JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. DUPORT

Sur l'élimination des longitudes dans le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 6 (1910), p. 271-342.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__271_0>

Sur l'élimination des longitudes dans le problème des trois corps;

PAR M. H. DUPORT.

PRÉFACE.

Le problème des trois corps a été l'objet de travaux nombreux depuis la découverte de la loi de l'attraction universelle. Les géomètres les plus éminents s'en sont occupés et l'intérêt qui s'attache à cette difficile question se comprend aisément; car, la Lune étant l'astre le plus rapproché de nous, la détermination précise de son mouvement a une très grande importance.

On a souvent voulu attacher à ce problème un intérêt théorique qui est plus difficile à justifier, celui de la vérification même de la loi de l'attraction universelle. Il est clair que cette loi ne peut être qu'une loi physique qui est assurément vraie dans son application à la Mécanique céleste, mais il ne faut pas songer à la considérer autrement. On n'est arrivé, en partant de ce point de vue, qu'à l'hypothèse absurde de la continuité de la matière, à la théorie incompréhensible des actions de contact, tandis que la conception atomique combinée avec les actions à distance permettra sans doute de dévoiler la constitution de la matière. Je renverrai le lecteur que ces questions intéressent au dernier Mémoire que j'ai publié sur ce sujet, qui a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 mars 1901, et qui a paru dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, t. XI, n° 3. J'ai pu m'assurer depuis que l'étude des équations fonctionnelles, à laquelle la recherche de la loi de l'attraction universelle est maintenant ramenée, est susceptible d'être faite par des analystes adroits.

Si nous revenons maintenant à la question qui nous occupe aujourd'hui, celle du problème des trois corps, on n'est pas encore en possession d'une solution satisfaisante au point de vue des formules à employer. Il semble qu'un point de vue surtout ait empêché les progrès de se faire. Dès le début, les géomètres ont été séduits par le côté brillant de certains travaux de Jacobi sur les équations différentielles de la Mécanique. Ces travaux font jouer à la fonction des forces un rôle prépondérant, et, dès lors, on n'a plus pu s'en séparer.

Cependant, ces travaux de Jacobi sont inspirés par un principe analytiquement faux, celui de résoudre des équations différentielles à l'aide d'une équation aux dérivées partielles. Tout le contraire a lieu dans la réalité, et je puis dire que, si l'on se reporte aux deux Mémoires que j'ai publiés sur cette question dans le *Journal de Liouville* (t. III, fasc. 1, et t. VI, fasc. 1, 5^e série), il reste très peu de chose à faire pour ramener dans tous les cas le système que j'ai traité aux équations différentielles, et que la nature de la solution permet de croire qu'il en sera de même dans le cas d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles [1]. En Mécanique céleste, non seulement la considération de la fonction des forces complique la question, car on introduit une fonction qu'on transforme trop pour pouvoir ensuite l'étudier avec fruit, mais on n'a pas même l'excuse d'une seule fonction. Il faut autant de fonctions perturbatrices qu'il y a de corps, et dès lors le petit intérêt qui existait au début à l'introduire a complètement disparu.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire renferme toutes les formules nécessaires à la détermination des mouvements des comètes, des planètes et de la

[1] Dans le cas général, au lieu de trouver comme dans le premier ordre les solutions comprenant des fonctions arbitraires, on trouve séparément des solutions dépendant d'un certain nombre de constantes arbitraires. Ce résultat est bien d'accord avec les travaux publiés sur les équations aux dérivées partielles ; à défaut de la solution générale, on est arrivé dans bien des cas à trouver quelques solutions dépendant de constantes arbitraires.

Lune. Elles sont plus simples que celles qui ont été utilisées jusqu'ici. La méthode suivie consiste à séparer dès le début les directions et les distances. Elle s'impose dans l'observation, car, tandis que les coordonnées angulaires des astres peuvent s'obtenir avec soin, au contraire la mesure des diamètres apparents ne fournit sur les distances que des renseignements incomplets et peu précis. Il est assez curieux que le même point de vue donne aussi les meilleurs résultats dans les problèmes théoriques qui font l'objet de la partie la plus importante de la Mécanique céleste.

Ce Mémoire est divisé en quatre Parties :

La première traite de la détermination de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen d'observations voisines et surabondantes. Il paraîtra évident à toute personne ayant lu la Préface que M. Poincaré a écrite en tête des leçons professées à ce sujet par Tisserand et rédigées après lui par M. Perchot, qu'une solution plus simple de ce problème ne peut résulter que de l'emploi d'un nombre d'observations plus grand que celui qui serait suffisant et en plus d'observations voisines. C'est le problème ainsi posé que j'ai résolu. On sait qu'il est nécessaire de faire trois observations de direction pour que le problème soit déterminé, lorsqu'on néglige la masse de la planète vis-à-vis de celle du Soleil. En faisant quatre observations, on peut, d'une part, ramener le problème au premier degré, et, d'autre part, déterminer la masse de la planète inconnue.

Dans la deuxième Partie, j'ai considéré le système formé par le Soleil, la Terre et la Lune. Je me suis d'abord proposé de déterminer les masses de ces corps et les rapports de leurs distances au moyen d'observations de direction. Le problème n'offre pas de grandes difficultés, et, comme on connaît la distance de la Terre à la Lune, on voit qu'on peut tirer de là en particulier la valeur de la parallaxe solaire par une méthode qui a l'avantage de pouvoir être appliquée à un moment quelconque. La solution de cette question est naturellement d'une grande utilité quand on cherche ensuite les mouvements, car alors les coefficients qui entrent dans les équations différentielles sont connus avec précision et les données initiales peuvent être rigoureusement obtenues au moyen d'observations.

Dans la troisième Partie, j'ai abordé le problème des trois corps en étudiant les mouvements du Soleil et de la Lune relativement à la Terre. La méthode suivie a une grande analogie avec celle de Lagrange, fondée sur la recherche des distances mutuelles, puisque les inconnues fondamentales sont les distances de la Terre au Soleil et à la Lune, et l'angle sous lequel on voit de la Terre la distance du Soleil à la Lune. On en déduit aisément les formules relatives à la détermination des orbites képlériennes. J'ai indiqué enfin une modification de la méthode ordinaire de calcul en utilisant les intégrales des aires. Cette voie pourra paraître un peu compliquée, mais elle n'est pas au-dessus des forces des mathématiciens qui affrontent les difficultés de la Mécanique céleste, et il semble qu'elle puisse fournir une solution satisfaisante du problème des trois corps. C'est ce qui légitime le titre de ce travail.

Dans la quatrième Partie, j'ai repris la méthode de Jacobi qui consiste à déterminer, d'une part, le mouvement relativement au Soleil du système formé par la Terre et la Lune, puis le mouvement de la Lune relativement à la Terre. La méthode de calcul est rapide et peut s'étendre au système solaire entier, c'est-à-dire à un système formé du Soleil, des planètes et de leurs satellites.

PREMIÈRE PARTIE.

Soient le Soleil en S; des axes rectangulaires Sx, Sy, Sz. Soient la Terre en T; x_1, y_1, z_1 ses coordonnées. Elles sont supposées connues à un facteur constant près dont la valeur inconnue correspond à la détermination précise de la parallaxe solaire. On sait que la connaissance de ce facteur n'est pas utile pour déterminer les directions, les rapports des distances, ainsi que les rapports des masses entre elles et le rapport de l'une d'elles au cube de la distance. En supposant ce coefficient K égal à l'unité, nous faisons une hypothèse, et l'erreur commise pourra être aisément corrigée quand on en aura la valeur exacte.

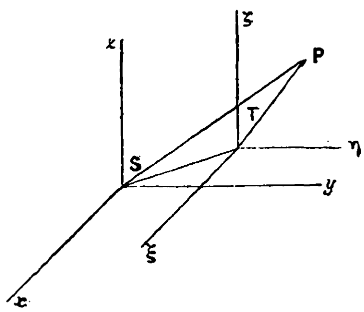
Soient $T\xi$, $T\eta$, $T\zeta$ des axes parallèles aux axes fixes menés par le centre de la Terre. Il n'est pas nécessaire de supposer que le plan des xy est le plan de l'écliptique. Le plan des $\xi\eta$ peut être, par exemple, celui de l'équateur. Comme on se place toujours dans l'un de ces deux cas, on peut admettre que $T\xi$ est la ligne allant au point γ.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées de la planète P relativement à la Terre; x, y, z ses coordonnées relativement au Soleil. Je poserai

$$\xi = \rho\alpha, \qquad \eta = \rho\beta, \qquad \zeta = \rho\gamma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la direction TP et ρ la distance TP.

Fig. 1.



On aura les formules

$$(1) \qquad x = x_1 + \rho\alpha, \qquad y = y_1 + \rho\beta, \qquad z = z_1 + \rho\gamma.$$

On a aussi les équations

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu'\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu'\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu'\frac{z}{r^3},$$

où μ' est la somme des masses du Soleil et de la planète, et où r désigne la distance SP. On a également

$$(3) \qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\mu\frac{x_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\mu\frac{y_1}{R^3}, \qquad \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\mu\frac{z_1}{R^3},$$

où μ désigne la somme des masses du Soleil et de la Terre, et où R désigne la distance ST.

Des équations (2) on tire

$$(4) \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C, \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C', \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'',$$

C, C', C'' étant des constantes. Des équations (3) on tire de même

$$(5)\quad y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}=A,\qquad z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}=A',\qquad x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}=A'',$$

A, A', A'' étant des constantes. On aura aussi

$$(6)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs, les équations (4) peuvent s'écrire de la manière suivante, où il a été tenu compte des équations (5) :

$$(7)\quad \begin{cases} A+\rho\left(\beta\frac{dz_1}{dt}-\gamma\frac{dy_1}{dt}\right)+\rho\left(y_1\frac{d\gamma}{dt}-z_1\frac{d\beta}{dt}\right) \\ \qquad +\rho^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(y_1\gamma-z_1\beta)=C, \\ A'+\rho\left(\gamma\frac{dx_1}{dt}-\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)+\rho\left(z_1\frac{d\alpha}{dt}-x_1\frac{d\gamma}{dt}\right) \\ \qquad +\rho^2\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\gamma}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(z_1\alpha-x_1\gamma)=C', \\ A''+\rho\left(\alpha\frac{dy_1}{dt}-\beta\frac{dx_1}{dt}\right)+\rho\left(x_1\frac{d\beta}{dt}-y_1\frac{d\alpha}{dt}\right) \\ \qquad +\rho^2\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)+\frac{d\rho}{dt}(x_1\beta-y_1\alpha)=C''. \end{cases}$$

Multiplions les équations (7) respectivement par α, β, γ et ajoutons; on aura

$$A\alpha+A'\beta+A''\gamma+\rho\left[x_1\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)+y_1\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)\right.$$
$$\left.+z_1\left(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=C\alpha+C'\beta+C''\gamma.$$

Je poserai

$$(8)\qquad A\alpha+A'\beta+A''\gamma=L,$$

$$(9)\qquad x_1\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)+y_1\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)+z_1\left(\beta\frac{d}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\right)=M,$$

et l'équation précédente peut s'écrire

$$(10)\qquad L+M\rho=C\alpha+C'\beta+C''\gamma.$$

Multiplions maintenant les équations (7) respectivement par x_1, y_1, z_1 et ajoutons; on aura

$$(11)\qquad -\rho L - \rho^2 M = C x_1 + C' y_1 + C'' z_1.$$

Enfin multiplions les équations (7) par $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$, et ajoutons; on aura

$$\begin{aligned} A\frac{d\alpha}{dt} &+ A'\frac{d\beta}{dt} + A''\frac{d\gamma}{dt} \\ &+ \rho\left[\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt}\right) + \frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)\right. \\ &\left. + \frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right)\right] - \frac{d\rho}{dt}M \\ &= C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned}$$

Posons

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{dM}{dt} - P = {} & \frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt}\right) \\ & + \frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}\right) + \frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt}\right), \end{aligned}$$

ou bien

$$(13)\qquad P = x_1\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2} - \beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + y_1\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + z_1\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right);$$

l'équation précédente devient

$$(14)\qquad \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right) = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Réunissons les équations (10), (11) et (14) :

$$(10)\qquad L + M\rho = C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$

$$(11)\qquad -L\rho - M\rho^2 = C x_1 + C' y_1 + C'' z,$$

$$(14)\qquad \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right) = C\frac{d\alpha}{dt} + C'\frac{d\beta}{dt} + C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dérivons l'équation (10) et retranchons-en l'équation (14). On aura

$$\frac{dL}{dt} + \frac{dM}{dt}\rho + M\frac{d\rho}{dt} = \frac{dL}{dt} - M\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{dM}{dt} - P\right)$$

ou bien

$$(15)\qquad 2M\frac{d\rho}{dt}+P\rho=0,$$

et l'équation (14) s'écrira

$$(16)\qquad \frac{dL}{dt}+\rho\left(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\right)=C\frac{d\alpha}{dt}+C'\frac{d\beta}{dt}+C''\frac{d\gamma}{dt}.$$

Dérivons l'équation (11); on aura

$$-L\frac{d\rho}{dt}-2M\rho\frac{d\rho}{dt}-\rho\frac{dL}{dt}-\rho^2\frac{dM}{dt}=C\frac{dx_1}{dt}+C'\frac{dy_1}{dt}+C''\frac{dz_1}{dt},$$

ou bien, en tenant compte de (15),

$$(17)\qquad -\rho\left(\frac{dL}{dt}-\frac{PL}{2M}\right)-\rho^2\left(\frac{dM}{dt}-P\right)=C\frac{dx_1}{dt}+C'\frac{dy_1}{dt}+C''\frac{dz_1}{dt}.$$

Entre les équations (10), (11), (16) et (17), éliminons C, C', C''; on aura

$$\begin{vmatrix} L+M\rho & \alpha & \beta & \gamma \\ -L\rho-M\rho^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{dL}{dt}+\rho\left(\dfrac{dM}{dt}-\dfrac{P}{2}\right) & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ -\rho\left(\dfrac{dL}{dt}-\dfrac{PL}{2M}\right)-\rho^2\left(\dfrac{dM}{dt}-P\right) & \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dz_1}{dt} \end{vmatrix}=0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation est une identité; en la développant par rapport aux éléments de la première colonne, elle s'écrira

$$-\frac{dL}{dt}(L+M\rho)+(\rho L+\rho^2 M)\left(P-\frac{dM}{dt}\right)$$
$$+\left[\frac{dL}{dt}+\rho\left(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\right)\right]L+\left[\rho\left(\frac{dL}{dt}-\frac{PL}{2M}\right)+\rho^2\left(\frac{dM}{dt}-P\right)\right]M=0.$$

Il est aisé de voir que tous les termes se détruisent.

Dérivons maintenant l'équation (16); on aura

$$(18)\qquad \frac{d^2L}{dt^2}+\rho\left[\frac{d^2M}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}-\frac{P}{2M}\left(\frac{dM}{dt}-\frac{P}{2}\right)\right]=C\frac{d^2\alpha}{dt^2}+C'\frac{d^2\beta}{dt^2}+C''\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

en tenant compte de l'équation (15).

En éliminant C, C′, C″ entre les équations (10), (11), (16) et (18), on aura

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} L+M\rho & \alpha & \beta & \gamma \\ -L\rho - M\rho^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{dL}{dt}+\rho\left(\dfrac{dM}{dt}-\dfrac{P}{2}\right) & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ \dfrac{d^2L}{dt^2}+\rho\left[\dfrac{d^2M}{dt^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{dP}{dt}-\dfrac{P}{2M}\dfrac{dM}{dt}+\dfrac{P^2}{4M}\right] & \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} & \dfrac{d^2\beta}{dt^2} & \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation (19) n'est pas une identité, car le terme en ρ^2 a pour coefficient, au facteur près M, le déterminant

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} & \dfrac{d^2\beta}{dt^2} & \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix} = Q,$$

qui n'est pas nul, car il est égal à

$$\frac{1}{\rho^3}\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \dfrac{d\xi}{dt} & \dfrac{d\eta}{dt} & \dfrac{d\zeta}{dt} \\ \dfrac{d^2\xi}{dt^2} & \dfrac{d^2\eta}{dt^2} & \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} \end{vmatrix},$$

et, si ce dernier déterminant était nul, la trajectoire apparente de la planète vue de la Terre serait une courbe plane dont le plan passerait par la Terre.

Calculons maintenant le terme tout connu; il est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} L & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \dfrac{dL}{dt} & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \\ \dfrac{d^2L}{dt^2} & \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} & \dfrac{d^2\beta}{dt^2} & \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} A\alpha + A'\beta + A''\gamma & \alpha & \beta & \gamma \\ A\frac{d\alpha}{dt} + A'\frac{d\beta}{dt} + A''\frac{d\gamma}{dt} & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ A\frac{d^2\alpha}{dt^2} + A'\frac{d^2\beta}{dt^2} + A''\frac{d^2\gamma}{dt^2} & \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix},$$

ou bien en retranchant de la première colonne le résultat obtenu en multipliant les éléments de la seconde par A, de la troisième par A′, de la quatrième par A″, et faisant la somme

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \\ 0 & \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ -Ax_1 - A'y_1 - A''z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est nul, puisqu'on a

$$Ax_1 + A'y_1 + A''z_1 = 0.$$

L'équation (19) se réduit donc au premier degré; elle fournira la valeur de ρ.

Les équations (10), (11) et (16) fourniront ensuite e, e', e''.

