JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROY

Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 6 (1910), p. 201-269.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__201_0>

Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides;

PAR M. LOUIS ROY.

INTRODUCTION ET HISTORIQUE.

I. — Préliminaires.

La théorie classique de l'élasticité, telle qu'elle a été établie par Navier, étudie les lois auxquelles obéissent les déformations infiniment petites des corps, dont la température est uniforme et invariable. D'autre part, la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, telle que Fourier l'a établie, suppose ces corps indéformables, incapables, par suite, de modifier leur configuration sous l'influence des variations successives de leur température. Considérées ainsi, ces deux théories ne présentent donc aucun point de pénétration réciproque: la première est incapable de prévoir les petites déformations des solides, que provoquent d'assez larges variations de température; la seconde ne se préoccupe pas de la modification apportée aux températures par les dégagements ou absorptions de chaleur, qu'engendrent les déformations du milieu, que ces déformations soient produites par des forces extérieures ou par les variations de la température elle-même.

L'expérience montre que lorsqu'on chauffe modérément un corps solide, les déformations qui en résultent sont du même ordre de grandeur que celles qu'on observe, à température constante, par l'application d'actions mécaniques extérieures. Il était donc nécessaire de compléter les équations de l'élasticité, afin qu'elles rendissent compte de ces deux sortes de déformations. Ce complément a été apporté, dès 1835, par Duhamel, qui a reconnu que la température elle-même jouait le rôle d'une pression superficielle, et ses dérivées dans l'espace, le rôle de forces extérieures appliquées à chaque élément de volume.

Tandis que la température joue un rôle important, dans les équations de l'élasticité, en tant qu'équivalent de forces extérieures supplémentaires, le mouvement d'un corps élastique, au contraire, n'a qu'une influence extrêmement minime sur la distribution intérieure de sa température. C'est ce que l'expérience a montré depuis longtemps, dans l'étude du mouvement vibratoire des corps solides, et ce qui explique que Fourier, en établissant l'équation indéfinie de la température relative à de tels milieux, ait négligé de tenir compte du mouvement interne de ceux-ci. Cette correction a été tentée, pour la première fois, par Duhamel.

Un corps élastique, primitivement à une température uniforme et mis en mouvement, ne donnera donc naissance qu'à des variations de température extrêmement faibles, qui n'auront pas assez d'intensité, par conséquent, pour engendrer, à leur tour, des déformations appréciables à l'intérieur du corps. Et c'est ce qui explique qu'à une première approximation, bien suffisante, d'ailleurs, pratiquement, on ne se soit pas occupé de mettre en ligne de compte les effets de la température, dans la théorie de l'élasticité.

Le fait que, dans un solide ou un liquide, le mouvement interne n'a qu'une influence négligeable sur la température, provient de ce que ces corps sont très peu dilatables par la chaleur. Or, il en est tout autrement des gaz. C'est donc dans leur étude qu'on devait constater que cette influence est la plus marquée, et c'est ce qui est effectivement arrivé. On sait que Newton, admettant l'indépendance mutuelle du mouvement et de la température, était parvenu, pour représenter la vitesse du son dans les gaz, à une formule qui donnait une valeur très notablement inférieure à celle mesurée par les physiciens. Pour mettre cette formule en accord avec l'expérience, Laplace a dû tenir compte de la chaleur dégagée ou absorbée par les compressions ou dilatations successives de la masse gazeuse. Cette hypothèse de l'indépendance mutuelle du mouvement et de la température, conduit, au contraire, dans le cas des solides, à une expression de la vitesse du son à peu près conforme à l'expérience, du moins dans les cas assez rares où cette vérification si difficile a été tentée.

Ainsi, après que les deux théories de l'élasticité et de la propagation de la chaleur eurent été édifiées, une des questions intéressantes qui se présentaient à l'attention des physiciens mathématiciens, était de demander à ces deux théories celle des phénomènes thermomécaniques. Il fallait, d'abord, compléter les équations de l'élasticité, de façon qu'elles rendissent compte des déformations thermiques, et, ensuite, reprendre l'établissement de l'équation indéfinie de la température, en tenant compte des déformations du milieu. C'est, comme il a été dit plus haut, ce qu'a fait Duhamel vers l'année 1835, dans deux Mémoires, intitulés, l'un *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides*, inséré dans le Tome V du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*; l'autre, *Second Mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*, lu à l'Académie des Sciences, le 23 février 1835, et inséré dans le XXV[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

II. — Analyse des Mémoires de Duhamel.

Dans le préambule du premier Mémoire de Duhamel, le passage suivant est à citer :

« L'illustre auteur de la théorie mathématique de la chaleur s'est borné à considérer les changements de température, que subissent les différents points d'un système, et ne s'est point occupé des actions moléculaires développées par ces changements.

» Cette action de la chaleur se retrouve dans presque toutes les questions relatives à l'équilibre et au mouvement des corps élastiques; car c'est une conception purement idéale que celle d'un corps dont tous les points auraient la même température. Il était donc indispensable d'en apprécier les effets et de déterminer les modifications qu'elle apporte aux équations générales que l'on connaissait. Ces recherches, qui font l'objet de ce Mémoire, m'avaient paru, depuis longtemps, mériter l'attention des géomètres. Elles forment un complément nécessaire de la théorie des corps élastiques, et établissent un lien entre elle et la théorie de la chaleur, dont elle était entièrement isolée. »

Duhamel passe à la formation des équations de l'équilibre intérieur. En suivant les méthodes inaugurées par Poisson, il arrive aux équations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda\left(3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial x}\right)-\nu\frac{\partial\theta}{\partial x}+\rho X=0,\\
&\lambda\left(3\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}+2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)-\nu\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho Y=0,\\
&\lambda\left(3\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)-\nu\frac{\partial\theta}{\partial z}+\rho Z=0,
\end{aligned}
\right.
$$

où λ et ν désignent des constantes, ρ la densité dans l'état naturel spécial choisi comme état primitif, X, Y, Z les composantes de la force extérieure par unité de masse, θ la température comptée à partir de ce qu'elle est à l'état naturel considéré, U, V, W les composantes du déplacement d'un point, à partir de sa position primitive, de coordonnées x, y, z. Ce ne sont pas là les notations de Duhamel; mais nous les modifions intentionnellement, afin de faciliter des comparaisons ultérieures.

Les équations qui précèdent doivent être vérifiées en tous les points pris à l'intérieur du corps. A sa surface, où s'exerce une pression de composantes P_x, P_y, P_z, Duhamel démontre qu'on doit avoir

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[\lambda\left(3\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\nu\theta\right]\alpha+\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\beta+\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\gamma=P_x,\\
&\left[\lambda\left(3\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)-\nu\theta\right]\beta+\lambda\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)\gamma+\lambda\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)\alpha=P_y,\\
&\left[\lambda\left(3\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)-\nu\theta\right]\gamma+\lambda\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)\alpha+\lambda\left(\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\right)\beta=P_z;
\end{aligned}
\right.
$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure en un point de la surface. Les équations du mouvement s'obtiennent en ajoutant aux premiers membres des équations (1) les composantes des forces d'inertie. Duhamel ajoute :

« A ces équations devront être jointes celles de la propagation de la chaleur. Elles ne subiraient que des modifications insensibles par le changement très petit des distances des molécules voisines. Nous les conserverons donc, telles qu'on les a employées jusqu'ici. Elles feront connaître, à chaque instant, la valeur de θ en fonction de x, y, z, t; cette valeur devra être substituée dans les équations que nous venons d'établir, qui ne renfermeront plus alors que les inconnues U, V, W. »

Ainsi, Duhamel complète les équations de l'élasticité, mais leur adjoint les équations de la chaleur, telles que les avait établies Fourier. Partant de là, il démontre que les questions relatives à cette théorie n'admettent qu'une seule solution.

Ces bases étant posées, il énonce le principe de la superposition des déformations purement thermiques aux déformations purement mécaniques.

L'application la plus intéressante, que Duhamel ait faite de ces équations, est l'étude du mouvement d'une sphère qui n'est soumise à aucune force extérieure et qui se refroidit. Les calculs auxquels ce problème conduit sont malheureusement trop compliqués pour qu'il soit possible d'en déduire des conséquences physiques importantes. Ils mettent toutefois en évidence ce fait général, que le déplacement de chaque point de la sphère, suivant le rayon, est la somme d'un terme qui s'évanouit asymptotiquement, comme la température, et d'un terme périodique. Voici les conclusions de Duhamel :

« L'état de la sphère converge donc vers un état final, où les lois sont les mêmes que s'il n'y avait pas eu de variations dans les températures, et c'est à quoi il était facile de s'attendre. Mais, ce qu'il faut bien remarquer, c'est que cet état final conserve toujours l'empreinte de l'état thermométrique primitif, car les coefficients des termes périodiques dépendent de la température initiale, ainsi que des coefficients spécifiques de la substance relativement à la chaleur.... On peut déterminer aisément quels devraient être les déplacements et les vitesses, dans l'état initial, pour que l'état final fût un repos absolu. »

Ce problème de la sphère termine le premier Mémoire.

Dans son second Mémoire, Duhamel s'est proposé de compléter les équations de la chaleur, comme il avait déjà complété celles de l'élasticité. Il cherche à faire figurer, dans l'équation indéfinie de la température, la quantité de chaleur dégagée ou absorbée par les déformations ; voici, d'ailleurs, quel est son point de départ :

« On admet, généralement, que tous les corps dégagent de la chaleur quand on les comprime et en absorbent quand on les dilate ; d'où il résulte qu'il y a une différence sensible, entre les chaleurs spécifiques à volume constant et à pression constante. C'est ce principe qui sert de base à ma théorie, et, j'admets que la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle à l'accroissement qu'a subi la densité, pourvu que cet accroissement soit très petit. »

L'établissement de l'équation indéfinie étant la partie essentielle du second Mémoire de Duhamel, qu'il nous soit permis d'insister sur ce point.

Soient C la capacité calorifique du corps, par unité de volume et à pression constante, C′ sa capacité calorifique à volume constant, α son coefficient de dilatation thermique linéaire. Voici la marche que suit Duhamel :

« Évaluons l'accroissement de température $\delta\theta$ qui résulterait, en général, d'un petit accroissement $\varepsilon\rho$ de la densité, ou d'une diminution ε d'un volume égal à l'unité. Or, si on laisse refroidir ce volume, jusqu'à ce qu'il devienne $1-\varepsilon$ sous pression constante, la quantité dont sa température se sera abaissée sera $\frac{\varepsilon}{3\alpha}$ et la quantité de chaleur dégagée sera $C\frac{\varepsilon}{3\alpha}$. Mais cette dernière quantité est précisément celle qui, restituée au volume fixe $1-\varepsilon$, l'amènerait à la température primitive augmentée de $\delta\theta$, et, par conséquent, élèverait sa température actuelle de $\frac{\varepsilon}{3\alpha}+\delta\theta$; elle peut donc aussi être représentée par $C'\left(\frac{\varepsilon}{3\alpha}+\delta\theta\right)$. On a donc

$$C\frac{\varepsilon}{3\alpha}=C'\left(\frac{\varepsilon}{3\alpha}+\delta\theta\right) \quad \text{ou} \quad \delta\theta=\frac{\varepsilon}{3\alpha}\left(\frac{C}{C'}-1\right) \quad (^1).$$

(1) Ce raisonnement de Duhamel est si subtil, qu'il nous paraît bon de lui donner une forme plus moderne. Pour Duhamel, l'état de la matière, en chaque

» Cette relation générale entre les variations correspondantes de la

---

point, est complètement défini par la connaissance de la pression P, de la densité ρ et de la température θ, ces trois variables étant liées par une relation caractéristique de la substance considérée, d'après laquelle deux quelconques de ces variables seulement sont indépendantes. Soit, alors, Q la quantité de chaleur renfermée par l'unité de volume.

A une modification élémentaire du corps, caractérisée par les variations dP, $d\rho$, $d\theta$ des variables, correspond un accroissement dQ de la quantité de chaleur de l'unité de volume, qu'on peut mettre indifféremment sous les deux formes

$$(\beta)\qquad \begin{cases} dQ = l\,d\rho + C'd\theta, \\ dQ = h\,dP + C\,d\theta, \end{cases}$$

C' étant la capacité calorifique de l'unité de volume à densité constante, C la capacité calorifique à pression constante, l et h deux autres coefficients. Mais, d'après la relation caractéristique, ρ peut être regardé comme une fonction de P et de θ; nous avons donc

$$(\gamma)\qquad d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial P}dP + \frac{\partial\rho}{\partial\theta}d\theta.$$

Si nous substituons cette expression dans la première des égalités (β), celles-ci nous donneront par comparaison

$$C' + l\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = C.$$

Dans une modification à pression constante, $dP = 0$ et $d\rho = -3\alpha\rho\,d\theta$, α étant le coefficient de dilatation thermique linéaire. Nous avons donc, d'après la relation (γ),

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -3\alpha\rho,$$

et par suite

$$l = -\frac{C - C'}{3\alpha\rho}.$$

Cela posé, imaginons qu'on comprime instantanément le corps, sans lui laisser le temps de gagner ou de perdre de la chaleur. On aura $dQ = 0$, et si l'on pose $d\rho = \varepsilon\rho$, la première des égalités (β) nous donnera

$$l\varepsilon\rho + C'\delta\theta = 0,$$

$\delta\theta$ étant l'accroissement de température relatif à cette compression brusque; nous en déduisons

$$\delta\theta = -\frac{l\varepsilon\rho}{C'} = \frac{\varepsilon}{3\alpha}\left(\frac{C}{C'} - 1\right),$$

ce qui est bien la formule donnée par Duhamel.

densité et de la température est connue depuis longtemps; nous allons l'appliquer à la question actuelle. »

ε a pour expression

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dt,$$

ce qui donne immédiatement l'accroissement correspondant de la température; si l'on y ajoute l'élévation de température due à la quantité de chaleur qui a pénétré, par conductibilité et pendant le temps dt, dans l'unité de volume, on arrive à l'équation suivante, qui généralise celle de Fourier :

$$(3) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{K}{C'\rho}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) - \frac{\frac{C}{C'} - 1}{3\alpha}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right),$$

où K désigne le coefficient de conductibilité interne. L'auteur ajoute :

« Il faut lui adjoindre les équations de Navier complétées (1) et (2). Telles sont alors les équations qui renferment les théories de la chaleur et de l'élasticité; c'est à leur intégration que se ramèneront toutes les questions qui se rapportent à ces deux théories. On voit qu'elles sont dans une dépendance mutuelle l'une de l'autre, et, ce n'est que quand le rapport $\frac{C}{C'}$ sera connu, que l'on pourra juger s'il est permis, dans dans une première approximation, de calculer la température d'après la formule de Fourier, pour en déduire U, V, W d'après les équations (1) et (2), et pour revenir ensuite à l'équation (3), dans une seconde approximation. »

Par analogie avec ce qu'on avait admis et vérifié pour les gaz, Duhamel néglige, dans le phénomène de la propagation des ondes dans un solide indéfini, de température initiale uniforme, les échanges de chaleur par conductibilité. Il arrive ainsi à une nouvelle expression V′ de la vitesse du son dans un solide, qui doit être substituée à l'expression V admise jusque-là. Ces deux vitesses sont liées par la relation

$$V' = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 5\frac{C}{C'}}\,V.$$

Il est intéressant de rappeler que la vitesse V′, donnée par Laplace pour les gaz, était liée à la vitesse V, donnée par Newton, par la formule

$$V' = \sqrt{\frac{C}{C'}}\, V.$$

III. — Travaux de M. Boussinesq.

Ces deux Mémoires de Duhamel constituent assurément un essai des plus remarquables, pour l'époque à laquelle ils ont été écrits ; ils nous paraissent, toutefois, insuffisants aujourd'hui. D'abord, Duhamel s'était non seulement borné aux corps isotropes, mais il avait adopté l'hypothèse ancienne $\lambda = \mu$, conséquence des théories de Navier et de Poisson, que l'expérience n'a vérifiée que pour un très petit nombre de corps. D'autre part, pour compléter l'équation de Fourier, il s'est basé sur l'analogie, admise par lui, entre les fluides et les solides, analogie qui lui a fait attribuer, à ces derniers, une chaleur spécifique à pression constante et une chaleur spécifique à volume constant. Or, ces expressions n'ont de signification physique nette, que pour les systèmes définis, en chaque point, par leur densité et leur température. Cette manière discutable d'introduire les déformations, dans l'équation indéfinie de la température, constitue, à notre avis, un des plus graves défauts de sa théorie.

La question méritait donc d'être reprise sur des bases plus modernes, avec l'appui si sûr que la Thermodynamique est venue apporter, depuis un demi-siècle, à maintes questions de Physique mathématique. C'est ce qu'a fait M. Boussinesq dans une grande Note finale qui termine la XXXIV$^{\text{ème}}$ Leçon de sa *Théorie analytique de la chaleur*.

