// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HAAG

Sur certains mouvements remarquables et leurs applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 6 (1910), p. 343-386.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__343_0>

Sur certains mouvements remarquables et leurs applications;

PAR M. J. HAAG.

L'objet de ce Mémoire est la définition et l'étude approfondie de certains mouvements remarquables, dont l'importance me semble suffisamment justifiée par leur intérêt propre, d'une part, et par les applications géométriques qu'on en peut tirer, d'autre part. J'en ai dit quelques mots dans ma Thèse de Doctorat [1] et dans diverses communications à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 1908). D'autres géomètres [2] ont rencontré quelques-uns de ces mouvements à propos de questions diverses. Mais aucun ne les a rassemblés en une étude spéciale, établissant leur classification et leurs principales propriétés, et pouvant servir de base dans toutes les recherches où ils s'introduisent. C'est ce que je vais essayer de faire ici.

Dans une *première Partie*, j'ai dû apporter quelques éclaircissements sur une question de Cinématique générale, à savoir la *viration des surfaces réglées*. J'ai simplement développé les résultats que je m'étais borné à énoncer dans une Note à l'Académie des Sciences (24 août 1908).

Dans la *deuxième Partie*, je donne la définition générale des *mouvements* (G). Puis j'établis leur classification et j'étudie en même temps leurs propriétés.

Enfin, dans une *troisième et dernière Partie*, j'indique quelques

---

(1) J. HAAG, *Familles de Lamé composées de surfaces égales*, etc. (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1910).

(2) Par exemple, M. HAZZIDAKIS, *Journal de Crelle*, 1883.

applications géométriques, autres que celle qui se trouve dans ma Thèse de Doctorat (*points à vitesse invariable par rapport à la figure mobile; surfaces à lignes géodésiques ou asymptotiques égales; surfaces applicables admettant une famille de lignes égales homologues*).

I. — Viration de deux surfaces réglées.

1. Considérons le mouvement relatif de deux corps solides S et S'. Soit G l'axe instantané relatif au temps t. Quand t varie, G décrit une surface réglée Σ, par rapport à S, et une surface réglée Σ', par rapport à S'. La succession des positions relatives que prennent ces deux surfaces pendant la durée du mouvement constitue ce qu'on appelle *la viration des deux surfaces l'une sur l'autre*. Il est clair que le mouvement est parfaitement déterminé, dès que l'on connaît les deux surfaces Σ et Σ', ainsi que la manière de réaliser la viration. C'est pourquoi il est intéressant de rechercher, d'une manière précise, *quelles sont les relations qui doivent exister entre deux surfaces réglées pour qu'on puisse les faire virer l'une sur l'autre et comment on peut réaliser la viration, lorsque ces conditions sont remplies*.

On peut y arriver par une méthode purement géométrique, reposant sur la considération de deux positions infiniment voisines de Σ par rapport à Σ'. On pénètre, de cette façon, au cœur de la question; mais, pour obtenir toute la rigueur nécessaire, il y a lieu d'entrer dans des détails qui allongent considérablement la rédaction (¹). C'est pourquoi nous nous contenterons d'exposer ici une solution analytique beaucoup plus rapide, qui nous a été inspirée par une méthode élégante, fréquemment employée par M. Kœnigs pour l'étude de certaines propriétés de Géométrie cinématique (²), et qui repose sur le théorème de la composition des vitesses.

Fixons un sens positif arbitraire sur l'axe instantané G et par suite sur chacune des génératrices de Σ et de Σ'. Menons par un point fixe O

(¹) C'est cette méthode que nous avions suivie pour établir les résultats publiés dans notre Note du 24 août 1908. Elle nous avait précisément conduit, pour n'avoir pas pris assez de précautions dans l'évaluation des infiniment petits, à commettre une erreur que nous avons corrigée depuis dans un erratum.

(²) *Voir* par exemple KOENIGS, *Leçons de Cinématique*.

un vecteur $O\mu$, de longueur 1, et possédant la direction et le sens de G. Imaginons un corps solide σ, pouvant pivoter autour de O et conservant une orientation invariable par rapport à Σ, et un corps solide σ' défini de la même façon au moyen de Σ'. Le point μ décrit une courbe sphérique γ, par rapport à σ, et une courbe sphérique γ', par rapport à σ'. Choisissons arbitrairement sur γ un système d'abscisses curvilignes et prenons l'abscisse curviligne du point μ pour variable t jouant le rôle du temps ([1]). Soit OXYZ le trièdre trirectangle et positif, dont l'axe OZ est dirigé suivant $O\mu$ et dont l'axe OY est parallèle à la demi-tangente positive de γ au point μ. Menons enfin, par le point central M de G sur Σ, le trièdre MXYZ parallèle au précédent.

Lorsque t varie, ce trièdre est animé, par rapport à Σ, d'un certain mouvement, dont nous désignerons les rotations et translations composantes par p, q, r, ξ, η, ζ. Il est facile de calculer ces quantités au moyen des éléments de Σ et de γ. Tout d'abord, la considération du mouvement de OXYZ par rapport à σ permet d'obtenir les rotations. On trouve sans peine

$$(1) \qquad p = -1, \qquad q = 0, \qquad r = -\cot\psi,$$

en appelant $\tang\psi$ le *rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique* γ, mesuré parallèlement à OX.

Choisissons maintenant sur la ligne de striction Γ de Σ un système arbitraire d'abscisses curvilignes et soient s l'abscisse curviligne du point M et α l'angle de MZ avec la demi-tangente positive à Γ, angle

---

([1]) Ceci écarte évidemment la *viration des cylindres*. Mais il est manifeste qu'on peut faire virer l'un sur l'autre deux cylindres quelconques, suivant un pas également quelconque. Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle invariablement lié à Σ', Oz étant parallèle aux génératrices. Soit C' la section de Σ' par xOy. Dans la viration de Σ sur Σ', la section droite C de Σ par xOy doit rouler sans glissement sur C'. En outre, si t désigne l'abscisse curviligne du point de contact M de ces deux lignes, abscisse qui est la même sur C et sur C', et si R et R' désignent les rayons de courbure en ce point, la cote z d'un point invariablement lié à Σ est donnée par

$$z = \int k\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) dt.$$

La viration se réalise donc entièrement par quadratures.

mesuré dans le plan orienté ZMX, qui est le plan central. On a visiblement

$$(2) \qquad \xi = \frac{ds}{dt}\sin\alpha, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{ds}{dt}\cos\alpha.$$

Remarquons encore que le paramètre de distribution k de G sur Σ est égal à ξ, car, si ω est l'angle polaire du plan tangent au point de cote z, on constate aisément qu'on a $z = \xi \operatorname{tang}\omega$.

Soient maintenant p', q', r', ξ', η', ζ' les rotations et translations du trièdre MXYZ dans son mouvement par rapport à Σ'. Si l'on considère le mouvement de Σ' par rapport à Σ, ses éléments cinématiques relatifs au point M ont pour projections, sur MXYZ, $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$, $\zeta - \zeta'$, cela en vertu du théorème de la composition des vitesses. Pour que MZ soit l'axe instantané, il faut et suffit qu'on ait

$$p - p' = q - q' = \xi - \xi' = \eta - \eta' = 0;$$

d'où

$$p' = -1, \qquad q' = 0, \qquad \xi' = \xi, \qquad \eta' = 0.$$

Les deux premières équations expriment que γ' *roule sans glisser sur* γ, la quatrième que M *est le point central de* G *sur* Σ', et la troisième que *le paramètre de distribution est le même sur les deux surfaces*, qui se raccordent donc le long de G [1]. De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que deux surfaces réglées puissent virer l'une sur l'autre, il faut et il suffit qu'on puisse établir entre leurs génératrices une correspondance telle que :*

1° *Deux génératrices homologues aient même paramètre de distribution, en grandeur et en signe ;*

2° *Les arcs homologues des indicatrices sphériques des génératrices soient égaux.*

Si l'on connaît un couple de surfaces satisfaisant à ces conditions, il suffit, pour réaliser leur viration, de les raccorder successivement suivant leurs génératrices homologues.

---

[1] Cette propriété est fort connue. M. Kœnigs a aussi démontré la première dans le cas où les surfaces Σ et Σ' sont développables (*loc. cit.*, p. 210).

Il peut arriver que, pour deux surfaces données, il y ait plusieurs façons d'établir une correspondance jouissant des propriétés précédentes. Il en est ainsi, par exemple, si les deux surfaces ont le même paramètre de distribution constant; dans ce cas, il suffit que la correspondance conserve les longueurs des arcs des indicatrices, ce qui laisse visiblement subsister une constante arbitraire. Ceci arrive, en particulier, pour deux développables quelconques, pourvu qu'une seule d'entre elles ne se réduise pas à un cylindre.

2. *Introduisons maintenant le pas h du mouvement.* Nous avons

$$h = \frac{\zeta - \zeta'}{r - r'}, \tag{3}$$

ou, en appelant ψ', s' et α' les quantités analogues à ψ, s et α, relatives à Σ',

$$h = \frac{\dfrac{ds}{dt}\cos\alpha - \dfrac{ds'}{dt}\cos\alpha'}{\cot\psi' - \cot\psi}, \tag{4}$$

ou encore

$$h = k\frac{\cot\alpha' - \cot\alpha}{\cot\psi - \cot\psi'}. \tag{5}$$

Dans le cas des surfaces développables, cette dernière formule devient illusoire, car k devient nul et $\cot\alpha$ et $\cot\alpha'$ deviennent infinis. Mais, si l'on fixe sur les deux arêtes de rebroussement des sens positifs tels que MZ soit la demi-tangente positive commune au point M, les angles α et α' sont nuls, les quantités $\dfrac{ds}{dt}$ et $\dfrac{ds'}{dt}$ sont les rayons de courbure de Γ et Γ', mesurés sur MY, et la formule (4) devient

$$h = \frac{R - R'}{\cot\psi' - \cot\psi}. \tag{6}$$

On peut aussi introduire les rayons de torsion T et T', mesurés sur MY. On établit sans peine la formule

$$\cot\psi = \frac{R}{T},$$

moyennant quoi (6) devient [1]

$$h = \frac{R - R'}{\frac{R'}{T'} - \frac{R}{T}}. \tag{7}$$

Nous n'insisterons pas sur les applications qu'on pourrait tirer des formules précédentes et nous nous arrêterons seulement sur le *cas où le pas est nul*, afin d'établir un théorème qui nous servira dans la seconde partie de notre Mémoire.

Rappelons tout d'abord que, pour que le pas soit nul, il faut et suffit que les deux surfaces soient applicables avec correspondance des génératrices [2]. D'autre part, suivant que les surfaces sont développables ou non, les formules (6) ou (5) nous donnent la condition supplémentaire

$$R = R' \qquad \text{ou} \qquad \alpha' = \alpha.$$

D'où résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour que, sur deux surfaces développables, les génératrices se correspondent dans la déformation, il faut et suffit que le rayon de courbure de l'arête de rebroussement ait la même valeur, pour les deux surfaces, en fonction de l'arc de cette arête.*

Théorème II. — *Pour que deux surfaces réglées non développables soient applicables avec correspondance des génératrices rectilignes, il faut et suffit que :*

1° *Les génératrices homologues aient même paramètre de distribution ;*

2° *Les arcs homologues des indicatrices sphériques des génératrices soient égaux ;*

---

(1) Cette formule se trouve implicitement dans l'Ouvrage déjà cité de M. Kœnigs (p. 209).

