dans ce complexe $\mathcal{L}_1$, a pour équation

$$z(X-x) + (h-k)(Y-y) + (h_1 - x)(Z-z) = 0. \tag{82}$$

L'intersection des deux plans (81), (82) donne la droite *normale stationnaire* qui passe en M et que je désigne par d_{M}^{nn}, l'indice M indiquant qu'elle passe en M et le double indice n indiquant qu'elle est normale à deux instants consécutifs aux trajectoires de tous ses points.

---

(1) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 40.
(2) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 40.

30. *Coordonnées du trièdre Θ_0 par rapport au trièdre* T. — Ceci rappelé, considérons le trièdre central Θ_0 considéré dans les Chapitres précédents. Nous désignerons par a, b, c les coordonnées de l'origine de ce trièdre, par α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe a, par α_1, β_1, γ_1 ceux de l'axe a_1, enfin par α_2, β_2, γ_2 ceux de l'axe a_2. Ces neuf cosinus ne sont pas indépendants car ils sont liés par les conditions communes d'orthogonalité, qui ne laissent subsister que trois paramètres indépendants, comme on sait.

Mais ces trois paramètres, si le point A est donné, ne sont pas eux-mêmes quelconques. En effet, l'axe a doit appartenir au complexe $\mathfrak{C}$, ce qui introduit la condition

$$-b\alpha + a\beta + h\gamma = 0. \tag{83}$$

Le trièdre Θ_0 dépend en résumé de cinq paramètres : les coordonnées a, b, c de son sommet et les deux paramètres que laisse arbitraires pour son orientation l'équation (83).

31. *Calcul des quantités* $\omega_1, \omega_2, u_1, u_2$. — Ce trièdre central étant choisi, les quantités ω_1, ω_2, u_1, u_2 sont immédiatement définies. En effet, la rotation dans le mouvement $\boxed{S, S'}$ se représente par un vecteur porté par d ou Oz mesuré par $(r' - r)$ [formule (78)].

En conséquence, puisque ω_1, ω_2 sont les projections de ce vecteur sur a_1, a_2, on aura

$$\omega_1 = (r' - r)\gamma_1, \qquad \omega_2 = (r' - r)\gamma_2. \tag{84}$$

Pareillement u_1, u_2 sont les projections sur a_1, a_2 de la vitesse d'entraînement du point A dans le mouvement $\boxed{S, S'}$. Les projections sur Ox, Oy, Oz de cette vitesse étant

$$-(r' - r)b, \qquad (r' - r)a, \qquad h(r' - r),$$

ses projections sur a_1, a_2 seront

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= (r' - r)(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1), \\ u_2 &= (r' - r)(-b\alpha_2 + a\beta_2 + h\gamma_2). \end{aligned}\right. \tag{85}$$

32. *Calcul de* u'. — Cherchons maintenant à exprimer la quantité u'.

Nous avons, au moyen de l'équation (76), une définition de u' qui fournira une solution facile du problème, car on peut calculer aisément les projections des vecteurs $\overline{J'_P}$ et $\overline{J_{P'}}$ au moyen des éléments qu'introduit l'emploi du trièdre de référence T.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M variable avec le temps par rapport au trièdre T. En représentant par $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ les dérivées premières de x, y, z par rapport au temps, les projections de la vitesse de ce point dans le corps S sur les axes du trièdre T ont pour valeurs

$$(86)\qquad \left\{\begin{aligned} v_{xM} &= \xi - ry + \dot{x},\\ v_{yM} &= rx - pz + \dot{y},\\ v_{zM} &= \zeta + py + \dot{z}.\end{aligned}\right.$$

Pareillement, les projections de la vitesse de M, dans son mouvement par rapport au corps S', auront comme expressions :

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} v'_{xM} &= \xi - r'y + \dot{x},\\ v'_{yM} &= r'x - pz + \dot{y},\\ v'_{zM} &= \zeta' + py + \dot{z}.\end{aligned}\right.$$

Les projections J_{xM}, J_{yM}, J_{zM}, de l'accélération du point M, dans son mouvement par rapport à S, seront données par les formules de Bour, déjà utilisées,

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned} J_{xM} &= -rv_{yM} + \frac{dv_{xM}}{dt},\\ J_{yM} &= rv_{xM} - pv_{zM} + \frac{dv_{yM}}{dt},\\ J_{zM} &= pv_{yM} + \frac{dv_{zM}}{dt},\end{aligned}\right.$$

et, s'il s'agit de l'accélération de M dans son mouvement dans le corps S', on aura de même