L'état physique d'un milieu déformé est défini, en chaque point, par la connaissance des six déformations ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z et de la température θ, les déformations ∂, g, étant comptées à partir de l'état naturel relatif à la température spéciale $\theta = 0$. Généralisant la loi de Hooke, M. Boussinesq écrit que les six composantes de la pression intérieure N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z sont des fonctions linéaires et homogènes de nos sept paramètres, ce qui le conduit à introduire six nouveaux coefficients d'élasticité ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z, du moins dans le cas des milieux de la contexture la plus générale. Ces coefficients, qui permettent de traiter aisément le problème des dilatations thermiques, se réduisent à un seul ν, dans le cas des corps isotropes. On a donc, pour ceux-ci, trois coefficients d'élasticité distincts λ, μ, ν.

Les composantes N_x, N_y, ..., T_z de la pression intérieure dérivent encore d'un potentiel d'élasticité $\rho\Phi'$, par unité de volume, de sorte qu'on a

$$(4) \qquad N_x = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \partial_x}, \qquad N_y = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \partial_y}, \qquad \ldots, \qquad T_z = \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial g_z},$$

et le potentiel $\rho\Phi'$ est lié au potentiel purement élastique $\rho\Phi$ par la relation

$$(5) \qquad \rho\Phi' = \rho\Phi - \theta(\nu_x \partial_x + \nu_y \partial_y + \nu_z \partial_z + \tau_x g_x + \tau_y g_y + \tau_z g_z).$$

Pour établir l'équation indéfinie de la température, M. Boussinesq part de l'équation générale de la Thermodynamique, prise sous la forme

$$\frac{dQ}{\varpi} = d\rho U - (N_x \, d\partial_x + N_y \, d\partial_y + \ldots + T_z \, dg_z),$$

où dQ désigne la quantité de chaleur absorbée, pendant une modification infiniment petite de durée dt, par une particule de volume ϖ, et ρU, l'énergie interne par unité de volume. D'après les relations (4), l'équation précédente s'écrit

$$(6) \qquad \frac{dQ}{\varpi} = d\rho(U - \Phi') + \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \theta} d\theta.$$

Mais, d'après le principe de Carnot, la quantité $\frac{dQ}{\varpi(T_0 + \theta)}$ doit être une différentielle totale exacte, T_0 représentant la température absolue de la particule dans son état naturel primitif. Or, nous pouvons écrire

$$\frac{dQ}{\rho\varpi(T_0 + \theta)} = d\,\frac{U - \Phi'}{T_0 + \theta} + \left[U - \Phi' + (T_0 + \theta)\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta}\right]\frac{d\theta}{(T_0 + \theta)^2};$$

donc, pour que le second membre soit une différentielle exacte, il faut et il suffit que la quantité entre crochets soit une fonction $\Psi(\theta)$ de la température seule, c'est-à-dire qu'on ait

$$(7) \qquad U = \Phi' - (T_0 + \theta)\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} + \Psi(\theta).$$

Cette relation a été donnée autrefois par Lord Kelvin, dans son Mémoire sur les propriétés thermoélastiques de la matière [1].

Tenons compte de cette équation dans la relation (6); celle-ci deviendra

$$\frac{dQ}{\varpi} = \rho \Psi'(\theta)\, d\theta - (T_0 + \theta)\, d\, \frac{\partial \rho \Phi'}{\partial \theta},$$

et, si nous posons $\rho \Psi'(\theta) = C$, nous pourrons écrire, d'après l'égalité (5),

$$\frac{dQ}{\varpi} = \left[C \frac{\partial \theta}{\partial t} + (T_0 + \theta) \left(\nu_x \frac{\partial \partial_x}{\partial t} + \nu_y \frac{\partial \partial_y}{\partial t} + \ldots + \tau_z \frac{\partial g_z}{\partial t} \right) \right] dt.$$

Mais, la théorie de la conductibilité montre qu'on a aussi, du moins pour les corps athermanes,

$$\frac{dQ}{\varpi} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dt,$$

F_x, F_y, F_z étant les composantes du flux de chaleur au point qui a pour coordonnées x, y, z. Nous avons donc, en définitive,

$$(8) \quad \begin{aligned} C \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &\quad - (T_0 + \theta) \left(\nu_x \frac{\partial \partial_x}{\partial t} + \nu_y \frac{\partial \partial_y}{\partial t} + \nu_z \frac{\partial \partial_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial g_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial g_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial g_z}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Telle est l'équation indéfinie de la température donnée par M. Boussinesq.

IV. — Objet de ce Mémoire.

Nous nous proposons de reprendre la théorie des phénomènes thermomécaniques, en suivant les méthodes de l'Énergétique. Tandis que Duhamel et M. Boussinesq se sont bornés aux corps étendus en toutes dimensions, nous traiterons également le cas des plaques et des tiges. Ce travail sera divisé en quatre Chapitres.

Dans le premier, nous commençons par montrer, aussi rapidement que possible, que les équations du mouvement ou de l'équilibre d'un système de corps ne subissent aucun changement de forme, du fait que la température est variable, si ce n'est que les relations entre les

---

[1] Lord Kelvin, *Quarterly mathematic Journal*, avril 1855.

pressions et les déformations contiennent, chacune, un terme de plus dépendant de la température. Une fonction importante, qui est à la base de cette étude, est le potentiel thermodynamique interne du système, considéré par M. Duhem. Il résulte des relations entre les pressions et les déformations, que le potentiel thermodynamique interne coïncide, à une fonction arbitraire près de la température, avec le potentiel d'élasticité considéré par M. Boussinesq; il permet d'établir, presque sans calculs, l'équation indéfinie de la température.

Nous passons, ensuite, au cas particulier des corps isotropes et nous reconnaissons que les déformations ne figurent plus, dans l'équation indéfinie de la température, que par la dilatation cubique. Or, il est facile de déduire, des équations indéfinies du mouvement, une équation du second ordre ne renfermant que la température et la dilatation cubique. Nous avons donc deux équations qui ne dépendent que de ces deux fonctions; en éliminant successivement chacune d'elles entre les équations ainsi obtenues, nous reconnaissons que la température et la dilatation cubique vérifient, respectivement, deux équations du quatrième ordre, qui même coïncident si, par exemple, le milieu ne renferme aucune source de chaleur.

Mais, pratiquement, il n'est pas nécessaire de traiter le problème dans toute sa généralité : dans le cas des milieux réels, que le physicien a seuls à considérer, il arrive, en effet, que deux des coefficients de nos équations du quatrième ordre ont des valeurs numériques si voisines, qu'on peut les identifier sensiblement. Il en résulte qu'à une première approximation, la distribution de la température, en chaque point du milieu, est la même que si celui-ci était un solide invariable.

Nous avons vu que Duhamel admettait que la propagation du son, dans les solides, se faisait suivant la loi adiabatique, comme dans les gaz. En adoptant son hypothèse, nous arrivons à ce résultat que tout se passe comme si la température était uniforme et invariable, et si le premier coefficient d'élasticité λ était augmenté d'une certaine quantité, le deuxième μ conservant sa valeur. Il en résulte un accroissement de la vitesse de propagation du son d'environ 1 pour 100, à la température de 15° C.

Le deuxième Chapitre est consacré à la théorie des plaques homogènes et isotropes. Nous établissons les équations de leur équilibre et de leur mouvement, dans le cas d'une température non uniforme et variable, en généralisant la méthode suivie par M. E. Mathieu (1). Nous arrivons à ce résultat que la température n'a pas d'influence sensible sur le mouvement transversal, sauf, cependant, si les conditions physiques sont très différentes sur les deux faces de la plaque. La température n'intervient d'une manière appréciable que dans les équations du mouvement tangentiel, qui sont de même forme que les équations d'un corps à trois dimensions. Leur intégration conduit donc, également, à une équation du quatrième ordre tout à fait analogue à celle déjà étudiée, et à laquelle la même méthode approchée d'intégration peut s'appliquer.

Nous abordons, dans le Chapitre III, l'étude des tiges droites. Une analyse préalable nous ayant fait reconnaître que les équations du mouvement transversal sont indépendantes de la température, nous nous dispenserons de développer cette analyse, qui, au point de vue thermomécanique, ne présente plus qu'un intérêt secondaire; c'est pourquoi nous nous limitons, dès le début, aux équations du mouvement longitudinal, en supposant, simplement, que chaque section droite de la tige est un plan de symétrie de contexture, et qu'il y a homogénéité dans toute l'étendue de ce plan.

Duhamel avait choisi, comme application de ses théories, l'étude des vibrations calorifiques d'une sphère. Nous avons préféré prendre un exemple plus simple, afin de pouvoir aisément pousser les calculs jusqu'au bout et faire des applications numériques. C'est pourquoi, dans le Chapitre IV, nous avons choisi le cas d'une tige et cherché à quelles conditions les vibrations calorifiques, qui accompagnent son refroidissement, pourraient constituer un son perceptible. Nous terminons en traitant le problème inverse, c'est-à-dire que nous cherchons la loi de variation de la température dans une tige primitivement au zéro thermométrique, et mise en mouvement par des actions mécaniques.

La conclusion de cette dernière étude est la justification rigoureuse de l'intuition, qui a fait négliger les variations de la température, dans la théorie classique de l'élasticité.

---

(1) E. Mathieu, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, t. I, Chap. VI.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ.

I. — Potentiel thermodynamique interne d'un corps peu déformé.

Nous allons rechercher la forme du potentiel thermodynamique interne d'un corps, qui est le siège d'une déformation infiniment petite, à partir de son état naturel. Cette recherche ayant été faite par M. Duhem, dans le cas où la température du corps est uniforme et invariable (¹), nous passerons très rapidement sur les détails pour arriver le plus vite possible aux résultats.

Définissons tout d'abord l'état naturel du corps étudié, comme étant l'état d'équilibre qu'il prend, lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure et que tous ses points sont à une même température absolue T_0. Soient, dans ces conditions, $d\varpi$ un élément de volume du corps, M un point de coordonnées rectangulaires x, y, z, pris à l'intérieur de cet élément.

Imaginons que le corps soit le siège d'une modification qui le déforme infiniment peu, et considérons-le à un instant quelconque t. Dans ce nouvel état, le point M est venu en un point M', de coordonnées x', y', z' par rapport aux mêmes axes; sa température absolue est devenue $T_0 + \theta$, et l'on peut écrire

$$x' = x + U, \qquad y' = y + V, \qquad z' = z + W,$$

les quantités U, V, W et θ étant des fonctions uniformes, finies et continues de x, y, z, t, assez petites en valeur absolue, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans l'espace, pour pouvoir être traitées comme des infiniment petits.

La théorie des déformations infiniment petites d'un milieu continu

(¹) P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique,* Livre IV, Chap. I, § I et II.

nous enseigne que, pour connaître le déplacement éprouvé par chacun des points de l'élément de volume $d\varpi$, il suffit de connaître :

1° Les trois composantes U, V, W du déplacement d'un point M de l'élément $d\varpi$;

2° Les trois composantes

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

de la rotation moyenne;

3° Les trois dilatations

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad D_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad D_3 = \frac{\partial W}{\partial z};$$

4° Les trois glissements

$$G_1 = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad G_2 = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad G_3 = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

La connaissance de ces douze quantités, jointe à celle de la température θ, comptée à partir de l'état naturel, définit complètement le nouvel état de l'élément $d\varpi$ à l'instant t.

Nous représenterons le potentiel thermodynamique interne de l'élément, qui occupait le volume $d\varpi$ dans l'état naturel, par $f\,d\varpi$, f étant une fonction des paramètres qui fixent l'état actuel de l'élément. Comme la position et l'orientation d'un corps dans l'espace n'interviennent pas dans sa définition thermodynamique, la fonction f ne peut dépendre que des trois dilatations, des trois glissements et de la température. Le potentiel thermodynamique du corps entier aura pour expression

$$\mathcal{F} = \int f(D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3, \theta)\, d\varpi,$$

l'intégration étant étendue à tout le volume occupé par le corps dans l'état naturel. La fonction f dépend, en outre, explicitement, des coordonnées x, y, z, si le corps n'est pas homogène.

Développons la fonction f suivant les puissances croissantes des déformations et de la température, en nous limitant aux termes du second degré, ce qui est permis, puisque nos variables sont très petites en valeur absolue. Nous pouvons supposer que le terme constant du développement est nul, car le potentiel thermodynamique peut être modifié, sans inconvénient, par l'addition d'une constante arbitraire. Dès lors, si nous écrivons que l'état naturel est, conformément à sa définition, l'état d'équilibre du corps, soustrait à l'action de toute force extérieure, nous reconnaîtrons que les termes du premier degré, où figurent les déformations, sont nuls.

Ainsi, notre développement se réduit à un terme du premier degré en θ et à une forme quadratique des déformations et de la température. Si nous désignons par $\varphi(\theta)$ l'ensemble des termes de f, qui ne dépendent que de θ, nous pourrons écrire

$$
\begin{aligned}
(1)\quad f = \varphi(\theta) &+ \frac{1}{2}(A_{11}D_1 + A_{12}D_2 + A_{13}D_3 + A_{14}G_1 + A_{15}G_2 + A_{16}G_3 + A_{17}\theta)D_1 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3 + A_{24}G_1 + A_{25}G_2 + A_{26}G_3 + A_{27}\theta)D_2 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{31}D_1 + A_{32}D_2 + A_{33}D_3 + A_{34}G_1 + A_{35}G_2 + A_{36}G_3 + A_{37}\theta)D_3 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{41}D_1 + A_{42}D_2 + A_{43}D_3 + A_{44}G_1 + A_{45}G_2 + A_{46}G_3 + A_{47}\theta)G_1 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{51}D_1 + A_{52}D_2 + A_{53}D_3 + A_{54}G_1 + A_{55}G_2 + A_{56}G_3 + A_{57}\theta)G_2 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{61}D_1 + A_{61}D_2 + A_{63}D_3 + A_{64}G_1 + A_{65}G_2 + A_{66}G_3 + A_{67}\theta)G_3 \\
&+ \frac{1}{2}(A_{71}D_1 + A_{72}D_2 + A_{73}D_3 + A_{74}G_1 + A_{75}G_2 + A_{76}G_3 \qquad\qquad)\theta;
\end{aligned}
$$

les quantités A_{ij} étant des fonctions de x, y, z, telles que

$$A_{ij} = A_{ji},$$

qui se réduisent à des constantes, si le corps est homogène. On les appelle les *coefficients d'élasticité* du corps. On voit facilement que le nombre des coefficients d'élasticité distincts est de 27; il se réduit à 21, si $\theta = 0$.

L'état naturel du corps doit être un état d'équilibre stable et, en particulier, un état d'équilibre isothermique stable. On démontre qu'il faut et il suffit pour cela, comme dans la théorie classique de l'élasticité, que le discriminant de la forme quadratique de f, constituée avec les termes indépendants de θ, ainsi que tous les déterminants mineurs qu'on en déduit, en supprimant q lignes et les q colonnes correspondantes, soient positifs.

Il faut, en particulier, que les six coefficients

$$A_{11},\quad A_{22},\quad A_{33},\quad A_{44},\quad A_{55},\quad A_{66},$$

soient positifs.

II. — Équations du mouvement et de l'équilibre d'un système de corps.

Nous considérons un système de corps en mouvement, à un instant quelconque. Pour simplifier les calculs, sans toutefois restreindre la généralité des raisonnements, nous supposerons que le système ne se compose que de deux corps, que nous désignerons par les indices (1) et (2).

Ces deux corps sont supposés accolés, en tous les points d'une surface séparative σ; ils sont limités, extérieurement, par des surfaces que nous représenterons, respectivement, par S et S'.

Pour obtenir les équations du mouvement du système, nous devons, d'après les principes de l'Énergétique, écrire que, pour toute modification virtuelle isothermique compatible avec les liaisons, on a

$$(2)\qquad \delta\mathfrak{T}_e - \delta_0\mathfrak{F} + \delta J = 0,$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ désignant le travail élémentaire des forces extérieures, δJ celui des forces d'inertie et $\delta_0\mathfrak{F}$ la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne.

Soit, en un point M du corps (1), ρ la densité; X, Y, Z les composantes de la force extérieure, par unité de masse; P_x, P_y, P_z les composantes de la pression extérieure exercée en chaque point de la surface S; δU, δV, δW les variations des trois composantes du déplacement, dans la modification virtuelle considérée; on a pour le travail élémentaire

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_e = &\int\rho\,(X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,d\varpi + \int(P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS\\ &+\int\rho'(X'\,\delta U' + Y'\,\delta V' + Z'\,\delta W')\,d\varpi' + \int(P'_x\,\delta U' + P'_y\,\delta V' + P'_z\,\delta W')\,dS',\end{aligned}$$

les deux derniers termes accentués représentant, respectivement, des quantités de même signification que les premiers, mais se rapportant au corps (2). Pour abréger, nous écrirons, plus simplement,

$$(3)\quad \delta\mathfrak{E}_c = \sum\int\rho(X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,d\varpi + \sum\int(P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS,$$

et nous conserverons cette notation dans ce qui suivra.