Revenons maintenant aux équations (2). Elles peuvent s'écrire, en tenant compte de (3),

$$(21)\quad \begin{cases} -\mu\frac{x_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \alpha\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mu'\frac{x_1 + \rho\alpha}{r^3}, \\ -\mu\frac{y_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \beta\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mu'\frac{y_1 + \rho\beta}{r^3}, \\ -\mu\frac{z_1}{R^3} + \rho\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mu'\frac{z_1 + \rho\gamma}{r^3}. \end{cases}$$

Multiplions la première de ces équations par $\beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}$, la seconde par $\gamma\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\gamma}{dt}$, la troisième par $\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}$, et ajoutons; il viendra

$$\mu\frac{M}{R^3}+\rho\begin{vmatrix}\alpha & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d^2\alpha}{dt^2}\\ \beta & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d^2\beta}{dt^2}\\ \gamma & \frac{d\gamma}{dt} & \frac{d^2\gamma}{dt^2}\end{vmatrix}=\mu'\frac{M}{r^3},$$

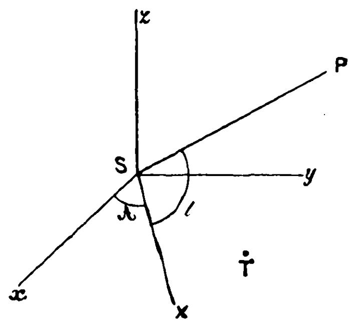
ou bien

$$\rho Q = M\left(\frac{\mu'}{r^3}-\frac{\mu}{R^3}\right). \tag{22}$$

C'est l'équation de Laplace. Elle fournit μ', car on a

$$r^2 = R^2+\rho^2-2\rho R\cos\widehat{STP} = R^2+\rho^2+2\rho(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1). \tag{23}$$

Fig. 2.



Pour achever la question, reprenons la figure précédente, mais dans laquelle les axes Sx, Sy sont dans le plan de l'écliptique. Soient SX la ligne des nœuds de la planète, Ω la longitude du nœud, i l'inclinaison de l'orbite, λ la longitude géocentrique de la planète, β sa latitude géocentrique, L la longitude de la Terre, l la longitude de la planète dans son orbite comptée à partir de la ligne des nœuds.

On a les équations

$$\left\{\begin{aligned} r\cos l &= R\cos(L-\Omega)+\rho\cos\beta\cos(\lambda-\Omega),\\ r\sin l\cos i &= R\sin(L-\Omega)+\rho\cos\beta\sin(\lambda-\Omega),\\ r\sin l\sin i &= \rho\sin\beta.\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Les valeurs de C, C', C'' ont fourni Λ et i qui sont désormais connus, et je poserai en plus

$$G^2 = C^2 + C'^2 + C''^2, \tag{25}$$

G étant positif. Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} B &= R[\sin\beta\cos i\cos(L - \Lambda) + \cos\beta\sin i\sin(L - \lambda)],\\ B' &= R\sin(L - \Lambda)\sin\beta,\\ B'' &= \sin\beta\cos i - \cos\beta\sin i\sin(\lambda - \Lambda), \end{aligned}\right. \tag{26}$$

les équations fournissent

$$r\cos l = \frac{B}{B''}, \qquad r\sin l = \frac{B'}{B''}. \tag{27}$$

On a d'ailleurs les formules

$$r = \frac{G^2}{\mu'}\,\frac{1}{1 + e\cos(l - \varpi)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\mu'}{G}e\sin(l - \varpi), \tag{28}$$

e étant l'excentricité de l'orbite planétaire, ϖ la longitude du périhélie.

On tire des équations (27), (28) et de la loi des aires

$$r^2\frac{dl}{dt} = G$$

les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r\cos l) &= -\frac{\mu'}{G}(\sin l + e\sin\varpi) = \frac{B''\dfrac{dB}{dt} - B\dfrac{dB''}{dt}}{B''^2},\\ \frac{d}{dt}(r\sin l) &= \frac{\mu'}{G}(\cos l + e\cos\varpi) = \frac{B''\dfrac{dB'}{dt} - B'\dfrac{dB''}{dt}}{B''^2}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

On calculera l à l'aide des équations (27), puis e et ϖ à l'aide de (29).

Ayant l, on calculera enfin l'époque du passage de la planète au périhélie.

Je vais développer l'équation (19). Elle s'écrit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\Big[x_1\Big(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)&+y_1\Big(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)\\
&+z_1\Big(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big)\Big]\\
&+(\mathrm{L}+\mathrm{M}\rho)\mathrm{Q}+\mathrm{P}\Big(\frac{d\mathrm{M}}{dt}-\frac{\mathrm{P}}{2}\Big)\\
&-\mathrm{M}\Big(\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}-\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\Big)+\frac{\mathrm{P}}{2}\frac{d\mathrm{M}}{dt}-\frac{\mathrm{P}^2}{4}=0,
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}\Big[x_1\Big(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)&+y_1\Big(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)\\
&+z_1\Big(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big)\\
&-\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}+\rho\mathrm{Q}\Big]\\
&+\mathrm{L}\mathrm{Q}+\frac{3\mathrm{P}}{2}\Big(\frac{d\mathrm{M}}{dt}-\frac{\mathrm{P}}{2}\Big)=0,
\end{aligned}
$$

ou enfin, en remplaçant $\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}$ par sa valeur,

$$
\begin{aligned}
(19')\qquad \mathrm{M}\Big[x_1\Big(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\Big)&+y_1\Big(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\Big)\\
+z_1\Big(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\Big)&-\frac{3}{2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}+\mu\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}^3}+\rho\mathrm{Q}\Big]\\
&+\mathrm{L}\mathrm{Q}+\frac{3\mathrm{P}}{2}\Big(\frac{d\mathrm{M}}{dt}-\frac{\mathrm{P}}{2}\Big)=0.
\end{aligned}
$$

Dans la valeur de $\frac{d^2\mathrm{M}}{dt^2}$ nous avons remplacé les termes en $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations (3).

Bien que la question posée soit résolue, des considérations supplémentaires seront utiles. Reprenons les équations (21). Si on les multiplie respectivement par $\beta z_1-\gamma y_1$, $\gamma x_1-\alpha z_1$, $\alpha y_1-\beta x_1$ et que l'on ajoute, on obtient l'équation

$$
\begin{aligned}
\rho\Big[\frac{d^2\alpha}{dt^2}(\beta z_1-\gamma y_1)&+\frac{d^2\beta}{dt^2}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{d^2\gamma}{dt^2}(\alpha y_1-\beta x_1)\Big]\\
+2\frac{d\rho}{dt}\Big[\frac{d\alpha}{dt}(\beta z_1-\gamma y_1)&+\frac{d\beta}{dt}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{d\gamma}{dt}(\alpha y_1-\beta x_1)\Big]=0,
\end{aligned}
$$

qui n'est autre que

$$(15) \qquad 2M\frac{d\rho}{dt} + P\rho = 0.$$

Multiplions maintenant les équations (21) par α, β, γ et ajoutons; il viendra

$$-\mu\frac{\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1}{R^3} + \rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + \frac{d^2\rho}{dt^2}$$
$$= -\mu'\frac{\rho}{r^3} - \mu'\frac{\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1}{r^3}$$

ou bien

$$\left(\frac{\mu'}{r^3} - \frac{\mu}{R^3}\right)(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) + \rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mu\frac{\rho}{r^3};$$

de l'équation (15) on tire

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = H\rho,$$

en posant

$$(30) \qquad H = \frac{2P\frac{dM}{dt} - 2M\frac{dP}{dt} + P^2}{4M^2}.$$

En tenant compte de l'équation (22), notre combinaison devient

$$\frac{\rho Q}{M}(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) + \rho\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} + H\right) = -\frac{\mu'\rho}{r^3}.$$

En supprimant le facteur ρ, on obtient l'équation

$$(31) \qquad Q(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) + M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} + H\right) = -\frac{\mu' M}{r^3}.$$

Cette équation résoudrait aussi la question, car elle fait connaître r, d'où l'on peut obtenir la valeur de ρ; mais il est préférable d'y substituer de suite l'inconnue ρ à l'aide de l'équation (22), puisque μ' n'est pas connu exactement. Cette équation devient alors

$$Q(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1) + M\left(H + \alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right) + \frac{\mu M}{R^3} + \rho Q = 0,$$

ou enfin, en remplaçant H par sa valeur,

$$(32)\quad \begin{aligned} M\Big[&Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)\\ &+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}+\mu\frac{M}{R^3}+\rho Q\Big]\\ &+\frac{P^2}{4}+\frac{P}{2}\frac{dM}{dt}=0.\end{aligned}$$

Je vais montrer que cette équation (32) est la même que (19′). Retranchons pour cela l'équation (19′) de l'équation (32). On a

$$(33)\quad \begin{aligned} M\Big[&Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\\ &+\frac{dP}{dt}-x_1\left(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\right)-y_1\left(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)\\ &-z_1\left(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\right)\Big]\\ &+P^2-P\frac{dM}{dt}-LQ=0.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}&-x_1\left(\gamma\frac{d^3\beta}{dt^3}-\beta\frac{d^3\gamma}{dt^3}\right)-y_1\left(\alpha\frac{d^3\gamma}{dt^3}-\gamma\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)-z_1\left(\beta\frac{d^3\alpha}{dt^3}-\alpha\frac{d^3\beta}{dt^3}\right)\\ &=\frac{dx_1}{dt}\left(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+\frac{dy_1}{dt}\left(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)+\frac{dz_1}{dt}\left(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)\\ &+x_1\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+y_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\\ &+z_1\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\right),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} Q(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)&+M\left(\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)\\ &+x_1\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}-\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)+y_1\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\frac{d\gamma}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\\ &+z_1\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\frac{d\alpha}{dt}\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)=0,\end{aligned}$$

car cette expression n'est autre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} & 0 \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1 \end{vmatrix},$$

qui est nul, puisque les éléments de la quatrième colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par α, ceux de la seconde par β, ceux de la troisième par γ et ajoutant.

L'équation (33) devient alors

$$\begin{aligned} M\Big[\frac{dx_1}{dt}\Big(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)+\frac{dy_1}{dt}\Big(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big) \\ +\frac{dz_1}{dt}\Big(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)\Big]-P\Big(\frac{dM}{dt}-P\Big)-LQ=0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &M\Big[\frac{dx_1}{dt}\Big(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)+\frac{dy_1}{dt}\Big(\alpha\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}\Big)+\frac{dz_1}{dt}\Big(\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\alpha\frac{d^2\beta}{dt^2}\Big)\Big] \\ &-P\Big[\frac{dx_1}{dt}\Big(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\Big)+\frac{dy_1}{dt}\Big(\alpha\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\alpha}{dt}\Big)+\frac{dz_1}{dt}\Big(\beta\frac{d\alpha}{dt}-\alpha\frac{d\beta}{dt}\Big)\Big] \\ &-Q\Big[\frac{dx_1}{dt}(\beta z_1-\gamma y_1)+\frac{dy_1}{dt}(\gamma x_1-\alpha z_1)+\frac{dz_1}{dt}(\alpha y_1-\beta x_1)\Big]=0. \end{aligned}$$

Le terme en $\frac{dx_1}{dt}$ dans cette équation est

$$M\Big(\gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big)-P\Big(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\Big)-Q(\beta z_1-\gamma y_1).$$

On peut l'écrire sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} & \gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} & \frac{d^2\beta}{dt^2} & \frac{d^2\gamma}{dt^2} & \gamma\frac{d^2\beta}{dt^2}-\beta\frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ x_1 & y_1 & z_1 & \gamma y_1-\beta z_1 \end{vmatrix}.$$

En y remplaçant l'élément zéro par $\gamma\beta-\beta\gamma$, on voit que ce déterminant est nul. Ainsi les équations (19) et (32) sont équivalentes. Dans la forme (32), on peut remplacer

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\beta\frac{d^2\beta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2}\quad\text{par}\quad -\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2}+\frac{d\beta^2}{dt^2}+\frac{d\gamma^2}{dt^2}\right).$$

Lorsqu'on fait quatre observations de directions et que l'on considère, comme nous l'avons fait, μ' comme une inconnue, le problème comporte sept inconnues, et l'on doit pouvoir trouver par conséquent une équation de condition. Il est aisé de voir que l'on peut en effet la former. Reprenons l'équation de Laplace

$$\rho Q = M\left(\frac{\mu'}{r^3}-\frac{\mu}{R^3}\right). \tag{22}$$

Cette équation ne contient que les dérivées secondes des quantités α, β, γ. Si donc on prend sa dérivée par rapport au temps, on formera une équation qui ne renfermera que les dérivées troisièmes et qui pourra être constituée avec les données; on le fera aisément à l'aide des équations (15) et (23). Elle pourra fournir une vérification des calculs; mais, en pratique, je crois qu'il sera préférable de prendre même plus de quatre observations, afin d'avoir les dérivées avec le plus de précision possible. Quant aux calculs, la meilleure vérification consiste à les faire faire séparément par des calculateurs différents.

Je vais, pour terminer ce Chapitre, montrer comment la même méthode s'appliquerait à la détermination des ellipses décrites à un moment donné par le Soleil et la Lune autour de la Terre. La détermination de ces ellipses ayant la plus grande importance dans le problème des trois corps en particulier, les calculs qui suivent ont une application immédiate.

Reprenons les équations relatives au Soleil :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-\mu\frac{x_1}{R^3},\qquad \frac{d^2y_1}{dt^2}=-\mu\frac{y_1}{R^3},\qquad \frac{d^2z_1}{dt^2}=-\mu\frac{z_1}{R^3}. \tag{3}$$

Je poserai

$$x_1=-R\xi,\qquad y_1=-R\eta,\qquad z_1=-R\zeta;$$

alors ξ, η, ζ seront les cosinus directeurs de TS et les équations (3) deviennent

$$(34)\qquad \frac{d^2 R\xi}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\xi, \qquad \frac{d^2 R\eta}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\eta, \qquad \frac{d^2 R\zeta}{dt^2} = -\frac{\mu}{R^2}\zeta.$$

On peut écrire ces équations

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &R\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\xi = 0,\\ &R\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\eta = 0.\\ &R\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2}\right)\zeta = 0.\end{aligned}\right.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2\xi}{dt^2} & \frac{d\xi}{dt} & \xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} & \frac{d\eta}{dt} & \eta \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} & \frac{d\zeta}{dt} & \zeta \end{vmatrix}$$

étant nul, on peut poser

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= m\frac{d\xi}{dt} - n\xi,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= m\frac{d\eta}{dt} - n\eta,\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= m\frac{d\zeta}{dt} - n\zeta,\end{aligned}\right.$$

et l'on a

$$(37)\qquad n = \frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}, \qquad m = \frac{1}{2n}\frac{dn}{dt}.$$

Les équations (35) deviennent

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\xi = 0,$$

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\eta = 0,$$

$$\left(Rm + 2\frac{dR}{dt}\right)\frac{d\zeta}{dt} + \left(\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR\right)\zeta = 0,$$

et donnent séparément

$$(38)\qquad Rm + 2\frac{dR}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{\mu}{R^2} - nR = 0$$

On en tire

$$(39)\qquad \frac{d^2R}{dt^2} = R\,\frac{m^2 - 2\dfrac{dm}{dt}}{4}, \qquad \frac{\mu}{R^3} = n + \frac{1}{2}\frac{dm}{dt} - \frac{m^2}{4}.$$

Supposons maintenant qu'à l'aide des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, on ait déterminé la trace du plan de l'orbite sur le plan des xy et l'inclinaison de l'orbite. Si cette trace est alors supposée l'axe des x, on aura

$$\xi = \cos l, \qquad \eta = \sin l \cos i, \qquad \zeta = \sin l \sin i,$$

l étant la longitude dans l'orbite; on a donc

$$\frac{dl}{dt} = \frac{C}{R^2}, \qquad R = \frac{C^2}{\mu}\,\frac{1}{1 + e\cos(l - \varpi)}, \qquad \frac{dR}{dt} = \frac{\mu}{C}\,e\sin(l - \varpi).$$

On a

$$\frac{d\xi}{dt} = -\sin l\,\frac{dl}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \cos l \cos i\,\frac{dl}{dt}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \cos l \sin i\,\frac{dl}{dt};$$

d'où

$$(40)\qquad n = \frac{dl^2}{dt^2} = \frac{C^2}{R^4}.$$

De cette équation et de la dernière de (39), on tire les valeurs

$$\frac{C^2}{\mu R}, \quad \frac{CR}{\mu}.$$

Soient H et K ces valeurs qu'on obtient à l'aide des directions observées; on a alors

$$(41)\qquad \begin{cases} 1 + e\cos(l - \varpi) = H, \\ e\sin(l - \varpi) = -K\dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

On tirera de ces équations e et ϖ. Si l'on prend comme inconnue le demi-grand axe a de l'ellipse, on a ensuite

$$\frac{C^2}{\mu} = a(1-e^2), \qquad H = a\frac{1-e^2}{R}, \qquad K = \frac{C}{\mu}\frac{a(1-e^2)}{H},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C}{\mu} = \frac{HK}{a(1-e^2)},$$

et enfin

$$(42) \qquad C = \frac{a^2(1-e^2)^2}{HK}, \qquad \mu = \frac{a^3(1-e^2)^3}{H^2K^2}.$$

On détermine enfin l'époque du passage au périgée. La question est complètement résolue.

DEUXIÈME PARTIE.

Je considère le système formé par le Soleil, la Terre et la Lune. Je suppose que les axes sont de direction constante passant par le centre de gravité du système. Soient :

M la masse du Soleil, x', y', z' ses coordonnées;
m celle de la Terre, x, y, z ses coordonnées;
μ celle de la Lune, x'', y'', z'' ses coordonnées;
R la distance ST, r la distance TL, ρ la distance SL.

Soient ξ, η, ζ les cosinus directeurs de TS; α, β, γ ceux de TL.

On a les formules

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &mx + Mx' + \mu x'' = 0,\\ &my + My' + \mu y'' = 0,\\ &mz + Mz' + \mu z'' = 0;\end{aligned}\right.$$

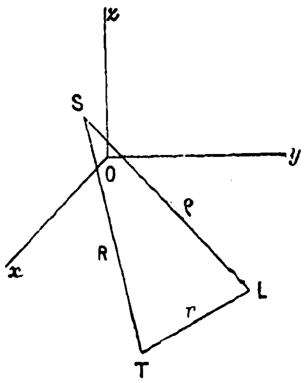
puis

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &x' = x + R\xi, \qquad y' = y + R\eta, \qquad z' = z + R\zeta,\\ &x'' = x + r\alpha, \qquad y'' = y + r\beta, \qquad z'' = z + r\gamma.\end{aligned}\right.$$

Les équations des aires dans le mouvement relatif au centre de gravité sont :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+M\left(y'\frac{dz'}{dt}-z'\frac{dy'}{dt}\right)+\mu\left(y''\frac{dz''}{dt}-z''\frac{dy''}{dt}\right)=A,\\ &m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+M\left(z'\frac{dx'}{dt}-x'\frac{dz'}{dt}\right)+\mu\left(z''\frac{dx''}{dt}-x''\frac{dz''}{dt}\right)=A',\\ &m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+M\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)+\mu\left(x''\frac{dy''}{dt}-y''\frac{dx''}{dt}\right)=A''.\end{aligned}\right.$$

Fig. 3.