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} J'_{xM} &= -r'v'_{yM} + \frac{dv'_{xM}}{dt},\\ J'_{yM} &= r'v'_{xM} - pv'_{zM} + \frac{dv'_{yM}}{dt},\\ J'_{zM} &= pv'_{yM} + \frac{dv'_{zM}}{dt}.\end{aligned}\right.$$

Supposons que le point M coïncide avec un point P fixe dans le corps S. Alors v_{xP}, v_{yP}, v_{zP} sont nulles, et les formules (86) donnent

$$(90)\qquad \xi - ry + \dot{x} = 0, \qquad rx - pz + \dot{y} = 0, \qquad \zeta + py + \dot{z} = 0;$$

d'où l'on peut tirer $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ et les porter dans les expressions de v'_{xP}, v'_{yP}, v'_{zP}. Les formules (87) deviennent alors

$$(91)\qquad v'_{xP} = -(r'-r)y, \qquad v'_{yP} = (r'-r)x, \qquad v'_{zP} = (r'-r)h.$$

Si l'on calcule alors, au moyen des formules (89), les projections J'_{xP}, J'_{yP}, J'_{zP} de l'accélération $\overline{J'_P}$ du point P dans le corps S', on aura

$$\begin{aligned}
J'_{xP} &= -r'(r'-r)x - \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}y),\\
J'_{yP} &= -r'(r'-r)y - p(r'-r)h + \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}x),\\
J'_{zP} &= p(r'-r)x + \frac{d}{dt}(\overline{r'-r}h),
\end{aligned}$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned}
J'_{xP} &= -r'(r'-r)x - (r'-r)\dot{y} - \frac{d(r'-r)}{dt}y,\\
J'_{yP} &= -r'(r'-r)y - p(r'-r)h + (r'-r)\dot{x} + \frac{d(r'-r)}{dt}x,\\
J'_{zP} &= p(r'-r)x + (r'-r)\frac{dh}{dt} + \frac{d(r'-r)}{dt}h.
\end{aligned}$$

Les valeurs de $\dot{x}$, $\dot{y}$ qui figurent dans ces expressions sont fournies par les équations (90); de plus, d'après la formule (80), on a

$$\frac{dh}{dt} = -ph_1,$$

et si nous faisons ces substitutions dans les valeurs précédemment trouvées de J'_{xP}, J'_{yP}, J'_{zP}, elles deviennent

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned}
J'_{xP} &= -(r'-r)^2 x - p(r'-r)z - \frac{d(r'-r)}{dt}y,\\
J'_{yP} &= -(r'-r)^2 y - p(r'-r)h - \xi(r'-r) + \frac{d(r'-r)}{dt}x,\\
J'_{zP} &= (r'-r)px - (r'-r)ph_1 + \frac{d(r'-r)}{dt}h.
\end{aligned}\right.$$

On peut se rappeler encore que le paramètre de distribution k a pour valeur $k = -\frac{\xi}{p}$, ce qui permet de remplacer ξ par $-pk$. Nous obtenons ainsi le résultat définitif :

$$(93)\quad \begin{cases} J'_{xP} = -(r'-r)^2 x - p(r'-r)z - \dfrac{d(r'-r)}{dt}y, \\ J'_{yP} = -(r'-r)^2 y - p(r'-r)h + p(r'-r)k + \dfrac{d(r'-r)}{dt}x, \\ J'_{zP} = p(r'-r)x - p(r'-r)h_1 + \dfrac{d}{dt}(r'-r)h. \end{cases}$$

Maintenant, pour obtenir la projection J'_{0P} de cette accélération sur un axe $a(\alpha, \beta, \gamma)$, il suffira de former la combinaison

$$\begin{aligned} J'_{0P} &= \alpha J'_{xP} + \beta J'_{yP} + \gamma J'_{zP} \\ &= -(r'-r)^2(\alpha x + \beta y) - p(r'-r)[\alpha z + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - x)] \\ &\quad + \frac{d(r'-r)}{dt}(-\alpha y + \beta x + \gamma h). \end{aligned}$$

Appliquons ceci au point P qui coïncide actuellement avec le point A et dont les coordonnées sont (a, b, c) en nous souvenant que les coordonnées de ce point et les cosinus α, β, γ de l'axe a sont liés par l'équation (83). Il viendra

$$J'_{0P} = -(r'-r)^2(\alpha a + \beta b) - p(r'-r)[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

La parfaite symétrie du rôle que le trièdre T joue par rapport aux corps S et S' nous permet sans autre calcul d'écrire la valeur $J_{0P'}$ de la projection sur l'axe a de l'accélération dans le corps S du point P' du corps S' qui coïncide actuellement avec le point A, nous aurons en effet le résultat en échangeant simplement r et r', ζ et ζ', ce qui laisse p, h, k, h_1 invariables ; nous aurons de la sorte

$$J_{0P'} = -(r'-r)^2(\alpha a + \beta b) - p(r-r')[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

On en déduit par soustraction :

$$(94)\quad u' = \frac{1}{2}(J'_{0P} - J_{0P'}) = -p(r'-r)[\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a)].$$

Telle est l'expression cherchée de u'.