(2) Cette propriété, qui est fort connue, peut encore se déduire immédiatement de ce qui précède. L'élément linéaire de la surface Σ est en effet

$$ds^2 = dt^2(\xi^2 + z^2) + (dz + \zeta\, dt)^2.$$

Pour qu'il soit identique à celui de Σ', il faut et il suffit qu'on ait $\zeta = \zeta'$, d'où $h = 0$, en vertu de (3).

3° *Les lignes de striction coupent les génératrices homologues sous le même angle.*

Remarquons que, pour ce second théorème, l'une quelconque des trois conditions peut se remplacer par la suivante : *les arcs homologues des deux lignes de striction sont égaux.*

3. Revenant au cas général, posons-nous maintenant le problème suivant :

Étant donnée une surface réglée Σ', déterminer toutes les surfaces réglées Σ qu'on peut faire virer sur elle.

Nous supposons toujours que Σ' n'est pas un cylindre. Si nous conservons les rotations employées jusqu'ici, nous connaissons les trois fonctions de t suivantes :

$$\alpha', \quad \psi', \quad k.$$

Je dis maintenant que *l'on peut se donner arbitrairement le pas relatif à chaque génératrice de Σ', ainsi que le cône directeur de Σ.* En effet, cela revient à se donner arbitrairement les fonctions h et ψ de t (¹). L'équation (5) nous permet ensuite de calculer $\cot\alpha$, et nous sommes ramenés au problème suivant :

Déterminer une surface réglée connaissant son cône directeur, le paramètre de distribution relatif à chaque génératrice et l'angle de celle-ci avec la ligne de striction.

A cet effet, remarquons que, en vertu des formules (2), le vecteur vitesse du point M, dans son mouvement par rapport à Σ, a pour projections k, o, $k\cot\alpha$ sur μX, μY, μZ. Par conséquent, si a', b', c' ; a'', b'', c'' ; a, b, c désignent les cosinus directeurs de ces demi-droites par rapport à un certain trièdre fixe $Oxyz$, cosinus faciles à calculer en fonction de t dès qu'on se donne γ, et si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées

(¹) ψ ne sera d'ailleurs déterminé qu'à une constante près, car on pourra faire correspondre un point choisi arbitrairement sur γ à un point donné de γ'.

du point M par rapport au même trièdre, on a

$$(8)\qquad \begin{cases} x_0 = \displaystyle\int k(a' + a\cot\alpha)\,dt, \\ y_0 = \displaystyle\int k(b' + b\cot\alpha)\,dt, \\ z_0 = \displaystyle\int k(c' + c\cot\alpha)\,dt. \end{cases}$$

Dans le cas où Σ' est une développable, la formule (6) nous donnera R en fonction de t. On pourra encore employer les équations (8), mais il faudra y remplacer k par zéro et $k\cot\alpha$ par R.

Finalement, nous voyons que *le problème que nous nous étions posé se résout par des quadratures*, ce qu'on aurait d'ailleurs pu prévoir autrement ([1]).

Les formules précédentes permettent de résoudre d'une façon élégante un certain nombre de questions, sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre ici. Elles donnent par exemple la solution du problème classique de la déformation des surfaces réglées, avec conservation des génératrices rectilignes, et conduisent sans peine à toutes les propositions bien connues relatives à cette intéressante question ([2]).

Arrivons maintenant à l'étude de nos mouvements remarquables.

II. — Mouvements (G).

4. Définition des mouvements G. — Soit un trièdre mobile $Oxyz$ ou (T), dépendant d'un paramètre t et admettant les rotations et translations composantes $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$. Supposons que *ces six fonctions de t soient liées par $6-n$ relations linéaires et homogènes distinctes, à coefficients constants*. Nous dirons alors que le mouvement du trièdre (T) est *un mouvement* (G_n).

([1]) *Voir* Koenigs, *loc. cit.*, p. 200.

([2]) *Voir* à ce propos Koenigs, *loc. cit.*, p. 205, et Darboux, *Théorie des surfaces* (Livre VII, Chap. VI). Si l'on prend une courbe (γ) symétrique de (γ') par rapport à un plan diamétral tangent à (γ'), on trouve la *déformation de Beltrami*, avec toutes les remarques faites à ce sujet par M. Darboux.

Si nous considérons tous les systèmes de rotations et translations qui vérifient le même groupe de relations, il leur correspond une infinité de mouvements, qui constituent ce que nous appellerons *un groupe* (g_n). Le plus général de ces mouvements admet évidemment des rotations et translations de la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i, & q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i, & r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i, \\ \xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i, & \eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i, & \zeta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \zeta_i; \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignent n fonctions arbitraires de t, et les p_i, $q_i, \ldots, \zeta_i$ des constantes telles qu'il ne soit pas possible d'annuler p, $q, \ldots, \zeta$ sans annuler simultanément tous les λ_i.

Parmi les mouvements d'un groupe (g_n) se trouvent une *infinité de mouvements hélicoïdaux uniformes*, obtenus en donnant des valeurs constantes quelconques aux λ_i. En particulier, il y a lieu de considérer ce que nous appellerons les *mouvements de base* du groupe : le mouvement de base (H_i) est celui dont les composantes sont p_i, $q_i, \ldots, \zeta_i$. Si nous convenons d'appeler *mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants* n mouvements hélicoïdaux qui ne font pas partie d'un même groupe (g_{n-1}), il est clair qu'étant donné un groupe (g_n), *on peut choisir comme mouvements de base n mouvements hélicoïdaux quelconques du groupe*, à condition qu'ils soient linéairement indépendants.

Les mouvements de base d'un groupe (g_n) donnent lieu aux remarques suivantes : d'abord, si l'on considère un mouvement quelconque du groupe, *à chaque instant t, ce mouvement est tangent à celui qui résulte de la composition des mouvements de base, en supposant que la vitesse uniforme de (H_i) a été au préalable multipliée par la valeur que possède la fonction λ_i à l'époque t considérée.* Mais, si l'on considère le mouvement fini, on ne peut pas l'obtenir en général par la superposition de mouvements hélicoïdaux continus ayant mêmes axes et mêmes pas que les mouvements de base et des vitesses variables. Il nous semble donc inexact de dire, comme l'ont fait certains auteurs, qu'un mouvement (G) quelconque résulte de la composition de plusieurs mouvements hélicoïdaux.

Voici maintenant une propriété qui nous sera utile dans la suite :

Théorème. — *Étant donné un groupe (g_n) quelconque, si, sans changer les axes des mouvements de base, on augmente leurs pas d'une même constante k, on obtient n nouveaux mouvements hélicoïdaux linéairement indépendants, d'où dérive un nouveau groupe (g'_n). Les mouvements hélicoïdaux du groupe (g'_n) peuvent tous se déduire des mouvements hélicoïdaux du groupe (g_n), en conservant les axes de ceux-ci et augmentant leurs pas de la constante k.*

Pour démontrer cette proposition, voyons d'abord en quoi diffèrent les composantes de deux mouvements hélicoïdaux qui ont même axe et des pas inégaux. En premier lieu, les rotations doivent être proportionnelles ; on peut même les supposer égales, si l'on ne veut pas tenir compte des grandeurs des vitesses. Soient d'autre part h et h' les deux pas. Les équations

$$\xi + qz - ry = hp, \qquad \xi' + qz - ry = h'p$$

doivent représenter la même droite dans yOz, à savoir la projection, sur ce plan, de l'axe commun aux deux mouvements. D'où l'on conclut que, *pour que les deux mouvements aient même axe, il faut et suffit qu'on ait*

$$(2) \qquad \xi' = \xi + kp, \qquad \eta' = \eta + kq, \qquad \zeta' = \zeta + kr;$$

auquel cas les pas sont liés par

$$(3) \qquad h' = h + k.$$

Ceci étant, les rotations de (H'_i) peuvent être prises égales aux rotations de (H_i), les translations étant données par

$$\xi'_i = \xi_i + kp_i, \qquad \eta'_i = \eta_i + kq_i, \qquad \zeta'_i = \zeta_i + kr_i.$$

Il est élémentaire de démontrer que les n mouvements (H'_i) sont linéairement indépendants en même temps que les n mouvements (H_i) et peuvent donc donner naissance à un groupe (g'_n). Si l'on considère maintenant les mouvements (H) et (H') des deux groupes qui correspondent à de mêmes valeurs attribuées aux λ, nous aurons évidemment

$$p' = p, \qquad q' = q, \qquad r' = r,$$
$$\xi' = \xi + kp, \qquad \eta' = \eta + kq, \qquad \zeta' = \zeta + kr;$$

ce qui démontre le théorème.

5. Dans les questions de Géométrie où interviennent les mouvements (G), il arrive souvent que la variable t ne joue aucun rôle particulier. Dans ce cas, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que l'une quelconque des fonctions arbitraires λ_i possède une valeur donnée à l'avance, par exemple la valeur 1. Cela résulte de ce que si l'on change t en $f(t)$, les nouvelles rotations et translations se déduisent des anciennes en les divisant par $f'(t)$. On voit donc que, si l'on se place au point de vue purement géométrique, les mouvements d'un groupe (g_n) dépendent de $n-1$ fonctions arbitraires d'une variable.

6. L'importance des mouvements (G) résulte de ce qu'on les rencontre nécessairement dans toute question où, ayant fait usage d'un trièdre mobile, dépendant d'un paramètre t, on est conduit, pour exprimer certaines conditions, à une ou plusieurs relations linéaires entre les rotations et translations de ce trièdre, les coefficients de ces relations étant soit des constantes, soit des fonctions d'un ou plusieurs arguments autres que t. Si l'on donne, en effet, à ces arguments toutes les valeurs numériques possibles, on obtient des relations linéaires à coefficients constants.

Il peut arriver que ces relations linéaires ne soient pas toutes homogènes. Dans ce cas, si le nombre des relations distinctes est $6-n$, on a par exemple

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n + p_{n+1},$$

les λ_i étant des fonctions arbitraires de t et les p_i des constantes déterminées. Il est clair qu'*on a alors affaire à un groupe* (g_{n+1}); mais *le temps joue un rôle particulier*, puisque la fonction λ_{n+1} est égale à l'unité.

7. Les généralités qui précèdent étant exposées, nous allons étudier

d'une manière approfondie les propriétés des groupes (g_n) et établir une classification de ceux-ci pour chaque valeur du nombre n.

Nous ne dirons rien des groupes (g_1), puisqu'un tel groupe ne comprend évidemment qu'un seul mouvement, qui est un mouvement hélicoïdal (en comprenant aussi sous cette dénomination la rotation et la translation).

Groupes (g_2). — La classification des différents groupes (g_2), ainsi d'ailleurs que celle des groupes d'ordre supérieur, résulte très simplement de l'étude méthodique de la distribution des axes des mouvements hélicoïdaux de chacun d'eux.