Des équations (1) et (2) on tire

$$(4)\quad x=-\frac{MR\xi+\mu r\alpha}{M+m+\mu},\qquad y=-\frac{MR\eta+\mu r\beta}{M+m+\mu},\qquad z=-\frac{MR\zeta+\mu r\gamma}{M+m+\mu}.$$

La première des équations (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&+M\left[(y+R\eta)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{dR\zeta}{dt}\right)-(z+R\zeta)\left(\frac{dy}{dt}+\frac{dR\eta}{dt}\right)\right]\\ &+\mu\left[(y+r\beta)\left(\frac{dz}{dt}+\frac{dr\gamma}{dt}\right)-(z+r\gamma)\left(\frac{dy}{dt}+\frac{dr\beta}{dt}\right)\right]=A,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &(M+m+\mu)\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\\ &\quad+M\left[R\eta\frac{dz}{dt}-R\zeta\frac{dy}{dt}+y\frac{dR\zeta}{dt}-z\frac{dR\eta}{dt}+R^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\right]\\ &\quad+\mu\left[r\beta\frac{dz}{dt}-r\gamma\frac{dy}{dt}+y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}+r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=A,\end{aligned}$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&-\frac{dz}{dt}(\mathrm{MR}\eta+\mu r\beta)+\frac{dy}{dt}(\mathrm{MR}\zeta+\mu r\gamma)\\
&\quad+\mathrm{M}\left(\mathrm{R}\eta\frac{dz}{dt}-\mathrm{R}\zeta\frac{dy}{dt}+y\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-z\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}\right)+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\\
&\quad+\mu\left(r\beta\frac{dz}{dt}-r\gamma\frac{dy}{dt}+y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)=\mathrm{A},
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}\left(y\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-z\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}\right)+\mu\left(y\frac{dr\gamma}{dt}-z\frac{dr\beta}{dt}\right)+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\\
&\qquad\qquad+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)=\mathrm{A},
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}+\mu\frac{dr\beta}{dt}\right)(\mathrm{MR}\zeta+\mu r\gamma)-\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}+\mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)(\mathrm{MR}\eta+\mu r\beta)}{\mathrm{M}+m+\mu}\\
&\quad+\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)=\mathrm{A},
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2\left(\zeta\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\zeta}{dt}\right)+\mu^2r^2\left(\gamma\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\gamma}{dt}\right)\\
&\quad+\mu\mathrm{M}\left(r\gamma\frac{d\mathrm{R}\eta}{dt}+\mathrm{R}\zeta\frac{dr\beta}{dt}-r\beta\frac{d\mathrm{R}\zeta}{dt}-\mathrm{R}\eta\frac{dr\gamma}{dt}\right)\\
&\quad+(\mathrm{M}+m+\mu)\left[\mathrm{MR}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)+\mu r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=\mathrm{A},
\end{aligned}
$$

ou bien enfin

$$
\begin{aligned}
(5)\quad&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\\
&\quad+\mu(m+\mathrm{M})r^2\left(\beta\frac{d\gamma}{dt}-\gamma\frac{d\beta}{dt}\right)+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)(\beta\zeta-\gamma\eta)\\
&\qquad+\mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\left(\gamma\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\gamma}{dt}+\zeta\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\zeta}{dt}\right)=\mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

Posons maintenant

$$
\begin{vmatrix}\alpha & \xi & \frac{d\xi}{dt}\\ \beta & \eta & \frac{d\eta}{dt}\\ \gamma & \zeta & \frac{d\zeta}{dt}\end{vmatrix}=\mathrm{P},\qquad
\begin{vmatrix}\xi & \alpha & \frac{d\alpha}{dt}\\ \eta & \beta & \frac{d\beta}{dt}\\ \zeta & \gamma & \frac{d\gamma}{dt}\end{vmatrix}=\mathrm{Q},
$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\xi}{dt} \\ \beta & \frac{d\beta}{dt} & \frac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \frac{d\gamma}{dt} & \frac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{T}, \qquad \begin{vmatrix} \xi & \frac{d\xi}{dt} & \frac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \frac{d\eta}{dt} & \frac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \frac{d\zeta}{dt} & \frac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{S}.$$

On a deux équations analogues à (5). En les multipliant par α, β, γ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \mathrm{A}''\gamma = \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q};$$

en les multipliant par ξ, η, ζ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\xi + \mathrm{A}'\eta + \mathrm{A}''\zeta = \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P};$$

en les multipliant par $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\gamma}{dt} = \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T};$$

enfin, en les multipliant par $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ et ajoutant, on a

$$\mathrm{A}\frac{d\xi}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\eta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\zeta}{dt} = \mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T} + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S}.$$

Je vais réunir ces équations, qui du reste se réduisent à trois :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q} = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \mathrm{A}''\gamma, \\ &\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P} = \mathrm{A}\xi + \mathrm{A}'\eta + \mathrm{A}''\zeta, \\ &\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T} \\ &\quad = \mathrm{A}\frac{d\alpha}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\beta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\gamma}{dt}, \\ &\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T} + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S} \\ &\quad = \mathrm{A}\frac{d\xi}{dt} + \mathrm{A}'\frac{d\eta}{dt} + \mathrm{A}''\frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}\right.$$

On peut écrire la première de ces équations

$$\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P}+\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}r^2\mathrm{Q}=\mathrm{A}\alpha+\mathrm{A}'\beta+\mathrm{A}''\gamma.$$

En la dérivant par rapport au temps et comparant à la troisième, on a

$$\mathrm{M}(m+\mu)\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})+\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q})+\mathrm{M}\mu\left(r\frac{d\mathrm{R}}{dt}-\mathrm{R}\frac{dr}{dt}\right)$$
$$=\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S}-\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)+\mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T}$$

ou bien

$$(7)\qquad \mathrm{M}(m+\mu)\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})-\mathrm{R}^2\mathrm{S}\right]+\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\left[\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q})-r^2\mathrm{T}\right]=0.$$

On peut écrire de même la seconde des équations (6) :

$$\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q}+\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{R}^2\mathrm{P}=\mathrm{A}\xi+\mathrm{A}'\eta+\mathrm{A}''\zeta;$$

en la dérivant par rapport au temps et comparant à la quatrième, on a

$$\mu(m+\mathrm{M})\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q})+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P}+\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})$$
$$=\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{T}+\mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt}-r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\mathrm{P}+\mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{S}$$

ou bien

$$(8)\qquad \mu(m+\mathrm{M})\left[\frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q})-r^2\mathrm{T}\right]+\mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\left[\frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})-\mathrm{R}^2\mathrm{S}\right]=0.$$

Des équations (7) et (8) on tire séparément

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}(\mathrm{R}^2\mathrm{P})=\mathrm{R}^2\mathrm{S},\qquad \frac{d}{dt}(r^2\mathrm{Q})=r^2\mathrm{T},$$

ou encore

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&2\mathrm{P}\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\mathrm{R}\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}-\mathrm{S}\right)=0,\\&2\mathrm{Q}\frac{dr}{dt}+r\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dt}-\mathrm{T}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Je vais maintenant écrire les équations de mouvement de chaque point ; ce sont

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\alpha + \frac{M}{R^2}\xi,\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\beta + \frac{M}{R^2}\eta,\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= +\frac{\mu}{r^2}\gamma + \frac{M}{R^2}\zeta,\\
\frac{d^2x'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\xi + \frac{\mu}{\rho^2}\varphi,\\
\frac{d^2y'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\eta + \frac{\mu}{\rho^2}\psi,\\
\frac{d^2z'}{dt^2} &= -\frac{m}{R^2}\zeta + \frac{\mu}{\rho^2}\chi,\\
\frac{d^2x''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\alpha - \frac{M}{\rho^2}\varphi,\\
\frac{d^2y''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\beta - \frac{M}{\rho^2}\psi,\\
\frac{d^2z''}{dt^2} &= -\frac{m}{r^2}\gamma - \frac{M}{\rho^2}\chi,
\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles φ, ψ, χ sont les cosinus directeurs de SL ; c'est-à-dire qu'on a

$$\varphi = \frac{r\alpha - R\xi}{\rho}, \qquad \psi = \frac{r\beta - R\eta}{\rho}, \qquad \chi = \frac{r\gamma - R\zeta}{\rho}.$$

On en tire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2R\xi}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\xi + \frac{\mu}{\rho^2}\varphi - \frac{\mu}{r^2}\alpha,\\
\frac{d^2R\eta}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\eta + \frac{\mu}{\rho^2}\psi - \frac{\mu}{r^2}\beta,\\
\frac{d^2R\zeta}{dt^2} &= -\frac{M+m}{R^2}\zeta + \frac{\mu}{\rho^2}\chi - \frac{\mu}{r^2}\gamma,
\end{aligned}\right.$$

et

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2r\alpha}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\alpha - \frac{M}{\rho^2}\varphi - \frac{M}{R^2}\xi,\\
\frac{d^2r\beta}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\beta - \frac{M}{\rho^2}\psi - \frac{M}{R^2}\eta,\\
\frac{d^2r\gamma}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\gamma - \frac{M}{\rho^2}\chi - \frac{M}{R^2}\zeta.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (10) sont les combinaisons obtenues en multipliant les équations (12) respectivement par $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$, $\alpha\eta-\beta\xi$ et ajoutant, et faisant la même chose pour les équations (13).

Multiplions maintenant les équations (12) par ξ, η, ζ et ajoutons; on aura

$$(14)\qquad \begin{aligned}&\frac{d^2R}{dt^2}+R\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\eta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\&\quad=-\left(\frac{M+m}{R^2}+\frac{\mu R}{\rho^3}\right)+\left(\frac{\mu r}{\rho^3}-\frac{\mu}{r^2}\right)\cos STL.\end{aligned}$$

Multiplions-les par α, β, γ et ajoutons; on aura

$$(15)\qquad \begin{aligned}&\frac{d^2R}{dt^2}\cos STL+2\frac{dR}{dt}\left(\alpha\frac{d\xi}{dt}+\beta\frac{d\eta}{dt}+\gamma\frac{d\zeta}{dt}\right)\\&\quad+R\left(\alpha\frac{d^2\xi}{dt^2}+\beta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\gamma\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\&\quad=-\left(\frac{M+m}{R^2}+\frac{\mu R}{\rho^3}\right)\cos STL+\left(\frac{\mu r}{\rho^3}-\frac{\mu}{r^2}\right).\end{aligned}$$

En tenant compte de la première des équations (10) et de l'équation obtenue en la dérivant par rapport au temps, on voit que l'on pourra tirer des équations (14) et (15) les suivantes,

$$(16)\qquad \frac{M+m}{R^3}+\frac{\mu}{\rho^3}=H,\qquad \mu\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}\right)=H'\frac{R}{r},$$

où H et H' ne dépendent que des quantités α, β, γ, ξ, η, ζ et de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes.

On tirera de même des équations (13) les suivantes,

$$(17)\qquad \frac{m+\mu}{r^3}+\frac{M}{\rho^3}=L,\qquad M\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{R^3}\right)=L'\frac{r}{R},$$

où L et L' ne dépendent que de α, β, γ, ξ, η, ζ et de leurs dérivées des trois premiers ordres.

Il est aisé de tirer des équations (10), (16) et (17) la solution de la question qui fait l'objet de la deuxième Partie du Mémoire, c'est-à-dire la détermination des masses et des distances.

Retranchons les deux équations (16); on aura

$$(18)\qquad \frac{M+m}{R^3}+\frac{\mu}{r^3}=H-H'\frac{R}{r}.$$

Si l'on dérive cette équation et qu'on se serve des équations (10), on obtiendra une nouvelle équation du premier degré dans les quantités

$$\frac{M+m}{R^3}, \quad \frac{\mu}{r^3}, \quad \frac{R}{r}.$$

En opérant de même sur cette nouvelle équation, on en obtiendra une seconde, et l'on aura alors trois équations du premier degré qui fourniront les quantités précédentes.

En retranchant les deux équations (17), on aura de même

$$\frac{m+\mu}{r^3} + \frac{M}{R^3} = L - L'\frac{r}{R}. \tag{19}$$

En la traitant comme l'équation (18), on en tirera les quantités

$$\frac{m+\mu}{r^3}, \quad \frac{M}{R^3}, \quad \frac{r}{R}.$$

On obtiendra donc les rapports

$$\frac{M+m}{M}, \quad \frac{m+\mu}{\mu}, \quad \frac{r}{R}, \quad \frac{M}{R^3},$$

ce que l'on se proposait de faire.

La méthode précédente est rigoureuse; elle est un peu longue. On pourrait certainement la simplifier en tenant compte des grandeurs relatives des éléments à déterminer et en se servant de l'équation

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\mathrm{STL}. \tag{20}$$

Par exemple, les équations (16) et (17) deviennent sensiblement

$$\frac{M}{R^3} = H, \qquad -\frac{\mu}{r^3} = H'\frac{R}{r}, \qquad \frac{m+\mu}{r^3} + \frac{M}{R^3}\left(1 + 3\cos\mathrm{STL}\frac{r}{R}\right) = L,$$

$$\frac{M}{R^3}\left[3\cos\mathrm{STL} + \frac{3}{2}(5\cos^2\mathrm{STL} - 1)\frac{r}{R}\right] = L'.$$

La première fournit $\frac{M}{R^3}$, la quatrième $\frac{r}{R}$, la seconde $\frac{\mu}{r^3}$ et la troisième $\frac{m}{r^3}$. On pourrait ensuite tenir compte des termes négligés.

TROISIÈME PARTIE.

I. Cette Partie est consacrée à l'exposé de la méthode de résolution du problème des trois corps qui consiste à chercher les mouvements du Soleil et de la Lune relativement à la Terre.

Cette méthode, ainsi qu'on le verra, présente, dans sa nature, une très grande ressemblance avec celle de Lagrange. La méthode de Lagrange n'a rien donné, d'abord parce qu'elle contient une inconnue auxiliaire qui est fournie par une équation du quatrième degré, ce qui revient à dire qu'on ne peut l'obtenir. On est alors conduit à substituer à cette équation du quatrième degré l'équation différentielle à laquelle satisfait l'inconnue, ce qui élève d'une unité le degré du système différentiel. Cela ne serait pas un grand inconvénient, mais la vérité est que le système Terre, Soleil, Lune est très mal déterminé par les distances mutuelles. On est alors amené à substituer l'angle STL à la distance SL; mais la transformation des équations de Lagrange serait alors longue et pénible, et il vaut mieux traiter le problème ainsi posé directement [1].

La méthode que je vais exposer consiste à se servir des formules déjà obtenues dans la deuxième Partie et est très rapide. J'ai posé

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \alpha & \xi & \dfrac{d\xi}{dt} \\ \beta & \eta & \dfrac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \zeta & \dfrac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{P}, \qquad
\begin{vmatrix} \xi & \alpha & \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \beta & \dfrac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \gamma & \dfrac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{Q}, \\
&\begin{vmatrix} \alpha & \dfrac{d\alpha}{dt} & \dfrac{d\xi}{dt} \\ \beta & \dfrac{d\beta}{dt} & \dfrac{d\eta}{dt} \\ \gamma & \dfrac{d\gamma}{dt} & \dfrac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{T}, \qquad
\begin{vmatrix} \xi & \dfrac{d\xi}{dt} & \dfrac{d\alpha}{dt} \\ \eta & \dfrac{d\eta}{dt} & \dfrac{d\beta}{dt} \\ \zeta & \dfrac{d\zeta}{dt} & \dfrac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = \mathrm{S}.
\end{aligned}\right.$$

[1] C'est cette modification que j'avais en vue quand j'ai publié sur le problème des trois corps une courte Note insérée au *Bulletin astronomique*, octobre 1898.

Je poserai de plus

$$(2)\quad \cos V = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \quad \alpha\frac{d\xi}{dt} + \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt} = X, \quad \xi\frac{d\alpha}{dt} + \eta\frac{d\beta}{dt} + \zeta\frac{d\gamma}{dt} = Y.$$

L'angle V n'est autre chose que l'angle STL.