On ne manquera pas d'observer que $u' = 0$ équivaut à l'équation

$$\alpha c + \beta(h-k) + \gamma(h_1 - a) = 0,$$

laquelle, en vertu de l'équation (82), exprime que l'axe a, qui appartient déjà au complexe $\mathfrak{L}$, appartient aussi au complexe $\mathfrak{L}_1$, en sorte que, dans ce cas, la droite a coïncide avec la normale stationnaire $a_A^{n''}$ qui est issue du point A.

33. *Calcul de $\varkappa$ et de Ψ.* — Il nous est actuellement possible d'exprimer, en fonction des coordonnées a, b, c, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 du trièdre Θ_0, les deux quantités qui figurent dans la solution de notre problème, à savoir : le paramètre de distribution $\varkappa$ de la corrélation G et le paramètre fondamental Ψ.

En ce qui concerne $\varkappa$ que nous avons trouvé égal à

$$\varkappa = \frac{u_1}{\omega_1},$$

d'après les valeurs (84), (85) de ω_1, u_1, on aura

$$\varkappa = \frac{-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1}{\gamma_1}. \tag{95}$$

En ce qui concerne Ψ, le résultat est plus compliqué, car d'après (67)

$$\Psi = \frac{4u_1^2\omega_1^2 + (\omega_1 u_2 + \omega_2 u_1)^2}{2u'\omega_1 u_1};$$

d'où, d'après les équations (84), (85), (94),

$$\Psi = -\frac{r'-r}{2p}\,\frac{4\gamma_1^2(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1)^2 + [\gamma_1(-b\alpha_2 + a\beta_2 + h\gamma_2) + \gamma_2(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1)]^2}{\gamma_1(-b\alpha_1 + a\beta_1 + h\gamma_1)[c\alpha + (h-k)\beta + (h_1 - a)\gamma]}. \tag{96}$$

34. *Construction effective de Ψ.* — Mais la forme compliquée qui précède m'empêche pas que Ψ ne soit aisément constructible. Si, en effet, on se reporte à la définition de la droite AW qui fait avec l'axe a_1 l'angle α donné par la formule (63),

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{u_2}{u_1} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

les droites AV, AU étant elles-mêmes d'une construction facile, puisqu'il suffit pour les avoir de prendre la vitesse d'entraînement de A et la projection sur le plan (a_1, a_2) du vecteur issu de A équipollent au vecteur $(r'-r)$ porté par d ou Oz et que AW est la conjuguée harmonique de a_2 par rapport à ces deux droites, on peut regarder l'angle α comme construit.

La construction de

$$\Psi = \frac{2u_1\omega_1}{u'\cos^2\alpha} = -2\frac{r'-r}{p\cos^2\alpha}\,\frac{(-b\alpha_1+a\beta_1+h\gamma_1)\gamma_1}{c\alpha+(h-k)\gamma+(h_1-a)\gamma}$$

n'offre plus alors de difficulté.

On peut même remarquer que

$$c\alpha+(h-k)\beta+(h_1-a)\gamma$$

est la projection sur l'axe a du vecteur dont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$c,\quad h-k,\quad h_1-a.$$

Ce vecteur est la vitesse fictive qu'aurait le point A dans un mouvement hélicoïdal attaché au complexe linéaire $\mathcal{L}_1$ (c'est-à-dire ayant même axe et même pas) et dont la vitesse angulaire serait l'unité.

Quant au quotient $\frac{r'-r}{-p}$ qui figure en facteur de l'expression de Ψ, j'ai déjà eu l'occasion de le considérer dans mon Mémoire *Sur les courbes conjuguées* (1).

Si l'on désigne par β, β' les angles que font avec Oz (ou d) les tangentes aux deux lignes de striction des axoïdes (Φ), (Φ'), on trouve qu'on a

$$\frac{r'-r}{-p} = \frac{k}{h}(\cot\beta' - \cot\beta). \tag{97}$$

On peut donc regarder comme établie la construction complète du paramètre principal Ψ.

---

(1) C.C. (*Sav. Étr.*, t. XXXV), p. 105. Dans ce Mémoire j'appelle α, α' les angles que je désigne ici par β, β'.

Kérity, octobre 1911.