Nous avons, ainsi, pour le travail virtuel des forces d'inertie,

$$(4)\qquad \delta J = -\sum\int\rho\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\,\delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,\delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,\delta W\right)d\varpi.$$

D'autre part, le potentiel thermodynamique interne du système s'écrira

$$\mathfrak{F} = \sum\int f\,d\varpi,$$

et, si nous posons

$$(5)\quad N_1 = \frac{\partial f}{\partial D_1},\quad N_2 = \frac{\partial f}{\partial D_2},\quad N_3 = \frac{\partial f}{\partial D_3},\quad T_1 = \frac{\partial f}{\partial G_1},\quad T_2 = \frac{\partial f}{\partial G_2},\quad T_3 = \frac{\partial f}{\partial G_3},$$

nous aurons

$$(6)\quad \delta_0\mathfrak{F} = \sum\int(N_1\,\delta D_1 + N_2\,\delta D_2 + N_3\,\delta D_3 + T_1\,\delta G_1 + T_2\,\delta G_2 + T_3\,\delta G_3)\,d\varpi.$$

Les expressions (3), (4), (6), substituées dans l'équation (2), vont nous fournir les équations du mouvement du système.

L'équation (2) ne doit pas être vérifiée quelles que soient les variations δU, δV, ..., $\delta W'$, mais, seulement, pour toutes celles qui maintiennent les deux corps accolés en tous les points de σ. Il faut, pour cela, qu'on ait, dans toute modification virtuelle et en tous les points de σ,

$$(7)\qquad \delta U - \delta U' = 0,\qquad \delta V - \delta V' = 0,\qquad \delta W - \delta W' = 0.$$

Dès lors, d'après les principes du calcul des variations, il doit exister trois fonctions Π_x, Π_y, Π_z, continues en tous les points de σ, telles que l'on ait, quelles que soient les six quantités δU, δV, ..., $\delta W'$, l'égalité

$$(8)\quad \begin{aligned} &\sum\int\rho\left[\left(X - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)\delta U + \left(Y - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)\delta V + \left(Z - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)\delta W\right]d\varpi \\ &\quad + \sum\int(P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,dS \\ &\quad - \sum\int(N_1\,\delta D_1 + N_2\,\delta D_2 + N_3\,\delta D_3 + T_1\,\delta G_1 + T_2\,\delta G_2 + T_3\,\delta G_3)\,d\varpi \\ &\qquad + \int[\Pi_x(\delta U - \delta U') + \Pi_y(\delta V - \delta V') + \Pi_z(\delta W - \delta W')]\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Mais, la troisième ligne de cette égalité peut être transformée par des intégrations par parties, et l'on reconnaît qu'on peut écrire

$$\sum\int(N_1\,\delta D_1+N_2\,\delta D_2+N_3\,\delta D_3+T_1\,\delta G_1+T_2\,\delta G_2+T_3\,\delta G_3)\,d\varpi$$
$$=-\sum\int\Big[\Big(\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}\Big)\delta U+\Big(\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}\Big)\delta V$$
$$+\Big(\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}\Big)\delta W\Big]\,d\varpi$$
$$+\sum\int[(\alpha N_1+\beta T_3+\gamma T_2)\,\delta U+(\alpha T_3+\beta N_2+\gamma T_1)\,\delta V+(\alpha T_2+\beta T_1+\gamma N_3)\,\delta W]\,dS$$
$$+\sum\int[(\alpha N_1+\beta T_3+\gamma T_2)\,\delta U+(\alpha T_3+\beta N_2+\gamma T_1)\,\delta V+(\alpha T_2+\beta T_1+\gamma N_3)\,\delta W]\,d\sigma,$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale aux surfaces S ou σ, menée vers l'extérieur du corps (1). D'après cela, si l'on pose, pour abréger,

$$\rho\Big(X-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\Big)=\mathfrak{X},\qquad \rho\Big(Y-\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Big)=\mathfrak{Y},\qquad \rho\Big(Z-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\Big)=\mathfrak{Z},$$

l'égalité (8), qui doit être vérifiée quelles que soient les six variations δU, δV, ..., $\delta W'$, exige qu'on ait :

1° En tout point du corps (1),

$$(9)\qquad \frac{\partial(N_1.\,T_3.\,T_2)}{\partial x}+\frac{\partial(T_3.\,N_2.\,T_1)}{\partial y}+\frac{\partial(T_2.\,T_1.\,N_3)}{\partial z}+(\mathfrak{X}.\,\mathfrak{Y}.\,\mathfrak{Z})=0;$$

2° En tout point de la surface S du corps (1),

$$(10)\qquad \alpha(N_1.\,T_3.\,T_2)+\beta(T_3.\,N_2.\,T_1)+\gamma(T_2.\,T_1.\,N_3)=(P_x.\,P_y.\,P_z);$$

3° En tout point de la surface séparative σ,

$$(11)\qquad \alpha(N_1.\,T_3.\,T_2)+\beta(T_3.\,N_2.\,T_1)+\gamma(T_2.\,T_1.\,N_3)=(\Pi_x.\,\Pi_y.\,\Pi_z).$$

On aurait pour le corps (2) des équations analogues, avec cette seule différence que les seconds membres des conditions correspondant aux équations (11) seraient $(-\Pi_x, -\Pi_y, -\Pi_z)$.

Les équations (9), (10), (11) ont exactement la même forme que celles qu'on obtient dans l'hypothèse d'une température uniforme et constante. Elles conduisent donc aux mêmes définitions de la pression à l'intérieur d'un corps et à la même interprétation des quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, Π_x, Π_y, Π_z. Les conditions (11) et leurs analogues pour le corps (2) expriment que la pression varie avec continuité, quand on traverse la surface séparative σ.

Enfin, les relations entre les pressions et les déformations sont fournies par les équations (5) qui s'écrivent, d'après l'égalité (1),

$$(12)\quad \begin{cases} N_1 = A_{11}D_1 + A_{12}D_2 + A_{13}D_3 + A_{14}G_1 + A_{15}G_2 + A_{16}G_3 + A_{17}\theta, \\ N_2 = A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3 + A_{24}G_1 + A_{25}G_2 + A_{26}G_3 + A_{27}\theta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_3 = A_{61}D_1 + A_{62}D_2 + A_{63}D_3 + A_{64}G_1 + A_{65}G_2 + A_{66}G_3 + A_{67}\theta, \end{cases}$$

et qui redonnent les équations classiques, si $\theta = 0$.

Sur la surface σ, on a, en outre, les conditions de raccordement

$$U = U', \qquad V = V', \qquad W = W'.$$

Appliquée à une modification réelle, l'équation (2) conduit immédiatement au théorème des forces vives, et, si les forces extérieures dérivent d'un potentiel, on reconnaît qu'il existera une intégrale des forces vives, à condition que le potentiel interne soit la somme de deux fonctions ne dépendant, l'une que de la température, l'autre que des déformations.

Remarquons que, d'après les équations (5), il y a identité, à une fonction arbitraire près de la température, entre le potentiel thermodynamique interne par une unité de volume f et la fonction que M. Boussinesq appelle le *potentiel d'élasticité* par unité de volume et qu'il représente par $\rho\Phi'$. On retrouve, aux différences de notations près, les équations (5) dans les équations (4) de notre Introduction et Historique.

III. — Équations de la température.

Considérons, à l'instant t, la matière comprise à l'intérieur d'une surface fermée Σ, tracée arbitrairement à l'intérieur du corps (1); nous allons calculer la quantité de chaleur δQ qu'elle dégage, quand on lui impose une modification virtuelle.

La particule qui, dans l'état naturel, occupait un volume $d\varpi$ est, à l'instant t, à une température absolue $T = T_0 + \theta$; son entropie est, d'après les principes de la Thermodynamique, égale à

$$-\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial T}d\varpi = -\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial \theta}d\varpi.$$

E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Pendant la modification virtuelle considérée, cette particule dégage une quantité de chaleur égale, d'après le principe de Carnot-Clausius, au produit changé de signe de sa température absolue par la variation de son entropie et dont l'expression est, par conséquent,

$$\frac{T}{E}\delta\frac{\partial f}{\partial \theta}d\varpi.$$

La quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire par un volume fini de matière est, par définition, la somme des quantités de chaleur dégagées par chaque élément de volume ; on a donc

$$\delta Q = \int \frac{T}{E}\delta\frac{\partial f}{\partial \theta}d\varpi, \tag{13}$$

l'intégration s'étendant au volume occupé par la matière intérieure à la surface Σ dans son état naturel. On en déduit, d'après l'égalité (1),

$$\delta Q = \int \frac{T}{E}\left(A_{17}\delta D_1 + A_{27}\delta D_2 + A_{37}\delta D_3 + A_{47}\delta G_1 + A_{57}\delta G_2 + A_{67}\delta G_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\delta\theta\right)d\varpi.$$

Posons

$$C = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2};$$

C est ce qu'on appelle la *capacité calorifique de l'unité de volume* au point où se trouve l'élément $d\varpi$.

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée, pendant une modification réelle de durée dt ; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} dQ = dt\int\Bigg[\frac{T}{E}\Bigg(& A_{17}\frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27}\frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} \\ & + A_{47}\frac{\partial G_1}{\partial t} + A_{57}\frac{\partial G_2}{\partial t} + A_{67}\frac{\partial G_3}{\partial t}\Bigg) - C\frac{\partial \theta}{\partial t}\Bigg]d\varpi. \end{aligned} \tag{14}$$

Nous allons égaler cette expression à celle que nous fournit la théorie de la conductibilité.

Soit, à l'instant t, $-F_n\,d\Sigma$ le flux de chaleur qui sort du volume intérieur à la surface Σ par l'élément de surface $d\Sigma$, n désignant la normale extérieure, $\chi(x, y, z, t, 0)\,d\varpi$ la quantité de chaleur dégagée par unité de temps et autrement que par conductibilité, par la particule qui occupait, dans l'état naturel, le volume $d\varpi$; d'après la théorie de la propagation de la chaleur, on a aussi

$$(15)\qquad dQ = dt\left(-\int F_n\,d\Sigma + \int \chi\,d\varpi\right),$$

la première intégrale s'étendant à la surface Σ, telle qu'elle est à l'instant t, la deuxième, au volume intérieur à la surface Σ, dans son état naturel.

Mais, à cause de la petitesse des déformations, on reconnaît qu'il suffit, pour calculer la première intégrale, de considérer le corps et, par suite, la surface Σ tels qu'ils sont à l'état naturel ([1]). Si donc, on désigne par F_x, F_y, F_z, les composantes du flux de chaleur au point de coordonnées primitives x, y, z, on aura

$$F_n = \alpha F_x + \beta F_y + \gamma F_z.$$

et l'égalité (15) deviendra, après transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume,

$$dQ = dt\int\left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} + \chi\right) d\varpi.$$

De l'égalité (14) et de la précédente on déduit, par un raisonnement habituel en Physique mathématique, qu'on doit avoir en tous les points du corps (1)

$$(16)\qquad C\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - \chi + \frac{T}{E}\left(A_{17}\frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27}\frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37}\frac{\partial D_3}{\partial t} \right.$$
$$\left. + A_{47}\frac{\partial G_1}{\partial t} + A_{57}\frac{\partial G_2}{\partial t} + A_{67}\frac{\partial G_3}{\partial t}\right).$$

C'est l'équation indéfinie de la température dans le corps (1); pour le corps (2), on a une équation analogue.

Quant aux conditions aux limites, qui expriment les relations calo-

([1]) J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur*, t. II, p. 163.

rifiques du système avec l'extérieur et celles du corps (1) avec le corps (2), elles ne subissent aucun changement du fait du mouvement du système.

L'équation (16), où l'on fait $\chi = 0$ et $E = 1$, a été obtenue par M. Boussinesq [Introduction et Historique, équation (5)], en partant de l'énergie interne du corps par unité de masse. Nous allons retrouver cette expression de l'énergie interne.

La Thermodynamique nous enseigne que l'énergie interne du corps, par unité de volume u, est liée au potentiel thermodynamique par la relation

$$Eu = f - T\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

D'autre part, d'après l'expression que donne M. Boussinesq du potentiel d'élasticité par unité de volume $\rho\Phi'$ [Introduction et Historique, équation (5)], il est facile de voir qu'on a

$$f = \varphi(\theta) + \rho\Phi'.$$

On en déduit, en remplaçant f par cette valeur dans l'expression de u et en posant

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\rho}\left(\varphi - T\frac{d\varphi}{d\theta}\right),$$

$$E\frac{u}{\rho} = \Phi' - T\frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} + \Psi(\theta);$$

$\frac{u}{\rho}$ représente l'énergie interne par unité de masse. Cette égalité, où l'on fait $E = 1$, coïncide avec celle qui a servi de point de départ à M. Boussinesq, dans l'établissement de l'équation indéfinie de la température [Introduction et Historique, équation (7)].

Il est à remarquer que l'équation indéfinie (16), le terme χ mis à part, n'est pas linéaire par rapport à la température et aux déformations. Mais, puisque la température θ est censée être très petite en valeur absolue, nous pourrons, sans erreur sensible, remplacer T par T_0, si toutefois la température du système, dans l'état naturel, est assez éloignée du zéro absolu. C'est ce que nous ferons toujours dans ce qui suivra.

L'équation (16) met en lumière ce fait important, reconnu antérieurement par Duhamel, que la distribution intérieure de la température, dans un système, ne peut pas, en général, être déterminée indépendamment du mouvement de ce système; cela n'aurait lieu que si la quantité

$$A_{17}D_1 + A_{27}D_2 + A_{37}D_3 + A_{47}G_1 + A_{57}G_2 + A_{67}G_3$$

était indépendante du temps. Cette circonstance pourra se trouver réalisée pour certains mouvements exceptionnels du système, mais elle ne sera réalisée, dans tous les cas possibles, que si tous les nouveaux coefficients d'élasticité A_{17}, A_{27}, ..., A_{67} sont nuls. S'il en est ainsi, chaque corps est indilatable par la chaleur; la fonction f devient la somme de deux fonctions, l'une qui ne dépend que de la température, l'autre qui ne dépend que des déformations, et il en est de même de l'énergie interne. Dans ces conditions, les équations du mouvement peuvent admettre une intégrale des forces vives, et, comme la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ n'est plus fonction que de θ, il résulte de l'égalité (13) que toute modification isothermique est en même temps une modification adiabatique. Quant au potentiel d'élasticité Φ', il ne dépend plus que des déformations. Ce cas correspond à la première approximation, envisagée par M. Boussinesq dans le texte de sa XXXIV[e] Leçon.

Remarquons que les déformations disparaîtront de l'équation (16) dans le problème général de l'équilibre, avec températures stationnaires, ce qui permettra de traiter ce problème en deux temps.

On peut démontrer que les équations de l'élasticité et de la chaleur, complétées comme nous l'avons indiqué, n'admettent qu'une seule solution: il suffit de combiner les méthodes classiques employées dans ce but, dans les théories de l'élasticité et de la propagation de la chaleur; aussi n'insisterons-nous pas sur ce point.

IV. — Cas d'un corps isotrope.

Nous avons vu (§ I) que, dans le cas d'un corps de contexture quelconque, il faut, en général, considérer 27 coefficients d'élasticité distincts, qui se réduisent à 21, si $\theta = 0$. Le nombre de ces coefficients se réduit, si le corps possède un ou plusieurs axes ou plans de symétrie de contexture, ou s'il est isotrope.

Si le plan xOy est un plan de symétrie, la méthode habituellement usitée pour la réduction du nombre des coefficients d'élasticité montre qu'on doit avoir

$$(17)\quad \begin{cases} A_{14}=0, & A_{15}=0, & A_{24}=0, & A_{25}=0, & A_{34}=0, \\ A_{35}=0, & A_{46}=0, & A_{56}=0, & A_{47}=0, & A_{57}=0. \end{cases}$$

On a les mêmes égalités, si l'axe Oz est un axe de symétrie.

Si, maintenant, on suppose qu'il existe deux plans de symétrie xOy, yOz, ou deux axes de symétrie Oz et Ox, tout se passe comme si le troisième plan ou le troisième axe, perpendiculaires aux deux premiers, étaient, aussi, plan ou axe de symétrie, et, outre les coefficients déjà annulés, on doit avoir

$$A_{16}=0,\qquad A_{26}=0,\qquad A_{36}=0,\qquad A_{45}=0,\qquad A_{67}=0.$$

Il ne reste, dans ces conditions, que douze coefficients, qui se réduisent à neuf, si $\theta=0$.