Écrivons les équations

$$\begin{aligned}
(\beta\zeta - \gamma\eta)\frac{d\xi}{dt} &+ (\gamma\xi - \alpha\zeta)\frac{d\eta}{dt} + (\alpha\eta - \beta\xi)\frac{d\zeta}{dt} = P,\\
\xi\frac{d\xi}{dt} &+ \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt} = 0,\\
\alpha\frac{d\xi}{dt} &+ \beta\frac{d\eta}{dt} + \gamma\frac{d\zeta}{dt} = X.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(3)\quad \begin{cases}
\sin^2 V\dfrac{d\xi}{dt} = (\beta\zeta - \gamma\eta)P + (\alpha - \xi\cos V)X,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\eta}{dt} = (\gamma\xi - \alpha\zeta)P + (\beta - \eta\cos V)X,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\zeta}{dt} = (\alpha\eta - \beta\xi)P + (\gamma - \zeta\cos V)X.
\end{cases}$$

On a de même

$$\begin{aligned}
(\beta\zeta - \gamma\eta)\frac{d\alpha}{dt} &+ (\gamma\xi - \alpha\zeta)\frac{d\beta}{dt} + (\alpha\eta - \beta\xi)\frac{d\gamma}{dt} = -Q,\\
\alpha\frac{d\alpha}{dt} &+ \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} = 0,\\
\xi\frac{d\alpha}{dt} &+ \eta\frac{d\beta}{dt} + \zeta\frac{d\gamma}{dt} = Y.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(4)\quad \begin{cases}
\sin^2 V\dfrac{d\alpha}{dt} = -(\beta\zeta - \gamma\eta)Q + (\xi - \alpha\cos V)Y,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\beta}{dt} = -(\gamma\xi - \alpha\zeta)Q + (\eta - \beta\cos V)Y,\\[2mm]
\sin^2 V\dfrac{d\gamma}{dt} = -(\alpha\eta - \beta\xi)Q + (\zeta - \gamma\cos V)Y.
\end{cases}$$

On tire aussi des valeurs de P, Q, S, T les formules

$$\alpha S + \xi T - \frac{d\xi}{dt} Q - \frac{d\alpha}{dt} P = 0,$$

$$\beta S + \eta T - \frac{d\eta}{dt} Q - \frac{d\beta}{dt} P = 0,$$

$$\gamma S + \zeta T - \frac{d\zeta}{dt} Q - \frac{d\gamma}{dt} P = 0;$$

d'où

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll} S + T\cos V - QX = 0, & S = \dfrac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V}, \\ T + S\cos V - PY = 0, & T = \dfrac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V}. \end{array}\right.$$

Écrivons de nouveau les équations déjà vues dans la deuxième Partie :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2P\dfrac{dR}{dt} + R\left(\dfrac{dP}{dt} - S\right) = 0, \\ 2Q\dfrac{dr}{dt} + r\left(\dfrac{dQ}{dt} - T\right) = 0, \end{array}\right.$$

puis

$$\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) = -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right) + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos V,$$

$$(7)\qquad \frac{d^2R}{dt^2}\cos V + 2\frac{dR}{dt}X + R\left(\frac{dX}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$
$$= -\left(\frac{M+m}{R^2} + \frac{\mu R}{\rho^3}\right)\cos V + \mu\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} + \frac{d\gamma^2}{dt^2}\right) = -\left(\frac{m+\mu}{r^2} + \frac{Mr}{\rho^3}\right) + M\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\cos V,$$

$$\frac{d^2r}{dt^3}\cos V + 2\frac{dr}{dt}Y + r\left(\frac{dY}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$
$$= -\left(\frac{m+\mu}{r^2} + \frac{Mr}{\rho^3}\right)\cos V + M\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right).$$

On a, de plus,

$$(8)\qquad -\sin V\frac{dV}{dt} = X + Y.$$

Des équations (3) et (4) on tire

$$(9)\quad \begin{cases} \sin^2 V\left(\dfrac{d\xi^2}{dt^2}+\dfrac{d\eta^2}{dt^2}+\dfrac{d\zeta^2}{dt^2}\right)=P^2+X^2, \\ \sin^2 V\left(\dfrac{d\alpha^2}{dt^2}+\dfrac{d\beta^2}{dt^2}+\dfrac{d\gamma^2}{dt^2}\right)=Q^2+Y^2, \\ \sin^2 V\left(\dfrac{d\xi}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{d\eta}{dt}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{d\zeta}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right)=-PQ-XY\cos V. \end{cases}$$

Dans les équations (6) on remplacera S et T par leurs valeurs données par les équations (5). Dans la seconde des équations (7), on remplacera $\dfrac{d^2R}{dt^2}$ par sa valeur tirée de la première; de même, dans la quatrième, on remplacera $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ par sa valeur tirée de la troisième et l'on aura le système suivant d'équations :

$$(10)\quad \begin{aligned} &\frac{2P}{R}\frac{dR}{dt}+\frac{dP}{dt}=\frac{QX-PY\cos V}{\sin^2 V}, \\ &\frac{2Q}{r}\frac{dr}{dt}+\frac{dQ}{dt}=\frac{PY-QX\cos V}{\sin^2 V}, \\ &\frac{d^2R}{dt^2}=R\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}-\left(\frac{M+m}{R^2}+\frac{\mu R}{\rho^3}\right)+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V, \\ &R\frac{dX}{dt}+2\frac{dR}{dt}X+R\frac{PQ+XY\cos V}{\sin^2 V} \\ &\qquad +R\cos V\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}=\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V, \\ &\frac{d^2r}{dt^2}=r\frac{Q^2+Y^2}{\sin^2 V}-\left(\frac{m+\mu}{r^2}+\frac{Mr}{\rho^3}\right)+M\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\cos V, \\ &r\frac{dY}{dt}+2\frac{dr}{dt}Y+r\frac{PQ+XY\cos V}{\sin^2 V}+r\cos V\frac{Q^2+Y^2}{\sin^2 V}=M\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\sin^2 V, \\ &-\sin V\frac{dV}{dt}=X+Y. \end{aligned}$$

Ces équations constituent un système d'équations différentielles du 9ᵉ ordre aux fonctions inconnues P, Q, X, Y, V, R, r. Ce système réalise sur celui de Lagrange un perfectionnement, puisqu'il n'y a pas d'équation algébrique à résoudre.

II. Je fais former l'équation des aires et celle des forces vives qui théoriquement ramènent ce système au 6^e ordre.

Si, dans la troisième des équations (6) de la deuxième Partie, on remplace $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$ par leurs valeurs données par les formules (4), puis qu'on utilise les deux premières formules (6) de la deuxième Partie, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{S} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right) + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{T} \\ = -\frac{\mathrm{Q}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mathrm{A}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{A}'(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{A}''(\alpha\eta-\beta\xi)] \\ + \frac{\mathrm{Y}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mu(m+\mathrm{M})r^2\mathrm{Q} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{P}] \\ - \frac{\mathrm{Y}\cos\mathrm{V}}{\sin^2\mathrm{V}}[\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{R}^2\mathrm{P} + \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\mathrm{Q}]. \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation S et T par leurs valeurs données par les formules (5), il vient après réductions

$$\begin{aligned} (11)\quad [\mu(m+\mathrm{M})r^2 - \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\cos\mathrm{V}]\mathrm{Y} - [\mathrm{M}(m+\mu)r^2 - \mathrm{M}\mu\mathrm{R}r\cos\mathrm{V}]\mathrm{X} \\ + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin^2\mathrm{V} \\ = \mathrm{A}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{A}'(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{A}''(\alpha\eta-\beta\xi). \end{aligned}$$

On pourrait former cette équation, mais moins rapidement, à l'aide de l'équation (5) de la deuxième Partie et des deux équations analogues. On multiplierait l'équation (5) par $\beta\zeta-\gamma\eta$, les deux analogues respectivement par $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$ et l'on ajouterait.

Désignons maintenant par I, I', I'' les premiers membres de l'équation (11) et des deux premières équations (6) de la deuxième Partie; on en déduira

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\beta\zeta-\gamma\eta) + \mathrm{I}'(\alpha-\xi\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\xi-\alpha\cos\mathrm{V}), \\ \mathrm{A}'\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\gamma\xi-\alpha\zeta) + \mathrm{I}'(\beta-\eta\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\eta-\beta\cos\mathrm{V}), \\ \mathrm{A}''\sin^2\mathrm{V} &= \mathrm{I}(\alpha\eta-\beta\xi) + \mathrm{I}'(\gamma-\zeta\cos\mathrm{V}) + \mathrm{I}''(\zeta-\gamma\cos\mathrm{V}). \end{aligned} \right.$$

En élevant ces équations au carré et posant

$$\mathrm{G}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2,$$

G étant une quantité positive, on aura

$$G^2 \sin^2 V = I^2 + I'^2 + I''^2 - 2 I' I'' \cos V. \tag{13}$$

C'est l'équation des aires.

Je vais maintenant former celle des forces vives, dans le mouvement relatif au centre de gravité. C'est

$$m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + M\left(\frac{dx'^2}{dt^2} + \frac{dy'^2}{dt^2} + \frac{dz'^2}{dt^2}\right) + \mu\left(\frac{dx''^2}{dt^2} + \frac{dy''^2}{dt^2} + \frac{dz''^2}{dt^2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const}.$$

ou bien

$$(m + M + \mu)\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + 2\frac{dx}{dt}\left(M\frac{dR\xi}{dt} + \mu\frac{dr\alpha}{dt}\right)$$
$$+ 2\frac{dy}{dt}\left(M\frac{dR\eta}{dt} + \mu\frac{dr\beta}{dt}\right) + 2\frac{dz}{dt}\left(M\frac{dR\zeta}{dt} + \mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)$$
$$+ M\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const.},$$

ou bien, d'après les formules (4) de la deuxième Partie,

$$-\frac{1}{M+m+\mu}\left[\left(M\frac{dR\xi}{dt} + \mu\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(M\frac{dR\eta}{dt} + \mu\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(M\frac{dR\zeta}{dt} + \mu\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ M\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right] + \mu\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$= 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + \text{const.},$$

ou bien

$$M(m + \mu)\left[\left(\frac{dR\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dR\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \mu(m + M)\left[\left(\frac{dr\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$- 2M\mu\left(\frac{dR\xi}{dt}\frac{dr\alpha}{dt} + \frac{dR\eta}{dt}\frac{dr\beta}{dt} + \frac{dR\zeta}{dt}\frac{dr\gamma}{dt}\right)$$
$$= 2(M + m + \mu)\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{R} + \frac{M\mu}{\rho}\right) + h,$$

h désignant une constante. En développant cette équation, on a finalement

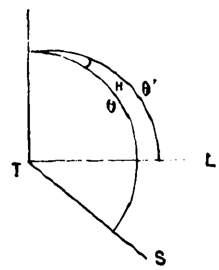
$$M(m+\mu)\left[\frac{dR^2}{dt^2}+R^2\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\right]$$
$$+\mu(m+M)\left[\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2}+\frac{d\beta^2}{dt^2}+\frac{d\gamma^2}{dt^2}\right)\right]$$
$$-2M\mu\left[\frac{dR}{dt}\frac{dr}{dt}\cos V+\frac{dR}{dt}rY+\frac{dr}{dt}RX+Rr\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{d\beta}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)\right]$$
$$=2(M+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{Mm}{R}+\frac{M\mu}{\rho}\right)+h,$$

ou bien, d'après les formules (9),

$$(14)\quad M(m+\mu)\left(\frac{dR^2}{dt^2}+R^2\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}\right)+\mu(m+M)\left(\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{Q^2+Y^2}{\sin^2 V}\right)$$
$$-2M\mu\left(\frac{dR}{dt}\frac{dr}{dt}\cos V+\frac{dR}{dt}rY+\frac{dr}{dt}RX-Rr\frac{PQ+XY\cos V}{\sin^2 V}\right)$$
$$=2(M+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{Mm}{R}+\frac{M\mu}{\rho}\right)+h.$$

III. Je vais maintenant appliquer aux équations (10) la méthode d'intégration fondée sur la considération d'orbites elliptiques variables képlériennes.

Fig. 4.



Les quantités P, Q, X, Y, R, *r*, V ne dépendent que des positions relatives du système formé par le Soleil, la Terre et la Lune.

Si j'imagine alors par la Terre les plans des orbites elliptiques décrites à chaque instant par le Soleil et la Lune, j'aurai la figure ci-jointe et je puis calculer les quantités P, Q, x, y, V en supposant que les plans des orbites sont fixes dans l'espace. Je prendrai alors pour un instant la ligne d'intersection pour axe des z; je désignerai par φ et φ' les angles supposés constants que font les traces des orbites avec l'axe des x; j'aurai

$$\begin{aligned}
&\xi = \sin\theta\cos\varphi, & &\alpha = \sin\theta'\cos\varphi', & &\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{R^2},\\
&\eta = \sin\theta\sin\varphi, & &\beta = \sin\theta'\sin\varphi', & &\frac{d\theta'}{dt} = \frac{C'}{r^2},\\
&\zeta = \cos\theta, & &\gamma = \cos\theta',
\end{aligned}$$

θ et θ' étant les angles de longitude que font dans leurs orbites le Soleil et la Lune, angles comptés à partir de l'intersection; C et C' étant les intégrales des aires relatives la première au Soleil, la seconde à la Lune. Je désignerai par H l'angle aigu des deux orbites, et l'on a

$$\varphi' - \varphi = H.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} = \cos\theta\cos\varphi\frac{C}{R^2}, & &\frac{d\alpha}{dt} = \cos\theta'\cos\varphi'\frac{C'}{r^2},\\
&\frac{d\eta}{dt} = \cos\theta\sin\varphi\frac{C}{R^2}, & &\frac{d\beta}{dt} = \cos\theta'\sin\varphi'\frac{C'}{r^2},\\
&\frac{d\zeta}{dt} = -\sin\theta\frac{C}{R^2}, & &\frac{d\gamma}{dt} = -\sin\theta'\frac{C'}{r^2};
\end{aligned}$$

et par suite

$$P = \begin{vmatrix} \sin\theta'\cos\varphi' & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta'\sin\varphi' & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta' & \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \frac{C}{R^2} = \sin\theta'\sin H\frac{C}{R^2},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta'\cos\varphi' & \cos\theta'\cos\varphi' \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta'\sin\varphi' & \cos\theta'\sin\varphi' \\ \cos\theta & \cos\theta' & -\sin\theta' \end{vmatrix} \frac{C'}{r^2} = -\sin\theta\sin H\frac{C'}{r^2};$$

$$X = -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{C}{R^2},$$

$$Y = -(\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{C'}{r^2},$$

$$\cos V = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H.$$

Si le raisonnement précédent, qui s'appuie sur le fait que dans le changement qui consiste à introduire les variables képlériennes, les dérivées des coordonnées restent les mêmes par hypothèse que si les orbites étaient fixes et décrites suivant la loi des aires, paraît un peu délicat, on peut simplement dire qu'on substitue aux variables P, Q, x, y, V les nouvelles C, C′, θ, θ′, H définies par les formules

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} P = \sin\theta' \sin H \dfrac{C}{R^2}, & X = -(\cos\theta' \sin\theta - \cos\theta \sin\theta' \cos H)\dfrac{C}{R^2}, \\ Q = -\sin\theta \sin H \dfrac{C'}{r^2}, & Y = -(\cos\theta \sin\theta' - \cos\theta' \sin\theta \cos H)\dfrac{C'}{r^2}, \\ \multicolumn{2}{c}{\cos V = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos H.} \end{array}\right.$$

Je remarquerai encore que, dans ces formules, la permutation des éléments des orbites change H en $-$ H.

Dans le triangle sphérique précédent, introduisons les angles Θ et Θ′ opposés aux côtés θ et θ′; on aura

$$X = -\sin V \cos\Theta' \frac{C}{R^2}, \qquad Y = -\sin V \cos\Theta \frac{C'}{r^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} QX - PY\cos V &= \frac{CC'}{R^2 r^2} \sin\theta \sin H \sin V \cos\Theta' + \frac{CC'}{R^2 r^2} \sin\theta' \sin H \sin V \cos\Theta \cos V \\ &= \frac{CC'}{R^2 r^2} \sin^2 V (\cos\Theta' \sin\Theta + \cos\Theta \sin\Theta' \cos V) \\ &= \frac{CC'}{R^2 r^2} \sin H \cos\theta' \sin^2 V, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} PY - QX\cos V &= -\frac{CC'}{R^2 r^2} \sin\theta' \sin H \sin V \cos\Theta - \frac{CC'}{R^2 r^2} \sin\theta \sin H \cos\Theta \cos V \sin V \\ &= -\frac{CC'}{R^2 r^2} \sin^2 V (\cos\Theta \sin\Theta' + \cos\Theta' \sin\Theta \cos V) \\ &= -\frac{CC'}{R^2 r^2} \sin H \cos\theta \sin^2 V. \end{aligned}$$

On aura aussi

$$\frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} = \frac{C^2}{R^4}, \qquad \frac{Q^2 + Y^2}{\sin^2 V} = \frac{C'^2}{r^4}$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{PQ + XY\cos V}{\sin^2 V} &= \frac{CC'}{R^2 r^2}(-\sin\Theta\sin\Theta' + \cos\Theta\cos\Theta'\cos V) \\
&= \frac{CC'}{R^2 r^2}[-\sin\Theta\sin\Theta' + \cos V(-\cos H + \sin\Theta\sin\Theta'\cos V)] \\
&= -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\cos H\cos V + \sin\Theta\sin\Theta'\sin^2 V) \\
&= -\frac{CC'}{R^2 r^2}[\cos H(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H) + \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H] \\
&= -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H).
\end{aligned}
$$

Réunissons ces dernières formules

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V} = \frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H\cos\theta', \\
&\frac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V} = -\frac{CC'}{R^2 r^2}\sin H\cos\theta, \\
&\frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} = \frac{C^2}{R^4}, \qquad \frac{Q^2 + Y^2}{\sin^2 V} = \frac{C'^2}{r^4}, \\
&\frac{PQ + XY\cos V}{\sin^2 V} = -\frac{CC'}{R^2 r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H).
\end{aligned}
\right.
$$

Je vais maintenant transformer les équations (10); la première peut s'écrire

$$
\frac{d}{dt}(R^2 P) = \frac{QX - PY\cos V}{\sin^2 V}R^2,
$$

ou bien

$$
\frac{d}{dt}(R^2 P) = \frac{CC'}{r^2}\sin H\cos\theta',
$$

ou bien

$$
\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H + C\cos\theta'\sin H\frac{d\theta'}{dt} + C\sin\theta'\cos H\frac{dH}{dt} = \frac{CC'}{r^2}\sin H\cos\theta',
$$

ou enfin

$$
(17)\quad \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H + \cos\theta'\sin H\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) + \sin\theta'\cos H\frac{dH}{dt} = 0.
$$

La seconde peut de même s'écrire

$$\frac{d}{dt}(r^2 Q) = r^2 \frac{PY - QX\cos V}{\sin^2 V} = -\sin H \cos\theta \frac{CC'}{R^2},$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta \sin H C') = \sin H \cos\theta \frac{CC'}{R^2},$$

ou bien

$$(18)\qquad \frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin H + \cos\theta\sin H\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \sin\theta\cos H\frac{dH}{dt} = 0.$$

La dernière est

$$\begin{aligned}
&(-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{d\theta}{dt}\\
&+(-\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{d\theta'}{dt} - \sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt}\\
&= -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{C}{R^2} - (\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\cos H)\frac{C'}{r^2},
\end{aligned}$$

ou bien

$$(19)\qquad \sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt} + \sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0.$$

Multiplions l'équation (19) par $\cos H$, et éliminons $\frac{dH}{dt}$ entre l'équation ainsi obtenue et (17). On aura

$$\begin{aligned}
&\sin\theta\sin H\left[-\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}\sin\theta'\sin H - \cos\theta'\sin H\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\right]\\
&\quad + \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) + \cos H\sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&-\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} + \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad + (\cos H\sin V\cos\Theta - \sin\theta\cos\theta'\sin^2 H)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&-\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} + \cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\
&+ (\cos H\sin V\cos\Theta - \cos\theta'\sin H\sin V\sin\Theta)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = 0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$(20)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \sin V\cos\Theta'\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right].$$