Nous ferons d'abord remarquer que, suivant la valeur des p_i, q_i, r_i, ces axes prennent toutes les directions d'un plan fixe, ou bien sont tous parallèles entre eux, ou bien sont tous rejetés à l'infini. D'où trois cas principaux à distinguer :

8. Premier cas : *Les axes prennent toutes les directions d'un plan fixe.* — Nous pouvons supposer ce plan parallèle au plan des xy, auquel cas r_1 et r_2 sont nuls. Nous pouvons, en outre, prendre pour λ_1 et λ_2 les fonctions p et q, de sorte que les trois translations sont alors de la forme $p\xi_1 + q\xi_2$, $p\eta_1 + q\eta_2$, $p\zeta_1 + q\zeta_2$. L'équation du pas

$$\frac{p\xi + q\eta}{p^2 + q^2} = h$$

nous montre qu'à chaque valeur de h correspondent deux directions d'axes, symétriques par rapport à deux directions fixes, que nous pouvons adopter pour Ox et Oy, et que nous appellerons *directions principales du groupe*. Prenons même pour Ox l'axe du mouvement de base (H_1) ; si A désigne le pas de ce mouvement, nous avons

$$\xi_1 = A, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = 0.$$

Si nous annulons alors le terme en pq dans $p\xi + q\eta$, nous trouvons que ξ_2 doit être nul ; d'où il résulte que l'axe de (H_2) est dans xOy. Si nous prenons cet axe pour Oy, nous avons $\zeta_2 = 0$, et $\eta_2 = B$, en appelant B le pas de (H_2). Finalement, le mouvement le plus général du groupe est défini par les formules

$$(4) \qquad \xi = Ap, \qquad \eta = Bq, \qquad \zeta = 0, \qquad r = 0.$$

Les axes Ox et Oy seront appelés les *droites principales* du groupe et les nombres A et B ses *nombres caractéristiques*.

Il nous est maintenant facile d'avoir l'axe qui a pour angle polaire θ dans le plan xOy et le pas h correspondant. Un calcul élémentaire montre que cet axe est perpendiculaire à Oz, au point de cote

$$z = (B - A)\sin\theta\cos\theta, \tag{5}$$

et que le pas correspondant est

$$h = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta. \tag{6}$$

La formule (5) nous conduit à distinguer deux cas, suivant que $B - A$ est nul ou différent de zéro.

9. I. *Les nombres caractéristiques sont différents.* — Dans ce cas, les axes engendrent un *conoïde de Plücker*, qui est représenté par l'équation (5) en coordonnées semi-polaires. Si l'on néglige les mouvements hélicoïdaux, *le mouvement le plus général du groupe sera engendré par la viration de ce conoïde*, suivant un pas déterminé, pour chaque génératrice, par la formule (6). Il suffira d'appliquer les résultats des nos 2 et 3 pour avoir ce mouvement par des quadratures. Si l'on prend, par exemple, le conoïde pour surface Σ', la courbe γ' est le cercle du plan xOy qui a pour centre O et pour rayon 1, et l'on peut choisir l'angle θ pour variable t. Quant à la ligne de striction Γ', ce n'est autre que Oz. Si nous y prenons comme sens positif celui de Oz, il n'y a aucune difficulté à calculer les quantités α', ψ', k; on trouve

$$\alpha' = -\frac{\pi}{2}, \qquad \psi' = \frac{\pi}{2}, \qquad k = \frac{ds'}{dt}\sin\alpha' = (A - B)\cos 2t. \tag{7}$$

Comme, d'autre part, le pas est donné par (6), nous avons tous les éléments nécessaires pour réaliser la viration. La comparaison des valeurs de h et de k nous donne le théorème suivant :

Pour que la viration d'un conoïde de Plücker donne naissance à un mouvement (G_2), *il faut et il suffit que le pas relatif à chaque génératrice diffère par une constante du demi-paramètre de distribution de cette génératrice.*

Ceci concorde bien avec avec le théorème général du n° 4.

10. Directrices du mouvement. — Nous allons arriver à une autre génération très élégante du mouvement, par la considération des *génératrices de pas nul*. Ces génératrices sont données par

$$\tang^2\theta = -\frac{A}{B}$$

et constituent ce que nous appellerons *deux génératrices symétriques du conoïde*. Elles ne sont réelles qui si les nombres caractéristiques sont de signe contraire. C'est ce que nous supposerons.

Admettons d'abord qu'aucun des deux nombres A et B n'est nul, ainsi que la somme $A + B$. Nos deux génératrices Δ et Δ' sont alors *distinctes et non rectangulaires*. D'après la théorie des systèmes de complexes linéaires (¹), ces deux droites sont constamment conjuguées dans le mouvement. Par suite, la vitesse d'un point quelconque M de Δ est perpendiculaire au plan (M, Δ') ce qu'il ne serait d'ailleurs pas difficile de vérifier par un calcul direct.

Ceci étant, considérons les deux hyperboloïdes de révolution H et H′ ayant pour axe et pour génératrice : le premier Δ et Δ', le second Δ' et Δ. Soient d'autre part S et S′ les surfaces réglées engendrées par Δ' et Δ. La vitesse du point M étant perpendiculaire au plan (M, Δ'), la trajectoire de ce point est tangente au parallèle de H′ qui y passe. On conclut de cette simple remarque, d'abord que H′ se raccorde à S′ le le long de Δ, en second lieu que la ligne de striction de S′ est tangente au cercle de gorge, c'est-à-dire à la ligne de striction de H′. On est donc en droit d'appliquer le théorème de la page 348; autrement dit S′ provient de H′ par *flexion*. Il est évident que S résulte de H de la même manière.

Réciproquement, supposons que S′ soit une surface réglée provenant de H′ par flexion suivant les génératrices de même système que Δ. Imaginons maintenant qu'on fasse *glisser* H′ sur S′ en l'amenant à se raccorder avec S′ suivant Δ d'une part et suivant les génératrices successives de S′ d'autre part, ce qui est évidemment possible. Tout point M de Δ décrit, dans ce mouvement, un parallèle déformé, lequel est tangent au parallèle véritable de H′. Il en résulte que la vitesse de M est

(¹) *Voir* par exemple Kœnigs, *Géométrie réglée*.

perpendiculaire au plan (M, Δ'). Or, si l'on exprime analytiquement cette condition, on retombe sur les équations (4), et par conséquent notre glissement donne naissance à un mouvement du groupe.

En résumé, tout mouvement du groupe (g_2) défini par les équations (4) peut être engendré de la manière suivante :

On cherche les deux droites Δ *et* Δ', *auxquelles nous donnons le nom de* DIRECTRICES. *On construit les deux hyperboloïdes* H *et* H'. *On déforme* H' *par flexion suivant les génératrices de même système que* Δ *et l'on fait ensuite* GLISSER H', *suivant* Δ, *sur la surface réglée obtenue. Le mouvement que prend ainsi* H' *est le mouvement cherché.*

Dans ce mouvement, l'hyperboloïde H *glisse de même, suivant* Δ', *sur une de ses déformées* (¹).

11. Les mouvements actuels se rattachent aussi, d'une façon très étroite, aux *courbes de Bertrand.* Considérons, en effet, les pieds P et P' de Oz sur Δ et Δ'. D'après un théorème de Laguerre, ces points décrivent deux courbes de Bertrand associées. Cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que ces courbes sont respectivement des géodésiques de S' et de S, puisque les cercles de gorge sont des géodésiques sur les hyperboloïdes. On peut aussi le vérifier analytiquement en étudiant les éléments des deux courbes décrites, dans le mouvement du trièdre $Oxyz$, par les points de Oz qui ont pour cote $\pm(B-A)\sin\theta\cos\theta$, sachant que $\tang^2\theta = -\frac{A}{B}$. On trouve en particulier que la courbure et la torsion de la trajectoire de P au temps t, mesurées sur Oz, sont

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos(t+\theta)}{(B-A)\sin(t-\theta)}, \qquad \frac{1}{\tau} = -\frac{\sin(t+\theta)}{(B-A)\sin(t-\theta)}.$$

Ce sont des fonctions homographiques de $\tang t$. Si l'on élimine cette

(¹) Il nous semble que ce théorème permettait de réaliser pratiquement le mouvement, car il suffirait pour cela de construire les surfaces H' et S'. C'est pour rappeler cette réalisation par un *glissement* que nous avions d'abord désigné les mouvements actuels sous le nom de *mouvements* (G); par extension, nous avons ensuite adopté cette dénomination pour les mouvements plus généraux qui font l'objet de notre Mémoire.

quantité entre les deux équations précédentes, on obtient la relation linéaire classique

$$\frac{\sin 2\theta}{\rho} + \frac{\cos 2\theta}{\tau} + \frac{1}{B - A} = 0. \tag{9}$$

Enfin, il est très facile d'avoir les équations finies de la courbe par rapport à un trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$. Il suffit pour cela de se reporter à la génération du mouvement par la viration d'un conoïde de Plücker. Si x_0, y_0, z_0 désignent les quantités définies par les formules (8) du n° 3, on trouve sans peine pour coordonnées de P :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta)a', \\ y_1 &= y_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta)b', \\ z_1 &= z_0 + (B - A)(\sin t \cos t - \sin\theta \cos\theta)c'. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Tout ce qui est relatif à la trajectoire de P′ se déduit de ce qui précède par le changement de θ en $-\theta$.

Les deux lignes que nous venons de considérer constituent *le couple le plus général de courbes de Bertrand associées*. En effet, étant donné un tel couple, si l'on mène par P la perpendiculaire Δ au plan osculateur en P′ et par P′ la perpendiculaire Δ' au plan osculateur en P, on sait que la figure $\Delta PP'\Delta'$ est invariable. D'autre part, la réciproque du théorème de Laguerre, due à M. Bioche, nous apprend que Δ et Δ' engendrent deux surfaces réglées provenant, par flexion, des hyperboloïdes H et H′ construits, comme plus haut, avec Δ et Δ'. Nous retombons sur le glissement des hyperboloïdes, et le mouvement de la figure $\Delta PP'\Delta'$ est bien un mouvement (G_2), de directrices Δ et Δ'. On peut aussi le prouver directement, sans faire appel à la proposition de M. Bioche, en démontrant que les droites Δ et Δ' sont constamment conjuguées dans le mouvement, ce qui peut se faire, soit par un raisonnement géométrique, soit analytiquement par la considération du mouvement du trièdre principal d'une courbe de Bertrand. Nous laisserons au lecteur le soin de faire ces vérifications qui ne présentent aucune difficulté.

12. Cas où les directrices sont rectangulaires. — Ce cas se présente lorsque les nombres caractéristiques ont une somme nulle. Dans ces conditions, l'hyperboloïde H, par exemple, se réduit à la portion du plan du cercle de gorge correspondant, extérieure à ce cercle. On pourrait, sans aucune difficulté, étudier à part ce cas particulier. On peut aussi le considérer comme un cas limite du cas général, en imaginant que l'angle des deux directrices se rapproche de plus en plus d'un angle droit. Dans ces conditions, les deux hyperboloïdes H et H' s'aplatissent indéfiniment pour se réduire à la limite aux portions de plans balayées par les tangentes de leurs cercles de gorge respectifs. Les surfaces S et S' deviennent par suite des développables, dont les arêtes de rebroussement, lieux de P' et de P, admettent respectivement pour cercles de courbure le cercle d'axe Δ et tangent à Δ' et le cercle d'axe Δ' et tangent à Δ (1). On retombe sur le cas particulier des courbes de Bertrand étudié par Monge, et l'on retrouve bien toutes ses propriétés.

Comme vérification, faisons $\theta = \frac{\pi}{4}$ dans la première équation (8) ou dans (9). Nous obtenons $\rho = A - B$; d'où il résulte visiblement que le centre de courbure en P est le point P'.