Passons au cas d'un corps isotrope. Par la considération des axes principaux de dilatation et des fonctions invariantes du premier et du second degré des déformations, on arrive à ce résultat que l'expression du potentiel thermodynamique de l'unité de volume doit être

$$(18)\quad f=\varphi(\theta)+\frac{\lambda}{2}(D_1+D_2+D_3)^2 \\ +\mu\left(D_1^2+D_2^2+D_3^2+\frac{G_1^2+G_2^2+G_3^2}{2}\right)-\nu(D_1+D_2+D_3)\theta,$$

λ, μ et ν étant trois coefficients, qui sont des constantes si le corps est homogène, ce que nous supposerons dorénavant. Ainsi, l'introduction de la température, dans la théorie des corps isotropes, conduit à considérer un troisième coefficient ν, en plus des deux coefficients de Lamé λ et μ.

Il résulte de l'expression générale de f et de l'égalité (18) qu'on a, pour un corps isotrope,

$$\begin{aligned} &A_{11}=A_{22}=A_{33}=\lambda+2\mu, &\qquad &A_{44}=A_{55}=A_{66}=\mu, \\ &A_{23}=A_{31}=A_{12}=\lambda, &\qquad &A_{17}=A_{27}=A_{37}=-\nu, \end{aligned}$$

et que tous les autres coefficients A_{ij} sont nuls. La condition de stabilité de l'état naturel (§ I) exige qu'on ait les inégalités bien connues :

$$3\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0.$$

Tenons compte de l'expression (18) de f, dans les égalités (5), et nous obtiendrons pour les pressions intérieures

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{c} N_1 = \lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\theta, \\ N_2 = \lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\theta, \\ N_3 = \lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\theta, \\ T_1 = \mu G_1, \qquad T_2 = \mu G_2, \qquad T_3 = \mu G_3, \end{array} \right.$$

Θ désignant la dilatation cubique définie par la relation

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3.$$

Portons ces valeurs des pressions intérieures dans les équations (9) et (10), et représentons par Δ le symbole opératoire $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; nous obtiendrons

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\,\Delta U - \nu\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \rho\left(X - \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\,\Delta V - \nu\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \rho\left(Y - \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + \mu\,\Delta W - \nu\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \rho\left(Z - \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right) = 0; \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\theta)\alpha + \mu(G_3\beta + G_2\gamma) = P_x, \\ (\lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\theta)\beta + \mu(G_1\gamma + G_3\alpha) = P_y, \\ (\lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\theta)\gamma + \mu(G_2\alpha + G_1\beta) = P_z. \end{array} \right.$$

Les équations (20) doivent être vérifiées en tout point du corps et les équations (21) en tout point de sa surface; elles coïncident avec celles de Duhamel quand on y fait $\lambda = \mu$ [Introduction et Historique, équations (1) et (2)]. Nous allons en déduire la signification physique du coefficient ν.

Considérons un corps isotrope à l'état naturel, limité extérieurement par une surface S. Si nous le portons à une température uniforme θ, on reconnaît, d'après les équations précédentes, que, dans ce nouvel état considéré comme un état d'équilibre, les déplacements de tous les points du corps seront nuls, si l'on a appliqué, en chaque point de la surface S, une pression normale et uniforme comptée positivement vers l'intérieur du corps et égale à $\nu\theta$. Le coefficient ν représente donc la pression normale et uniforme à exercer sur le corps, pour une élévation de température égale à l'unité, si l'on veut empêcher les déformations de se produire.

Si le corps, porté à une température uniforme θ à partir de son état naturel, n'est soumis à aucune action extérieure, les équations (20) et (21) montrent qu'il prend un état d'équilibre correspondant aux valeurs

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{\nu}{3\lambda + 2\mu}\theta; \qquad G_1 = 0, \qquad G_2 = 0, \qquad G_3 = 0,$$

des déformations, et que, dans cet état, les pressions intérieures sont nulles. Si donc on désigne par D le coefficient de dilatation thermique linéaire du corps, on aura

$$\nu = D(3\lambda + 2\mu). \tag{22}$$

Comme D est positif pour la plupart des corps et que $3\lambda + 2\mu$ l'est toujours, on en conclut que ν est généralement positif et que, par suite, c'est une pression véritable, dirigée vers l'intérieur, qu'il faut exercer sur un corps pour l'empêcher de se déformer quand on le chauffe.

Revenons aux équations (20) du mouvement d'un corps isotrope, que nous supposerons soustrait à l'action de toute force extérieure. Si nous différentions la deuxième de ces équations par rapport à z, la troisième par rapport à y et que nous retranchions membre à membre, nous obtenons la première des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right),\\
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right),\\
\frac{\mu}{\rho}\Delta\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. Ces équations expriment que, dans un corps isotrope, les mouvements tourbillonnaires se propagent avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, tout comme si la température était uniforme et constante. Si le corps est liquide, on sait qu'on a $\mu = 0$. On retrouve ainsi ce résultat que, dans un liquide, les mouvements tourbillonnaires infiniment petits ne se propagent pas, mais nous voyons que cela a lieu même si la température est variable.

Enfin, dans un corps isotrope, il n'y a plus qu'un seul coefficient de conductibilité intérieure que nous représenterons par K, de sorte qu'en négligeant toujours θ vis-à-vis de T_0, l'équation indéfinie de la température (16) prend la forme

$$C\frac{\partial\theta}{\partial t} = K\Delta\theta - \chi - \frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t}. \tag{23}$$

Nous poserons

$$\chi = -S + L\theta,$$

S désignant, en chaque point, le débit de la source de chaleur par unité de volume, fonction de x, y, z, t, et L, le coefficient de diathermanéité du corps qu'on peut supposer indépendant de θ, puisque θ est une quantité très petite. L'éther ambiant est supposé avoir une température absolue uniforme T_0.

V. — Mouvement des corps isotropes et vitesse du son.

En l'absence de toute force extérieure, les équations indéfinies (20) du mouvement d'un milieu isotrope s'écrivent

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial(x, y, z)} + \mu\Delta(U, V, W) - \nu\frac{\partial\theta}{\partial(x, y, z)} - \rho\frac{\partial^2(U, V, W)}{\partial t^2} = 0. \tag{24}$$

Différentions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre; nous aurons une équation où ne figureront plus que Θ et θ, que nous écrirons

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta\theta = 0. \tag{25}$$

D'autre part, l'équation indéfinie (23) de la température peut s'écrire

$$(26)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\theta = S - \frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t}.$$

Effectuons, sur les deux membres de l'équation (25), l'opération $C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L$, ce qui nous permettra d'éliminer θ au moyen de l'équation (26); puis, par un procédé analogue, éliminons Θ de l'équation (26) au moyen de l'équation (25). Nous reconnaîtrons, ainsi, que les fonctions Θ et θ doivent vérifier, respectivement, les deux équations du quatrième ordre :

$$(27)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta S - \frac{T_0}{\rho E}\nu^2\frac{\partial\Delta\Theta}{\partial t} = 0,$$

$$(28)\qquad \left(C\frac{\partial}{\partial t} - K\Delta + L\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\right)\theta - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\right)S - \frac{T_0}{\rho E}\nu^2\frac{\partial\Delta\theta}{\partial t} = 0.$$

Ces deux équations seront identiques si la fonction S satisfait à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu - \nu}{\rho}\Delta S = 0.$$

Les fonctions Θ et θ étant ainsi déterminées, les équations (24) deviennent des équations du second ordre, avec seconds membres, en U, V, W et de même type, où les variables sont séparées.

Considérons, par exemple, l'équation (27). Si nous posons

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad b^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} + \frac{T_0\nu^2}{CE\rho},$$

nous reconnaîtrons qu'elle peut s'écrire

$$(29)\qquad C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\Delta\right)\Theta - K\Delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\Theta + L\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\Theta + \frac{\nu}{\rho}\Delta S = 0.$$

Comme les constantes b^2 et a^2 diffèrent entre elles de l'expression $\frac{T_0\nu^2}{CE\rho}$, la première question qui se pose, avant d'aborder l'intégration de l'équation (29), est de savoir quelle est, en moyenne et vis-à-vis de a^2, la valeur de cette dernière quantité, dans le cas des corps réels que le physicien a seuls à considérer. Or, il revient évidemment au même de rechercher la valeur de $\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}$ vis-à-vis de l'unité.

Nous avons donc calculé numériquement cette dernière expression, pour un certain nombre de corps, dont nous donnons plus loin le Tableau avec les résultats de ce calcul. Les coefficients λ, μ et ν ont été calculés en unités C. G. S., les deux premiers au moyen du coefficient de Poisson σ et du module d'Young $\mathcal{E}$, le troisième au moyen de la formule (22). C a été calculé, au moyen de la densité et de la chaleur spécifique c, par la formule $C = c\rho$. Nous avons pris $E = 4,17.10^7$ et $T_0 = 288$, ce qui correspond à la température de 15° C.

	Substances.						
	Verre.	Acier.	Cuivre.	Laiton.	Plomb.	Argent.	Fer.
σ	0,25(1)	0,2686(2)	0,3270(2)	0,3275(2)	0,4282(2)	0,370(12)	0,277(12)
$\mathcal{E}$ kilos par mm^2	6722(3)	19561(3)	10519(3)	9277(3)	1728(3)	7146(3)	20794(3)
ρ	2,463(13)	7,833(13)	8,85(8)	8,44(12)	11,35(9)	10,512(6)	7,79(7)
c	0,198(4)	»	0,09515(4)	0,095(4)	0,03140(4)	0,05701(4)	0,112359(5)
C	0,488	»	0,842	0,802	0,356	0,599	0,876
$D.10^6$	8,909(10)	13,690(10)	17,173(10)	18,782(10)	28,484(10)	19,511(11)	12,205(10)
$\lambda.10^{-11}$	2,64	8,77	11,49	6,52	3,54	7,48	9.92
$\mu.10^{-11}$	2,64	7,56	3,74	3,43	0,593	2,628	7,98
$\nu.10^{-6}$	11,75	56,7	72,0	49,6	33,67	54,0	55,8
$\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}$	0,00248	»	0,0225	0,0159	0,0466	0,0265	0,00958

Moyenne 0,0243

Les valeurs de σ proviennent du *Cours de Physique de l'École Polytechnique* de MM. Jamin et Bouty, sauf les deux dernières que nous avons prises dans le formulaire de M. Hospitalier (édition de 1909). Toutes les autres quantités $\mathcal{E}$, ρ, c, D, sauf la densité du laiton, ont été extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1908; d'ailleurs nous avons eu soin d'indiquer, par un renvoi, le nom de

(1) CORNU. — (2) AMAGAT. — (3) WERTHEIM (expériences de traction). — (4) REGNAULT. — (5) BYSTRÖM. — (6) DUMAS. — (7) HÉRAPATH. — (8) D'ELHUYART. — (9) GAY-LUSSAC et THÉNARD. — (10) LAPLACE et LAVOISIER. — (11) DANIELL. — (12) *Formulaire Hospitalier*. — (13) Nombre donné dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* sans indication de l'auteur.

l'expérimentateur ou la provenance des nombres que nous donnons et qui ont servi de base à nos calculs.

On voit que, pour les corps que nous avons considérés, les quantités a^2 et b^2 diffèrent entre elles et en moyenne d'environ 2,5 centièmes de leur valeur. A une première approximation, nous pouvons donc remplacer b^2 par a^2 dans l'équation (29) et l'on voit que cela revient à négliger le dernier terme du second membre de l'équation (26).

Ainsi, à une première approximation, nous pouvons déterminer la température indépendamment des déformations du milieu, tout comme si celui-ci était un solide invariable. Une fois la température connue, l'équation (25) fera connaître Θ, puis les équations (24) donneront U, V, W. On pourra, ensuite, tenir compte de cette valeur de Θ, pour déterminer, au moyen de l'équation (26), la température à une deuxième approximation.

Cette méthode approchée d'intégration a été mentionnée par Duhamel et, depuis, par M. Boussinesq.

Nous avons vu (Introduction et Historique, § II) que Duhamel, voulant obtenir, à une deuxième approximation, la vitesse du son dans les corps solides, avait étendu à ceux-ci l'hypothèse d'adiabatic, qui avait été reconnue légitime dans le cas des gaz. Il est possible, grâce à la rapidité du phénomène de propagation des ondes longitudinales dans les solides, que chaque modification élémentaire du milieu soit assez brusque pour que les particules matérielles n'aient pas le temps d'échanger de la chaleur avec les particules voisines et l'éther ambiant; dans ces conditions, nous devrions faire $K = 0$ et $L = 0$ dans l'équation (26). Mais cette hypothèse, tout à fait légitime dans le cas des corps mauvais conducteurs et athermanes, reste problématique pour les autres corps, notamment pour les métaux, dont la conductibilité est très grande.

Malgré ces restrictions, faisons toutefois l'hypothèse de Duhamel : l'équation (26) pourra s'écrire, en supposant que S est nul,

$$C\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{T_0}{E}\nu\frac{\partial\Theta}{\partial t},$$

et comme, à l'instant initial, la dilatation cubique et la température sont nulles, nous avons

$$\theta = -\frac{T_0 \nu}{CE}\Theta.$$

Si nous remplaçons θ par cette valeur, dans les équations (20) et (21) des corps isotropes, nous reconnaissons sans peine qu'elles se réduisent aux équations classiques d'un milieu de température uniforme et constante, dont les deux coefficients de Lamé seraient respectivement $\lambda + \frac{T_0 \nu^2}{CE}$ et μ. Nous en concluons que, dans un semblable milieu, la vitesse de propagation V′ des ondes longitudinales sera

$$V' = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\lambda + \frac{T_0 \nu^2}{CE} + 2\mu\right)}.$$

En faisant dans cette formule $\nu = 0$, on retrouve l'ancienne vitesse de propagation

$$V = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Il en résulte qu'on a

$$V' = V\sqrt{1 + \frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}}. \tag{30}$$

D'après le Tableau des valeurs numériques de la deuxième quantité sous le radical donnée pour quelques corps isotropes, nous voyons que V′ surpasse V d'environ 1,2 pour 100, à la température de 15° C. Mais la détermination expérimentale de la vitesse du son dans un solide est encore si peu précise, que la formule (30) n'offre guère, actuellement, qu'un intérêt purement théorique.

CHAPITRE II.

LES PLAQUES HOMOGÈNES ET ISOTROPES.

I. — Potentiel thermodynamique interne d'une plaque peu déformée.

Nous allons considérer une plaque homogène et isotrope, comprise entre deux plans parallèles très rapprochés et terminée par un bord cylindrique, normal à ces deux plans. Nous prendrons, pour plan xOy, le plan moyen de cette plaque, de telle sorte que ses deux faces auront pour équations $z = \pm \varepsilon$, 2ε étant l'épaisseur de la plaque.

Commençons par chercher ce que devient l'expression du potentiel thermodynamique interne de la plaque

$$\mathcal{F} = \int \Big[\varphi(\mathfrak{S}) + \frac{\lambda}{2}(D_1 + D_2 + D_3)^2 + \mu\left(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \frac{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}{2}\right) - \nu(D_1 + D_2 + D_3)\mathfrak{S}\Big]\, d\varpi,$$

$\mathfrak{S}$ désignant la température, lorsqu'on tient compte de ce que ε est une quantité très petite.

Nous supposerons que les seules pressions extérieures, qui s'exercent sur la plaque, sont des pressions appliquées exclusivement sur ses bords. Il en résulte que, sur les deux faces de la plaque, les pressions intérieures N_3, T_1, T_2 sont nulles et que, par suite, d'après les formules (19) (Chap. I, § IV), on a, pour $z = \pm \varepsilon$,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)D_3 + \lambda(D_1 + D_2) - \nu\mathfrak{S} = 0, \\ &G_1 = 0, \qquad G_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Développons G_1 suivant les puissances croissantes de z; nous pourrons écrire

$$G_1 = g + g_1 z + g_2 \frac{z^2}{2} + \ldots$$

et nous aurons, d'après ce qui précède,

$$g + g_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots = 0, \qquad g_1 + g_3 \frac{\varepsilon^2}{6} + \ldots = 0,$$

d'où nous déduisons

$$(2) \qquad G_1 = - g_2 \frac{\varepsilon^2 - z^2}{2} + \ldots.$$

Nous voyons ainsi que les premiers membres des égalités (1), considérés en un point quelconque de la plaque, sont des quantités du second ordre. Si nous négligeons, dans l'expression de f, les termes à partir du quatrième ordre de petitesse, nous pourrons donc y supprimer G_1^2 et G_2^2.

D'autre part, nous pourrons écrire, en un point quelconque de la plaque,

$$(3)\qquad D_3 = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(D_1+D_2)+\frac{\nu}{\lambda+2\mu}\mathfrak{S}+P(\varepsilon^2-z^2).$$

P étant une quantité finie.