Multiplions encore l'équation (19) par $\cos H$, et éliminons $\frac{dH}{dt}$ entre l'équation ainsi obtenue et (18). On aura

$$\begin{aligned}&\sin\theta'\sin H\left[-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin H-\cos\theta\sin H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right]\\&\quad+\cos H\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)=0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\\&\quad+(\cos H\sin V\cos\Theta'-\sin\theta'\cos\theta\sin^2 H)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)=0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt}\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H+\sin V\cos\Theta\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\\&\quad+(\cos H\sin V\cos\Theta'-\cos\theta\sin H\sin\Theta'\sin V)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)=0,\end{aligned}$$

ou bien

$$(21)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{1}{C'}\frac{dC'}{dt} = \sin V\cos\Theta\left[\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)-\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right].$$

Réunissons les équations (19), (20), (21). Ce sont

$$(19)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt} = -\sin V\cos\Theta'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\sin V\cos\Theta\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right),$$

$$(20)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \sin V\cos\Theta'\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right],$$

$$(21)\quad \sin\theta\sin\theta'\sin^2 H\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'} = \sin V\cos\Theta\left[\cos H\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)-\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\right].$$

Prenons maintenant la quatrième des équations (10); elle peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}(R^2X) + R^2\frac{PQ + XY\cos V}{\sin^2 V} + R^2\cos V\frac{P^2 + X^2}{\sin^2 V} = \mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(R^2X) - \frac{CC'}{r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H) + \cos V\frac{C^2}{R^2} = \mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V.$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{dC}{dt}\cos\Theta'\sin V - C\cos V\frac{d\theta}{dt} + C(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H)\frac{d\theta'}{dt}\\ &-\cos\theta\sin\theta' C\sin H\frac{dH}{dt} + \cos V\frac{C^2}{R^2} - \frac{CC'}{r^2}(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H)\\ &= \mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V - (\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\ &+(\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\cos H)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) - \cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt}\\ &= \mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}(22)\qquad &-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V + \cos\theta\cos\theta'\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}\\ &-\sin\theta\sin\theta'\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} - \cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt}\\ &= \mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V.\end{aligned}$$

L'équation (19) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt} = &\;(-\cos\theta'\sin\theta + \sin\theta'\cos\theta\cos H)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\ &+(-\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\cos H)\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right),\end{aligned}$$

ou bien

$$\sin\theta\sin\theta'\sin H\frac{dH}{dt} = \sin\theta\cos\theta'\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}$$
$$+\sin\theta'\cos\theta\frac{\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C},$$

ou bien

$$(23)\qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\sin\theta\cos\theta'\sin H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'} + \frac{\sin\theta'\cos\theta\sin H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}.$$

En portant cette valeur de $\frac{dH}{dt}$ dans l'équation (22), elle devient

$$-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V + \frac{\cos\theta\cos\theta'\sin\theta\sin\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}$$
$$-\frac{\sin^2\theta\sin^2\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}$$
$$-\cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{\sin\theta\cos\theta'\sin H}{\sin V\cos\Theta}\frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}$$
$$-\cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{\sin\theta'\cos\theta\sin H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou bien

$$-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\cos\Theta'\sin V - \frac{\sin^2\theta'\sin^2 H}{\sin V\cos\Theta'}\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou bien

$$-\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}\frac{1}{\sin V\cos\Theta'}(\cos^2\Theta'\sin^2 V + \sin^2\Theta'\sin^2 V) = \frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin^2 V,$$

ou enfin

$$(24)\qquad \frac{dC}{dt} = -\sin V\cos\Theta'\mu R\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right).$$

En suivant identiquement la même marche, la sixième des équations (10) donnera

$$(25)\qquad \frac{dC'}{dt} = -\sin V\cos\Theta M r\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right).$$

Des équations (20) et (21) on tire ensuite les valeurs de $\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}$, $\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}$; l'équation (23) fournit $\frac{dH}{dt}$, et on a finalement le système d'équations

$$(26)\left\{\begin{aligned}
&\frac{dC}{dt} = -(\cos\theta'\sin\theta - \cos\theta\sin\theta'\cos H)\mu R\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right),\\
&\frac{dC'}{dt} = -(\cos\theta\sin\theta' - \cos\theta'\sin\theta\cos H)M r\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right),\\
&\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} = \sin\theta\sin\theta'\left[\cos H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right],\\
&\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} = \sin\theta\sin\theta'\left[\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + \cos H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right],\\
&\frac{dH}{dt} = -\sin\theta\cos\theta'\sin H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\\
&\qquad\quad - \cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour terminer le changement de variables, nous poserons

$$(27)\left\{\begin{aligned}
&R = \frac{C^2}{M+m}\frac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)}, && r = \frac{C'^2}{m+\mu}\frac{1}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')},\\
&\frac{dR}{dt} = \frac{M+m}{C}e\sin(\theta-\varpi), && \frac{dr}{dt} = \frac{m+\mu}{C'}e'\sin(\theta'-\varpi').
\end{aligned}\right.$$

Je vais d'abord m'occuper de R. J'ai d'abord à écrire que la dérivée de R est toujours la valeur de $\frac{dR}{dt}$ écrite en dessous dans les formules (27). On obtiendra l'équation

$$\begin{aligned}
&2C\frac{dC}{dt}\frac{1}{M+m}\frac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)}\\
&\qquad - \frac{C^2}{M+m}\frac{1}{[1+e\cos(\theta-\varpi)]^2}\left[\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi) - e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right]\\
&= \frac{M+m}{C}e\sin(\theta-\varpi),
\end{aligned}$$

ou bien, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}
&2C\frac{dC}{dt}[1+e\cos(\theta-\varpi)]\\
&\quad - C^2\left[\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi) - e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\varpi}{dt}\right)\right] = \frac{C^3}{R^2}e\sin(\theta-\varpi),
\end{aligned}$$

ou encore

$$(28)\quad \frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi)-e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)$$
$$=2\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}[1+e\cos(\theta-\varpi)].$$

Formons maintenant la troisième des équations (10); c'est

$$\frac{d^2R}{dt^2}-R\frac{P^2+X^2}{\sin^2 V}+\frac{M+m}{R^2}=-\frac{\mu R}{\rho^3}+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V.$$

Elle devient

$$-\frac{M+m}{C^2}\frac{dC}{dt}e\sin(\theta-\varpi)$$
$$+\frac{M+m}{C}\left[\frac{de}{dt}\sin(\theta-\varpi)+e\cos(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{d\varpi}{dt}\right)\right]-\frac{C^2}{R^3}+\frac{M+m}{R^2}$$
$$=-\frac{\mu R}{\rho^3}+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V.$$

En remarquant qu'on a

$$-\frac{C^2}{R^3}+\frac{M+m}{R^2}=\frac{M+m}{R^2}\left(1-\frac{C^2}{M+m}\frac{1}{R}\right)=-\frac{M+m}{R^2}e\cos(\theta-\varpi),$$

elle devient

$$-\frac{M+m}{C^2}\frac{dC}{dt}e\sin(\theta-\varpi)$$
$$+\frac{M+m}{C}\left[\frac{de}{dt}\sin(\theta-\varpi)+e\cos(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)\right]$$
$$=-\frac{\mu R}{\rho^3}+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V,$$

ou enfin

$$(29)\quad \frac{de}{dt}\sin(\theta-\varpi)+e\cos(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)$$
$$=\frac{1}{C}\frac{dC}{dt}e\sin(\theta-\varpi)+\frac{C}{M+m}\left[-\frac{\mu R}{\rho^3}+\mu\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos V\right].$$

On tire des équations (28) et (29) les suivantes :

$$
(30)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)(-\sin\varpi\cos\vartheta' + \cos\varpi\sin\vartheta'\cos H) \\
&\quad + \frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C}\left[\cos(\vartheta-\varpi) + e\right] - \frac{C}{M+m}\,\frac{\mu R}{\rho^3}\sin(\vartheta-\varpi), \\
e\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2} - \frac{d\varpi}{dt}\right) &= \frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)(\cos\varpi\cos\vartheta' + \sin\varpi\sin\vartheta'\cos H) \\
&\quad - \frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C}\sin(\vartheta-\varpi) - \frac{C}{M+m}\,\frac{\mu R}{\rho^3}\cos(\vartheta-\varpi),
\end{aligned}\right.
$$

ou bien, si l'on préfère introduire les quantités $e\cos\varpi$ et $e\sin\varpi$,

$$
(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e\cos\varpi) + e\sin\varpi\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) \\
&\quad = \frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\sin\vartheta'\cos H \\
&\quad\quad + \frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C}(\cos\vartheta + e\cos\varpi) - \frac{C}{M+m}\,\frac{\mu R}{\rho^3}\sin\vartheta. \\
&\frac{d}{dt}(e\sin\varpi) - e\cos\varpi\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) \\
&\quad = -\frac{\mu C}{M+m}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\cos\vartheta' \\
&\quad\quad + \frac{dC}{dt}\,\frac{1}{C}(\sin\vartheta + e\sin\varpi) + \frac{C}{M+m}\,\frac{\mu R}{\rho^3}\cos\vartheta.
\end{aligned}\right.
$$

On a les équations analogues en e', ϖ' que l'on déduit des équations (27) et de la cinquième des équations (10).

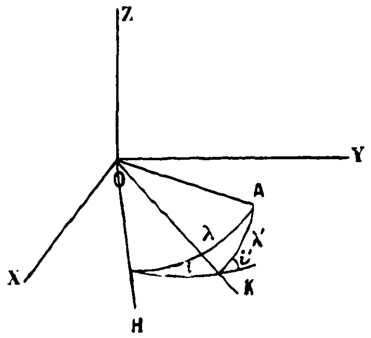
$$
(32)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{de'}{dt} &= \frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)(-\sin\varpi'\cos\vartheta + \cos\varpi'\sin\vartheta\cos H) \\
&\quad + \frac{dC'}{dt}\,\frac{1}{C'}\left[\cos(\vartheta'-\varpi') + e'\right] - \frac{C'}{m+\mu}\,\frac{Mr}{\rho^3}\sin(\vartheta'-\varpi'), \\
e'\left(\frac{d\vartheta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} - \frac{d\varpi'}{dt}\right) &= \frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)(\cos\varpi'\cos\vartheta + \sin\varpi'\sin\vartheta\cos H) \\
&\quad - \frac{dC'}{dt}\,\frac{1}{C'}\sin(\vartheta'-\varpi') - \frac{C'}{m+\mu}\,\frac{Mr}{\rho^3}\cos(\vartheta'-\varpi'),
\end{aligned}\right.
$$

ou bien, si l'on préfère introduire les quantités $e'\cos\varpi'$ et $e'\sin\varpi'$,

$$
(33)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e'\cos\varpi') + e'\sin\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\qquad = \frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\sin\theta\cos H\\
&\qquad + \frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}(\cos\theta' + e'\cos\varpi') - \frac{C'}{m+\mu}\frac{Mr}{\rho^3}\sin\theta',\\
&\frac{d}{dt}(e'\sin\varpi') - E'\cos\varpi'\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\qquad = -\frac{MC'}{m+\mu}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\cos\theta\\
&\qquad + \frac{dC'}{dt}\frac{1}{C'}(\sin\theta' + e'\sin\varpi') + \frac{C'}{m+\mu}\frac{Mr}{\rho^3}\cos\theta'.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (26), (30) et (32), ou bien (26), (31) et (33), dans lesquelles R et r sont remplacés par leurs valeurs données dans les équations (27), fournissent C, C', θ, θ', H, e, ϖ, e', ϖ'.

Fig. 5.



IV. Je vais maintenant montrer comment on achèvera la solution de la question.

Je supposerai d'abord qu'on ait pris le plan des aires pour plan des XY. Alors les équations (6) de la deuxième Partie deviennent

$$
(34)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&M(m+\mu)R^2P + M\mu RrQ = G\gamma,\\
&\mu(m+M)r^2Q + M\mu RrP = G\zeta,\\
&M(m+\mu)R^2S - M\mu\left(R\frac{dr}{dt} - r\frac{dR}{dt}\right)Q + M\mu RrT = G\frac{d\gamma}{dt},\\
&\mu(m+M)r^2T + M\mu\left(R\frac{dr}{dt} - r\frac{dR}{dt}\right)P + M\mu RrS = G\frac{d\zeta}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je vais représenter les plans des orbites. Soient OH la trace du plan de l'orbite solaire, i l'inclinaison, v l'angle XOH; OK la trace du plan de l'orbite lunaire, i' l'inclinaison, OA l'intersection, v' l'angle XOK; λ et λ' désigneront les arcs AH et AK.

On aura les formules connues

$$\begin{aligned}
\xi &= \cos(\lambda+\theta)\cos v - \sin(\lambda+\theta)\sin v\cos i,\\
\eta &= \cos(\lambda+\theta)\sin v + \sin(\lambda+\theta)\cos v\cos i,\\
\zeta &= \sin(\lambda+\theta)\sin i,\\
\alpha &= \cos(\lambda'+\theta')\cos v' - \sin(\lambda'+\theta')\sin v'\cos i',\\
\beta &= \cos(\lambda'+\theta')\sin v' + \sin(\lambda'+\theta')\cos v'\cos i',\\
\gamma &= \sin(\lambda'+\theta')\sin i'.
\end{aligned}$$

Cela posé, la première et la troisième des équations (34) deviennent

$$\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\theta'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\mathrm{C}'\sin\theta\sin\mathrm{H} = \mathrm{G}\sin(\lambda'+\theta')\sin i',$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\frac{\mathrm{CC}'}{r^2}\sin\mathrm{H}\cos\theta'\\
&\quad + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\frac{\mathrm{C}'}{r^2}\sin\theta\sin\mathrm{H}\\
&\qquad - \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{R}^2}\sin\mathrm{H}\cos\theta = \mathrm{G}\cos(\lambda'+\theta')\sin i'\frac{\mathrm{C}'}{r^2},
\end{aligned}$$

ou bien

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\theta'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\mathrm{C}'\sin\theta\sin\mathrm{H} = \mathrm{G}\sin(\lambda'+\theta')\sin i',\\
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\cos\theta'\sin\mathrm{H}\\
&\quad + \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\theta\sin\mathrm{H}\\
&\qquad - \mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\cos\theta = \mathrm{G}\cos(\lambda'+\theta')\sin i'.
\end{aligned}\right.$$

Multiplions la première par $\cos\theta'$, la seconde par $-\sin\theta'$, et ajoutons; il vient

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{M}\mu\frac{\mathrm{R}}{r}\sin\theta\cos\theta'\mathrm{C}'\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu\left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\sin\theta\sin\theta'\sin\mathrm{H}\\
&\qquad + \mathrm{M}\mu\frac{r}{\mathrm{R}}\mathrm{C}\sin\mathrm{H}\cos\theta\sin\theta' = \mathrm{G}\sin i'\sin\lambda',
\end{aligned}$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{M}\mu \mathrm{R} \sin\theta \sin\mathrm{H} \left\{ \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \cos\theta' [1 + e' \cos(\theta' - \varpi')] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} e' \sin(\theta' - \varpi') \sin\theta' \right\} \\
&+ \mathrm{M}\mu r \sin\theta' \sin\mathrm{H} \left\{ \frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} \cos\theta [1 + e\cos(\theta - \varpi)] \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} e \sin(\theta - \varpi) \sin\theta \right\} = \mathrm{G} \sin i' \sin\lambda',
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
(36) \qquad & \mathrm{M}\mu \sin\mathrm{H} \left[\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} r \sin\theta' (\cos\theta + e\cos\varpi) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \mathrm{R} \sin\theta (\cos\theta' + e' \cos\varpi') \right] \\
&= \mathrm{G} \sin i' \sin\lambda' = \mathrm{G} \sin i \sin\lambda.
\end{aligned}
$$

Multiplions la première des équations (35) par $\sin\theta'$, la seconde par $\cos\theta'$, et ajoutons; il viendra

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu \frac{\mathrm{R}}{r} \sin\theta \sin\theta' \mathrm{C}' \sin\mathrm{H} \\
&\quad + \mathrm{M}\mu \left(\mathrm{R}\frac{dr}{dt} - r\frac{d\mathrm{R}}{dt} \right) \sin\theta \cos\theta' \sin\mathrm{H} \\
&\qquad - \mathrm{M}\mu \frac{r}{\mathrm{R}} \mathrm{C} \cos\theta \cos\theta' \sin\mathrm{H} = \mathrm{G} \sin i' \cos\lambda',
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu \mathrm{R} \sin\theta \sin\mathrm{H} \left(\frac{\mathrm{C}'}{r} \sin\theta' - \frac{dr}{dt} \cos\theta' \right) \\
&\qquad - \mathrm{M}\mu r \cos\theta' \sin\mathrm{H} \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}} \cos\theta + \frac{d\mathrm{R}}{dt} \sin\theta \right) = \mathrm{G} \sin i' \cos\lambda',
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H} - \mathrm{M}\mu \mathrm{R} \sin\theta \sin\mathrm{H} \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} (\sin\theta' + e' \sin\varpi') \\
&\qquad - \mathrm{M}\mu r \cos\theta' \sin\mathrm{H} \frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} (\cos\theta + e\cos\varpi) = \mathrm{G} \sin i' \cos\lambda',
\end{aligned}
$$

ou enfin

$$
\begin{aligned}
(37) \quad & \mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C}\sin\mathrm{H} \\
&- \mathrm{M}\mu \sin\mathrm{H} \left[\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} r \cos\theta' (\cos\theta + e\cos\varpi) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \mathrm{R} \sin\theta (\sin\theta' + e' \sin\varpi') \right] = \mathrm{G} \sin i' \cos\lambda'.
\end{aligned}
$$

On aura une équation analogue à (37) que l'on tirerait de la deuxième et de la quatrième de (34); je réunis les trois équations obtenues; ce sera le système

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}\mu \sin \mathrm{H} \left[\frac{\mathrm{M}+m}{\mathrm{C}} r \sin \theta' (\cos \theta + e \cos \varpi) \right.\\
&\qquad \left. - \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \mathrm{R} \sin \theta (\cos \theta' + e' \cos \varpi') \right] = \mathrm{G} \sin i \sin \lambda - \mathrm{G} \sin i' \sin \lambda',
\end{aligned}
$$

$$
(38)\quad
\begin{aligned}
&-\mu(m+\mathrm{M})\mathrm{C}' \sin \mathrm{H}\\
&\quad + \mathrm{M}\mu \sin \mathrm{H} \left[\frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \mathrm{R} \cos \theta (\cos \theta' + e' \cos \varpi') \right.\\
&\qquad \left. + \frac{m+\mathrm{M}}{\mathrm{C}} r \sin \theta' (\sin \theta + e \sin \varpi) \right] = \mathrm{G} \sin i \cos \lambda,\\
&\mathrm{M}(m+\mu)\mathrm{C} \sin \mathrm{H}\\
&\quad - \mathrm{M}\mu \sin \mathrm{H} \left[\frac{m+\mathrm{M}}{\mathrm{C}} r \cos \theta' (\cos \theta + e \cos \varpi) \right.\\
&\qquad \left. + \frac{m+\mu}{\mathrm{C}'} \mathrm{R} \sin \theta (\sin \theta' + e' \sin \varpi') \right] = \mathrm{G} \sin i' \cos \lambda'.
\end{aligned}
$$

Ces équations fournissent i, i', λ, λ'; il reste à déterminer v et v'. J'écrirai pour cela les équations

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2},\\
&\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\theta'} \frac{\mathrm{C}'}{r^2}, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\theta'} \frac{\mathrm{C}'}{r^2}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\theta'} \frac{\mathrm{C}'}{r^2}.
\end{aligned}
$$

On s'est déjà servi de la troisième et de la sixième, pour former les deux dernières des équations (34).