13. Cas où les directrices sont confondues. — Cela arrive lorsque l'un ou l'autre des nombres caractéristiques est nul. Si par exemple $A = 0$, la directrice double est Ox. Tous les points de cette droite ont des vitesses perpendiculaires à Ox et de directions invariables par rapport à $Oxyz$, comme cela résulte de la théorie des systèmes de complexes linéaires. On peut aussi le vérifier analytiquement en calculant les vitesses du point $(x, 0, 0)$; on trouve 0, Bq, $-qx$. D'où il résulte que la surface S engendrée par Ox admet O pour point central, xOy pour plan central et $-B$ pour paramètre de distribution. Comme le lieu de O est une trajectoire orthogonale des génératrices de S, on en conclut que cette dernière surface provient, par flexion, d'une allysséide; d'où l'on déduit un mode de génération par glissement analogue à celui qui a été donné plus haut :

On construit une allysséide (A) passant par Ox et admettant Oy pour axe et B pour pas. On la déforme par flexion, ce qui donne

(1) Cela résulte du théorème I du n° 2.

une surface (S). *Puis on fait glisser* (A) *sur* (S) *suivant* Ox. *Le mouvement que prend* (A) *est le mouvement cherché.*

La réciproque n'offre aucune difficulté.

Les deux courbes de Bertrand du n° 11 sont maintenant confondues suivant une courbe à torsion constante $-\frac{1}{B}$, qui est décrite par le point O, de sorte que *le mouvement actuel peut être considéré aussi comme celui du trièdre principal d'une courbe à torsion constante.*

14. II. *Les nombres caractéristiques sont égaux.* — Dans ce cas, *les axes des mouvements hélicoïdaux du groupe engendrent le faisceau plan* (O, xy) *et les pas de ces mouvements sont tous égaux.* Tout mouvement du groupe peut être obtenu par la viration du faisceau plan (O, xy) suivant le pas A. Si ce faisceau plan est choisi comme surface Σ' (n° 2), on doit remplacer, dans la formule (6), R' par zéro et ψ' par $\frac{\pi}{2}$; d'où

$$A = \frac{R}{-\cot\psi} = -T.$$

Par conséquent, la développable Σ, sur laquelle doit virer notre faisceau plan, doit admettre pour arête de rebroussement une courbe à torsion constante. On peut alors donner du mouvement la génération suivante :

Soit une courbe quelconque (Γ), *à torsion constante* $-\frac{1}{A}$. *Orientons-la, ainsi que son indicatrice des tangentes* (γ), *ce qui permet de définir un trièdre principal en chaque point, soit* $Mx'y'z$. *Faisons tourner ce trièdre autour de* Oz *d'un angle égal et de signe contraire à l'abscisse curviligne du point de* (γ) *qui correspond à* M. *Le trièdre* $Mxyz$ *ainsi obtenu prend le mouvement cherché quand* M *décrit* (Γ).

On peut aussi considérer le cas actuel comme un cas limite du précédent et voir ce que devient la génération par les courbes de Bertrand. Un calcul simple montre que les directrices Δ et Δ' tendent respectivement vers les deux droites isotropes d'équations

$$\begin{matrix} y = ix \\ z = +Ai \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} y = -ix, \\ z = -Ai. \end{matrix}$$

Les vitesses respectives de P et P′ sont parallèles à Δ′ et à Δ. En développant ces conclusions, on arrive à l'énoncé suivant, qu'il est d'ailleurs aisé d'établir directement :

Soit une ligne de longueur nulle C. *Associons-lui une autre ligne de longueur nulle* C′, *telle qu'entre les deux on puisse établir une correspondance* (P, P′), *dans laquelle le segment* PP′ *demeure constant et normal aux deux courbes. Le milieu* O *de* PP′ *décrit une courbe dont la binormale est* PP′ *le rayon de torsion mesuré sur* PP′ *étant, en grandeur et en signe, égale au vecteur i* (OP). *On obtient de cette façon la courbe à torsion constante la plus générale.*

On peut utiliser ce théorème pour le calcul des équations des courbes à torsion constante. Malheureusement on se heurte, comme dans la méthode classique, à des quadratures. En cherchant à s'en débarrasser, on est conduit immédiatement à l'équation de M. Fouché (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 431).

Dans le *cas particulier où les deux nombres caractéristiques sont nuls*, tous les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des rotations, et le mouvement général s'obtient par le roulement sans glissement du plan xOy sur un cône arbitraire de sommet O.

15. Deuxième cas : *Les axes sont tous parallèles.* — Nous pouvons supposer que la direction commune de tous les axes est celle de Oz, ce qui se traduit par $p = q = 0$. Comme r est supposé ne pas être identiquement nul, nous pouvons le prendre comme fonction λ_2. Les composantes du mouvement sont alors de la forme

$$\lambda\xi_1 + r\xi_2,\quad \lambda\eta_1 + r\eta_2,\quad \lambda\zeta_1 + r\zeta_2,\quad 0,\quad 0,\quad r.$$

L'axe instantané a pour équations

$$\xi - ry = 0,\qquad \eta + rx = 0.$$

Par conséquent, ou bien il est fixe, ou bien il décrit un plan parallèle à Oz. Dans les deux hypothèses, on peut le supposer dans le plan des zx, ce qui exige que ξ_1 et ξ_2 soient nuls.

1. *L'axe n'est pas fixe.* — Dans ce cas, $\eta_1 \neq 0$, et par suite on peut

remplacer λ par η. Les composantes du mouvement sont alors o, o, r, o, η, $\eta\zeta_1 + r\zeta_2$. Le pas est

$$\frac{\eta\zeta_1 + r\zeta_2}{r} = \zeta_2 - \zeta_1 x,$$

en appelant x l'abscisse de l'axe. Ceci nous conduit encore à distinguer deux cas, suivant que ζ_1 est nul ou ne l'est pas.

a. Le pas est variable. — Il y a alors un seul axe de pas nul. Prenons-le pour Oz; nous avons $\zeta_2 = 0$. *Le mouvement est alors engendré par la viration du plan des zx sur un cylindre quelconque* (Σ) *parallèle à* Oz, *le pas relatif à la droite d'abscisse* x *étant égal à* $-\zeta_1 x$.

En appliquant ce qui a été dit dans la note de la page 345, le lecteur vérifiera aisément qu'on peut avoir, sans aucune quadrature, les équations finies du mouvement, si l'on se donne la section droite du cylindre (Σ) par l'équation de sa tangente mise sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f''(\alpha),$$

$f''(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire de α.

On peut encore se demander ce que devient la génération par glissement. Les directrices Δ et Δ' sont ici Oz et la droite de l'infini du plan $y + \zeta_1 z = 0$, perpendiculaire à la direction de la translation rectiligne (o, 1, ζ_1), qui fait partie du groupe. On en conclut et il est facile de vérifier directement que les points de Oz ont tous des vitesses ayant la même direction invariable, de paramètres directeurs (o, 1, ζ_1); d'où il résulte que chaque point de Oz décrit une hélice sur le cylindre engendré par Oz. On arrive ainsi au second mode de génération suivant :

Prenons un cylindre quelconque (S) *parallèle à* Oz; *traçons-y une hélice* (H) *qui coupe les génératrices sous l'angle* φ *donné par* $\zeta_1 = \cot\varphi$. *Puis faisons glisser le plan* zOy *sur ce cylindre, suivant* Oz, *et de façon que* O *décrive* (H). *Le trièdre* $Oxyz$ *prendra le mouvement cherché.*

Il est facile de déduire l'un de l'autre les deux modes de génération que nous venons d'indiquer. Il suffit de remarquer que la section droite de (Σ) est la développée de la section droite de (S).

b. Le pas est constant. — Nous avons alors $\zeta_1 = 0$. *Le mouvement est obtenu par la viration à pas constant du plan $z O x$ sur un cylindre quelconque (Σ) parallèle à $O z$.*

Il n'y a aucune difficulté à obtenir les équations finies d'un tel mouvement. On évitera toute quadrature en se donnant la tangente à la section droite de (Σ) sous la forme

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha).$$

Dans ce cas, les deux directrices sont confondues avec la droite de l'infini du plan des zx. Aucun point n'a une vitesse de direction constante.

Dans le cas particulier où le pas constant est nul, on obtient le roulement sans glissement du plan $z O x$ sur un cylindre quelconque parallèle à $O z$. Tous les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des rotations.

II. *L'axe est fixe.* — Prenons-le pour $O z$. Les composantes du mouvement sont $0, 0, r, 0, 0, \zeta$. Les mouvements hélicoïdaux du groupe sont tous ceux qui ont pour axe $O z$. *Le mouvement général est un mouvement de verrou quelconque autour de $O z$.* On a deux directrices : $O z$ et la droite de l'infini du plan des xy.

16. Troisième cas : *Les axes sont tous à l'infini.* — On a dans ce cas $p = q = r = 0$. Les mouvements hélicoïdaux du groupe sont des translations rectilignes parallèles à un plan fixe, par exemple au plan des xy. *Le mouvement général est une translation dans laquelle le plan des xy glisse sur lui-même, l'origine décrivant d'ailleurs une courbe quelconque de ce plan.*

Maintenant que nous avons étudié toutes les espèces de mouvements (G_2), nous allons résumer notre discussion en un Tableau qui condensera les résultats obtenus. Nous ne nous occuperons dans ce Tableau que du mouvement général de chaque groupe.

Premier cas : *L'axe instantané a une direction variable.*

I. *Viration d'un conoïde de Plücker.* — Deux droites principales : deux nombres caractéristiques A et B différents.	*a. Deux directrices* distinctes et non rectangulaires ; *glissement de deux hyperboloïdes ;* courbes de Bertrand. *b.* Deux directrices rectangulaires ; *courbes à courbure constante.* *c.* Deux directrices confondues ; *courbe à torsion constante.*
II. *Viration d'un faisceau plan à pas constant* A. — Les nombres caractéristiques sont égaux ; infinité de droites principales.	*a.* $A \neq 0$. — *Viration sur une développable dont l'arête de rebroussement est à torsion constante ;* deux directrices isotropes. *b.* $A = 0$. — *Roulement sans glissement sur un cône.* Un faisceau plan de directrices.

Deuxième cas : *L'axe instantané a une direction invariable.*

I. *L'axe n'est pas fixe.* — *Viration d'un plan sur un cylindre quelconque.*	*a. Pas variable. Glissement hélicoïdal d'un plan* sur un cylindre quelconque ; une directrice à distance finie, une autre à l'infini dans un plan non perpendiculaire à la première. *b. Pas constant.* Une directrice double à l'infini si le pas est $\neq 0$; un faisceau plan de directrices parallèles si le pas est nul.

II. *L'axe est fixe.* — *Mouvement de verrou* autour de Oz : deux directrices : Oz et la droite de l'infini du plan perpendiculaire.

Troisième cas : *L'axe instantané est constamment à l'infini. Translation plane quelconque.*

Un faisceau plan de directrices situées à l'infini et concourant au point à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de la translation.

Dans ce Tableau, nous désignons sous le nom général de *directrices* toutes les droites de pas nul. Comme on le voit, leur nombre et leurs positions relatives sont caractéristiques des différents groupes (g_2) et peuvent servir à reconnaître ceux-ci.

17. **Groupes** (g_3). — Comme pour les groupes (g_2), nous allons étudier la distribution des axes. Suivant la valeur des p_i, q_i, r_i, ceux-ci prennent toutes les directions de l'espace, celles d'un plan fixe, celle

d'une droite fixe, ou bien sont à l'infini. D'où quatre cas principaux à distinguer.

