JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

W. ERMAKOFF

Calcul des variations d'après Weierstrass

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 97-137.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1905_6_1__97_0>

Calcul des variations d'après Weierstrass;

Par M. W. ERMAKOFF.

I. — Préface.

Tout le monde sait que le Calcul des variations est redevable d'un progrès réel à Weierstrass, mais peu de mathématiciens savent exactement en quoi consiste sa contribution à cette branche de l'Analyse.

En effet, les leçons de Weierstrass sur le Calcul des variations ne sont pas encore publiées et nous ne pouvons puiser des renseignements sur les travaux du géomètre allemand que dans les publications de E. Zermelo, de A. Kneser et de Nadine Gernet ([1]).

Weierstrass s'est occupé tout spécialement du problème le plus simple, lorsque sous le signe d'intégration se trouvent une seule fonction et sa dérivée première. Weierstrass a cherché à obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un maximum et d'un minimum. Toutefois, il imposait au problème des restrictions inutiles : il supposait que la fonction, sous le signe $\int$, était holomorphe dans un certain domaine.

([1]) E. Zermelo, *Untersuchung zur Variationsrechnung*, Berlin, 1894. — A. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Berlin, 1900. — Nadeschda Gernet, *Untersuchung zur Variationsrechnung*, Göttingue, 1902.

Étant donné que, dans le Calcul des variations, nous avons affaire aux variables réelles, il suffit de supposer que les fonctions que l'on considère soient continues dans un certain domaine. Aucune autre restriction ne doit y être introduite.

Les recherches de Weierstrass l'ont conduit à un résultat très important, qui n'a pas été assez remarqué : il a montré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin infiniment voisin et que le signe de cet accroissement dépend de celui de la fonction à intégrer. Ainsi, il n'y a aucune nécessité de faire des calculs compliqués pour trouver la variation seconde. Le maximum et le minimum dépendent entièrement du signe d'une certaine fonction que j'appellerai *fonction de Weierstrass*. Toutefois, ce résultat n'est exact que dans le cas où certaines fonctions dont dépend la fonction de Weierstrass sont continues sur le chemin infiniment voisin. Weierstrass a, en outre, attiré notre attention sur ce fait que les maxima et les minima peuvent être *forts* et *faibles*. Expliquons-nous. Un chemin est dit *chemin de Lagrange* s'il satisfait aux équations différentielles de Lagrange. Appelons *chemin voisin* un chemin infiniment voisin du chemin de Lagrange. Supposons que l'intégrale prise le long du chemin de Lagrange soit minima. Si les tangentes en deux points correspondants du chemin de Lagrange et un chemin voisin forment entre elles un angle infiniment petit, nous avons un minimum *faible*; si, par contre, les tangentes en deux points correspondants de ces courbes forment un angle fini, nous avons un minimum *fort*. S'il existe un minimum fort, il va sans dire qu'il existe également un minimum faible; mais il peut se présenter des cas où le minimum faible existe et le minimum fort fait défaut.

Dans le Tome 17 du *Journal de Crelle*, Jacobi a montré que la variation seconde ne se réduit à sa plus simple expression que lorsqu'un certain déterminant formé avec les dérivées par rapport aux constantes d'intégration ne devient pas égal à *zéro* sur le chemin de Lagrange. Ce déterminant ne s'annule pas si le chemin de Lagrange ne contient pas de points dits *conjugués*.

Une question se pose alors au sujet du rôle de ces points conjugués dans le Calcul des variations. Cette question n'a pas encore été résolue; toutefois, il a été démontré que, *dans le cas général*, le maximum et le minimum n'existent pas au delà d'un point conjugué ([1]).

Mais il peut se présenter des cas particuliers où il existe un maximum ou un minimum au delà d'un tel point. Ces cas sont tout particulièrement intéressants. Il est indispensable de donner des conditions pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué. Ces conditions sont données dans le paragraphe VII de notre exposé. Les chemins de Lagrange partant d'un même point peuvent avoir une enveloppe; cette enveloppe est le lieu géométrique des points conjugués. Pour certaines raisons, je donne à cette enveloppe le nom de *ligne critique* (*surface critique*). Outre cette enveloppe, il peut exister encore d'autres lignes critiques qui, jusqu'à présent, ont échappé à l'attention des savants. Deux chemins de Lagrange partant d'un même point peuvent être tangents en un autre point. Le lieu des points de contact des chemins de Lagrange est une ligne (surface) critique qui, dans le Calcul des variations, joue le même rôle que l'enveloppe. Le chemin de Lagrange peut, en outre, avoir un point multiple avec des branches tangentes; le lieu géométrique de ces points est une courbe dont le rôle se confond avec celui des deux courbes dont il a été question plus haut. Pour les raisons que je viens d'exposer, il faut compter parmi les points conjugués les points de contact des chemins et des branches de Lagrange. La règle qui permet de reconnaître l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué est bien simple en ceci :