Développons les déplacements U, V, W, les déformations D_1, D_2, G_3 et la température $\mathfrak{S}$, suivant les puissances croissantes de z; nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}
U &= u+u_1 z+u_2\frac{z^2}{2}+\ldots, & D_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial x}z+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{z^2}{2}+\ldots,\\
V &= v+v_1 z+v_2\frac{z^2}{2}+\ldots, & D_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial y}z+\frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{z^2}{2}+\ldots,\\
W &= w+w_1 z+w_2\frac{z^2}{2}+\ldots, & G_3 &= U_0+U_1 z+U_2\frac{z^2}{2}+\ldots,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S} = \theta+\theta_1 z+\theta_2\frac{z^2}{2}+\ldots.$$

Les quantités u, v, w, θ sont les valeurs respectives de U, V, W, $\mathfrak{S}$ pour $z=0$, que nous allons chercher à déterminer.

Remplaçons d'abord, dans $\mathfrak{F}$, D_3 par son expression (3), puis négligeons les termes à partir du quatrième ordre de petitesse, nous obtenonspar un calcul facile

$$\mathfrak{F} = \int\varphi_1(\mathfrak{S})\,d\varpi+\mu\int\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(D_1^2+D_2^2)+\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}D_1D_2 \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}G_3^2-\frac{2\nu}{\lambda+2\mu}(D_1+D_2)\mathfrak{S}\right]d\varpi.$$

φ_1 désignant une nouvelle fonction de $\mathfrak{S}$.

Remplaçons, maintenant, D_1, D_2, G_3 et $\mathfrak{S}$ par leurs développements, nous pourrons écrire

$$\mathfrak{F} = \int\varphi_1(\mathfrak{S})\,d\varpi+\mu\int\int\int\left(\mathcal{K}_0+\mathcal{K}_1 z+\mathcal{K}_2\frac{z^2}{2}+\ldots\right)dx\,dy\,dz.$$

en posant

$$a=\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu},\qquad b=\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}=a-2,$$

$$\mathcal{K}_0=\frac{a}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+b\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}U_0^2-\frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\theta$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2 = {} & a\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2\right]+2b\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial y}+U_1^2\\ & +a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+U_0U_2\\ & -\frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\left[\theta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+2\theta_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right].\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_1$ désigne une expression analogue qu'il est inutile d'écrire. En intégrant par rapport à z, il vient

$$\mathcal{F}=\int\varphi_1(\Im)\,d\varpi+2\mu\varepsilon\int\int\left(\mathcal{H}_0+\mathcal{H}_2\frac{\varepsilon^2}{6}\right)dx\,dy, \tag{4}$$

la deuxième intégrale s'étendant à la surface moyenne de la plaque et la parenthèse de cette intégrale étant exacte aux termes du quatrième ordre près. L'expression précédente va jouer le même rôle que le travail des forces élastiques, dans l'analyse de M. E. Mathieu.

Il nous reste à exprimer les quantités u_1, u_2, v_1, v_2, θ_1, θ_2, U_0, U_1, U_2 en fonction de u, v, w et θ.

En développant les deux dernières équations (1), on en déduit aisément

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}, & u_2 &= -\frac{\partial w_1}{\partial x},\\ v_1 &= -\frac{\partial w}{\partial y}, & v_2 &= -\frac{\partial w_1}{\partial y},\end{aligned}\right. \tag{5}$$

en négligeant les termes en ε^2, ce qui est permis, car ces équations servent à calculer des quantités qui sont elles-mêmes multipliées par ε^2 dans l'expression de $\mathcal{F}$.

La première équation (1), prise aux deux faces de la plaque, donnera de même

$$(\lambda+2\mu)w_1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\nu\theta=0.$$

D'après cela, les deuxième et quatrième équation (5) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} u_2 &= \frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x},\\ v_2 &= \frac{b}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\nu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

On a, d'autre part, pour les quantités U_0, U_1, U_2,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &U_0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad U_1 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},\\ &U_2 = b\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Il nous reste à calculer θ_1 et θ_2 : soit θ_e et θ'_e les températures extérieures aux faces $+\varepsilon$ et $-\varepsilon$, k et k' les coefficients de conductibilité extérieure correspondants, on a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &K\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} = k\,(\theta_e - \mathfrak{S}) \qquad \text{pour} \qquad z = \varepsilon,\\ &K\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z} = k'(\mathfrak{S} - \theta'_e) \qquad \text{pour} \qquad z = -\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Si nous développons $\mathfrak{S}$ et $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}$, et que nous négligions les termes en ε^2, nous aurons les deux équations

$$[2K + \varepsilon(k + k')]\theta_1 = k\theta_e - k'\theta'_e - (k - k')\theta,$$
$$2K\varepsilon\theta_2 = k\theta_e + k'\theta'_e - (k + k')\theta - \varepsilon(k - k')\theta_1,$$

qui nous feront connaître θ_1 et θ_2. Dans le cas particulier où

$$k = k', \qquad \theta_e = \theta'_e = 0,$$

on aura

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = -\frac{k}{\varepsilon K}\theta.$$

L'expression (4) de $\mathcal{F}$ ne dépendra plus ainsi que de u, v, w et θ.

II. — Équations du mouvement des plaques.

Nous devons écrire qu'on a, pour toute modification virtuelle isothermique,

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{T}_e - \delta_\theta\mathcal{F} + \delta J = 0.$$

En appelant ds un élément du contour de la plaque, le travail élémentaire des forces extérieures s'écrit

$$\delta\mathfrak{T}_e = \iiint \rho(X\,\delta U + Y\,\delta V + Z\,\delta W)\,dx\,dy\,dz$$
$$+ \iint (P_x\,\delta U + P_y\,\delta V + P_z\,\delta W)\,ds\,dz.$$

Si nous développons, suivant les puissances de z, les forces extérieures et les composantes du déplacement virtuel, nous obtiendrons, en intégrant par rapport à z,

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T}_e = 2\varepsilon\int\!\!\int\rho(\mathrm{X}\,\delta u + \mathrm{Y}\,\delta v + \mathrm{Z}\,\delta w)\,dx\,dy \\ + 2\varepsilon\int(\mathrm{P}_x\,\delta u + \mathrm{P}_y\,\delta v + \mathrm{P}_z\,\delta w)\,ds + \text{des termes en } \varepsilon^3,\end{aligned}$$

X, Y, ..., P_z désignant, maintenant, les composantes des forces extérieures pour $z = 0$. Nous admettrons qu'on peut limiter l'expression précédente à ses termes en ε; avec le même degré d'approximation, nous aurons aussi

$$\delta\mathrm{J} = -2\varepsilon\int\!\!\int\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)dx\,dy.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\delta_0\mathfrak{F} = 2\mu\varepsilon\int\!\!\int\left(\delta_0\mathcal{H}_0 + \frac{\varepsilon^2}{6}\delta_0\mathcal{H}_2\right)dx\,dy.$$

Nous pouvons simplifier cette expression par la remarque suivante : posons

$$\mathcal{H}_2 = \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

H et H′ étant les fonctions définies par les égalités

$$\begin{aligned}\mathrm{H} &= a\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + 2b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \frac{4\nu}{\lambda + 2\mu}\theta_1\,\Delta w.\\ \mathrm{H}' &= a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \mathrm{U}_0\mathrm{U}_2\\ &\quad - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\left[\theta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \theta_2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right].\end{aligned}$$

D'après les égalités (6) et (7), on voit que les fonctions u et v ne figurent que dans $\mathcal{H}_0$ et $\frac{\varepsilon^2}{6}\mathrm{H}'$ et que w ne figure que dans H. Nous pourrons donc négliger $\frac{\varepsilon^2}{6}\mathrm{H}'$ vis-à-vis de $\mathcal{H}_0$ et réduire ainsi $\mathcal{H}_2$ à H.

Pour obtenir les équations du mouvement de la plaque, nous devrons, dans l'équation (9), considérer séparément les termes qui dépendent, respectivement, de δu, δv et δw. Commençons par ceux qui dépendent de δw; ils vont nous fournir les équations du mouvement transversal.

Négligeant donc H', nous aurons

$$\delta_\theta \mathcal{H}_2 = 2a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right) + 2b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right)$$
$$+ 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y} + \frac{4\nu}{\lambda+2\mu}\vartheta_1\,\Delta\,\delta w.$$

Si nous posons, avec M. E. Mathieu,

$$P = 2\left(a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad Q = 2\left(a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

nous pourrons écrire

$$\delta_\theta \mathcal{H}_2 = P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y} + \frac{4\nu}{\lambda+2\mu}\vartheta_1\,\Delta\,\delta w.$$

et nous aurons à intégrer par parties l'expression

$$(10)\quad \iint \delta_\theta \mathcal{H}_2\,dx\,dy = \iint\left(P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 8\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}\right)dx\,dy$$
$$+ \frac{4\nu}{\lambda+2\mu}\iint \vartheta_1\,\Delta\,\delta w\,dx\,dy.$$

La première intégrale du second membre est celle qui conduit aux équations classiques du mouvement transversal ; nous nous bornerons donc à donner le résultat du calcul (¹).

En appelant α et β les cosinus directeurs de la normale extérieure n au contour s de la plaque, on a

$$(11)\quad \iint P\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}dx\,dy = \int P\alpha^2\frac{d\,\delta w}{dn}ds - \int\left[\ \ \frac{d}{ds}(P\alpha\beta) + \alpha\frac{\partial P}{\partial x}\right]\delta w\,ds + \iint\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\delta w\,dx\,dy.$$

$$(12)\quad \iint Q\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}dx\,dy = \int Q\beta^2\frac{d\,\delta w}{dn}ds - \int\left[-\frac{d}{ds}(Q\alpha\beta) + \beta\frac{\partial Q}{\partial y}\right]\delta w\,ds + \iint\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\delta w\,dx\,dy.$$

$$(13)\quad 2\iint\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}dx\,dy$$
$$= 2\int\alpha\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{d\,\delta w}{dn}ds$$
$$+\int\left\{\frac{d}{ds}\left[(\alpha^2-\beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] - \alpha\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} - \beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right\}\delta w\,ds + 2\iint\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w\,dx\,dy.$$

(¹) E. MATHIEU, *loc. cit.*, t. I, Chap. VI, § 6.

La dernière intégrale de l'équation (10) se déduit immédiatement des égalités (11) et (12); on obtient

$$(14)\qquad \int\!\!\int \theta_1 \Delta\,\delta w\,dx\,dy = \int \theta_1 \frac{d\,\delta w}{dn}\,ds - \int \frac{d\theta_1}{dn}\,\delta w\,ds + \int\!\!\int \Delta\theta_1\,\delta w\,dx\,dy.$$

Les égalités (11), (12), (13), (14) nous font ainsi connaître le second membre de l'égalité (10). Nous connaissons donc, dans l'équation (9), tous les termes qui dépendent de δw.

En égalant à zéro, dans cette équation, la somme des coefficients de δw qui figurent sous les intégrales doubles, et en remplaçant les fonctions P et Q par leurs expressions, nous obtiendrons l'équation indéfinie du mouvement transversal

$$(15)\qquad \frac{\mu\varepsilon^2}{3}\Delta\left(a\Delta w + \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1\right) - \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

En égalant ensuite à zéro la somme des coefficients de $\dfrac{d\,\delta w}{dn}$, puis celle des coefficients de δw qui figurent dans les intégrales curvilignes, nous obtiendrons les deux conditions au contour

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{b}{2}\Delta w + \alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \beta^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1 = 0,\\ &2\frac{d}{ds}\left[\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + (\beta^2-\alpha^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\\ &\qquad + \frac{d}{dn}\left(a\Delta w + \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta_1\right) + \frac{3}{\mu\varepsilon^2}P_z = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations généralisent celles qui ont été données par Kirchhoff (¹); elles montrent que la température n'a qu'une influence très faible sur le mouvement transversal, et que celui-ci en est même indépendant, d'après l'expression de θ_1 en fonction de θ, si les conditions physiques sont les mêmes sur les deux faces de la plaque.

Passons aux équations du mouvement tangentiel; si nous posons

$$L = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta,\qquad M = a\frac{\partial v}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\nu}{\lambda+2\mu}\theta.$$

(¹) KIRCHHOFF, 30ᵗᵉ *Vorlesung über mathematische Physik.*

nous aurons

$$\delta_\theta \mathcal{K}_0 = \mathrm{L}\frac{\partial\,\delta u}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial\,\delta v}{\partial y} + \mathrm{U}_0\left(\frac{\partial\,\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta v}{\partial x}\right);$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int\!\!\int \delta_\theta \mathcal{K}_0\,dx\,dy = &\int [(\mathrm{L}\alpha + \mathrm{U}_0\beta)\,\delta u + (\mathrm{M}\beta + \mathrm{U}_0\alpha)\,\delta v]\,ds \\ &- \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial y}\right)\delta u + \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{U}_0}{\partial x}\right)\delta v\right] dx\,dy.\end{aligned}$$

En substituant cette expression dans l'équation (9), et en égalant à zéro la somme des coefficients de δu, puis celle des coefficients de δv qui figurent sous les intégrales doubles, nous obtiendrons, après avoir remplacé L, M et U_0 par leurs valeurs, les équations indéfinies

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\left[a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b+1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] + \rho\left(\mathrm{X} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0,\\ &\mu\left[a\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (b+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right] + \rho\left(\mathrm{Y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0\end{aligned}\right.$$

et, par un procédé analogue, les deux conditions au contour

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\left[\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\theta\right)\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\beta\right] = \mathrm{P}_x,\\ &\mu\left[\left(a\frac{\partial v}{\partial y} + b\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\nu}{\lambda + 2\mu}\theta\right)\beta + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\alpha\right] = \mathrm{P}_y.\end{aligned}\right.$$

III. — Équations de la température.

Considérons la portion de la plaque limitée par ses deux faces et par un bord cylindrique parallèle à Oz, s'appuyant sur une courbe fermée arbitraire, tracée dans le plan xOy. Pendant une modification virtuelle quelconque, cette portion de volume dégage une quantité de chaleur δQ, qui a pour expression [Chap. I, § III, équat. (13)]

$$\delta Q = \int \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\,\delta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{S}}\,d\varpi.$$

Or, nous avons ici

$$\delta\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{S}} = -\frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu}(\delta \mathrm{D}_1 + \delta \mathrm{D}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{S}^2}\delta\mathfrak{S}.$$

de sorte qu'en désignant par C la capacité calorifique de l'unité de volume, nous aurons

$$\delta Q = -\int \left[\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} (\delta D_1 + \delta D_2) + C\, \delta\mathfrak{S} \right] d\varpi.$$

Remplaçons les fonctions T, δD_1, δD_2, $\delta\mathfrak{S}$ par leurs développements et intégrons par rapport à z. En négligeant, sous le signe $\int$, les termes à partir de ε^2, nous aurons

$$\delta Q = -2\varepsilon \int\int \left[\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + C\, \delta\theta \right] dx\, dy,$$

T désignant maintenant la température absolue pour $z = 0$. Posons

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y};$$

la quantité de chaleur dQ, dégagée dans une modification réelle, aura pour expression

$$(19) \qquad dQ = -2\varepsilon\, dt \int\int \left(\frac{T}{E} \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial\Theta}{\partial t} + C \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) dx\, dy.$$

Mais, on a aussi la relation générale [Chap. I, § III, équat. (15)]

$$(20) \qquad dQ = dt\left(-\int F_n\, d\Sigma + \int \chi\, d\varpi \right),$$

F_n désignant le flux de chaleur, relatif à la normale extérieure, et χ le débit de la source de chaleur par unité de volume, au point où se trouve l'élément $d\varpi$. Or, nous avons

$$\int F_n\, d\Sigma = \int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz + \int\int \gamma F_z\, dx\, dy,$$

la première intégrale du second membre correspondant au bord de la portion de plaque considérée, et la deuxième, à ses deux faces. Si nous développons les flux de chaleur

$$F_x = K \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}, \qquad F_y = K \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y},$$

suivant les puissances de z et si nous intégrons par rapport à z, nous obtiendrons, au degré d'approximation précédemment adopté,

$$\iint (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz = 2K\varepsilon \int \left(\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta \frac{\partial\theta}{\partial y}\right) ds = 2K\varepsilon \iint \Delta\theta\, dx\, dy.$$

On a, d'autre part,

$$F_z = K \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial z};$$

si nous tenons compte des conditions (8) et que nous supposions, pour simplifier, que les conditions physiques sont les mêmes sur les deux faces, il viendra

$$\iint \gamma F_z\, dx\, dy = -\iint k(\mathfrak{S}_\varepsilon + \mathfrak{S}_{-\varepsilon})\, dx\, dy.$$

Si, maintenant, nous développons $\mathfrak{S}_\varepsilon$ et $\mathfrak{S}_{-\varepsilon}$, nous obtiendrons finalement, en remplaçant θ_2 par $-\frac{k}{\varepsilon K}\theta$,

$$\iint \gamma F_z\, dx\, dy = -2\varepsilon \iint k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right)\theta\, dx\, dy.$$

Enfin nous avons

$$\int \chi\, d\varpi = 2\varepsilon \iint (-S + L\theta)\, dx\, dy,$$

S désignant le débit de la source de chaleur pour $z = 0$, et L, le coefficient de diathermanéité. D'après cela, l'égalité (20) devient

$$dQ = -2\varepsilon\, dt \iint \left[K\Delta\theta + S - L\theta - k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right)\theta\right] dx\, dy. \tag{21}$$

Par comparaison des égalités (19) et (21), nous obtenons l'équation indéfinie de la température

$$C\frac{\partial\theta}{\partial t} = K\Delta\theta + S - \zeta\theta - \frac{2\mu\nu}{\lambda + 2\mu}\,\frac{T}{E}\,\frac{\partial\Theta}{\partial t}, \tag{22}$$

où nous avons posé

$$\zeta = L + k\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{k}{2K}\right).$$

Nous avons, en outre, l'équation au contour

$$K\frac{d\theta}{dn} + k\theta = 0.$$

IV. — Mouvement tangentiel et vitesse du son.

En l'absence de forces extérieures, les équations (17) du mouvement tangentiel d'une plaque peuvent s'écrire

$$(23)\qquad \mu(b+1)\frac{\partial\Theta}{\partial(x,y)} + \mu\,\Delta(u,v) - \frac{2\mu\nu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial\theta}{\partial(x,y)} - \rho\,\frac{\partial^2(u,v)}{\partial t^2} = 0.$$

Elles ont la même forme que les équations (24) (Chap. I, § V) des corps à trois dimensions, ce qui permet de leur appliquer la même méthode d'intégration.