PREMIER CAS : *Les axes prennent toutes les directions de l'espace.* — Nous pouvons prendre p, q, r comme fonctions λ_1, λ_2, λ_3; ce qui donne des translations de la forme $p\xi_1 + q\xi_2 + r\xi_3$, $p\eta_1 + q\eta_2 + r\eta_3$, $p\zeta_1 + q\zeta_2 + r\zeta_3$. Les directions des axes de pas h sont données par l'équation

$$p\xi + q\eta + x\zeta - h(p^2 + q^2 + r^2) = 0.$$

Ces directions, menées par l'origine, forment donc un cône du second degré dont les axes de symétrie sont indépendants de h. Prenons trois de ces axes parallèles aux axes de coordonnées, ce qui est, comme on sait, toujours possible et nous donne les conditions

$$(11)\qquad \eta_3 + \zeta_2 = 0, \qquad \zeta_1 + \xi_3 = 0, \qquad \xi_2 + \eta_1 = 0.$$

Prenons maintenant pour Ox l'axe parallèle à cette droite, c'est-à-dire qui correspond à $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$. Ceci nous donne les conditions : $\eta_1 = \zeta_1 = 0$; d'où, en tenant compte de (11), $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Moyennant quoi l'axe parallèle à Oy rencontre Ox et peut être pris par conséquent pour Oy lui-même, ce qui exige que ζ_2 soit nul, et par suite η_3, en vertu de (11). Moyennant quoi l'axe parallèle à Oz est Oz lui-même.

Nous venons ainsi de mettre en évidence *trois axes du groupe qui forment un trièdre trirectangle*. Ces trois axes seront appelés *droites principales du groupe* et les pas correspondants A, B, C, *nombres caractéristiques*.

Les axes de coordonnées étant choisis comme il vient d'être indiqué, les composantes du mouvement général sont

$$p, \quad q, \quad r, \quad Ap, \quad Bq, \quad Cr.$$

Il va nous être maintenant très facile d'étudier la distribution des axes (A) du groupe, ainsi que la loi suivant laquelle les pas sont affectés à ces axes. Les équations d'un axe (A_h) de pas h sont de la forme

$$(12)\qquad \begin{cases} p(A - h) + qz - ry = 0, \\ q(B - h) + rx - pz = 0, \\ r(C - h) + py - qx = 0. \end{cases}$$

p, q, r étant liés par la relation

$$(13) \qquad (A-h)p^2+(B-h)q^2+(C-h)r^2=0,$$

qui est une conséquence des précédentes. En éliminant p, q, r entre (12), il vient

$$(14) \qquad \frac{x^2}{(B-h)(C-h)}+\frac{y^2}{(C-h)(A-h)}+\frac{z^2}{(A-h)(B-h)}+1=0.$$

Si nous remarquons en outre qu'il y a une seule droite (A) de direction donnée, nous voyons que *les droites* (A_h) *forment une demi-quadrique* (Q_h), composée des génératrices d'un certain système de la quadrique (14). Pour distinguer quel est ce système, on peut remarquer que, d'après les équations (12), les deux droites (A_h) perpendiculaires à Oy par exemple doivent se trouver à la fois sur les deux paraboloïdes

$$(15) \qquad xy+z(C-h)=0, \qquad yz-x(A-h)=0.$$

Réalité des droites (A_h). — Pour que les droites (A_h) soient réelles, il faut et il suffit que la quadrique (14) soit un hyperboloïde à une nappe, et par conséquent *que h soit compris entre le plus grand et le plus petit des trois nombres caractéristiques*. Ceci nous conduit à distinguer plusieurs cas, suivant que ces nombres sont différents ou non.

I. $A>B>C$. — Le pas h doit rester compris entre A et C. Pour $h=A$, il n'y a que la droite Ox qui soit réelle; de même, pour $h=C$, il n'y a que Oz. Si h est compris entre A et C, il y en a une infinité, formant un demi-hyperboloïde à une nappe. Pour $h=B$, ce demi-hyperboloïde se réduit à deux faisceaux plans, qu'on peut définir par la droite commune Oy, d'une part, et par les deux droites d'intersection de l'un ou l'autre des deux paraboloïdes (15) avec les deux plans

$$(16) \qquad x^2(A-B)=z^2(B-C),$$

d'autre part.

Le mouvement réel le plus général du groupe peut alors être obtenu comme il suit:

Prenons une surface réglée (Σ) *formée de droites* (A) *réelles* *choisies arbitrairement. A chaque génératrice de cette surface est attaché un pas déterminé h. Faisons virer (Σ), suivant le pas h, sur la surface (Σ') la plus générale qui puisse convenir à cette viration et nous aurons le mouvement cherché.*

Il est clair que les deux surfaces (Σ) et (Σ') introduisent chacune une fonction arbitraire d'une variable. On peut par exemple choisir arbitrairement leurs deux cônes directeurs.

Comme mouvements particuliers, signalons ceux produits par la viration à pas constant des demi-quadriques (Q_h), et aussi les mouvements (G_2), qui sont obtenus en prenant pour (Σ) un conoïde, nécessairement de Plücker [1].

II. $A = B \neq C$. — Il y a, dans ce cas, *une infinité de droites principales*, qui forment le faisceau plan (O, xy). Les demi-quadriques (Q_h) sont de révolution autour de Oz. Pour $h = A$, (Q_h) se réduit au faisceau plan (O, xy). Pour $h = C$, elle se réduit à Oz.

Le mouvement général s'obtiendra comme précédemment.

---

[1] Nous laissons de côté l'étude de la congruence (C) formée par les droites (A), parce que cela nous est inutile pour nos mouvements. Cette étude est cependant très intéressante en elle-même. Contentons-nous de citer quelques-unes des propriétés auxquelles elle donne lieu.

Tout d'abord, on peut remarquer que *les quadriques* (Q_h) *forment une famille de Lamé*, à savoir celle qui a été imaginée par M. G. Humbert et pour laquelle les lignes ombilicales sont des droites.

La courbe de contact de (Q_h) avec son enveloppe se trouve sur une sphère de centre O et dont le carré du rayon est $-3h^2 + 2h(A + B + C) - (AB + BC + CA)$. Ceci montre que *les foyers de toute droite de la congruence sont équidistants de l'origine.* Il est facile d'avoir les équations ponctuelle et tangentielle de la surface focale, qui est du sixième ordre et de la quatrième classe.

La considération des mouvements (G_2) du groupe conduit à des propriétés curieuses. Par exemple, *le lieu des droites de la congruence qui sont parallèles à un plan donné quelconque* (P) (non cyclique des Q_h) *est un conoïde de Plücker,* qui coupe chaque demi-quadrique Q_h suivant deux génératrices symétriques du conoïde. Si (P) est cyclique pour les Q_h, le lieu est un faisceau plan. *Les perpendiculaires communes à tous les couples de droites de la congruence forment une autre congruence,* et non pas toutes les droites de l'espace.

III. $A = B = C$. — Si $h \neq A$, (Q_h) est une demi-sphère. Pour $h = A$, on a *toutes les droites issues de* O, *qui sont toutes des droites principales.*

Le mouvement réel le plus général est obtenu par la viration d'un cône quelconque de sommet O *sur la développable la plus générale qui puisse convenir à cet effet.*

18. Deuxième cas : *Les axes prennent toutes les directions d'un plan.* — Prenons ce plan parallèle au plan des xy. Les composantes du mouvement général sont alors

$$p, \quad q, \quad o, \quad \lambda\xi_1 + p\xi_2 + q\xi_3, \quad \lambda\eta_1 + p\eta_2 + q\eta_3, \quad \lambda\zeta_1 + p\zeta_2 + q\zeta_3.$$

Les équations de l'axe (A) correspondant sont

$$(17) \qquad \begin{cases} \lambda(q\xi_1 - p\eta_1) + q^2\xi_3 - p^2\eta_2 + pq(\xi_2 - \eta_3) + z(p^2 + q^2) = o, \\ \lambda\zeta_1 \qquad\qquad\quad + p\zeta_2 + q\zeta_3 + py - qx = o. \end{cases}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous avons le lieu des axes de direction (p, q, o)

$$(18) \qquad \begin{aligned} &(q\xi_1 - p\eta_1)(p\zeta_2 + q\zeta_3 + py - qx) \\ &\quad - \zeta_1[q^2\xi_3 - p^2\eta_2 + pq(\xi_2 - \eta_3) + z(p^2 + q^2)] = o. \end{aligned}$$

Ce lieu est un plan Π, qui enveloppe visiblement un cône du second degré. Prenons le sommet de ce cône pour origine; nous avons les trois conditions

$$(19) \quad \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2 = o, \qquad \xi_1\zeta_3 - \zeta_1\xi_3 = o, \qquad \xi_1\zeta_2 - \eta_1\zeta_3 + \zeta_1(\eta_3 - \xi_2) = o.$$

L'équation du cône enveloppe est alors

$$(20) \qquad (x\eta_1 + y\xi_1)^2 - 4(x\xi_1 + z\zeta_1)(y\eta_1 + z\zeta_1) = o.$$

Ce cône est tangent au plan des xy suivant la droite

$$x\eta_1 - y\xi_1 = o.$$

Prenons cette droite pour axe des y, nous avons la condition $\xi_1 = o$. Remarquons maintenant que, si nous ne voulons pas que notre groupe (g_3) se réduise à un groupe (g_2), il faut que l'un au moins des deux nombres η_1 et ζ_1 soit différent de zéro.

I. $\eta_1, \zeta_1 \neq 0$. — Nous pouvons prendre η par exemple pour fonction λ, ce qui nous donne

$$\eta_1 = 1, \qquad \eta_2 = \eta_3 = 0.$$

Les équations (19) donnent ensuite

$$\zeta_2 = 0, \qquad \xi_3 = 0, \qquad \zeta_3 = -\zeta_1 \xi_2.$$

Les composantes du mouvement général sont alors

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap, \quad \eta, \quad b(\eta - qa),$$

où a et b désignent deux constantes, dont la seconde est supposée différente de zéro.

Les équations d'un axe (A_h) de pas h sont alors

$$(21) \qquad \begin{cases} ap + qz = hp, \\ \eta - pz = hq, \\ b(\eta - qa) + py - qx = 0. \end{cases}$$

Leur lieu a pour équation

$$(22) \qquad z(y + bz) + (x + b\lambda)\lambda = 0,$$

en posant

$$(23) \qquad \lambda = a - h.$$

C'est un paraboloïde hyperbolique d'axe Ox. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que l'origine est le pôle du plan de Monge de ce paraboloïde. De plus, on voit que, lorsque h et par suite λ varient, ce paraboloïde se transforme en un paraboloïde homothétique par rapport à l'origine.

Bien entendu, *les axes* (A_h) *sont les génératrices du demi-paraboloïde* (P_h) *de plan directeur* xOy. Pour avoir le mouvement général du groupe, on appliquera l'énoncé de la page 366 ([1]).

([1]) La considération des mouvements (G_2) du groupe conduit au théorème suivant : *Étant donné un demi-paraboloïde hyperbolique de plan directeur* xOy, *prenons les demi-paraboloïdes* (P) *homothétiques du proposé par rapport au pôle de son plan de Monge. Le lieu des génératrices des* (P) *qui rencontrent une droite donnée perpendiculaire à* xOy *est un conoïde de Plücker qui coupe chaque* (P) *suivant deux génératrices qui sont symétriques sur le conoïde.*

II. $\zeta_1 = 0$. — Alors, η_1 est nécessairement différent de zéro, et nous pouvons supposer, comme tout à l'heure,

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta_3 = 0.$$

Les équations (19) donnent ensuite

$$\zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0.$$

Les composantes du mouvement sont

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap + bq, \quad \eta, \quad 0,$$

a et b désignant encore deux constantes.