Si la ligne (surface) critique n'a pas de points communs avec le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne le coupe pas, il n'y aura au delà de ce point ni maximum, ni minimum, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant. Si la ligne critique coupe le chemin de Lagrange (au point conjugué) le maximum et le minimum au delà de ce point dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

([1]) A. Kneser, *Die Jacobi'sche Bedingung des Extremus bei einem Allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung* (Communications de la *Société mathématique de Kharkow*, 2e série, t. VII, nº 6).

Voici le résumé du présent Mémoire :

Dans le paragraphe II est donnée la solution du problème le plus simple du Calcul des variations; il y est montré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin.

Dans le paragraphe III est étudié le cas où, sous le signe d'intégration, se trouvent deux fonctions inconnues et leurs premières dérivées. Il y est également démontré que l'accroissement total d'une intégrale peut être exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin, la fonction sous le signe dépendant des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange. Ces intégrales intermédiaires doivent satisfaire à certaines conditions.

Dans le paragraphe IV est donnée une seconde méthode pour trouver les intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange.

Dans le paragraphe V est étudié le cas de maximum et de minimum relatifs.

Dans le paragraphe VI sont établies les conditions nécessaires pour que le maximum et le minimum dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Deux cas douteux y sont élucidés. Le premier de ces cas est celui où la courbe (ou surface) critique a un point commun avec le chemin de Lagrange, mais ne le traverse pas. Le second cas douteux se présente lorsque le chemin de Lagrange contient un point d'indétermination où les intégrales intermédiaires prennent des valeurs indéterminées. Ces deux cas douteux sont résolus dans les deux paragraphes suivants.

Dans le paragraphe VII est donnée une condition fort simple pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué.

Dans le paragraphe VIII est étudié le cas où deux points ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange, celui où les équations du chemin de Lagrange passant par les deux points donnés contiennent des constantes arbitraires. Il est démontré qu'une intégrale prise le long du chemin de Lagrange, entre les points donnés, ne dépend pas des constantes arbitraires. Il s'ensuit que, dans le cas où le chemin de Lagrange contient des points en question, l'intégrale n'est ni maxima ni minima, même lorsque la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

Dans le paragraphe IX, il est montré à quoi se ramène le problème de la détermination du signe de la fonction de Weierstrass. Dans certains cas particuliers, cette détermination est très difficile à faire et il est même impossible d'en donner des règles générales. Cette circonstance se rencontre non seulement dans le Calcul des variations, mais aussi dans les problèmes de maxima et de minima des fonctions algébriques de plusieurs variables lorsque la différentielle du second ordre peut devenir nulle.

Dans le paragraphe X, il est montré comment les résultats trouvés peuvent être appliqués à l'étude du problème le plus général du calcul des variations. On y trouve une nouvelle démonstration fort simple du théorème démontré déjà dans le paragraphe III, à savoir que l'intégration des équations de Lagrange peut être ramenée à la recherche d'une intégrale complète d'une certaine équation aux dérivées partielles. Si l'on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles, les intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange peuvent être trouvées à l'aide de simples différentiations. Plus loin sont données les conditions pour l'existence d'un maximum et d'un minimum au delà d'un point conjugué. A la fin du paragraphe est donnée la forme de la fonction de Weierstrass ainsi qu'une méthode pour déterminer le signe de cette fonction dans le cas d'un maximum et d'un minimum faibles.

II. — Le problème le plus simple du calcul des variations.

Supposons que nous ayons à tracer entre deux points donnés une courbe telle que l'intégrale

$$(1) \qquad \int f(x, y, y')\,dx,$$

prise le long de cette courbe, soit maxima ou minima.

La considération de la première variation nous conduit à l'équation différentielle de Lagrange

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2}$$

Nous supposons que $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ ne s'annule pas.

Dans ce cas, nous avons une équation du second ordre. L'intégrale complète de cette équation contient deux constantes arbitraires qui sont déterminées par la condition que la courbe passe par les deux points donnés.