Il résulte tout d'abord, de ces équations, que la rotation moyenne se propage avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, tout comme si la température était uniforme et constante. D'autre part, l'équation en Θ et θ est ici

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho}\,a\,\Delta\right)\Theta + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\nu}{\rho}\,\Delta\theta = 0.$$

et, si l'on élimine θ entre cette équation et l'équation (22), on obtient, en posant

$$a_1^2 = \frac{\mu}{\rho}\,a, \qquad b_1^2 = \frac{\mu}{\rho}\,a + \left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2\frac{T_0\nu^2}{CE\rho},$$

$$C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_1^2\Delta\right)\Theta - K\Delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\Delta\right)\Theta + \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_1^2\Delta\right)\Theta + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\,\frac{\nu}{\rho}\,\Delta S = 0.$$

Cette équation est de même forme que celle des milieux à trois dimensions, mais il faut remarquer que le terme où figure $\mathcal{L}$ subsiste, même si la plaque est athermane ; il ne disparaîtrait que si, de plus, ses deux faces étaient imperméables à la chaleur.

La même méthode d'intégration approchée est applicable. Nous pouvons écrire, en effet,

$$b_1^2 = a_1^2\left[1 + \frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right],$$

et comme nous avons reconnu, antérieurement, que la quantité $\frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}$ était, en général, très petite vis-à-vis de l'unité, *a fortiori* en est-il de même de son produit par $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Enfin, si nous considérons les corps pour lesquels on peut admettre, à titre d'hypothèse, que le phénomène de la propagation des ondes longitudinales soit adiabatique, nous serons conduits à écrire

$$\theta = -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{T_0\nu}{CE}\Theta,$$

et, si nous tenons compte de cette valeur de θ dans les équations (17) et (18) du mouvement tangentiel, nous reconnaîtrons que les équations ainsi abtenues sont celles d'une plaque de température uniforme et constante, dont les coefficients a et b seraient remplacés respectivement par

$$a + \left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2\frac{T_0\nu^2}{CE} \quad \text{et} \quad b + \left(\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\right)^2\frac{T_0\nu^2}{CE}.$$

La vitesse du son qui, dans le milieu primitif, était

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}a},$$

deviendra

$$V' = V\sqrt{1 + \frac{T_0\nu^2}{CE(\lambda+2\mu)}\frac{\mu}{\lambda+\mu}}. \tag{24}$$

Cette formule nous fait connaître la vitesse du son en deuxième approximation : elle montre que l'accroissement relatif de vitesse, qui résulte des effets de la température, serait égal à la moitié de ce qu'il est pour un corps à trois dimensions, dans l'hypothèse $\lambda = \mu$.

CHAPITRE III.

LES TIGES DROITES.

I. — Équations du mouvement longitudinal.

Considérons une tige cylindrique, de section quelconque, dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et qui est limitée par deux bases, ayant respectivement pour équations $z = (0, l)$. Nous supposerons que les actions superficielles qui s'exercent sur la surface latérale de la tige se réduisent à une pression normale et uniforme dont la valeur, comptée positivement vers l'intérieur de la tige, sera désignée par P. D'après cela, nous devrons avoir, en tous les points de la surface latérale,

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} N_1\alpha + T_3\beta = -P\alpha, \\ T_3\alpha + N_2\beta = -P\beta, \\ T_2\alpha + T_1\beta = 0. \end{array}\right.$$

Nous nous limiterons au cas où la tige est homogène, dans tout plan perpendiculaire à ses génératrices, et où chaque section droite constitue un plan de symétrie de contexture.

Considérons la troisième équation indéfinie du mouvement

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho\left(\mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$\mathfrak{Z}$ désignant la composante, suivant Oz, de la force extérieure par unité de masse; si l'on multiplie les deux membres par l'élément d'aire $d\sigma$ de la section droite et qu'on intègre dans toute l'étendue de cette section, l'intégrale double $\int\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)d\sigma$ se transforme en une intégrale curviligne, étendue au contour de la section, et qui est nulle d'après la troisième équation (1), de sorte qu'il reste

$$\frac{\partial}{\partial z}\int N_3\,d\sigma + \rho\int\left(\mathfrak{Z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)d\sigma = 0.$$

Cette équation s'écrit plus simplement

$$(2) \qquad \frac{\partial n_3}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

n_3, Z et w désignant, respectivement, les valeurs moyennes de N_3, $\mathfrak{Z}$ et W, dans toute l'étendue d'une section droite quelconque.

Négligeons les variations des pressions N_1, N_2, T_3 en fonction de x et de y; dans ces conditions, les deux premières équations (1) exigent que l'on ait

$$N_1 + P = 0, \qquad N_2 + P = 0, \qquad T_3 = 0,$$

équations qui s'écrivent plus explicitement, d'après l'hypothèse faite sur la contexture de la tige et ce qui a été dit antérieurement [Chap. I, § IV, équat. (17)],

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{11}D_1 + A_{12}D_2 + A_{13}D_3 + A_{16}G_3 + A_{17}\vartheta + P = 0,\\ &A_{21}D_1 + A_{22}D_2 + A_{23}D_3 + A_{26}G_3 + A_{27}\vartheta + P = 0,\\ &A_{61}D_1 + A_{62}D_2 + A_{63}D_3 + A_{66}G_3 + A_{67}\vartheta \qquad = 0, \end{aligned}\right.$$

ϑ désignant la température. D'après ce qu'on a vu au sujet de la stabilité de l'état naturel (Chap. I, § I), ces équations sont résolubles par rapport à D_1, D_2, G_3 et permettent d'exprimer ces déformations en fonctions linéaires et homogènes de D_3, ϑ et P. Si l'on tient compte de ces valeurs dans l'expression de N_3, qui est

$$N_3 = A_{31}D_1 + A_{32}D_2 + A_{33}D_3 + A_{36}G_3 + A_{37}\vartheta,$$

on obtiendra

$$(4)\qquad N_3 = A'_{33}D_3 + A'_{37}\vartheta + aP,$$

A'_{33}, A'_{37} et a étant trois fonctions des coefficients d'élasticité, dépendant de z seulement. D'après cela, l'équation (2) devient

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(A'_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + A'_{37}\theta + aP\right) + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0,$$

θ désignant la valeur moyenne de ϑ. C'est l'équation indéfinie du mouvement longitudinal.

Aux extrémités de la tige où $\gamma = \mp 1$, on doit avoir

$$N_3 = \mp P_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l);$$

de sorte que, si l'on appelle p_z la valeur moyenne de P_z sur chaque base, il viendra, d'après l'égalité (4),

$$(6)\qquad A'_{33}\frac{\partial w}{\partial z} + A'_{37}\theta + aP = \mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l),$$

le signe $-$ étant pris pour la base inférieure et le signe $+$ pour la base supérieure.

Voyons ce que deviennent les équations (5) et (6) dans le cas d'une tige homogène et isotrope. Les pressions N_1, N_2 et N_3 étant indépendantes de G_3, la troisième équation (3) n'est pas à considérer et l'on a simplement [Chap. I, § IV, équat. (19)]

$$\lambda\Theta + 2\mu D_1 - \nu\mathfrak{S} + P = 0,$$
$$\lambda\Theta + 2\mu D_2 - \nu\mathfrak{S} + P = 0,$$

avec

$$N_3 = \lambda\Theta + 2\mu D_3 - \nu\mathfrak{S}.$$

On en déduit aisément

$$N_3 = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} D_3 - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu}\mathfrak{S} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P.$$

On obtient ainsi, pour l'équation indéfinie,

$$(7) \qquad \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0.$$

et, pour les équations aux limites,

$$(8) \quad \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu\nu}{\lambda + \mu}\vartheta - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P = \mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

Si c'est la même pression normale et uniforme P, qui s'exerce sur la surface latérale et sur les bases, on aura $p_z = (P, -P)$ pour $z = (0, l)$, de sorte que les deux conditions (8) se confondent en une seule

$$(9) \qquad (3\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\vartheta + P = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

II. — Équations de la température.

Considérons un tronçon de la tige, limité par deux sections droites quelconques. Pendant une modification élémentaire, ce tronçon dégage une quantité de chaleur dQ qui, d'après l'équation (14) (Chap. I, § III), a pour expression

$$dQ = dt \int \left[\frac{T}{E} \left(A_{17} \frac{\partial D_1}{\partial t} + A_{27} \frac{\partial D_2}{\partial t} + A_{37} \frac{\partial D_3}{\partial t} + A_{67} \frac{\partial G_3}{\partial t} \right) - C \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right] d\varpi.$$

Substituons-y les valeurs de D_1, D_2, G_3 exprimées, comme on l'a vu, en fonctions linéaires de D_3, $\mathfrak{S}$ et P ; nous pourrons écrire

$$dQ = dt \int \left(\frac{T}{E} A''_{37} \frac{\partial D_3}{\partial t} - C' \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right) d\varpi.$$

et si nous intégrons, d'abord, dans toute l'étendue d'une section droite, dont l'aire est σ, nous aurons, en négligeant ϑ vis-à-vis de T_0,

$$(10) \qquad dQ = \sigma\, dt \int \left(\frac{T_0}{E} A''_{37} \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t} - C' \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dz,$$

l'intégrale s'étendant à toute la hauteur du tronçon. Nous avons, d'autre part [Chap. I, § III, équat. (15),

$$(11) \qquad dQ = dt \left(-\int F_n\, d\Sigma + \int \chi\, d\varpi \right),$$

F_n désignant le flux de chaleur relatif à la normale extérieure du tronçon, et χ le débit de la source calorifique par unité de volume. La première intégrale se compose de deux parties, qui correspondent, l'une aux bases du tronçon, l'autre à sa surface latérale, de sorte qu'on a

$$(12) \qquad \int F_n\, d\Sigma = \int \gamma F_z\, d\sigma + \int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz.$$

ds désignant un élément du contour. Par suite de la symétrie de contexture, par rapport à chaque section droite de la tige, on a

$$F_z = K \frac{\partial \vartheta}{\partial z},$$

et, si l'on désigne par les indices 1 et 2 des quantités se rapportant, respectivement, aux bases inférieure et supérieure du tronçon, il viendra

$$\int \gamma F_z\, d\sigma = \sigma \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_2 - \sigma \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_1 = \sigma \int \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dz.$$

D'autre part, si nous supposons la température extérieure égale à 0°, on aura, sur la surface latérale,

$$\alpha F_x + \beta F_y = - k \vartheta.$$

k désignant le coefficient de conductibilité extérieure, que nous supposerons ne dépendre que de z. Nous aurons ainsi, pour la dernière intégrale de l'égalité (12),

$$\int\int (\alpha F_x + \beta F_y)\, ds\, dz = - \int k\, dz \int \vartheta\, ds = - s \int k \theta\, dz,$$

car on peut admettre que la température moyenne, tout le long du contour s, diffère peu de la température moyenne, aux divers points de la section droite correspondante. Enfin, nous pouvons écrire

$$\int \chi\, d\varpi = \sigma \int (-\,\mathrm{S} + \mathrm{L}\theta)\, dz,$$

S désignant le débit moyen des sources de chaleur dans une section droite, et L le coefficient de diathermanéité qui ne dépend que de z. D'après cela, l'égalité (11) devient

$$d\mathrm{Q} = \sigma\, dt \int \left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \mathrm{S} + \left(\mathrm{L} + \frac{s}{\sigma} k\right)\theta \right] dz,$$

et, par comparaison avec l'égalité (10), nous conduit immédiatement à l'équation indéfinie de la température moyenne

$$(13) \qquad \mathrm{C}'\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) + \mathrm{S} - \mathfrak{L}\theta + \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\mathrm{A}''_{37}\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t},$$

où nous avons posé

$$(14) \qquad \mathfrak{L} = \mathrm{L} + \frac{s}{\sigma} k.$$

Nous devons joindre à l'équation (13) les conditions aux bases

$$(15) \qquad \mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial z} \mp k\theta = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

Passons au cas particulier d'une tige homogène et isotrope; on trouve facilement, pour les coefficients C' et A''_{37},

$$\mathrm{C}' = \mathrm{C}\left[1 + \frac{\mathrm{T}_0 \nu^2}{\mathrm{CE}(\lambda + \mu)}\right], \qquad \mathrm{A}''_{37} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu.$$

La deuxième quantité, entre crochets, est du même ordre que la quantité $\frac{\mathrm{T}_0 \nu^2}{\mathrm{CE}(\lambda + 2\mu)}$, qui est, en général, très petite vis-à-vis de l'unité (Chap. I, § V). Nous pouvons donc, sans erreur sensible, réduire C' à C, et, comme K est constant, nous aurons

$$(16) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{K}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \mathrm{S} - \mathfrak{L}\theta - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{E}}\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t}.$$

III. — Mouvement longitudinal et vitesse du son.

En l'absence de toute force extérieure et en posant

$$a^2 = \frac{\mu}{\rho}\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mathcal{E}}{\rho}, \tag{17}$$

l'équation (7) du mouvement longitudinal s'écrit

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

Si l'on substitue la valeur de $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ donnée par cette équation, dans l'équation (16) différentiée par rapport à z, et si l'on pose

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^2 \frac{T_0 \nu^2}{CE\rho},$$

on reconnaîtra que la fonction w doit vérifier l'équation du quatrième ordre

$$C\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w - K\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w$$
$$+ \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w + \frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial S}{\partial z} = 0.$$

qui est de même forme que celles précédemment obtenues pour les corps à trois dimensions et pour les plaques. Nous pouvons également l'intégrer d'une manière approchée : on peut écrire, en effet,

$$b^2 = a^2\left[1 + \frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}\frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}\right], \tag{19}$$

et, comme nous avons reconnu que la quantité $\frac{T_0 \nu^2}{CE(\lambda + 2\mu)}$ était, généralement, négligeable vis-à-vis de l'unité, *a fortiori* en est-il de même de la deuxième quantité entre crochets.

D'autre part, si nous considérons les corps, pour lesquels on peut admettre que le phénomène de propagation des ondes longitudinales soit adiabatique, nous pourrons écrire, d'après l'égalité (16),

$$\theta = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\frac{T_0 \nu}{CE}\frac{\partial w}{\partial z},$$

de sorte que l'équation (18) deviendra

$$b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Cette équation exprime qu'un ébranlement longitudinal, qui se propageait avec la vitesse $V = a$, pour $\theta = 0$, se propage maintenant avec la vitesse $V' = b$, et l'on a, d'après l'égalité (19),

$$V' = V\sqrt{1 + \frac{T_0 \gamma^2}{CE(\lambda + 2\mu)} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}}. \tag{20}$$

Cette formule nous fait connaître la vitesse du son dans une tige, en deuxième approximation. Elle nous montre que l'accroissement relatif de vitesse, qui résulte de l'effet de la température serait, dans l'hypothèse $\lambda = \mu$, égal aux trois cinquièmes de ce qu'il est pour une une plaque [Chap. II, § IV, équat. (24)] et égal aux trois dixièmes de ce qu'il est pour un milieu à trois dimensions [Chap. I, § V, équat. (30)].

CHAPITRE IV.

APPLICATION A UN CAS PARTICULIER.