Les équations d'un axe (A_h) sont

$$ap + bq + qz = hp, \quad \eta - pz = hq, \quad py - qx = 0.$$

Le lieu de ces droites est le demi-paraboloïde hyperbolique équilatère d'équation

$$yz + (a - h)x + by = 0,$$

et de plan directeur xOy.

En portant l'origine au point $(0, 0, -b)$, on voit qu'on peut supposer $b = 0$. *La congruence des droites* (A) *est alors la congruence linéaire dont les directrices sont* Oz *et la droite de l'infini du plan des* xy, *le pas relatif à chacune de ces droites* (A) *étant* $a - \frac{yz}{x}$.

III. $\eta_1 = 0$. — Alors ζ_1 est nécessairement différent de zéro, et l'on peut supposer $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$. Les équations (19) donnent ensuite

$$\eta_2 = 0, \quad \zeta_3 = 0, \quad \zeta_2 = \eta_3 = a.$$

Les composantes du mouvement sont

$$p, \quad q, \quad 0, \quad ap, \quad aq, \quad \zeta.$$

L'axe est une droite quelconque de xOy et le pas est égal à a. Donc, *le mouvement général s'obtiendra par la viration, à pas constant* a, *du plan* xOy *sur une développable quelconque.* Dans le cas particulier où a est nul, on a le roulement sans glissement le plus général d'un plan.

19. Troisième cas : *Les axes sont tous parallèles.* — Prenons leur direction commune pour axe des z. Les composantes du mouvement sont de la forme

$$o,\quad o,\quad r,\quad \lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+r\xi_3,\quad \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+r\eta_3,\quad \lambda_1\zeta_1+\lambda_2\zeta_2+r\zeta_3.$$

Les équations de l'axe (A) sont

$$\xi - ry = o,\qquad \eta + rx = o.$$

Suivant que le déterminant $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$ est différent de zéro ou nul, cet axe peut coïncider avec une droite quelconque parallèle à Oz, ou bien demeure dans un plan fixe. [Il ne peut être fixe, si l'on veut éviter de retomber sur un groupe (g_2).]

I. *Tous les axes ne sont pas dans un même plan.* — Nous pouvons alors prendre comme composantes du mouvement

$$o,\quad o,\quad r,\quad \xi,\quad \eta,\quad a\xi + b\eta + cr,$$

a, b, c désignant des constantes. L'axe (A) qui a pour trace sur xOy le point (x, y, o) est affecté du pas

$$h = ay - bx + c.$$

Par un choix convenable du plan des zx, nous pouvons supposer $h = ay$ et par suite $b = c = o$. *Le mouvement général est alors obtenu par la viration générale d'un cylindre parallèle à* Oz, *le pas relatif à chaque génératrice étant proportionnel à la distance de cette droite au plan des* zx.

II. *Tous les axes sont dans un même plan.* — En prenant ce plan pour zOy, nous avons les composantes

$$o,\quad o,\quad r,\quad \xi,\quad o,\quad \zeta.$$

Le mouvement général est obtenu par la viration de zOy *sur un cylindre quelconque parallèle à* Oz, *suivant un pas également quelconque.*

20. Quatrième cas : *Les axes sont tous à l'infini.* — Le groupe correspondant est évidemment formé par l'ensemble de *tous les mouvements de translation.*

Tous les résultats que nous venons d'obtenir relativement aux mouvements (G_3) sont condensés dans le Tableau ci-dessous :

PREMIER CAS : *Axes de directions quelconques.*

I. Trois droites principales; trois nombres caractéristiques différents. Les droites (A_h) forment un demi-hyperboloïde (Q_h).

II. Une droite principale isolée et un faisceau plan perpendiculaire : deux nombres caractéristiques sont égaux. (Q_h) est de révolution.

III. Une gerbe de droites principales : les trois nombres caractéristiques sont égaux. Viration à pas constant d'un cône quelconque.

DEUXIÈME CAS : *Axes parallèles à un plan fixe.*

I. Le plan Π des axes de même direction enveloppe un véritable cône. Les droites (A_h) forment un demi-paraboloïde (P_h).

II. Le plan Π tourne autour d'une droite fixe Oz. Viration d'un conoïde droit d'axe Oz. (P_h) équilatère.

III. Le plan Π est fixe. Viration de ce plan sur une développable quelconque, suivant un pas constant.

TROISIÈME CAS : *Axes parallèles à une droite fixe* Oz.

I. Viration d'un cylindre quelconque parallèle à Oz, suivant un pas déterminé. Les droites (A_h) sont un plan (R_h) parallèle à zOx.

II. Viration d'un plan zOy sur un cylindre parallèle à Oz, suivant un pas quelconque.

QUATRIÈME CAS : *Groupe des translations.*

21. GROUPES D'ORDRE SUPÉRIEUR A 3. — On pourrait les étudier directement, en suivant la méthode de réduction utilisée jusqu'à présent. Mais nous allons voir qu'il est possible de déduire leurs propriétés et leur classification de celles des autres mouvements déjà étudiés.

Mouvements hélicoïdaux en involution. — Nous dirons que deux mouvements hélicoïdaux sont *en involution* ou *orthogonaux*, s'il en est ainsi des deux complexes linéaires qui leur sont attachés (*voir* par exemple KŒNIGS, *Géométrie réglée*). Cette condition s'exprime analytiquement par l'égalité

$$p\xi' + q\eta' + r\zeta' + p'\xi + q'\eta + r'\zeta = 0. \tag{24}$$

Théorème. — *Soient* (H) *et* (H′) *deux mouvements hélicoïdaux en involution. Soit* (H_1) *un autre mouvement coaxial à* (H) *et dont le pas surpasse de* k *celui de* (H). *Si les axes de* (H) *et de* (H′) *ne sont pas rectangulaires, il existe un mouvement hélicoïdal* (H'_1), *et un seul, qui soit orthogonal à* (H_1) *et coaxial à* (H′); *son pas surpasse de* $-k$ *celui de* (H′). *Si les axes de* (H) *et* (H′) *sont rectangulaires, deux mouvements hélicoïdaux quelconques admettant respectivement ces deux axes sont orthogonaux.*

En effet, appliquons les formules (2) de la page 352. Nous avons

$$\xi_1 = \xi + kp, \quad \eta_1 = \eta + kq, \quad \zeta_1 = \zeta + kr, \quad p_1 = p, \quad q_1 = q, \quad r_1 = r;$$

et de même

$$\xi'_1 = \xi' + k'p', \quad \eta'_1 = \eta' + k'q', \quad \ldots, \quad r'_1 = r'.$$

Écrivons la condition d'orthogonalité de (H_1) et (H'_1), en tenant compte de l'orthogonalité de (H) et (H′); il vient

$$(k + k')(pp' + qq' + rr') = 0.$$

De cette équation résulte évidemment notre théorème.

Groupes complémentaires. — Soit un groupe (g_n) quelconque. Considérons les mouvements hélicoïdaux orthogonaux à la fois à tous les mouvements hélicoïdaux de ce groupe. D'après la théorie des systèmes de complexes linéaires (*voir* Kœnigs, *loc. cit.*), ces mouvements hélicoïdaux sont ceux d'un groupe (g_{6-n}), qui sera dit *le groupe complémentaire* du proposé.

Théorème. — *Les droites de pas* h *relativement à un groupe* (g) *quelconque sont celles qui s'appuient sur les droites de pas* $-h$ *du groupe complémentaire* (g').

En effet, introduisons le groupe (γ) déduit de (g) par l'application du théorème de la page 352, les pas relatifs à (γ) surpassant de $-h$ ceux qui sont relatifs à (g). Soit de même (γ') le groupe déduit de (g') en augmentant tous les pas de h. D'après le théorème démontré précédemment, les deux groupes (γ) et (γ') sont complémentaires. Or, les droites δ de pas h relativement à (g) sont celles de pas nul relativement à (γ) et les droites δ' de pas $-h$ relativement à (g') sont celles de pas nul relativement à (γ'). D'autre part, d'après la théorie de M. Kœnigs (*loc. cit.*), les droites de pas nul du groupe (γ) sont les droites de moment nul par rapport à tous les mouvements du groupe (γ'), lesquelles peuvent toujours être définies par la condition de s'appuyer sur les droites de pas nul de ce groupe, ce qui démontre le théorème.

Il faut toutefois prendre quelques précautions, dans l'application de ce théorème, pour les cas où certaines des droites δ' viennent se confondre, ou bien pour les cas où les rotations de (γ') appartiennent à un même groupe d'ordre inférieur à celui de (γ'). Lorsqu'on est embarrassé, il est bon de se rappeler que *les droites δ sont les droites de moment nul par rapport à tous les mouvements de* (γ').

22. Le groupe complémentaire d'un groupe (g_3) est évidemment un groupe (g_3). Si l'on applique le théorème précédent, on dresse facilement le Tableau suivant :

(g_3).	(g'_3).	
1, I ou II........	1, I ou II	(Q'_h) complémentaire de (Q_{-h}). Nombres caractéristiques changés de signe.
1, III.......... ..	1, III	Mêmes axes; pas changé de signe.
2, I ou II........	2, I ou II	(P'_h) complémentaire de (P_{-h}).
2, III...........	2, III	Mêmes axes; pas changé de signe.
3, I..............	3, I	$(R'_h)=(R_{-h})$; Oz remplacé par Oz' $\begin{cases} y=0 \\ x=-az \end{cases}$.
3, II.............	3, II	Oy et Oz échangés.
4................	4	

23. Groupes (g_4). — Les groupes complémentaires sont les groupes (g_2); de sorte que la classification de ceux-ci nous donne du même coup la classification des premiers. Reportons-nous donc au Tableau du n° 16.

(1, I). Les droites qui rencontrent le conoïde de Plücker en deux points appartenant à deux génératrices symétriques forment un complexe (C) du second ordre. Affectons chaque droite de ce complexe d'un pas h égal et de signe contraire à celui des génératrices correspondantes du conoïde. Prenons une surface (Σ) quelconque formée de droites du complexe et faisons-la virer suivant le pas h. Nous obtiendrons le mouvement général du groupe (g_4) complémentaire d'un groupe (g_2) (1, I).

(1, II). Les droites de pas $-h$ du groupe (g_2) sont les deux isotropes

$$\begin{matrix} y = ix \\ z = +(h + A)i \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} y = -ix, \\ z = -(A + h)i. \end{matrix}$$

en vertu de la page 360 et du théorème de la page 352. Or, le lecteur vérifiera sans peine que les droites réelles qui s'appuient sur ces deux isotropes ont pour équations générales

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha x + \beta y + z &= 0, \\ -\beta x + \alpha y &= A + h. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les équations des droites de pas h du groupe (g_4). Pour $h = -A$, elles donnent les droites issues de O et les droites de xOy. Lorsque h varie, elles engendrent le complexe du second ordre formé par les lignes de plus grande pente des plans qui passent par O. A chacune de ces droites correspond un pas bien déterminé, qu'il ne serait pas difficile de définir géométriquement. De là résulte la génération du mouvement général du groupe (g_4), par une viration définie comme plus haut.