Soit

$$y'=p(x, y, a) \tag{3}$$

une intégrale première de l'équation différentielle de Lagrange (2).

Nous en déduisons

$$y''=\frac{\partial p}{\partial x}+p\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Démontrons le théorème suivant :

Toute intégrale première (3) *de l'équation différentielle de Lagrange* (2) *transforme l'expression*

$$f(x, y, p)\,\partial x+\frac{\partial f}{\partial p}(\partial y-p\,\partial x) \tag{4}$$

en une différentielle exacte.

Pour que l'expression (4) soit une différentielle exacte, on doit avoir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)=\frac{d}{dy}\left(f-p\frac{\partial f}{\partial p}\right). \tag{5}$$

Dans les deux membres, les dérivées totales doivent être prises en supposant p fonction des variables x et y.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p}+\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}-p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p}-p\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + p\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\,\frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En substituant y' à p, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'} + y'\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} + y''\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui n'est autre que l'équation différentielle de Lagrange (2). Nous en concluons que l'équation (5) est satisfaite, et que, par conséquent, l'expression (4) est une différentielle exacte.

Dans l'exposé qui va suivre, nous supposerons que, dans l'intégrale (3), nous donnons à la constante arbitraire a la valeur qui correspond au chemin de Lagrange considéré.

Si l'expression (4) est une différentielle exacte, son intégrale prise le long d'un chemin arbitraire ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de ses points extrêmes.

Étant donné que $\partial y = y'\partial x$, cette intégrale peut s'écrire

$$\int\left\{f(x,y,p) + (y'-p)\frac{\partial f}{\partial p}\right\}dx.$$

Nous savons que, sur le chemin de Lagrange, $y' = p$. Il en résulte que

$$\int_{\text{Chemin voisin.}}\left\{f(x,y,p) + (y'-p)\frac{\partial f}{\partial p}\right\}\partial x = \int_{\text{Chemin de Lagrange.}} f(x,y,y')\,\partial x$$

La première de ces intégrales est prise le long d'un chemin voisin, la seconde le long du chemin de Lagrange, entre les mêmes points.

En retranchant les deux membres de cette égalité de l'intégrale

$$\int f(x,y,y')\partial x$$

prise le long du chemin voisin, nous trouvons

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\text{Chemin voisin.}}\left\{f(x,y,y') - f(x,y,p) - (y'-p)\frac{\partial f}{\partial p}\right\}\partial x \\ \displaystyle\quad = \int_{\text{Chemin voisin.}} f(x,y,y')\,\partial x - \int_{\text{Chemin de Lagrange.}} f(x,y,y')\partial x \end{cases}$$

Dans le second membre de l'équation, nous avons l'accroissement total de l'intégrale (1). Ainsi, l'accroissement total de l'intégrale (1) est exprimé par une intégrale prise le long d'un chemin voisin. Examinons le signe de cet accroissement. Supposons que le chemin voisin coïncide avec le chemin de Lagrange, sur tout le parcours, à l'exception d'une partie infiniment petite; dans ce cas, le signe de l'intégrale qui se trouve dans le premier membre de l'équation (6) est celui de la fonction sous le signe d'intégration

$$(7) \quad W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Il ne nous reste plus qu'à examiner le signe de cette fonction.

Pour qu'il existe un maximum et un minimum, il faut et il suffit que la fonction de Weierstrass (7) conserve le même signe en chaque point du chemin voisin arbitraire.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas indiqué les conditions nécessaires pour que toutes nos déductions soient exactes. Nous avons dit tout d'abord que nous cherchions une courbe continue entre deux points donnés; il s'ensuit que y doit être une fonction continue entre les limites de l'intégration. Nous supposerons que y' est également une fonction continue entre les mêmes limites, c'est-à-dire que le chemin de Lagrange n'a ni points anguleux ni tangentes parallèles à l'axe des Y. Il a été ensuite question de la première variation; mais, pour l'existence de cette variation, il faut que la fonction sous le signe

$$f(x, y, y')$$

et ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ soient continues sur le chemin voisin.

Telles sont les restrictions qui découlent de la nature du problème.

Passons à l'analyse des résultats établis dans ce paragraphe. Nous avons démontré que l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas de la forme du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. Mais cette conclusion n'est exacte qu'à la condition que les fonctions qui figurent dans l'expression (4) soient continues sur le chemin d'intégration. Il s'ensuit que $p(x, y)$ doit être une fonction continue tant sur le chemin de Lagrange que sur le chemin voisin.