I. — Mouvement longitudinal d'une tige qui se refroidit.

Comme application des théories qui viennent d'être exposées, nous allons étudier le mouvement longitudinal d'une tige homogène et isotrope qui se refroidit, ainsi que les variations de température provoquées par le mouvement lui-même. Nous supposerons que la tige ne renferme aucune source intérieure de chaleur et nous admettrons, qu'à ses extrémités, le refroidissement se fait par contact. Cette dernière hypothèse aura l'avantage d'apporter, dans nos calculs, de notables simplifications et de faciliter les applications numériques.

D'après la méthode approchée d'intégration, exposée pour les corps isotropes (Chap. I, § V), et que nous avons reconnu être, *a fortiori*, applicable au cas d'une tige, nous devons commencer par établir la loi du refroidissement de la tige, tout comme si celle-ci était un solide invariable. Si nous représentons par $F(z)$ la température initiale de la tige, et que nous posions

$$(1)\qquad b^2 = \frac{K}{C}, \qquad \mathcal{L}_1 = \frac{\mathcal{L}}{C},$$

les équations du problème seront donc :

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = b^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \mathcal{L}_1\theta, \\ \theta = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l), \\ \theta = F(z) \qquad \text{pour} \qquad t = 0. \end{cases}$$

Nous reconnaissons les équations du refroidissement par contact d'un mur diathermane d'épaisseur l. On sait que leur intégrale s'obtient en superposant une infinité de solutions simples vérifiant, séparément, les équations indéfinie et aux limites, chacune de ces solutions étant affectée d'un coefficient arbitraire qu'on détermine, ensuite, par la condition initiale. Si nous posons

$$(3)\qquad \alpha_i = \frac{i\pi}{l}, \qquad \beta_i = \frac{1}{a}(\mathcal{L}_1 + b^2\alpha_i^2), \qquad A_i = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\alpha_i x\,dx,$$

a désignant toujours la quantité $\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}}$, la loi du refroidissement pourra s'écrire

$$(4)\qquad \theta = \sum_1^\infty A_i e^{-a\beta_i t}\sin\alpha_i z.$$

On vérifie que la solution ainsi définie satisfait bien à toutes les conditions du problème ; en particulier, c'est une série uniformément convergente de t et de z pour $t \geqq 0$ [1].

L'expression de θ étant ainsi obtenue, nous allons déterminer le mouvement longitudinal de la tige d'après les équations (7) et (8) du chapitre précédent et les conditions initiales. En supposant que la tige n'est soumise à aucune force extérieure, et en tenant compte de ce que

[1] H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. V, n° 48.

$\theta = 0$ aux deux extrémités, nous aurons comme équations à intégrer :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} \dfrac{\nu}{\rho} \dfrac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = (0, l), \\ w = f(z), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t} = g(z) \quad \text{pour} \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ désignent, respectivement, le déplacement et la vitesse de chaque point de la tige à l'instant initial.

Cherchons, tout d'abord, une solution particulière W de l'équation indéfinie, vérifiant en même temps l'équation aux limites. Cette solution particulière est facile à obtenir par identification et par l'emploi de coefficients indéterminés; on reconnaît ainsi, en tenant compte des formules

$$a^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad D = \frac{\nu}{3\lambda + 2\mu},$$

que la fonction

$$(6) \qquad W = -D \sum_1^\infty \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} A_i e^{-a\beta_i t} \cos \alpha_i z$$

satisfait aux conditions cherchées. Il reste, toutefois, à faire voir que cette série définit bien une fonction continue de z et de t, dérivable terme à terme et deux fois de suite par rapport à l'une et l'autre de ces variables.

Pour démontrer la continuité de la fonction W, il suffit d'établir la convergence uniforme de la série (6). Or, celle-ci s'obtient en multipliant chaque terme de la série

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \sum_1^\infty \alpha_i A_i e^{-a\beta_i t} \cos \alpha_i z,$$

qui est uniformément convergente, par la quantité $\frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$, qui est positive et décroissante. D'après un lemme dû à Abel, il en résulte que la série (6) est aussi uniformément convergente.

On démontrerait, de même, la convergence uniforme des dérivées premières et secondes de W, en comparant celles-ci à θ ou aux dérivées de cette fonction.

Cela posé, revenons aux équations (5) et soit

$$w = W + w_1. \tag{7}$$

w_1 étant la nouvelle fonction inconnue; les équations (5) deviennent

$$(8) \quad \begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0. \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = (0, l). \\ w_1 = f(z) - W, \quad \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = g(z) - \dfrac{\partial W}{\partial t} \quad \text{pour} \quad t = 0. \end{cases}$$

La première de ces équations est celle des cordes vibrantes, dont l'intégrale générale est

$$w_1 = H(z + at) + G(z - at).$$

H et G étant deux fonctions arbitraires. La première condition aux limites ($z = 0$) nous donne

$$H'(at) + G'(-at) = 0.$$

d'où l'on tire en intégrant

$$H(at) - G(-at) + C = 0.$$

C étant une constante arbitraire. Nous en déduisons aisément

$$(9) \quad \begin{cases} w_1 = H(at + z) + H(at - z) + C. \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial t} = a[H'(at + z) + H'(at - z)]. \end{cases}$$

D'autre part, la deuxième condition aux limites ($z = l$) nous donne

$$H'(l + at) + G'(l - at) = 0.$$

et, par combinaison avec la première ($z = 0$),

$$H'(at + l) = H'(at - l).$$

Cette égalité exprime que la fonction $H'(u)$ est une fonction périodique de période $2l$. Nous l'écrirons donc sous forme de série trigonométrique

$$(10)\qquad H'(u) = c_0 + \sum_1^{\infty} (c_i \cos\alpha_i u + c'_i \sin\alpha_i u),$$

et nous chercherons à déterminer les coefficients c_0, c_i, c'_i de façon que les conditions initiales, les seules qu'il reste à satisfaire, soient vérifiées.

Sauf à démontrer, ultérieurement, que les valeurs que nous obtiendrons, pour ces coefficients, assureront la convergence uniforme de la série (10), nous en déduisons en intégrant

$$H(u) = C_1 + c_0 u + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} (c_i \sin\alpha_i u - c'_i \cos\alpha_i u),$$

et, si nous posons

$$\mathfrak{S} = 2C_1 + C,$$

il est facile de voir que les égalités (9) nous donnent

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} w_1 &= \mathfrak{S} + 2c_0 at + 2\sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} (c_i \sin a\alpha_i t - c'_i \cos a\alpha_i t) \cos\alpha_i z, \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} &= 2c_0 a + 2a \sum_1^{\infty} (c_i \cos a\alpha_i t + c'_i \sin a\alpha_i t) \cos\alpha_i z. \end{aligned} \right.$$

Si, maintenant, nous tenons compte des conditions initiales, nous devrons avoir

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} f(z) - W_0 &= \mathfrak{S} - 2\sum_1^{\infty} \frac{c'_i}{\alpha_i} \cos\alpha_i z, \\ g(z) - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0 &= 2c_0 a + 2a\sum_1^{\infty} c_i \cos\alpha_i z. \end{aligned} \right.$$

Ces deux égalités exigent que les fonctions $f(z)$ et $g(z)$ soient paires, ce que nous pouvons toujours supposer, puisqu'elles ne sont définies qu'entre o et l. Dans ces conditions, les seconds membres, où les coefficients sont remplacés par leurs valeurs obtenues par la méthode d'élimination de Fourier, sont des séries uniformément convergentes.

Ces coefficients sont définis par les relations

$$\int_0^l [f(x) - W_0] \quad dx = \mathfrak{C} l, \qquad \int_0^l [f(x) - W_0] \quad \cos\alpha_i x dx = -\frac{l}{\alpha_i} c'_i,$$

$$\int_0^l \left[g(x) - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\right] dx = 2 c_0 a l, \qquad \int_0^l \left[g(x) - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\right] \cos\alpha_i x dx = alc_i.$$

La série $\Sigma c_i \cos\alpha_i u$ étant uniformément convergente, d'après la deuxième égalité (12), pour démontrer la convergence uniforme de la série (10), il nous suffit d'établir la proposition pour la série $\Sigma c'_i \sin\alpha_i u$. Or, si nous différentions les deux membres de la première égalité (12), nous obtiendrons

$$\frac{d}{dz}[f(z) - W_0] = 2\sum_1^\infty c'_i \sin\alpha_i z, \tag{13}$$

si, toutefois, le second membre est uniformément convergent. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, d'après la valeur même de c'_i. En intégrant par parties, nous avons

$$\int_0^l [f(x) - W_0] \cos\alpha_i x \, dx = -\frac{1}{\alpha_i}\int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x \, dx,$$

ce qui nous permet d'écrire l'expression donnée de c'_i

$$c'_i = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x \, dx.$$

L'égalité (13) devient ainsi

$$\frac{d}{dz}[f(z) - W_0] = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \sin\alpha_i z \int_0^l \frac{d}{dx}[f(x) - W_0] \sin\alpha_i x \, dx.$$

La fonction $f(z) - W_0$ étant une fonction paire, sa dérivée est impaire; donc le second membre de l'égalité précédente représente bien le développement de cette dérivée en série de Fourier uniformément convergente et la proposition est démontrée.

La convergence uniforme des fonctions W_0 et $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0$ nous permet d'achever le calcul des coefficients, en intégrant terme à terme. On obtient ainsi

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad \frac{c'_i}{\alpha_i} = -\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx - \frac{D}{2}A_i\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2},$$

$$2c_0 a = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)\,dx, \qquad \frac{c_i}{\alpha_i} = \frac{1}{a\alpha_i l}\int_0^l g(x)\cos\alpha_i x\,dx - \frac{D}{2}A_i\frac{\beta_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}.$$

D'après cela, la première des égalités (11) devient

$$(14)\quad w_1 = \frac{1}{l}\int_0^l [f(x)+t\,g(x)]\,dx + \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i z\int_0^l\left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx - D\sum_1^\infty \frac{A_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}(\beta_i\sin a\alpha_i t - \alpha_i\cos a\alpha_i t)\cos\alpha_i z.$$

Le déplacement cherché w est ainsi complètement déterminé par les équations (6), (7) et (14).

Afin de réduire les formules au strict nécessaire, supposons que la section de la tige, qui contient le centre de gravité, n'éprouve pas de déplacement longitudinal. Dans ces conditions, on devra avoir $w = 0$, pour $z = \frac{l}{2}$ et à toute époque ; on voit immédiatement qu'il faut et qu'il suffit pour cela que les intégrales $\int_0^l f(x)\,dx$ et $\int_0^l g(x)\,dx$ soient nulles. Nous aurons alors simplement

$$(15)\quad w = \frac{2}{l}\sum_1^\infty \cos\alpha_i z\int_0^l\left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx - D\sum_1^\infty \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}A_i\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin a\alpha_i t - \cos a\alpha_i t + e^{-a\beta_i t}\right)\cos\alpha_i z.$$

Supposons, tout d'abord, que la température initiale de la tige soit nulle $[F(z)=0]$: la troisième des formules (3) nous montre qu'on aura $A_i = 0$, et par suite $\theta = 0$ à toute époque, d'après l'égalité (4). Dans ces conditions, la tige va prendre un certain mouvement que nous appellerons *mouvement d'origine purement mécanique*, et, si nous désignons par $\mathfrak{w}$ le déplacement longitudinal correspondant, nous aurons, d'après l'égalité (15) et en supposant, pour simplifier, $g(z) = 0$,

$$(16) \qquad w = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} \cos a\alpha_i t \cos \alpha_i z \int_0^l f(x) \cos \alpha_i x \, dx.$$

Considérons, maintenant, le cas où la fonction $F(z)$ n'est pas nulle, et imaginons le nouvel état initial défini de la façon suivante : pour $t < 0$ et depuis une époque très reculée, la température de la tige a été maintenue égale à $F(z)$, de sorte que celle-ci a pris un état d'équilibre bien défini, correspondant à cette température stationnaire $F(z)$ et caractérisé, en chaque point, par la valeur du déplacement w que nous désignerons par $D h(z)$. A l'instant initial, nous supposons qu'on abandonne la tige à elle-même, sans vitesse et à partir de cet état, en la laissant se refroidir naturellement ; elle va prendre un certain mouvement que nous appellerons *mouvement d'origine purement calorifique,* et, si nous désignons par w_1 le déplacement longitudinal correspondant, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(17) \qquad w_1 = D\, h(z), \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Commençons par calculer l'expression de la fonction $h(z)$. Nous avons pour cela les deux premières équations (5), où l'on a effacé, dans l'équation indéfinie, le terme $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. D'après ces équations, on doit avoir

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \frac{dF}{dz},$$

$$\frac{dh}{dz} = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l).$$

La première de ces équations donne, en intégrant et en tenant compte de la condition aux extrémités, où la fonction F est aussi nulle,

$$\frac{dh}{dz} = F(z).$$

Une deuxième intégration donne, en remarquant que la section, qui contient le centre de gravité, est supposée ne pas éprouver de déplacement longitudinal,

$$(18) \qquad h(z) = \int_{\frac{l}{2}}^{z} F(x)\, dx.$$

Cela posé, tenons compte des conditions initiales (17) dans l'équation (15), groupons les termes périodiques par rapport au temps, et nous obtiendrons, en définitive,

$$(19)\qquad \Psi_1 = -D\sum_1^{\infty}\left[\frac{\alpha_i}{\alpha_i^2+\beta_i^2}A_i e^{-a\beta_i t} + M_i \sin(a\alpha_i t - \gamma_i)\right]\cos\alpha_i z,$$

équation où nous avons posé

$$B_i = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\cos\alpha_i x\, dx,$$

$$M_i = \sqrt{\frac{A_i(A_i + 2B_i\alpha_i)}{\alpha_i^2+\beta_i^2} + B_i^2}, \qquad \operatorname{tang}\gamma_i = \frac{A_i\alpha_i + B_i(\alpha_i^2+\beta_i^2)}{A_i\beta_i}.$$

L'égalité (19) nous montre que le mouvement d'origine purement calorifique est la superposition d'un mouvement progressif de contraction, qui s'évanouit asymptotiquement comme l'échauffement lui-même, et d'un mouvement vibratoire qui ne diffère de celui d'origine purement mécanique, fourni par l'égalité (16), que par l'amplitude et par la phase. Il est donc intéressant de comparer les amplitudes de ces deux mouvements, et de reconnaître si le mouvement vibratoire calorifique peut, dans certains cas, avoir assez d'intensité pour constituer un son perceptible. Nous allons choisir, à cet effet, un cas particulier simple, où le calcul effectif des coefficients des séries puisse se faire aisément et qui soit, en même temps, facilement réalisable.

II. — Comparaison du mouvement vibratoire d'origine purement calorifique à celui d'origine purement mécanique.

Considérons le mouvement d'origine purement mécanique, dont la loi est donnée par l'équation (16). Nous allons étudier le cas particulier, où la tige est mise en mouvement de la façon suivante : on exerce sur ses deux bases deux tractions égales et opposées, dont la valeur par unité de surface est égale à P; la tige va, dans ces conditions, prendre un certain état d'équilibre, défini par la valeur $f(z)$ du déplacement longitudinal en chaque point. Puis, à l'instant initial, on supprime brusquement les deux tractions P, en abandonnant la tige à elle-même sans vitesse.