Écrivons les trois premières; ce sont

$$
\begin{aligned}
&-[\sin(\lambda+\theta)\cos v + \cos(\lambda+\theta)\sin v \cos i]\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2} + \frac{d\lambda}{dt}\right)\\
&\quad - [\cos(\lambda+\theta)\sin v + \sin(\lambda+\theta)\cos v \cos i]\frac{dv}{dt} + \sin(\lambda+\theta)\sin v \sin i \frac{di}{dt} = 0,\\
&+[-\sin(\lambda+\theta)\sin v + \cos(\lambda+\theta)\cos v \cos i]\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2} + \frac{d\lambda}{dt}\right)\\
&\quad + [\cos(\lambda+\theta)\cos v - \sin(\lambda+\theta)\sin v \cos i]\frac{dv}{dt} - \sin(\lambda+\theta)\cos v \sin i \frac{di}{dt} = 0,\\
&\qquad\qquad \cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2} + \frac{d\lambda}{dt}\right) + \sin(\lambda+\theta)\cos i \frac{di}{dt} = 0,
\end{aligned}
$$

Ces équations donnent sans peine les suivantes :

$$
(39)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt} + \cos i \frac{dv}{dt} = 0,\\
&\cos(\lambda + \theta) \sin i \frac{dv}{dt} - \sin(\lambda + \theta) \frac{di}{dt} = 0,\\
&\cos(\lambda + \theta) \sin i \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt}\right) + \sin(\lambda + \theta) \cos i \frac{di}{dt} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Ces équations se réduisent à deux; la dernière est la même que dans le système précédent. On aura aussi

$$
(40)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt} + \cos i' \frac{dv'}{dt} = 0,\\
&\cos(\lambda' + \theta') \sin i' \frac{dv'}{dt} - \sin(\lambda' + \theta') \frac{di'}{dt} = 0,\\
&\cos(\lambda' + \theta') \sin i' \left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt}\right) + \sin(\lambda' + \theta') \cos i' \frac{di'}{dt} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Je remarquerai que les équations (39) et (40) ne supposent pas que le plan des XY est le plan du maximum des aires. Il en est de même dans ce qui suit :

Considérons les deux équations

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} + \frac{d\lambda}{dt} + \cos i \frac{dv}{dt} = 0,\\
&\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} + \frac{d\lambda'}{dt} + \cos i' \frac{dv'}{dt} = 0.
\end{aligned}
$$

Multiplions la première par $\cos i'$, la seconde par $\cos i$, et retranchons; on aura

$$
\begin{aligned}
\cos i' \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) &- \cos i \left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&+ \frac{d\lambda}{dt} \cos i' - \frac{d\lambda'}{dt} \cos i - \cos i \cos i' \frac{d}{dt}(v' - v) = 0.
\end{aligned}
$$

Écrivons l'expression

$$
\frac{d\lambda}{dt} \cos i' - \frac{d\lambda'}{dt} \cos i - \cos i \cos i' \frac{d}{dt}(v' - v).
$$

Si on considère le triangle sphérique précédent, on posera pour un moment

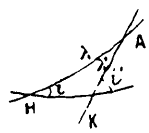
$$c' - c = a, \qquad \lambda' = b, \qquad \lambda = c,$$
$$H = A, \qquad i = B, \qquad i' = \pi - C,$$

et l'expression précédente deviendra

$$-\frac{dc}{dt}\cos C - \frac{db}{dt}\cos B + \cos B \cos C \frac{da}{dt}.$$

En se servant des relations différentielles entre les angles et les côtés

Fig. 6.



d'un triangle sphérique, cette expression devient successivement

$$-\frac{dc}{dt}\cos C - \frac{db}{dt}\cos B + \cos B \cos C\left(\cos C\frac{db}{dt} + \cos B\frac{dc}{dt} + \sin b \sin C\frac{dA}{dt}\right),$$

$$-\frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B - \frac{db}{dt}\cos B \sin^2 C + \cos B \cos C \sin b \sin C\frac{dA}{dt},$$

$$\sin C \cos B\left(\sin b \cos C\frac{dA}{dt} - \sin C\frac{db}{dt}\right) - \frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B,$$

$$-\sin C \cos B\left(\sin a\frac{dB}{dt} + \sin B \cos a\frac{dc}{dt}\right) - \frac{dc}{dt}\cos C \sin^2 B,$$

$$-\sin C \cos B \sin a\frac{dB}{dt} - \frac{dc}{dt}\sin B(\cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a),$$

$$-\sin C \cos B \sin a\frac{dB}{dt} - \frac{dc}{dt}\sin B \sin A \cos c,$$

$$-\sin A\left(\sin c \cos B\frac{dB}{dt} + \sin B \cos c\frac{dc}{dt}\right),$$

$$-\sin A\frac{d}{dt}(\sin c \sin B).$$

On aura donc l'équation

$$\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right) - \cos i\left(\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right) = \sin H\frac{d}{dt}(\sin i \sin \lambda). \tag{41}$$

Écrivons de nouveau cette équation et la dernière du groupe (39).

Ce sont

$$\cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)+\frac{d\lambda}{dt}\cos(\lambda+\theta)\sin i+\frac{di}{dt}\sin(\lambda+\theta)\cos i=0,$$

$$\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)-\sin H\cos i\sin\lambda\,\frac{di}{dt}-\sin H\sin i\cos\lambda\,\frac{d\lambda}{dt}=0.$$

Multiplions la première par $\sin H\cos\lambda$, la seconde par $\cos(\lambda+\theta)$, et ajoutons; on aura

$$\begin{aligned}\cos(\lambda+\theta)\Bigg[\sin i\sin H\cos\lambda\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)\\+\cos i'\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\Bigg]+\frac{di}{dt}\cos i\sin H\sin\theta=0\end{aligned}$$

ou bien

$$\cos(\lambda+\theta)\left[\cos H\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}\right)-\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}\right)\right]+\frac{di}{dt}\sin H\sin\theta=0,$$

d'où, d'après (20) et (26),

$$\frac{di}{dt}=\sin\theta'\sin H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos(\lambda+\theta); \tag{42}$$

les équations (39) fournissent ensuite $\frac{d\lambda}{dt}$ et $\frac{d\nu}{dt}$; on a

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i}\,\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin(\lambda+\theta). \tag{43}$$

On aurait des formules analogues en i' et ν'; réunissons-les : on obtiendra le système suivant, dans lequel je n'ai pas achevé l'expression de $\frac{d\lambda}{dt}$, qui n'offre rien de particulier :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{di}{dt}=\sin\theta'\sin H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\cos(\lambda+\theta),\\
&\frac{d\nu}{dt}=\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i}\,\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3}-\frac{1}{r^2}\right)\sin(\lambda+\theta),\\
&\qquad\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}+\frac{d\lambda}{dt}=-\cos i\frac{d\nu}{dt},\\
&\frac{di'}{dt}=-\sin\theta\sin H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\cos(\lambda'+\theta'),\\
&\frac{d\nu'}{dt}=-\frac{\sin\theta'\sin H}{\sin i'}\,\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3}-\frac{1}{R^2}\right)\sin(\lambda'+\theta'),\\
&\qquad\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}+\frac{d\lambda'}{dt}=-\cos i'\frac{d\nu'}{dt}.
\end{aligned}\right. \tag{44}$$

La solution du problème s'achèvera donc de la manière suivante : si l'on a pris pour plan des XY le plan du maximum des aires, on déterminera i, i', λ, λ' par les équations (38); la deuxième et la cinquième des équations (44) fourniront v et v'. Si le plan des XY est quelconque, on se servira des équations (44) pour déterminer i, i', λ, λ', v, v'.

V. Je vais former avec les nouvelles variables les intégrales des aires et des forces vives.

Pour obtenir un peu rapidement l'équation des aires ou (13), j'opérerai de la manière suivante :

Je pose

$$\sin i \sin\lambda = x, \qquad \sin i \cos\lambda = y, \qquad \sin i' \cos\lambda' = y'.$$

On a les relations

$$\cos i = \cos i' \cos H + \sin i' \sin H \cos\lambda',$$
$$\cos i' = \cos i \cos H - \sin i \sin H \cos\lambda,$$

ou bien

$$\cos i - \cos i' \cos H = y' \sin H,$$
$$\cos i' - \cos i \cos H = -y \sin H.$$

On en tire

$$\cos i = \frac{y' - y\cos H}{\sin H}, \qquad \cos i' = \frac{y'\cos H - y}{\sin H}.$$

La relation

$$\sin^2 i + \cos^2 i = 1$$

donne

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{y' - y\cos H}{\sin H}\right)^2 = 1,$$

ou bien

$$\sin^2 H = x^2 \sin^2 H + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos H. \tag{45}$$

Si dans cette équation on remplace x, y, y' par leurs valeurs fournies par les équations (38), on a l'équation cherchée. Il n'en a pas été fait usage.

Je vais maintenant former l'équation des forces vives (14), qui est plus intéressante :

$$
\begin{aligned}
&M(m+\mu)\left(\frac{dR^2}{dt^2}+\frac{C^2}{R^2}\right)+\mu(m+M)\left(\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{C'^2}{r^2}\right)\\
&\quad-2M\mu\left(\frac{dR}{dt}\frac{dr}{dt}\cos V-\frac{dR}{dt}\frac{C'}{r}\cos\Theta\sin V-\frac{dr}{dt}\frac{C}{R}\cos\Theta'\sin V\right)\\
&\quad+\frac{CC'}{Rr}(\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos H)\\
&\quad=2(M+m+\mu)\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{Mm}{R}+\frac{M\mu}{\rho}\right)+h.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{dR^2}{dt^2}+\frac{C^2}{R^2}&=\frac{(M+m)^2}{C^2}e^2\sin^2(\vartheta-\varpi)+\frac{(M+m)^2}{C^2}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)]^2\\
&=\frac{(M+m)^2}{C^2}[1+2e\cos(\vartheta-\varpi)+e^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{C'^2}{r^2}&=\frac{(m+\mu)^2}{C'^2}e'^2\sin^2(\vartheta'-\varpi')+\frac{(m+\mu)^2}{C'^2}[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')]^2\\
&=\frac{(m+\mu)^2}{C'^2}[1+2e'\cos(\vartheta'-\varpi')+e'^2],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dR}{dt}\frac{dr}{dt}\cos V-\frac{C'}{r}\frac{dR}{dt}\cos\Theta\sin V-\frac{C}{R}\frac{dr}{dt}\cos\Theta'\sin V+\frac{CC'}{Rr}(\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos H)\\
&=\frac{M+m}{C}e\sin(\vartheta-\varpi)\frac{m+\mu}{C'}e'\sin(\vartheta'-\varpi')(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos H)\\
&\quad-\frac{M+m}{C}e\sin(\vartheta-\varpi)\frac{m+\mu}{C'}[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\cos\vartheta\sin\vartheta'-\sin\vartheta\cos\vartheta'\cos H)\\
&\quad-\frac{m+\mu}{C'}e'\sin(\vartheta'-\varpi')\frac{M+m}{C}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)](\cos\vartheta'\sin\vartheta-\sin\vartheta'\cos\vartheta\cos H)\\
&\quad+\frac{M+m}{C}\frac{m+\mu}{C'}[1+e\cos(\vartheta-\varpi)][1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos H)\\
&=\frac{M+m}{C}\frac{m+\mu}{C'}\left\{
\begin{aligned}
&ee'\sin(\vartheta-\varpi)\sin(\vartheta'-\varpi')(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos H)\\
&-e\sin(\vartheta-\varpi)[1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\cos\vartheta\sin\vartheta'-\sin\vartheta\cos\vartheta'\cos H)\\
&-e'\sin(\vartheta'-\varpi')[1+e\cos(\vartheta-\varpi)](\cos\vartheta'\sin\vartheta-\sin\vartheta'\cos\vartheta\cos H)\\
&+[1+e\cos(\vartheta-\varpi)][1+e'\cos(\vartheta'-\varpi')](\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\theta\cos\vartheta'\cos H)
\end{aligned}\right\}\\
&=\frac{M+m}{C}\frac{m+\mu}{C'}[\sin\vartheta\sin\vartheta'+\cos\vartheta\cos\vartheta'\cos H+e(\sin\varpi\sin\vartheta'+\cos\varpi\cos\vartheta'\cos H)\\
&\qquad+e'(\sin\varpi'\sin\vartheta+\cos\varpi'\cos\vartheta\cos H)+ee'(\sin\varpi\sin\varpi'+\cos\varpi\cos\varpi'\cos H)]\\
&=\frac{M+m}{C}\frac{m+\mu}{C'}[(\sin\vartheta+e\sin\varpi)(\sin\vartheta'+e'\sin\varpi')+\cos H(\cos\vartheta+e\cos\varpi)(\cos\vartheta'+e'\cos\varpi')].
\end{aligned}
$$

L'équation des forces vives devient donc

$$\frac{M(m+M)}{C^2}[1+2e\cos(\theta-\varpi)+e^2]+\frac{\mu(m+\mu)}{C'^2}[1+2e'\cos(\theta'-\varpi')+e'^2]$$
$$-\frac{2M\mu}{CC'}[(\sin\theta+e\sin\varpi)(\sin\theta'+e'\sin\varpi')$$
$$+\cos H(\cos\theta+e\cos\varpi)(\cos\theta'+e'\cos\varpi')]$$
$$=\frac{2(M+m+\mu)}{(m+M)(m+\mu)}\left(\frac{m\mu}{r}+\frac{Mm}{R}+\frac{M\mu}{\rho}\right)+h',$$

h' étant une nouvelle constante, ou enfin

$$(46)\qquad \frac{M(m+M)}{C^2}(e^2-1)+\frac{\mu(m+\mu)}{C'^2}(e'^2-1)$$
$$-\frac{2M\mu}{CC'}[(\sin\theta+e\sin\varpi)(\sin\theta'+e'\sin\varpi')$$
$$+\cos H(\cos\theta+e\cos\varpi)(\cos\theta'+e'\cos\varpi')]$$
$$=\frac{2M\mu}{(m+M)(m+\mu)}\left(\frac{M+m+\mu}{\rho}-\frac{M}{R}-\frac{\mu}{r}\right)+h'.$$

Cette équation, dans laquelle on remplace R et r par leurs valeurs, fournit une expression assez simple de $\frac{1}{\rho}$ qui peut remplacer la valeur tirée de la formule

$$(47)\qquad \rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos V.$$

VI. Je vais indiquer dans ce paragraphe une méthode nouvelle pour résoudre le problème des trois corps; elle consiste à se servir des équations des aires (38) pour en tirer les variables θ et θ' et à former les équations différentielles desquelles dépendent les autres quantités. Les équations (38) étant au nombre de trois, on pourra toujours ramener au premier degré la détermination des lignes trigonométriques de θ et θ'.