(2, I, a). Pour réaliser le mouvement général du groupe (g_4) correspondant, on fait virer une surface (Σ) formée de droites quelconques parallèles au plan $y + \zeta_1 z = 0$, le pas relatif à chacune de ces droites étant $h = \zeta_1 x$, en appelant x l'abscisse du point où la droite en question perce le plan des zx.

(2, I, b). On prend une surface (Σ) quelconque de plan directeur zOx et l'on affecte chaque génératrice d'un pas $h = -\zeta_2 + my$, en appelant y l'ordonnée de cette droite et m le rapport de ses cosinus directeurs relatifs à Ox et à Oz.

(2, II). Viration, suivant un pas arbitraire, d'un conoïde droit quelconque d'axe Oz.

(3). Viration, suivant un pas arbitraire, d'un cylindre quelconque parallèle à Oz.

24. Groupes (g_5) et (g_6). — Tout groupe (g_5) est complémentaire d'un mouvement hélicoïdal (H). Si l'axe de ce mouvement est à distance finie et si A est son pas, tout mouvement du groupe (g_5) sera engendré par la viration d'une surface réglée quelconque, le pas h relatif à chaque génératrice étant déterminé par la condition que cette droite doit avoir un moment nul relativement au mouvement, coaxial à (H), qui a pour pas $A + h$.

Si (H) est une translation, le mouvement général du groupe sera obtenu par la viration, suivant un pas arbitraire, d'une surface réglée quelconque admettant un plan directeur perpendiculaire à la direction de la translation.

Quant aux mouvements (G_6), ce sont évidemment tous les mouvements possibles.

III. — Applications.

25. Nous nous proposons maintenant d'indiquer quelques applications des mouvements que nous venons d'étudier. Nous ne dirons rien sur la question des familles de Lamé composées de surfaces égales, pour laquelle nous renverrons le lecteur à notre Thèse de Doctorat, déjà citée. Nous nous contenterons d'exposer rapidement les résultats que nous avons résumés dans plusieurs Communications à l'Académie des Sciences, faites en 1908.

Points à vitesse invariable par rapport au solide mobile. — Une première application, à laquelle se ramène une question étudiée par M. Darboux, dans une Note aux *Comptes rendus* du 27 avril 1908, et par l'auteur de ce Mémoire, dans les *Comptes rendus* du 10 août 1908, peut s'énoncer de la manière suivante : *Trouver tous les mouvements que peut prendre un corps solide, par exemple un trièdre* Oxyz, *de* *façon que un ou plusieurs points invariablement liés à ce corps solide aient des vitesses de direction fixes par rapport à lui.*

Ce problème est lui-même un cas particulier du suivant : *Trouver tous les mouvements que doit prendre $Oxyz$ pour qu'une ou plusieurs droites invariablement liées à ce trièdre soient constamment normales aux trajectoires de leurs différents points.* Il suffit, en effet, pour résoudre le premier problème, de chercher, parmi les solutions du second, celles pour lesquelles il existe des faisceaux plans de droites répondant à la question.

Occupons-nous donc d'abord du second problème. Soit une droite D définie par le point $M(x, y, z)$ et par ses cosinus directeurs (a, b, c). Écrivons qu'elle est perpendiculaire à la vitesse du point M ; nous avons

$$\mathbf{S}\, a(\xi + qz - ry) = 0,$$

c'est-à-dire une relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre p, q, r, ξ, η, ζ. Si nous avons un certain nombre de droites D répondant à la question, nous sommes donc certains que *le mouvement du trièdre est nécessairement un mouvement* (G). Dès lors, il nous suffit de passer en revue ces différents mouvements et de rechercher, pour chacun d'eux, quelles sont les droites D qui sont constamment normales aux trajectoires de leurs points. Or, cette recherche est toute faite, car les droites D relatives à un mouvement (G_n) sont les droites (A) de pas nul relativement au groupe (g_{6-n}), complémentaire du groupe (g_n) dont fait partie le mouvement considéré [1]. Or, nous savons trouver, pour un groupe quelconque, toutes les droites (A_h) de pas h, donc en particulier les droites de pas nul. Il suffit, pour cela, de se reporter à la discussion qui a été faite précédemment. Bornons-nous à indiquer ici quels sont les mouvements admettant des points à vitesse invariable, points que nous appellerons, pour abréger, les points I.

1° *Mouvement hélicoïdal.* — Tous les points sont des points I.

---

[1] Bien entendu, on suppose que ce mouvement (G_n) n'appartient pas à un groupe d'ordre inférieur à n.

2° *Mouvements* (G_2), $(1, I)$. — Les points I sont des points des deux directrices Δ et Δ'. Les vitesses sont obliques à ces droites, quand elles sont distinctes, et perpendiculaires quand elles sont confondues.

3° *Mouvements* (G_2), $(2, I, a)$ *et mouvement de verrou autour de* Oz. — Les points I sont les points de Oz : leurs vitesses sont toutes parallèles.

4° *Mouvements* (G_3), $(1, I)$; *cas de* $B = 0$. — Il y a deux points I, situés sur Oy et symétriques par rapport à O. Leurs vitesses sont perpendiculaires à Oy.

5° *Roulement sans glissement du plan* xOy *sur une développable quelconque.* — Les points I sont les points de xOy; leurs vitesses sont normales à ce plan.

6° *Mouvements* (G_4), $(1, II)$; *cas de* $A = 0$. — Le seul point I est l'origine, dont la vitesse est normale à xOy.

Remarque. — On peut comparer ces résultats avec ceux de notre Note du 10 août 1908. On déduit, en particulier, de cette comparaison que, dans le mouvement (4°), la droite Oy engendre la surface réglée la plus générale dont les génératrices peuvent, par flexion de la surface, venir coïncider avec les normales principales d'une courbe de Bertrand.

26. Voici maintenant un autre problème, dont se sont occupés déjà divers géomètres, dans des cas particuliers :

Déterminer les surfaces sur lesquelles se trouve une famille de courbes égales, les développables circonscrites le long de ces courbes étant aussi égales.

Imaginons un trièdre mobile $Oxyz$, dépendant d'un paramètre t. Supposons qu'à ce trièdre soient invariablement liées une courbe (C) et une développable (D) circonscrite à (C). Il s'agit de savoir quels doivent être le mouvement du trièdre, la courbe et la développable pour que la surface (S) engendrée par (C) soit constamment inscrite, le long de cette courbe, à la développable (D).

Soient x, y, z les coordonnées relatives d'un point quelconque M de (C), exprimées en fonction d'un certain paramètre u, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en ce point à (D), qui sont également des fonctions de u. La condition demandée s'exprime ainsi

$$(1) \qquad \mathrm{S}\,\alpha(\xi + qz - ry) = 0.$$

Cette relation est linéaire et homogène en $p, q, \ldots, \zeta$ et à coefficients fonctions de u. Donc *le mouvement doit être un mouvement* (G). De plus, *si une courbe* (C) *convient pour un certain mouvement* (G_n), *elle convient pour tous les mouvements du groupe* (g_n) *auquel appartient le premier.*

Pour la détermination de la courbe (C), voici comment on peut procéder. *Soit* R *une surface réglée dont les génératrices sont choisies arbitrairement parmi les droites appelées droites* (D) *dans le numéro précédent. On prendra comme courbe* (C) *une quelconque des trajectoires orthogonales de ces génératrices.*

Le problème se résout donc toujours par des quadratures.

Applications. — On obtient un cas particulier du problème précédent en se posant la question suivante :

Trouver les surfaces qui admettent une famille de cercles géodésiques égaux et de même courbure géodésique.

On aura la solution générale de ce problème en cherchant à déterminer (C), de façon que cette courbe, considérée comme tracée sur R, ait une courbure normale constante, c'est-à-dire la même en tous les points.

En particulier, *on aura toutes les surfaces admettant une famille d'asymptotiques ou de géodésiques égales en déterminant* (C), *de façon que cette courbe soit une géodésique ou une asymptotique de* R ; ce qui revient à déterminer une courbe (C) dont les binormales ou les normales principales appartiennent à un certain nombre de complexes linéaires indépendants.

Il nous serait facile d'examiner successivement les différents cas qui peuvent se présenter, suivant la nature du mouvement (G) qu'on doit imprimer à la courbe (C), puisque nous connaissons, d'une façon précise, la distribution des droites D pour tous les mouvements (G). Nous pourrions montrer très aisément que le problème des géodésiques égales, en particulier, se ramène à des quadratures. Mais nous ne le ferons pas, parce que ces deux questions ont été étudiées en détail par M. Hazzidakis (*Journal de Crelle*, 1883), qui a résolu complètement, par quadratures, le problème des géodésiques [1]. Le problème des asymptotiques n'a pas encore été intégré jusqu'au bout, du moins à notre connaissance, malgré les efforts de divers géomètres, entre autres MM. Goursat et Rouquet.

27. Voici maintenant une question, entièrement différente des précédentes, et qui conduit encore aux mouvements (G) :

Peut-on trouver deux surfaces applicables admettant chacune une famille de lignes égales, se correspondant dans la déformation, et telles que les lignes des deux familles soient égales entre elles [2] ?

---

[1] La méthode suivie par ce géomètre, pour ramener le problème aux quadratures, nous a paru longue et peu intuitive. De plus, le lien qui existe entre les deux questions (géodésiques et asymptotiques) ne nous semble pas avoir été mis suffisamment en lumière. Notre méthode permet au contraire d'établir très rapidement tous les résultats obtenus par M. Hazzidakis.

[2] Ce problème, ainsi que le problème plus général dont nous avons dit quelques mots dans une Note aux *Comptes rendus* du 23 novembre 1908, semblent, au premier abord, ne pas admettre de solution, si l'on se rappelle les deux théorèmes suivants (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 280 et 287): *Étant donnée une courbe* C *par une surface* S, *on ne peut déformer* S *sans déformer* C *que si* C *est une asymptotique*. D'autre part, *si les lignes asymptotiques d'une famille se correspondent sur deux surfaces applicables, celles-ci sont égales ou symétriques*.

En réalité, si la courbe C n'est pas une asymptotique, on peut quand même faire passer par elle une seconde surface S′, applicable sur S de façon que la courbe C soit à elle-même son homologue. Il suffit en effet de prendre la surface S″ symétrique de S par rapport à un plan et de la déformer de façon que la courbe C″, symétrique de C, vienne coïncider avec C, ce qui est, comme on sait, toujours possible. La surface S′ obtenue répondra à la question et cependant ne pourra coïncider avec S. Les plans tangents à S et à S′ en un même point de C sont symétriques par rapport au plan osculateur en ce point à C. Les deux surfaces S et S′ sont applicables en ce sens que les arcs homologues

Soit une courbe C, invariablement liée à un trièdre mobile $Oxyz$. Dans un premier mouvement de ce trièdre, elle engendre une certaine surface S, dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = \left(\mathbf{S}x'^2\right)du^2 + 2\left[\mathbf{S}x'(\xi + qz - ry)\right]du\,dt + \left[\mathbf{S}(\xi + qz - ry)^2\right]dt^2,$$

en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de C, exprimées en fonction d'un certain paramètre u, et x', y', z' les dérivées de ces fonctions.

Supposons que, dans un second mouvement du trièdre, la courbe C engendre une surface S_1 applicable sur S. Nous avons les deux conditions nécessaires et suffisantes :

$$\mathbf{S}x'(X + Qz - Ry) = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{S}(X + Qz - Ry)(X_1 + Q_1 z - R_1 y) = 0, \tag{3}$$

en posant

$$\begin{array}{llll} X = \xi - \xi_1, & Y = \eta - \eta_1, & \ldots, & R = r - r_1, \\ X_1 = \xi + \xi_1, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & R_1 = r + r_1 \end{array}$$

et désignant par $p_1, q_1, \ldots \zeta_1$ les composantes du second mouvement.