L'intégrale première (3) doit être une fonction continue des variables x et y sur le chemin de Lagrange et sur le chemin voisin.

Le théorème qui fait dépendre le maximum et le minimum de l'intégrale (1) du signe de la fonction de Weierstrass n'est vrai que si toutes ces conditions sont remplies.

III. — Cas de deux fonctions inconnues.

Considérons le cas plus général où l'on demande de tracer entre deux points donnés une courbe telle que l'intégrale

$$(1) \qquad \int f(x, y, z, y', z')\,\partial x$$

prise le long de cette courbe soit maxima ou minima.

L'examen de la première variation nous conduit aux équations différentielles de Lagrange :

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right).$$

Nous supposons que l'expression

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'}\right)^2$$

ne s'annule pas; dans ce cas, les intégrales complètes des équations différentielles (2) contiennent quatre constantes arbitraires qui sont déterminées par la condition que le chemin de Lagrange passe par les deux points donnés.

Soient

$$(3) \qquad y' = p(x, y, z, a, b), \qquad z' = q(x, y, z, a, b),$$

des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2).

Nous en déduisons :

$$y'' = \frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad z'' = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Par analogie avec le dernier paragraphe, nous devons nous attendre à ce que l'expression

$$(4)\qquad f(x, y, z, p, q)\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x)$$

soit une différentielle exacte.

Il faut pour cela que

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dy}\left(f - p\dfrac{\partial f}{\partial p} - q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right), \\ \dfrac{d}{dz}\left(f - p\dfrac{\partial f}{\partial p} - q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right), \\ \qquad\qquad \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right) = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right). \end{cases}$$

Montrons que les équations de Lagrange (2) découlent des équations (5). Observons tout d'abord que, dans les égalités (5), les dérivées totales doivent être prises en supposant p et q fonctions de x, y et z. Multiplions la troisième des égalités (5) par q et ajoutons à la première; nous obtiendrons

$$\frac{d}{dy}\left(f - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}\right) + q\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) + q\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Substituons dans cette dernière équation aux dérivées totales leurs expressions. Après quelques réductions nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial y} + q\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial z}\right).$$

En substituant y' et z' à p et q, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial x} + y'\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial y} + z'\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z} + y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + z''\frac{\partial^2 f}{\partial y'\,\partial z'},$$

qui n'est autre que la première des équations (2).

Ainsi, les équations de Lagrange (2) découlent des égalités (5). Mais la réciproque n'a pas lieu; des deux équations de Lagrange (2) ne peuvent pas être déduites les trois égalités (5). Il s'ensuit qu'en général l'expression (4) ne sera pas une différentielle exacte pour un système quelconque d'intégrales intermédiaires (3).

Montrons que les intégrales intermédiaires (3) pourront toujours être choisies de façon que l'expression (4) soit une différentielle exacte.

Dans ce but, considérons les équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x}=f(x,y,z,y',z')-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}-z'\dfrac{\partial f}{\partial z'},\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y'},\qquad \dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial z'},\end{array}\right.$$

où v est une fonction inconnue auxiliaire de x, y et z.

En éliminant y' et z' de ces équations, nous obtenons une équation aux dérivées partielles

$$\Theta\left(x,y,z,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.$$

Soit

$$v=v(x,y,z,a,b)+c$$

une intégrale complète de cette équation.

En portant la valeur trouvée de v dans les équations (6), ces équations ne seront plus indépendantes; l'une d'elles sera la conséquence des deux autres. Par conséquent les valeurs de y' et de z' tirées de deux des équations (6) satisferont également à la troisième équation.

Soient

$$(7)\qquad y'=p(x,y,z,a,b),\qquad z'=q(x,y,z,a,b)$$

ces solutions.

En portant les valeurs de v, y' et z' dans les équations (6), nous obtiendrons des identités.

En multipliant ces identités par ∂x, ∂y, ∂z, et en les ajoutant, nous aurons

$$dv=f(x,y,z,p,q)\,\partial x+\frac{\partial f}{\partial p}(\partial y-p\,\partial x)+\frac{\partial f}{\partial q}(\partial z-q\,\partial x).$$

Nous en concluons que les égalités (7) transforment l'expression (4) en une différentielle exacte. Il reste à montrer que les égalités (7) seront des intégrales intermédiaires des équations de Lagrange (2). Cela résulte de ce que les égalités (5) sont satisfaites; or, de ces égalités, comme nous l'avons démontré plus haut, découlent les équations de Lagrange (2).