Je vais commencer les calculs, et, pour cela, je poserai

$$\frac{M+m}{C}r\sin\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)-\frac{m+\mu}{C'}R\sin\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')=\mathcal{A},$$
$$\frac{m+\mu}{C'}R\cos\theta(\cos\theta'+e'\cos\varpi')+\frac{m+M}{C}r\sin\theta'(\sin\theta+e\sin\varpi)=\mathcal{A}',$$
$$\frac{m+M}{C}r\cos\theta'(\cos\theta+e\cos\varpi)+\frac{m+\mu}{C'}R\sin\theta(\sin\theta'+e'\sin\varpi')=\mathcal{A}'',$$

et je rappellerai

$$R = \frac{C^2}{M+m}\,\frac{1}{1+e\cos(\theta-\varpi)}, \qquad r = \frac{C'^2}{m+\mu}\,\frac{1}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')}.$$

On tire sans peine de ces équations

$$\mathcal{A}\cos\theta + \mathcal{A}'\sin\theta = C\frac{r}{R}\sin\theta',$$

$$\mathcal{A}''\sin\theta' - \mathcal{A}\cos\theta' = C'\frac{R}{r}\sin\theta,$$

$$\mathcal{A}'(\cos\theta + e\cos\varpi) - \mathcal{A}(\sin\theta + e\sin\varpi) = \frac{m+\mu}{C'}\,\frac{C^2}{M+m}(\cos\theta' + e'\cos\varpi'),$$

$$\mathcal{A}(\sin\theta' + e'\sin\varpi') + \mathcal{A}''(\cos\theta' + e'\cos\varpi') = \frac{M+m}{C}\,\frac{C'^2}{m+\mu}(\cos\theta + e\cos\varpi).$$

Posons

$$\frac{C^2}{M+m}\,\frac{m+\mu}{C'^2} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \begin{aligned} n &= \mathcal{A}e\sin\varpi - \mathcal{A}'e\cos\varpi + C'\operatorname{tang}\varphi\, e'\cos\varpi', \\ n' &= -\mathcal{A}e'\sin\varpi' - \mathcal{A}''e'\cos\varpi' + C\operatorname{cotang}\varphi\, e\cos\varpi; \end{aligned}$$

les deux dernières équations s'écriront

$$\mathcal{A}'\cos\theta - \mathcal{A}\sin\theta - C'\operatorname{tang}\varphi\cos\theta' = n,$$

$$\mathcal{A}\sin\theta' + \mathcal{A}''\cos\theta' - C\operatorname{cotang}\varphi\cos\theta = n'.$$

On a donc le système

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}R\cos\theta + \mathcal{A}'R\sin\theta - Cr\sin\theta' = 0,\\
&\mathcal{A}''r\sin\theta' - \mathcal{A}r\cos\theta' - C'R\sin\theta = 0,\\
&\mathcal{A}'\cos\theta - \mathcal{A}\sin\theta - C'\operatorname{tang}\varphi\cos\theta' = n,\\
&\mathcal{A}\sin\theta' + \mathcal{A}''\cos\theta' - C\operatorname{cotang}\varphi\cos\theta = n'.
\end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$\cos\theta = \frac{ru}{U}, \qquad \sin\theta = \frac{rw}{U},$$

$$\cos\theta' = \frac{Ru'}{U}, \qquad \sin\theta' = \frac{Rw'}{U},$$

u, u', w, w' étant des fonctions homogènes du premier degré en R et en r, U une fonction homogène du second degré en R et r; on en tire

$$(48)\qquad r^2(u^2+w^2) = U^2, \qquad R^2(u'^2+w'^2) = U^2;$$

on a encore la combinaison

$$\operatorname{tang}\varphi \frac{r}{R} = \frac{1+e\cos(\theta-\varpi)}{1+e'\cos(\theta'-\varpi')} = \frac{\cos\theta(\cos\theta+e\cos\varpi)+\sin\theta(\sin\theta+e\sin\varpi)}{\cos\theta'(\cos\theta'+e'\cos\varpi')+\sin\theta'(\sin\theta'+e'\sin\varpi')},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi \frac{r}{R} = \frac{\frac{ru}{U}\left(\frac{ru}{U}+e\cos\varpi\right)+\frac{rw}{U}\left(\frac{rw}{U}+e\sin\varpi\right)}{\frac{Ru'}{U}\left(\frac{Ru'}{U}+e'\cos\varpi'\right)+\frac{Rw'}{U}\left(\frac{Rw'}{U}+e'\sin\varpi'\right)},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(u^2+w^2)r+U(ue\cos\varpi+we\sin\varpi)}{(u'^2+w'^2)R+U(u'e'\cos\varpi'+w'e'\sin\varpi')},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{U}{r}+ue\cos\varpi+we\sin\varpi}{\frac{U}{R}+u'e'\cos\varpi'+w'e'\sin\varpi'};$$

d'où

$$\frac{U}{R}\operatorname{tang}\varphi - \frac{U}{r} = n'',$$

n'' étant une fonction homogène et du premier degré en R et r; cette dernière équation peut s'écrire

$$U(r\operatorname{tang}\varphi - R) = n''Rr; \tag{49}$$

c'est une combinaison du troisième degré des équations (48). On formera donc aisément deux combinaisons homogènes du second degré; on en tirera des quantités proportionnelles à R^2, Rr, r^2; puis enfin des quantités proportionnelles à R et r. On aura alors les expressions de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$, R, r.

Reprenons maintenant l'équation (41) et la dernière du groupe (39). Ce sont

$$(50)\quad \begin{cases} \cos i'\left(\dfrac{d\theta}{dt}-\dfrac{C}{R^2}\right)-\cos i\left(\dfrac{d\theta'}{dt}-\dfrac{C'}{r^2}\right)=\sin H\,\dfrac{d}{dt}(\sin i\sin\lambda), \\ \cos(\lambda+\theta)\sin i\left(\dfrac{d\theta}{dt}-\dfrac{C}{R^2}\right)+\cos\theta\,\dfrac{d}{dt}(\sin i\sin\lambda)+\sin\theta\,\dfrac{d}{dt}(\sin i\cos\lambda)=0. \end{cases}$$

On a déjà posé

$$\sin\lambda \sin i = x, \qquad \sin i \cos\lambda = y, \qquad \sin i' \cos\lambda' = y',$$

et on a trouvé les relations

$$\cos i = \frac{y' - y\cos H}{\sin H}, \qquad \cos i' = \frac{y'\cos H - y}{\sin H}.$$

De plus, les équations (38) donnent pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ des expressions très simples en x, y, y'.

$$\mathcal{A} = \frac{Gx}{M\mu \sin H}, \qquad \mathcal{A}' = \frac{Gy + \mu(m+M)C'\sin H}{M\mu\sin H},$$

$$\mathcal{A}'' = \frac{M(m+\mu)C\sin H - Gy'}{M\mu\sin H}.$$

En remplaçant $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ par ces valeurs, $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$, $\sin\theta'$, R, r s'exprimeront en fonction de C, C′, H, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$, x, y, y'. Cela posé, les équations (50) donnent aisément

$$\frac{dx}{dt} = -\sin\theta\sin\theta'\left[\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)y' + \frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)y\right],$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} = &-\sin\theta'(y\cos\theta + x\sin\theta)\left[\cos H\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right] \\ &+ \cos\theta\sin\theta'\left[y'\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + y\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right],\end{aligned}$$

et l'on aura de même

$$\begin{aligned}\frac{dy'}{dt} = &-\sin\theta(y'\cos\theta' + x\sin\theta')\left[\cos H\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right)\right] \\ &+ \cos\theta'\sin\theta\left[y'\frac{\mu R}{C}\left(\frac{r}{\rho^3} - \frac{1}{r^2}\right) + y\frac{Mr}{C'}\left(\frac{R}{\rho^3} - \frac{1}{R^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Joignons à ces trois équations les équations (26), (31) et (33). Mettons de côté la troisième et la quatrième des équations (26), que nous joindrons à la deuxième et à la cinquième des équations (44). Le premier système sera un système d'équations différentielles du premier ordre aux inconnues C, C′, H, $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$, x, y, y'; le système ainsi obtenu ne renferme que des quantités qui varient peu. Le second système fera ensuite connaître θ, θ', v, v'.

Cette méthode me paraît intéressante, et probablement n'est pas plus compliquée que celles actuellement en usage dans la Mécanique céleste.

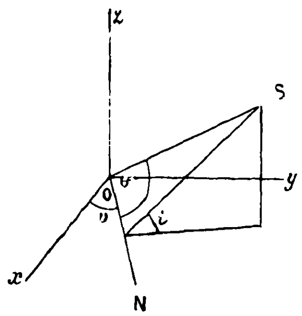
QUATRIÈME PARTIE.

I. Si l'on considère le mouvement d'une planète autour du Soleil, ou le mouvement d'un satellite autour de sa planète, on peut écrire les équations

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{r^3} + \mathcal{X},\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{r^3} + \mathcal{Y},\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz}{r^3} + \mathcal{Z}.$$

x, y, z désignent les coordonnées de la planète relativement à des axes de direction constante passant par le Soleil, ou les coordonnées du satellite par rapport à des axes de direction constante passant par la planète, r la distance des deux astres, k une constante, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ la composante d'une force appelée force perturbatrice.

Fig. 7.



Si on néglige cette force, l'astre secondaire décrit autour de l'axe principal une ellipse suivant les lois de Képler. Soient O l'astre principal, S l'astre secondaire.

Soient ON la trace du plan de l'orbite sur le plan des xy, v l'angle xON, i l'inclinaison de l'orbite, θ la longitude dans l'orbite ou l'angle SON.

Soit

$$x = r\xi, \qquad y = r\eta, \qquad z = r\zeta. \tag{2}$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \cos\theta\cos v - \sin\theta\sin v\cos i, \\ \eta &= \cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos i, \\ \zeta &= \sin\theta\sin i. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Soit encore

$$r = \frac{C^2}{k}\,\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}. \tag{4}$$

Aux variables x, y, z on substitue les variables θ, v, i, C, e, ϖ, avec la condition que les dérivées des quantités ξ, η, ζ, r soient les mêmes que dans le mouvementküplérien, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{d\theta}\frac{C}{r^2}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{C}{r^2}. \tag{5}$$

Je vais faire ce changement de variables. Les équations (1) s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} r\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2}\xi, \\ r\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2}\eta, \\ r\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{k}{r^2}\zeta. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Formons d'abord les trois premières des équations (5); ce sont

$$\begin{gathered} -(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin v\cos i)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) \\ -(\cos\theta\sin v + \sin\theta\cos v\cos i)\frac{dv}{dt} + \sin\theta\sin v\sin i\frac{di}{dt} = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -(\sin\theta\sin v + \cos\theta\cos v\cos i)\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) \\ +(\cos\theta\cos v - \sin\theta\sin v\cos i)\frac{dv}{dt} - \sin\theta\cos v\sin i\frac{di}{dt} = 0, \end{gathered}$$

$$\cos\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) + \sin\theta\cos i\frac{di}{dt} = 0.$$

Multiplions la première par $-\cos v$, la seconde par $-\sin v$, et ajoutons; il vient

$$\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\cos i\frac{dv}{dt}\sin\theta=0$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}+\cos i\frac{dv}{dt}=0. \tag{7}$$

Multiplions la première par $-\sin v$, la seconde par $\cos v$, et ajoutons; il vient

$$\cos\theta\cos i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\cos\theta\frac{dv}{dt}-\sin\theta\sin i\frac{di}{dt}=0.$$

Remplaçons-y $\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}$ par sa valeur tirée de (7); il vient

$$\cos\theta\sin i\frac{dv}{dt}-\sin\theta\frac{di}{dt}=0. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) ont comme conséquence la dernière des trois équations primitives.

$$\cos\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)+\sin\theta\cos i\frac{di}{dt}=0. \tag{9}$$

Multiplions maintenant les équations (6) par ξ, η, ζ, et ajoutons; on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2}+r\left(\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\eta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=-\frac{k}{r^2}+\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta;$$

or, de l'équation

$$\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}=0$$

on tire

$$\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+\eta\frac{d^2\eta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)=-\frac{C^2}{r^4},$$

d'après les trois premières des équations (5), qu'on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=-(\sin\theta\cos v+\cos\theta\sin v\cos i)\frac{C}{r^2},\\ \frac{d\eta}{dt}&=(-\sin\theta\sin v+\cos\theta\cos v\cos i)\frac{C}{r^2},\\ \frac{d\zeta}{dt}&=\cos\theta\sin i\frac{C}{r^2}.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

On aura donc

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{C^2}{r^3}+\frac{k}{r^2}=\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta. \tag{11}$$

On peut écrire les formules (10) de la manière suivante

$$\left\{\begin{aligned} \cos v\frac{d\xi}{dt}+\sin v\frac{d\eta}{dt}&=-\sin\theta\frac{C}{r^2},\\ -\sin v\frac{d\xi}{dt}+\cos v\frac{d\eta}{dt}&=\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2},\\ \frac{d\zeta}{dt}&=\cos\theta\sin i\frac{C}{r^2}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On en tire, en dérivant la première,

$$\begin{aligned} &\cos v\frac{d^2\xi}{dt^2}+\sin v\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left(-\sin v\frac{d\xi}{dt}+\cos v\frac{d\eta}{dt}\right)\frac{dv}{dt}\\ &\quad=-\cos\theta\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}-\sin\theta\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Multiplions la première des équations (6) par $\cos v$, la deuxième par $\sin v$, et ajoutons; on aura

$$\begin{aligned} &r\left(\cos v\frac{d^2\xi}{dt^2}+\sin v\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)+2\frac{dr}{dt}\left(\cos v\frac{d\xi}{dt}+\sin v\frac{d\eta}{dt}\right)+\frac{d^2r}{dt^2}(\xi\cos v+\eta\sin v)\\ &\quad=-\frac{k}{r^2}(\xi\cos v+\eta\sin v)+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &r\left(\cos v\frac{d^2\xi}{dt^2}+\sin v\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)-2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta\\ &\quad=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (13),

$$\begin{aligned} &\left[-\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2}\frac{dv}{dt}-\cos\theta\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}-\sin\theta\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)\right]r-2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta\\ &\quad=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v, \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (7),

$$\left[\cos\theta\frac{C}{r^2}\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)-\cos\theta\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{dC}{dt}+2\frac{\sin\theta}{r^3}C\frac{dr}{dt}\right]r-2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta$$
$$=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou, après simplifications,

$$\left(-\cos\theta\frac{C^2}{r^4}-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{dC}{dt}\right)r+\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta=-\frac{k}{r^2}\cos\theta+\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou, en tenant compte de (11),

$$\cos\theta(\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{dC}{dt}=\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v,$$

ou bien

$$\frac{\sin\theta}{r}\frac{dC}{dt}=\mathcal{A}(\xi\cos\theta-\cos v)+\mathcal{B}(\eta\cos\theta-\sin v)+\mathcal{C}\zeta\cos\theta,$$

ou, enfin,

$$\frac{dC}{dt}=r\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right). \tag{14}$$

On arriverait au même résultat en dérivant la deuxième des équations (12). Dérivons maintenant la dernière. On a

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\cos\theta\sin i\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)-\sin\theta\sin i\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2}\frac{di}{dt}.$$

Remplaçons $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ par cette valeur dans la dernière des équations (6). Il vient

$$r\left[\cos\theta\sin i\frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\right)-\sin\theta\sin i\frac{C}{r^2}\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\cos i\frac{C}{r^2}\frac{di}{dt}\right]$$
$$+2\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin i\frac{C}{r^2}+\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta\sin i=-\frac{k}{r^2}\sin\theta\sin i+\mathcal{C},$$

ou bien, en tenant compte de (11),

$$\frac{\cos\theta\sin i}{2}\frac{dC}{dt} - \sin\theta\sin i\frac{C}{r}\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\cos i\frac{C}{r}\frac{di}{dt}$$
$$+ \sin\theta\sin i\left(\frac{C^2}{r^3} + \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta\right) = \mathcal{C},$$

ou bien

$$\frac{\cos\theta\sin i}{r}\frac{dC}{dt} - \sin\theta\sin i\frac{C}{r}\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) + \cos\theta\cos i\frac{C}{r}\frac{di}{dt}$$
$$= \mathcal{C} - \sin\theta\sin i(\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta),$$

ou bien

$$\frac{C}{r}\left[\cos\theta\cos i\frac{dC}{dt} - \sin\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)\right]$$
$$= \mathcal{C} - \sin\theta\sin i(\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta)$$
$$- \cos\theta\sin i[-\mathcal{A}(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin v\cos i)$$
$$+ \mathcal{B}(-\sin\theta\sin v + \cos\theta\cos v\cos i) + \mathcal{C}\cos\theta\sin i],$$

ou bien

$$\frac{C}{r}\left[\cos\theta\cos i\frac{di}{dt} - \sin\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right)\right]$$
$$= \cos i(\mathcal{A}\sin v\sin i - \mathcal{B}\cos v\sin i + \mathcal{C}\cos i).$$

On aura donc les deux équations

$$\sin\theta\cos i\frac{di}{dt} + \cos\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\cos\theta\cos i\frac{di}{dt} - \sin\theta\sin i\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) = \frac{r}{C}\cos i(\mathcal{A}\sin v\sin i - \mathcal{B}\cos v\sin i + \mathcal{C}\cos i).$$

On en tire

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{C}\cos\theta(\mathcal{A}\sin v\sin i - \mathcal{B}\cos v\sin i + \mathcal{C}\cos\ ), \tag{15}$$

$$\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2} = -\frac{r}{C}\frac{\sin\theta\cos i}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i - \mathcal{B}\cos v\sin i + \mathcal{C}\cos i). \tag{16}$$

L'équation (7) donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r}{C}\frac{\sin\theta}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i - \mathcal{B}\cos v\sin i + \mathcal{C}\cos i). \tag{17}$$

Il reste à s'occuper de r; la méthode est la même que celle employée dans la troisième Partie; on se sert de la dernière des équations (5) et de l'équation (11); on en tire

$$\frac{de}{dt}\cos(\theta-\varpi)-e\sin(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=2\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}[1+e\cos(\theta-\varpi)],$$

$$\frac{de}{dt}\sin(\theta-\varpi)+e\cos(\theta-\varpi)\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}e\sin(\theta-\varpi)$$
$$+\frac{C}{k}(\mathcal{A}\xi+\mathcal{B}\eta+\mathcal{C}\zeta).$$

On aura donc finalement le système suivant, qui réalise le changement de variables :

$$\frac{dC}{dt}=r\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right), \tag{14}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{r}{C}\cos\theta(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{15}$$

$$\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}=-\frac{r}{C}\frac{\sin\theta\cos i}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{16}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{r}{C}\frac{\sin\theta}{\sin i}(\mathcal{A}\sin v\sin i-\mathcal{B}\cos v\sin i+\mathcal{C}\cos i), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt}=\frac{r}{C}[\cos(\theta-\varpi)+e]\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right)\\+\frac{C}{k}[-\sin\varpi(\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v)\\+\cos\varpi(\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)],\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}e\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)=-\frac{r}{C}\sin(\theta-\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right)\\+\frac{C}{k}[\cos\varpi(\mathcal{A}\cos v+\mathcal{B}\sin v)\\+\sin\varpi(\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)].\end{aligned} \tag{19}$$

On peut substituer aux équations (18) et (19) les suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e\cos\varpi)+e\sin\varpi\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{r^2}\right)\\=\frac{r}{C}(\cos\theta+e\cos\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{dt}+\mathcal{B}\frac{d\eta}{dt}+\mathcal{C}\frac{d\zeta}{dt}\right)\\+\frac{C}{k}(-\mathcal{A}\sin v\cos i+\mathcal{B}\cos v\cos i+\mathcal{C}\sin i)\end{aligned} \tag{20}$$

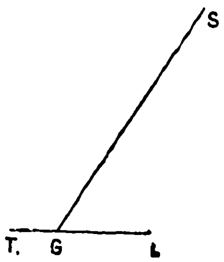
et

$$(21)\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}(e\sin\varpi) - e\cos\varpi\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{r^2}\right) \\ &\quad = \frac{r}{C}(\sin\theta + e\sin\varpi)\left(\mathcal{A}\frac{d\xi}{d\theta} + \mathcal{B}\frac{d\eta}{d\theta} + \mathcal{C}\frac{d\zeta}{d\theta}\right) - \frac{C}{k}(\mathcal{A}\cos v + \mathcal{B}\sin v), \end{aligned}$$

si l'on veut substituer aux quantités e et ϖ les combinaisons $e\cos\varpi$ et $e\sin\varpi$.