Si l'on donne à t une valeur numérique, l'équation (2) exprime que les tangentes à la courbe C appartiennent à un complexe linéaire. Si ce complexe change avec la valeur attribuée à t, la courbe C ne peut être qu'une droite ou bien une courbe plane. Écartons le cas où ce

---

ont même longueur. Mais *on ne peut passer de l'une à l'autre par déformation continue*. Si l'on considère quatre points de S formant un petit tétraèdre, les points homologues de S' forment un tétraèdre symétrique du premier, mais non superposable.

S'il existe sur S une famille de courbes C égales aux courbes homologues de S', il est aisé de voir que les tangentes à chacune d'elles doivent appartenir à un même complexe linéaire. En effet, soit C_1 la courbe voisine de C et C'_1 son homologue. On peut passer de C_1 à C'_1 par un mouvement hélicoïdal (H). Or, si M est un point quelconque de C, M_1 un point voisin de C_1, M'_1 le point homologue de C'_1, le plan perpendiculaire au milieu de $M_1M'_1$ est le plan osculateur en M à C. D'où il résulte que ce plan est plan polaire de M par rapport au complexe linéaire attaché au mouvement (H).

serait une droite, qui nous conduirait simplement à la flexion des surfaces réglées. Supposons maintenant que C est une courbe plane, que nous pouvons supposer dans xOy. Si nous exigeons qu'elle ne soit pas rectiligne, l'équation (2) donne d'abord

$$X = Y = R = 0;$$

puis l'équation (3) donne

$$P_1 = Q_1 = Z_1 = 0.$$

Il est alors facile de constater que les deux surfaces S et S_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan, ce qui est une solution évidente et sans intérêt. Il nous faut donc supposer que X, Y, ... sont proportionnels à des constantes. En écartant le cas d'une courbe plane, choisissant l'axe central du complexe pour axe des z, et ramenant, par une homothétie, son pas à l'unité, nous avons

$$X = Y = P = Q = 0, \qquad Z = R.$$

Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$xy' - yx' + z' = 0, \tag{4}$$

$$-z(P_1 x + Q_1 y) + R_1(x^2 + y^2) + \alpha_1 x + \beta_1 y + Z_1 = 0, \tag{5}$$

en posant

$$\alpha_1 = Y_1 - Q_1, \qquad \beta_1 = -X_1 + P_1. \tag{6}$$

Si l'on donne à t diverses valeurs numériques, on voit que la courbe C doit appartenir à un certain nombre de quadratiques Q, que l'on peut caractériser par la propriété d'admettre xOy comme plan cyclique et Oz comme direction asymptotique, le plan asymptote relatif à cette direction passant par Oz.

Suivant le nombre de ces quadratiques Q qui passent par C, nous avons plusieurs cas à considérer :

Premier cas : *La courbe* C *se trouve sur une seule quadrique* Q. — Ici, nous ferons encore deux hypothèses, suivant que P_1 et Q_1 ne sont pas tous deux nuls ou le sont.

I. Q *n'est pas un cylindre parallèle à* Oz. — Nous pouvons alors supposer que Q_1 est nul, en choisissant le plan asymptote pour zOy.

Dans ces conditions, P_1 est nécessairement différent de zéro et, par un choix convenable de l'origine sur Oz, on peut supposer que α_1 est nul. L'équation (5) est alors de la forme

$$-zx + a(x^2 + y^2) + by + c = 0 \tag{7}$$

et représente un hyperboloïde (à une ou deux nappes) d'axe Oy, si $a \neq 0$; et un paraboloïde hyperbolique équilatère, si $a = 0$. La projection de la courbe C sur xOy doit satisfaire à l'équation différentielle

$$dv[v(y - a) + ay^2 + by + c] = 2\,dy(v + 2ay + b)v, \tag{8}$$

où l'on a posé

$$v = x^2.$$

Cette équation rentre, de deux manières différentes, dans un type général, qu'on ne sait intégrer que dans des cas particuliers (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 445).

Pour $a = 0$, *elle est linéaire en* y et admet pour intégrale générale

$$y = mx - \frac{c}{b}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{b}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{b}}\right) \qquad (m = \text{const.}), \tag{9}$$

si $b \neq 0$, et

$$y = mx - \frac{c}{3x^2} \qquad (m = \text{const.}), \tag{10}$$

si $b = 0$.

Quant à z, il est donné par l'équation (7).

Occupons-nous maintenant des deux mouvements que doit prendre la courbe C pour engendrer S et S_1. Si λ_1 et λ_2 désignent deux fonctions arbitraires de t, nous avons

$$\xi = \lambda_2(1 - b), \quad \eta = 0, \quad \zeta = \lambda_2 c + \lambda_1, \quad p = \lambda_2, \quad q = 0, \quad r = \lambda_2 a + \lambda_1,$$
$$\xi_1 = \lambda_2(1 - b), \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = \lambda_2 c - \lambda_1, \quad p_1 = \lambda_2, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \lambda_2 a - \lambda_1.$$

D'où il résulte que *les deux mouvements sont des mouvements* (G_2) admettant pour mouvements de base le mouvement d'axe Oz et de pas 1 et le mouvement dont l'axe a pour équations (¹)

$$(11) \qquad z = ax, \qquad y = \frac{a - ab - c}{1 + a^2},$$

et dont le pas est égal à $\frac{1 - b + ac}{1 + a^2}$.

On peut choisir arbitrairement le premier mouvement parmi ceux du groupe (g_2) déterminé par les deux mouvements de base précédents. Mais alors il est clair que le second mouvement est entièrement défini, ainsi que la correspondance entre les positions homologues de la courbe C. Si t et t_1 désignent les angles polaires dans zOx (à partir de Oz) des axes instantanés homologues, on a la relation

$$(12) \qquad \cot t + \cot t_1 = 2a.$$

De plus, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans la première Partie de ce travail, et si l'on désigne encore par $\tang \psi$ la courbure géodésique de l'indicatrice (γ) de la surface Σ sur laquelle doit virer le conoïde de Plücker Σ' (ou le faisceau plan) pour engendrer le premier mouvement, on a

$$\lambda_2 = -\cot\psi \sin t.$$

De même, pour le second mouvement

$$\lambda_2 = -\cot\psi_1 \sin t_1 \frac{dt_1}{dt} = \cot\psi_1 \frac{\sin^3 t_1}{\sin^2 t}.$$

D'où il résulte que *les courbes (γ) et (γ_1) doivent être telles que, si l'on établit entre leurs arcs t et t_1 la relation* (11), *les courbures géodésiques aux points homologues doivent être liées par la relation*

$$(13) \qquad \cot\psi \sin^3 t + \cot\psi_1 \sin^3 t_1 = 0.$$

Si l'on se donne (γ), on connaîtra (γ_1) par son équation intrinsèque sur la sphère; malheureusement on ne pourra l'obtenir en termes finis que par l'intégration d'une équation de Riccati. Peut-être pourrait-on profiter de l'indétermination de la courbe (γ) pour ramener cette intégration à des quadratures.

(¹) On se trouve visiblement dans le premier cas du Tableau de la page 364.

Dans le cas particulier déjà rencontré où a est nul, on a

$$t_1 = -t, \qquad \psi_1 = \psi.$$

La courbe (γ_1) est alors symétrique de (γ). *Dans ce cas, le problème se résout entièrement par quadratures.*

II. Q *est un cylindre parallèle à* Oz. — Prenons l'axe de ce cylindre dans le plan zOx; soit a l'abscisse de cet axe et soit R le rayon du cylindre. Les équations de la courbe C sont

$$x = a + R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = -R(Ru + a\sin u).$$

Il ne serait pas difficile d'en donner une définition géométrique simple.

Quant aux deux mouvements, leurs composantes sont

$$\begin{array}{llll} p = q = 0, & r = \lambda_1 + \lambda_2, & \xi = 0, & \eta = -2a\lambda_2, \quad \zeta = \lambda_1 + \lambda_2(a^2 - R^2), \\ p_1 = q_1 = 0, & r_1 = -\lambda_1 + \lambda_2, & \xi_1 = 0, & \eta_1 = -2a\lambda_2, \quad \zeta_1 = -\lambda_1 + \lambda_2(a^2 - R^2). \end{array}$$

Ce sont des mouvements (G_2) (deuxième cas du Tableau de la page 364) admettant pour mouvements de base le mouvement d'axe Oz et de pas 1 et le mouvement dont l'axe a pour équations

$$y = 0, \qquad x = 2a,$$

et dont le pas est égal à $a^2 - R^2$.

Les axes instantanés homologues sont conjugués harmoniques par rapport aux axes des mouvements de base, de sorte que leurs abscisses t et t_1 sont liées par la relation

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{a}.$$

De plus, si ρ et ρ_1 désignent les rayons de courbure homologues des sections droites des cylindres sur lesquels doit se produire la viration du plan zOx, on doit avoir

$$\frac{t}{\rho} = \frac{t_1}{\rho_1}\cdot\frac{dt_1}{dt} = -\frac{t_1}{\rho_1}\cdot\frac{t_1^2}{t^2}$$

ou

$$\frac{t^3}{\rho} + \frac{t_1^3}{\rho_1} = 0.$$

D'où il résulte que *le problème se résoudra entièrement par quadratures.*

Ceci suppose $a \neq 0$. Dans le cas contraire, la courbe C est une hélice circulaire d'axe Oz et les mouvements sont des mouvements de verrou. Mais ce cas est peu intéressant, car les surfaces S et S_1 correspondantes ne sont autres que le cylindre d'axe Oz et de rayon R.

Deuxième cas : *La courbe C se trouve sur deux quadriques* Q. — Tout d'abord, si elle se trouve à la fois sur deux quadriques Q, elle se trouve aussi sur toutes les quadriques du faisceau ponctuel correspondant. Or, parmi celles-ci, il s'en trouve au moins une qui ne renferme pas de terme en x^2+y^2. En choisissant les axes comme à la page 383, on peut ramener son équation à la forme

$$-zx+by+c=0.$$

Mais alors on se trouve précisément dans le cas où l'on sait intégrer (8). Pour qu'il existe une intégrale algébrique, il faut que b soit nul, auquel cas la courbe C a pour équations

$$(14)\qquad y=mx-\frac{c}{3x^2},\qquad z=\frac{c}{x}.$$

Il est alors facile de former l'équation aux x des points d'intersection de cette courbe avec la quadrique (5) et d'écrire qu'elle est vérifiée identiquement. On trouve, en annulant successivement les coefficients de $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$, x et terme constant,

$$R_1=0,\qquad Q_1=0,\qquad \beta_1=0,\qquad \alpha_1=0,\qquad Z_1=cP_1.$$

Par conséquent, il ne passe qu'une seule quadrique Q par la courbe C en question. *Notre deuxième cas ne peut donc pas se présenter* et le problème que nous nous étions posé est maintenant entièrement résolu.

Nous terminerons là, en même temps que notre Mémoire, l'étude des applications des mouvements (G), espérant avoir montré, d'une façon suffisante, tout l'intérêt qui s'attache à ces mouvements, ainsi que la manière dont on peut utiliser les résultats contenus dans ce travail pour traiter certaines questions particulières.