Calculons, tout d'abord, $f(z)$. Les équations (7) et (8) du Chapitre III nous donnent ici, en introduisant le module d'Young $\mathcal{E}$,

$$(20)\qquad \frac{d^2f}{dz^2}=0,$$

$$\mathcal{E}\frac{df}{dz}=\mp p_z \qquad \text{pour} \qquad z=(0,l).$$

Mais nous avons $p_z=-\mathrm{P}$ pour $z=0$, et $p_z=\mathrm{P}$ pour $z=l$, ce qui nous donne simplement

$$(21)\qquad \frac{df}{dz}=\frac{\mathrm{P}}{\mathcal{E}} \qquad \text{pour} \qquad z=(0,l).$$

En intégrant une première fois l'équation (20), nous obtiendrons, en tenant compte de la condition (21),

$$\frac{df}{dz}=\frac{\mathrm{P}}{\mathcal{E}},$$

et une nouvelle intégration nous donnera, en remarquant que le déplacement au point $z=\frac{l}{2}$ est nul,

$$f(z)=\frac{\mathrm{P}}{\mathcal{E}}\left(z-\frac{l}{2}\right).$$

Cela posé, nous trouvons, par un calcul facile,

$$\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx=-2l\frac{\mathrm{P}}{\mathcal{E}}\,\frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2},$$

de sorte que l'équation (16) nous donne, pour le mouvement cherché,

$$(22)\qquad \mathfrak{P}=-2l\frac{\mathrm{P}}{\mathcal{E}}\sum_1^\infty\frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}\cos a\alpha_i t\cos\alpha_i z.$$

Considérons, maintenant, la tige animée d'un mouvement dont l'origine soit purement calorifique. Supposons la température initiale $\mathrm{F}(z)$ constante et égale à θ_0 ; la formule (18) nous donne

$$h(z)=\theta_0\left(z-\frac{l}{2}\right),$$

et nous en déduisons, pour les coefficients A_i, B_i et M_i,

$$A_i = 2\theta_0 \frac{1-\cos i\pi}{i\pi}, \quad B_i = -2l\theta_0 \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}, \quad M_i = 2l\theta_0 \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \frac{1-\cos i\pi}{i^2\pi^2}.$$

L'équation (19) nous donne alors, pour le mouvement calorifique,

$$(23) \quad \varphi_1 = -2D\theta_0 \sum_1^\infty \frac{1-\cos i\pi}{i\pi\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} \left[\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}} e^{-a\beta_i t} + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\sin(a\alpha_i t - \gamma_i) \right] \cos\alpha_i z.$$

Les expressions (22) et (23) nous permettent de former le rapport r_i de l'amplitude de l'harmonique de rang i, dans le mouvement vibratoire calorifique, à l'amplitude de l'harmonique de même rang, dans le mouvement vibratoire d'origine mécanique; nous obtenons

$$(24) \qquad r_i = D\theta_0 \frac{\mathcal{E}}{P} \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}.$$

D'après les deux premières égalités (3), nous voyons que le rapport $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ tend vers l'unité, quand i augmente indéfiniment. Nous avons donc

$$r_\infty = D\theta_0 \frac{\mathcal{E}}{P}.$$

Faisons le calcul numérique de cette expression dans le cas du cuivre, pour lequel on a (Chap. I, § V)

$$\mathcal{E} = 10\,519 \text{ kg} : \text{mm}^2, \qquad \rho = 8{,}85, \qquad C = 0{,}842, \qquad D = 17{,}173.10^{-6}.$$

Prenons pour P la charge de sécurité du cuivre, qui est de 4^{kg} par millimètre carré; nous aurons

$$\frac{\mathcal{E}}{P} = 2{,}63.10^3, \qquad r_\infty = 0{,}0452\,\theta_0.$$

Ceci nous montre que, pour $\theta_0 = 22^\circ{,}15$, on aurait $r_\infty = 1$. Si donc, la température initiale est supérieure à cette valeur, il arrivera, à partir d'un certain rang, que les harmoniques du mouvement calorifique dépasseront en amplitude ceux du mouvement d'origine mécanique.

Comment varie r_i en fonction de α_i? Il suffit d'étudier la variation de la quantité $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$, quand on fait varier α_i de o à $+\infty$.

D'après la deuxième égalité (3), on reconnaît que cette quantité part de la valeur 1 et commence par décroître, passe par un minimum égal à $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4b^2\mathfrak{L}_1}}}$ pour $\alpha_i = \frac{\sqrt{\mathfrak{L}_1}}{b}$, puis croît en tendant asymptotiquement vers la valeur 1. Tenons compte des formules (1) et de la formule (14) du Chapitre III

$$\mathfrak{L} = \mathrm{L} + \frac{s}{\sigma}k;$$

si nous supposons, pour simplifier, que la tige soit athermane ($\mathrm{L} = 0$), nous trouverons pour le minimum de $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ l'expression $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\mathrm{C}^2\sigma}{4\mathrm{K}ks}}}$, ce qui nous donne, pour le minimum de r_i,

$$(r_i)_{\min.} = \mathrm{D}\theta_0\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{P}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\mathrm{C}^2\sigma}{4\mathrm{K}ks}}}. \tag{25}$$

Ce minimum a lieu pour $\alpha_i = \sqrt{\frac{sk}{\sigma\mathrm{K}}}$, c'est-à-dire pour une longueur de tige donnée par la formule

$$l = i\pi\sqrt{\frac{\sigma\mathrm{K}}{sk}}. \tag{26}$$

Nous allons faire le calcul numérique de ces expressions dans le cas d'une tige de cuivre de section circulaire. Supposons que la tige soit placée dans un courant d'air atmosphérique à la température de la glace fondante, qui sera notre zéro thermométrique, et imaginons que la vitesse V du courant fluide soit uniforme et dirigée perpendiculairement à l'axe de la tige. M. Boussinesq a montré [1] que, dans ces conditions, le coefficient de conductibilité extérieur k était donné par la

---

[1] J. BOUSSINESQ, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6e série, t. I, 1905.

formule

$$k = 4\sqrt{\frac{K_1 C_1 V}{\pi^3 \varepsilon}},$$

où K_1 désigne le coefficient de conductibilité interne du fluide, C_1 sa capacité calorifique par unité de volume et ε le rayon de la section de la tige. Dans le système C. G. S., *petite calorie, degré centigrade* et à la température de la glace fondante, on a

$$K_1 = 5.10^{-5}, \qquad C_1 = 3{,}06.10^{-4}.$$

Si nous prenons $V = 400^{cm}$, ce qui correspond à une brise légère, nous trouverons, pour une tige de 1^{cm} de diamètre ($\varepsilon = 0{,}5$),

$$k = 2{,}51.10^{-3}.$$

Ajoutons aux données précédentes, relatives au cuivre, la valeur de son coefficient de conductibilité $K = 0{,}819$ (C. G. S.), et nous aurons, en prenant encore $\frac{\mathcal{E}}{\rho} = 2{,}63{,}10^3$,

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\rho}} = 3{,}42.10^5, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 C^2 \sigma}{4 K k s}}} = 1{,}554.10^{-7};$$

ce qui nous donne, d'après les formules (25) et (26),

$$(r_i)_{\text{min.}} = 0{,}702.10^{-8}\theta_0 \qquad \text{pour} \qquad l = i.28{,}7;$$

de sorte que, si la tige que nous considérons a une longueur de $28^{cm},7$, le minimum aura lieu pour le terme fondamental de la série. Comme nous venons de voir qu'il est extrêmement petit, même si θ_0 atteint quelques centaines de degrés, il s'ensuit que, pour une tige de cette longueur, le mouvement vibratoire calorifique sera absolument imperceptible en comparaison de celui d'origine mécanique.

Puisque, comme nous l'avons vu, le rapport $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}$ prend sa plus forte valeur, qui est 1, quand α_i est nul ou infini, il en résulte, pour un harmonique de rang déterminé, que r_i sera d'autant plus grand que la longueur de la tige sera elle-même, ou plus grande, ou plus petite que la valeur (26), qui correspond au minimum précédemment calculé. Mais le cas d'une tige très courte n'est pas à considérer, car si l'on cherche, avec les données numériques qui précèdent, l'ordre de grandeur des fortes valeurs de α_i qui rendraient la quantité $\frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2+\beta_i^2}}$ à peu près comparable à l'unité, on trouve pour α_i une valeur telle, qu'en faisant $i=1$, la longueur de la tige devrait être de l'ordre du millième de millimètre.

Prenons donc le cas d'une tige très longue, et choisissons sa longueur de façon que le terme fondamental corresponde à un son qui soit à la limite des sons graves perceptibles, dont la fréquence serait égale à 8, d'après les expériences de Savart. Pour une longueur de 200^m ($l=2.10^4$), on trouve une fréquence fondamentale $n_1=\frac{a}{2l}=8,55$, et, pour les quantités α_1, β_1, r_1, les valeurs

$$\alpha_1=\frac{\pi}{l}=1,57.10^{-4}, \qquad \beta_1=\frac{K}{Ca}\left(\frac{2k}{\varepsilon K}+\alpha_1^2\right)=1,724.10^{-7},$$
$$r_1=D\theta_0\frac{\mathcal{E}}{P}\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}=4,96.10^{-5}\theta_0.$$

Appelons r'_1 le rapport de l'amplitude fondamentale du mouvement calorifique dans la tige de 200^m, à celle du mouvement d'origine mécanique qui se produirait dans une tige de 1^m de longueur seulement, étirée initialement dans les mêmes conditions. L'expérience montre que le mouvement, ainsi produit, a assez d'amplitude pour produire un son d'intensité très appréciable. L'amplitude étant, toutes choses égales, proportionnelle à l, nous aurons

$$r'_1=200\,r_1=9,92.10^{-3}\theta_0.$$

Le rapport de l'intensité du son d'origine calorifique, dans la tige de 200^m, à l'intensité du son d'origine mécanique, dans la tige de 1^m, est donc

$$r'^2_1=9,83.10^{-5}\theta_0^2.$$

Pour $\theta_0=200^\circ$, on aurait $r'^2_1=3,93$, ce qui montre que le son d'origine calorifique aurait bien assez d'intensité pour être entendu.

Ainsi et en résumé, il n'y a que les tiges extrêmement longues et portées à une température initiale élevée, qui puissent, par refroidissement, donner naissance à un son appréciable ; ce son est d'autant plus grave que la tige est plus longue.

III. — Variations de température résultant du mouvement longitudinal d'une tige.

Supposons, maintenant, que la température initiale de la tige soit nulle. D'après les équations (2), la température reste égale à zéro pendant toute la durée du mouvement, du moins à une première approximation, et le déplacement longitudinal w est donné par l'équation (15)

$$(27) \qquad w = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} \cos\alpha_i z \int_0^l \left[\frac{g(x)}{a\alpha_i}\sin a\alpha_i t + f(x)\cos a\alpha_i t\right]\cos\alpha_i x\,dx,$$

où l'on a fait $A_i = 0$.

Proposons-nous de calculer la température de la tige en deuxième approximation ; il nous faut intégrer l'équation (16) (Chap. III, § II), où nous faisons $S = 0$. Cette équation peut s'écrire

$$(28) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - C_1\theta - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{T_0}{CE}\,\nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t};$$

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t}$ doit y être remplacé par sa valeur, déduite de l'égalité (27). Nous devons avoir, en outre,

$$\theta = 0 \quad \text{pour} \quad z = (0, l) \qquad \text{et} \qquad \theta = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

L'égalité (27) nous donne

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\alpha_i \sin\alpha_i z\int_0^l[-g(x)\cos a\alpha_i t + a\alpha_i f(x)\sin a\alpha_i t]\cos\alpha_i x\,dx,$$

en admettant, toutefois, la convergence uniforme du second membre. En raisonnant comme nous l'avons fait précédemment, nous reconnaîtrions que l'égalité précédente est légitime.

Si nous posons

$$\theta = e^{-C_1 t}\,V,$$

V étant la nouvelle fonction inconnue, et

$$M_i = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{T_0\nu}{CE}\frac{2\alpha_i}{l}\int_0^l g(x)\cos\alpha_i x\,dx,$$

$$N_i = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{T_0\nu}{CE}\frac{2a\alpha_i^2}{l}\int_0^l f(x)\cos\alpha_i x\,dx,$$

nous reconnaîtrons, d'après l'équation (28), qu'on doit avoir

$$(29)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + e^{\mathcal{L}t}\sum_1^\infty (M_i\cos a\alpha_i t + N_i\sin a\alpha_i t)\sin\alpha_i z,$$

et que V satisfait aux mêmes conditions définies et initiale que θ.

Si nous cherchons une solution particulière φ de cette équation, de la forme

$$(30)\qquad \varphi = e^{\mathcal{L}t}\sum_1^\infty (\mathfrak{M}_i\cos a\alpha_i t + \mathfrak{N}_i\sin a\alpha_i t)\sin\alpha_i z,$$

cette solution satisfait d'elle-même aux conditions aux extrémités. Pour qu'elle satisfasse, en même temps, à l'équation indéfinie (29), on reconnaît aisément, en tenant compte de la deuxième égalité (3), qu'on doit avoir

$$\mathfrak{M}_i = \frac{\beta_i M_i - \alpha_i N_i}{a(\alpha_i^2+\beta_i^2)},\qquad \mathfrak{N}_i = \frac{\alpha_i M_i + \beta_i N_i}{a(\alpha_i^2+\beta_i^2)},$$

et que, d'après ces valeurs, la convergence uniforme de la fonction φ et des fonctions $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, obtenues en différentiant terme à terme l'égalité (30), est assurée.

Si nous posons ensuite

$$V = \varphi + v,$$

v étant une nouvelle fonction inconnue, nous devrons avoir

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$v = 0 \qquad \text{pour} \qquad z = (0, l),$$

$$v = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i\sin\alpha_i z \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Ce sont les équations du refroidissement de la tige portée à la température initiale $-\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i \sin \alpha_i z$. Nous avons donc

$$v = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i e^{-b^2\alpha_i^2 t} \sin \alpha_i z,$$

ce qui nous donne, en définitive, pour la fonction θ

$$(31)\quad \theta = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i z + \sum_1^\infty (\mathfrak{M}_i \cos a\alpha_i t + \mathfrak{N}_i \sin a\alpha_i t) \sin \alpha_i z.$$

Posons enfin

$$\operatorname{tang} \gamma_i = \frac{\beta_i \mathrm{M}_i - \alpha_i \mathrm{N}_i}{\alpha_i \mathrm{M}_i + \beta_i \mathrm{N}_i},$$

et l'équation (31) deviendra

$$(32)\quad \theta = -\sum_1^\infty \mathfrak{M}_i e^{-a\beta_i t} \sin \alpha_i z + \frac{1}{a} \sum_1^\infty \sqrt{\frac{\mathrm{M}_i^2 + \mathrm{N}_i^2}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \sin(a\alpha_i t + \gamma_i) \sin \alpha_i z.$$

Ce résultat nous montre que la température, calculée en deuxième approximation, comprend deux parties : l'une qui s'évanouit asymptotiquement, l'autre qui est périodique et de même période que le mouvement vibratoire d'origine mécanique qui lui donne naissance. Cherchons la valeur de l'amplitude du terme fondamental de la partie périodique, dans le cas simple déjà considéré, où l'on a

$$f(z) = \frac{\mathrm{P}}{\mathfrak{E}} z, \qquad g(z) = 0.$$

On a d'abord

$$\mathrm{M}_i = 0, \qquad \mathrm{N}_i = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\mathrm{T}_0 \nu}{\mathrm{CE}} \frac{2a}{l} \frac{\mathrm{P}}{\mathfrak{E}} (1 - \cos i\pi),$$

ce qui nous donne, pour l'amplitude du terme de rang i, en introduisant le coefficient de dilatation thermique D,

$$(33)\qquad \frac{\mathrm{N}_i}{a\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} = 2 \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{CE}} \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \frac{\mathrm{P}}{l} (1 - \cos i\pi).$$

Nous avons vu que, dans le cas d'une tige de cuivre de 200$^{\mathrm{m}}$ de longueur, β_1 était négligeable vis-à-vis de α_1; *a fortiori* en est-il de même de β_i vis-à-vis de α_i, surtout si la tige est plus courte. Dans ces conditions, l'expression (33) devient indépendante de la longueur de la tige, et pour $i = 1$, on a

$$\frac{N_1}{a\alpha_1} = \frac{4}{\pi} \frac{T_0}{CE} DP.$$

Faisons le calcul numérique de cette expression pour le cuivre, en prenant toujours $P = 4^{kg}$ et $T_0 = 273$; nous obtenons

$$\frac{N_1}{a\alpha_1} = 0,67.10^{-3} \text{ degré centigrade.}$$

Ce résultat nous montre combien sont petites les variations de température, engendrées par le mouvement d'un solide élastique; ces variations sont inobservables, non seulement parce qu'elles sont très faibles, mais aussi parce que leurs périodes sont extrêmement courtes.

IV. — Refroidissement d'une tige dont on suppose les équations de l'équilibre constamment vérifiées.

Nous venons de voir que le mouvement vibratoire d'origine mécanique n'a pas d'influence appréciable sur la température de la tige. Il en sera donc, *a fortiori*, de même du mouvement vibratoire d'origine calorifique, qui accompagne le refroidissement, et dont l'amplitude est incomparablement plus faible que celle du mouvement vibratoire mécanique, dans le cas de tiges de longueur modérée. Nous n'avons donc plus qu'à nous occuper de l'influence, sur le refroidissement, du mouvement de contraction qui accompagne celui-ci. Mais, étant donnée la lenteur de ce mouvement, nous pourrons, sans erreur sensible, supposer que la tige est, à chaque instant, en équilibre mécanique et poser, par conséquent,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D\theta.$$

Si donc nous posons

$$C_1 = C + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{T_0 \nu}{E} D,$$

il est facile de voir que l'équation indéfinie de la température deviendra

$$C_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + S - \zeta \theta.$$

Ceci nous montre que l'effet de la contraction est d'accroître, fictivement, la capacité calorifique de la tige, ce qui entraîne une diminution de la vitesse de refroidissement. L'accroissement relatif de la capacité calorifique est

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{T_0 \nu}{CE} D - \frac{\mathcal{E} T_0 D^2}{CE},$$

expression qui, dans le cas du cuivre et à la température de la glace fondante, a pour valeur $2,34 . 10^{-3}$.

Duhamel avait fait la même hypothèse, pour tenir compte de la contraction, dans l'étude du refroidissement de la sphère.