II. Je vais appliquer les formules précédentes à la méthode de Jacobi. On sait que cette façon de traiter le problème des trois corps consiste à déterminer le mouvement relativement au Soleil du centre de gravité de la Terre et de la Lune, et le mouvement de la Lune relativement à la Terre; on prend comme plan des XY le plan du maximum des aires, afin d'utiliser la belle propriété que les plans qui contiennent à chaque instant les orbites képlériennes se coupent sur le plan du maximum des aires.

Fig. 8.



Soient le Soleil en S, la Terre en T, la Lune en L; G le centre de gravité de la Terre et de la Lune. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de TL et r la distance TL; ξ, η, ζ les cosinus directeurs de GS, et R la distance GS. On a les équations suivantes, qu'on peut aisément former directement ou tirer du Chapitre IV de la *Mécanique céleste* de Tisserand :

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2R\xi}{dt^2} &= -\frac{1}{ST^3}\left(R\xi + \frac{\mu}{m+\mu}r\alpha\right)\frac{m}{m+\mu}(M+m+\mu) \\ &\quad - \frac{1}{SL^3}\left(R\xi - \frac{m}{m+\mu}r\alpha\right)\frac{\mu}{m+\mu}(M+m+\mu), \\ \frac{d^2r\alpha}{dt^2} &= -\frac{m+\mu}{r^2}\alpha - \frac{M}{ST^3}\left(R\xi + \frac{\mu r\alpha}{m+\mu}\right) + \frac{M}{SL^3}\left(R\xi - \frac{mr\alpha}{m+\mu}\right). \end{aligned} \right.$$

On a des équations analogues où α est remplacé par β, ξ par η, puis d'autres où α est remplacé par γ, ξ par ζ.

Je vais écrire également les équations que fournissent les théorèmes des aires et des forces vives dans le mouvement relatif au centre de gravité. On peut encore les former directement ou les tirer du Chapitre indiqué précédemment. Ce sont

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\beta\dfrac{d\gamma}{dt} - \gamma\dfrac{d\beta}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\eta\dfrac{d\zeta}{dt} - \zeta\dfrac{d\eta}{dt}\right) = A, \\ \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\gamma\dfrac{d\alpha}{dt} - \alpha\dfrac{d\gamma}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\zeta\dfrac{d\xi}{dt} - \xi\dfrac{d\zeta}{dt}\right) = A', \\ \dfrac{m\mu}{m+\mu} r^2\left(\alpha\dfrac{d\beta}{dt} - \beta\dfrac{d\alpha}{dt}\right) + \dfrac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2\left(\xi\dfrac{d\eta}{dt} - \eta\dfrac{d\xi}{dt}\right) = A'', \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{aligned} &\frac{m\mu}{m+\mu}\left[\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{d\beta^2}{dt^2} + \frac{d\gamma^2}{dt^2}\right)\right] \\ &\quad + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}\left[\frac{dR^2}{dt^2} + R^2\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\right] \\ &\quad = 2\left(\frac{m\mu}{r} + \frac{Mm}{ST} + \frac{M\mu}{SL}\right) + h. \end{aligned}$$

Le plan des xy étant le plan du maximum des aires, on aura

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad A'' = G.$$

Néanmoins je n'introduirai cette supposition qu'un peu plus tard. Je donnerai tout d'abord la démonstration du théorème de Jacobi. Cela simplifiera beaucoup la suite des calculs. Si l'on pose

$$B = \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}, \qquad B' = \gamma\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\gamma}{dt}, \qquad B'' = \alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt},$$

le plan

$$Bx + B'y + B''z = 0$$

est parallèle au plan passant par TL et la vitesse de la Lune relativement à la Terre; de même, si l'on pose

$$D = \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}, \qquad D' = \zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}, \qquad D'' = \xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt},$$

le plan

$$Dx + D'y + D''z = 0$$

est parallèle au plan passant par GS et la vitesse du Soleil relativement au point G. Les équations (23) peuvent alors s'écrire

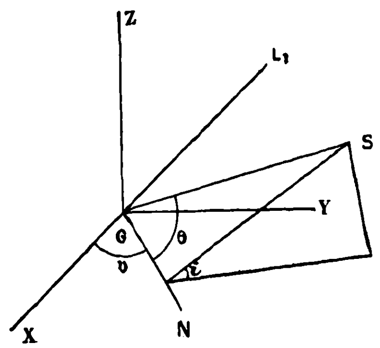
$$\frac{m\mu}{m+\mu} r^2 B + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2 D = A,$$
$$\frac{m\mu}{m+\mu} r^2 B' + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2 D' = A',$$
$$\frac{m\mu}{m+\mu} r^2 B'' + \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu} R^2 D'' = A''.$$

On en tire

$$\begin{vmatrix} B & D & A \\ B' & D' & A' \\ B'' & D'' & A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre bien que les plans des orbites képlériennes se coupent sur le plan du maximum des aires.

Fig. 9.



Soient GX, GY, GZ des axes parallèles aux axes fixes menés par le point G. Le plan des XY est parallèle au plan du maximum des aires. Soit GL_1 égal et parallèle à TL. Soit à l'instant considéré GN la ligne des nœuds des ellipses képlériennes de S et de L_1; soient i l'inclinaison de l'orbite de S, θ la longitude dans l'orbite comptée à partir de la ligne des nœuds; soient de même i' l'inclinaison de l'orbite de L_1, et θ' la longitude dans l'orbite de L_1 comptée à partir de GN. On aura les formules

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \cos\theta\cos\upsilon - \sin\theta\sin\upsilon\cos i, & \alpha &= \cos\theta'\cos\upsilon - \sin\theta'\sin\upsilon\cos i',\\ \eta &= \cos\theta\sin\upsilon + \sin\theta\cos\upsilon\cos i, & \beta &= \cos\theta'\sin\upsilon + \sin\theta'\cos\upsilon\cos i',\\ \zeta &= \sin\theta\sin i, & \gamma &= \sin\theta'\sin i', \end{aligned}\right.$$

Les dérivées des quantités α, β, γ et ξ, η, ζ étant celles prises dans le mouvement képlérien, on a

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -(\sin\theta\cos v + \cos\theta\sin v\cos i)\frac{C}{R^2},\\ \frac{d\eta}{dt} &= (-\sin\theta\sin v + \cos\theta\cos v\cos i)\frac{C}{R^2},\\ \frac{d\zeta}{dt} &= \cos\theta\sin i\frac{C}{R^2} \end{aligned}\right.$$

et

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -(\sin\theta'\cos v + \cos\theta'\sin v\cos i')\frac{C'}{r^2},\\ \frac{d\beta}{dt} &= (-\sin\theta'\sin v + \cos\theta'\cos v\cos i')\frac{C'}{r^2},\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \cos\theta'\sin i'\frac{C'}{r^2}, \end{aligned}\right.$$

C et C′ étant les constantes des aires dans les mouvements képlériens de S et de L_1.

Posons

$$(28)\qquad g' = \frac{m\mu}{m+\mu}, \qquad g = \frac{M(m+\mu)}{M+m+\mu}.$$

Multiplions les équations des aires (23), où l'on a fait maintenant $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = G$, respectivement par ξ, η, ζ, et ajoutons; on aura

$$(29)\qquad g'r^2\begin{vmatrix} \xi & \alpha & \dfrac{d\alpha}{dt}\\ \eta & \beta & \dfrac{d\beta}{dt}\\ \zeta & \gamma & \dfrac{d\gamma}{dt} \end{vmatrix} = G\zeta.$$

Multiplions-les maintenant par α, β, γ, et ajoutons; on aura

$$(30)\qquad gR^2\begin{vmatrix} \alpha & \xi & \dfrac{d\xi}{dt}\\ \beta & \eta & \dfrac{d\eta}{dt}\\ \gamma & \zeta & \dfrac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix} = G\gamma.$$

Comme nous avons déjà tenu compte de la combinaison qui traduit le théorème de Jacobi, les équations (29) et (30) fournissent tout ce que l'on peut encore tirer des équations des aires. Ces équations deviennent, en y remplaçant ξ, η, ζ, α, β, γ et leurs dérivées par leurs valeurs fournies par les équations (25), (26), (27),

$$g' r^2 \sin\theta (\cos i' \sin i - \sin i' \cos i) \frac{C'}{r^2} = G \sin\theta \sin i,$$

$$g R^2 \sin\theta' (\cos i \sin i' - \sin i \cos i') \frac{C}{R^2} = G \sin\theta' \sin i',$$

ou bien, en désignant par H l'angle $i' - i$,

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} -g' C' \sin H &= G \sin i, \\ g C \sin H &= G \sin i', \\ i' - i &= H; \end{aligned} \right.$$

les équations (31) donnent encore

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} g' C' + g C \cos H &= G \cos i', \\ g C + g' C' \cos H &= G \cos i, \\ g^2 C^2 + g'^2 C'^2 + 2 g C g' C' \cos H &= G^2. \end{aligned} \right.$$

Ces équations montrent en particulier que i est négatif, i' positif. Le plan du maximum des aires passe entre les plans des orbites képlériennes.

Cela fait, revenons aux équations (22). Elles peuvent s'écrire

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 R\xi}{dt^2} &= -\frac{M + m + \mu}{R^2} \xi + \mathcal{A}, & \frac{d^2 r\alpha}{dt^2} &= -\frac{m + \mu}{r^2} \alpha + \mathcal{A}', \\ \frac{d^2 R\eta}{dt^2} &= -\frac{M + m + \mu}{R^2} \eta + \mathcal{B}, & \frac{d^2 r\beta}{dt^2} &= -\frac{m + \mu}{r^2} \beta + \mathcal{B}', \\ \frac{d^2 R\zeta}{dt^2} &= -\frac{M + m + \mu}{R^2} \zeta + \mathcal{C}, & \frac{d^2 r\gamma}{dt^2} &= -\frac{m + \mu}{r^2} \gamma + \mathcal{C}', \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathfrak{P}\xi + \mathfrak{P}'\alpha, & \mathcal{A}' &= \mathfrak{Q}\alpha + \mathfrak{Q}'\xi, \\ \mathcal{B} &= \mathfrak{P}\eta + \mathfrak{P}'\beta, & \mathcal{B}' &= \mathfrak{Q}\beta + \mathfrak{Q}'\eta, \\ \mathcal{C} &= \mathfrak{P}\zeta + \mathfrak{P}'\gamma, & \mathcal{C}' &= \mathfrak{Q}\gamma + \mathfrak{Q}'\zeta, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\mathfrak{P} = (M + m + \mu)\left[\frac{1}{R^2} - \frac{R}{m+\mu}\left(\frac{m}{ST^3} + \frac{\mu}{SL^3}\right)\right], \qquad \mathfrak{P}' = \frac{g'}{g} M r\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),$$

$$\mathfrak{Q} = -\frac{Mr}{m+\mu}\left(\frac{m}{SL^3} + \frac{\mu}{ST^3}\right), \qquad \mathfrak{Q}' = MR\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),$$

$$(35)\qquad ST = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\mu}{m+\mu}\right)^2 r^2 + 2Rr\frac{\mu}{m+\mu}\cos V} \qquad (V = \widehat{SGL_1}),$$

$$SL = \sqrt{R^2 + \left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2 r^2 - 2Rr\frac{m}{m+\mu}\cos V},$$

$$\cos V = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos H.$$

Je n'ai plus qu'appliquer les formules du paragraphe I aux équations (33). On aura pour résoudre la question le système

$$R = \frac{C^2}{M + m + \mu}\,\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}, \qquad r = \frac{C'^2}{m+\mu}\,\frac{1}{1 + e'\cos(\theta' - \varpi')},$$

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= (-\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{g'}{g}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{di}{dt} &= \cos\theta\sin\theta'\sin H\frac{1}{C}\frac{g'}{g}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} - \frac{C}{R^2} &= \sin\theta\sin\theta'\frac{gC + g'C'\cos H}{gCC'}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{dC'}{dt} &= (-\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta'\cos H)MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{di'}{dt} &= -\sin\theta\cos\theta'\sin H\frac{1}{C'}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{d\theta'}{dt} - \frac{C'}{r^2} &= \sin\theta\sin\theta'\frac{g'C' + gC\cos H}{gCC'}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),\\
\frac{dv}{dt} &= -\sin\theta\sin\theta'\frac{G}{gCC'}MRr\left(\frac{1}{SL^3} - \frac{1}{ST^3}\right),
\end{aligned}\right.$$

auquel on joindra le système des équations différentielles en e, ϖ, e', ϖ'.

Dans les équations (36), la dernière, celle qui donne $\frac{dv}{dt}$ ne sert qu'à la fin; celles qui donnent $\frac{di}{dt}$ et $\frac{di'}{dt}$ sont à la rigueur inutiles, i et i' se calculant à l'aide des équations (31) et (32); H pourrait alors être tiré en fonction de C, C' de la dernière des équations (32); mais il paraît plus simple de le conserver et de joindre la valeur de $\frac{dH}{dt}$, soit

$$\frac{dH}{dt}=\frac{di'}{dt}-\frac{di}{dt}=-(\sin\theta\cos\theta' g C+\cos\theta\sin\theta' g' C')\frac{\sin H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right).$$

Alors le système s'écrira, réduit aux équations essentielles :

$$(37)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dC}{dt}=(-\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\cos H)\frac{g'}{g}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right),\\
&\frac{dC'}{dt}=(-\sin\theta'\cos\theta+\cos\theta'\sin\theta\cos H)\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right),\\
&\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}=\sin\theta\sin\theta'\frac{gC+g'C'\cos H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right),\\
&\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}=\sin\theta\sin\theta'\frac{g'C'+gC\cos H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right),\\
&\frac{dH}{dt}=-(\sin\theta\cos\theta' g C+\cos\theta\sin\theta' g' C')\frac{\sin H}{gCC'}\mathrm{MR}r\left(\frac{1}{\mathrm{SL}^3}-\frac{1}{\mathrm{ST}^3}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les équations en e, ϖ, e', ϖ' sont ensuite :

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{de}{dt}=\frac{R}{C}[\cos(\theta-\varpi)+e](-\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\qquad+\frac{C}{M+m+\mu}[\mathfrak{P}\sin(\theta-\varpi)+\mathfrak{P}'(-\sin\varpi\cos\theta'+\cos\varpi\sin\theta'\cos H)],\\
&e\left(\frac{d\theta}{dt}-\frac{C}{R^2}-\frac{d\varpi}{dt}\right)\\
&\quad=-\frac{R}{C}\sin(\theta-\varpi)(-\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\qquad+\frac{C}{M+m+\mu}[\mathfrak{P}\cos(\theta-\varpi)+\mathfrak{P}'(\cos\varpi\cos\theta'+\sin\varpi\sin\theta'\cos H)],\\
&\frac{de'}{dt}=\frac{r}{C'}[\cos(\theta'-\varpi')+e'](-\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta'\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\qquad+\frac{C'}{m+\mu}[\mathfrak{Q}\sin(\theta'-\varpi')+\mathfrak{Q}'(-\sin\varpi'\cos\theta+\cos\varpi'\sin\theta\cos H)],\\
&e'\left(\frac{d\theta'}{dt}-\frac{C'}{r^2}-\frac{d\varpi'}{dt}\right)\\
&\quad=-\frac{r}{C'}\sin(\theta'-\varpi')(-\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta'\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\qquad+\frac{C'}{m+\mu}[\mathfrak{Q}\cos(\theta'-\varpi')+\mathfrak{Q}'(\cos\varpi'\cos\theta+\sin\varpi'\sin\theta\cos H)].
\end{aligned}\right.$$

On pourrait substituer à ces équations celles qui ont comme inconnues $e\cos\varpi$, $e\sin\varpi$, $e'\cos\varpi'$, $e'\sin\varpi'$. Ce sont

$$
(39)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e\cos\varpi) + e\sin\varpi\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad = \frac{R}{C}(\cos\vartheta + e\cos\varpi)(-\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\quad\quad + \frac{C}{M+m+\mu}(\mathfrak{P}\sin\vartheta + \mathfrak{P}'\sin\vartheta'\cos H),\\
&\frac{d}{dt}(e\sin\varpi) - e\cos\varpi\left(\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{C}{R^2}\right)\\
&\quad = \frac{R}{C}(\sin\vartheta + e\sin\varpi)(-\sin\vartheta\cos\vartheta' + \cos\vartheta\sin\vartheta'\cos H)\mathfrak{P}'\\
&\quad\quad + \frac{C}{M+m+\mu}(\mathfrak{P}\cos\vartheta + \mathfrak{P}'\cos\vartheta'),\\
&\frac{d}{dt}(e'\cos\varpi') + e'\sin\varpi'\left(\frac{d\vartheta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad = \frac{r}{C'}(\cos\vartheta' + e'\cos\varpi')(-\sin\vartheta'\cos\vartheta + \cos\vartheta'\sin\vartheta\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\quad\quad + \frac{C'}{m+\mu}(\mathfrak{Q}\sin\vartheta' + \mathfrak{Q}'\sin\vartheta\cos H),\\
&\frac{d}{dt}(e'\sin\varpi') - e'\cos\varpi'\left(\frac{d\vartheta'}{dt} - \frac{C'}{r^2}\right)\\
&\quad = \frac{r}{C'}(\sin\vartheta' + e'\sin\varpi')(-\sin\vartheta'\cos\vartheta + \cos\vartheta'\sin\vartheta\cos H)\mathfrak{Q}'\\
&\quad\quad + \frac{C'}{m+\mu}(\mathfrak{Q}\cos\vartheta' + \mathfrak{Q}'\cos\vartheta).
\end{aligned}
\right.
$$

III. Je terminerai en donnant l'expression de l'intégrale des forces vives avec les nouvelles variables. Il n'y a qu'à reprendre l'équation (24). Elle devient

$$
\begin{aligned}
&\frac{m\mu(m+\mu)}{C'^2}(e'^2 - 1) + \frac{M(m+\mu)(M+m+\mu)}{C^2}(e^2 - 1)\\
&\quad = 2\left[\frac{Mm}{ST} + \frac{M\mu}{SL} - \frac{M(m+\mu)}{R}\right] + h.
\end{aligned}
$$

Tels sont les points les plus essentiels et les formules les plus simples de la méthode de Jacobi.