Dans l'exposé qui va suivre, nous supposerons toujours que, dans les intégrales intermédiaires (7), les valeurs des constantes arbitraires a et b sont celles qui correspondent au chemin de Lagrange considéré.

Supposons maintenant que les intégrales intermédiaires (7) soient choisies de telle façon que l'expression (4) devienne une différentielle exacte; dans ce cas, l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. En remarquant que $\partial y = y'\,\partial x$, $\partial z = z'\,\partial x$, cette intégrale sera

$$\int\left[f(x, y, z, p, q) + \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q)\right]\partial x.$$

Étant donné que, sur le chemin de Lagrange, $y' = p$, $z' = q$, nous aurons l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{\text{Chemin voisin.}}\left[f(x, y, z, p, q) + \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(z' - q)\right]\partial x \\ = \int_{\text{Chemin de Lagrange.}} f(x, y, z, y', z')\,\partial x.\end{aligned}$$

La première intégrale est prise le long d'un chemin voisin, la seconde le long du chemin de Lagrange, entre les mêmes points.

En retranchant les deux membres de cette égalité de l'intégrale

$$\int_{\text{Chemin voisin.}} f(x, y, z, y', z')\,\partial x,$$

prise le long du même chemin voisin, le second membre de l'égalité ainsi obtenue représente l'accroissement total de l'intégrale (1) que nous désignerons par Δ.

Nous avons donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \int\Big[&\underset{\text{Chemin voisin.}}{f(x,y,z,y',z')} - f(x,y,z,p,q) \\ &- \frac{\partial f}{\partial p}(y'-p) - \frac{\partial f}{\partial q}(z'-q)\Big]dx = \Delta. \end{aligned}\right.$$

Ainsi l'accroissement total de l'intégrale se trouve exprimé par l'intégrale (8) prise le long d'un chemin voisin. Supposons que le chemin voisin coïncide avec le chemin de Lagrange, sur tout son parcours, à l'exception d'une partie infiniment petite de ce parcours; dans ce cas, le signe de l'intégrale (8) est le même que celui de la fonction sous le signe d'intégration :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} W(x,y,z,y',z') &= f(x,y,z,y',z') - f(x,y,z,p,q) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial p}(y'-p) - \frac{\partial f}{\partial q}(z'-q). \end{aligned}\right.$$

Pour l'existence d'un maximum et d'un minimum, il faut et il suffit que la fonction de Weierstrass (9) *conserve un signe constant le long d'un chemin voisin arbitraire.* Pour le maximum et le minimum faibles, $y'-p$ et $z'-q$ sont infiniment petits; pour le maximum et le minimum forts, ils ont une grandeur finie.

A quelles conditions les résultats que nous venons de trouver sont-ils exacts? Nous supposons tout d'abord que les fonctions inconnues y, z et leurs dérivées y', z' soient continues entre les limites de l'intégration.

D'autre part, la première variation ne peut exister que dans le cas où la fonction $f(x,y,z,y',z')$ et ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'}$ sont continues le long d'un chemin voisin arbitraire, ce que nous supposerons toujours.

En outre, nous avons vu que l'intégrale de l'expression (4) ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points extrêmes. Ce résultat n'est exact que dans le cas où les fonctions entrant dans l'expression (4) sont continues sur le chemin le long duquel on prend l'intégrale. Mais l'expression (4) contient $p(x,y,z,a,b)$, $q(x,y,z,a,b)$;

ces fonctions doivent donc être continues sur un chemin voisin arbitraire. Nous avions déjà supposé que y' et z' sont continues le long du chemin de Lagrange; il résulte des équations (7) que p et q sont également continues le long du chemin de Lagrange, mais il ne s'ensuit nullement que ces fonctions soient continues sur le chemin voisin.

Nous devons donc tenir compte de la condition suivante :

Les intégrales intermédiaires (3) *doivent être des fonctions continues des variables x, y et z, en tout point d'un chemin voisin arbitraire.*

Ce n'est qu'en imposant les restrictions indiquées plus haut que nous pourrons affirmer l'exactitude du théorème établi ci-dessus concernant la dépendance du maximum et du minimum du signe de la fonction de Weierstrass.

IV. — Deuxième méthode pour la recherche d'intégrales intermédiaires.

Revenons à notre dernier problème, à la recherche du maximum et du minimum de l'intégrale

$$\int f(x, y, z, y', z')\, dx.$$

Le chemin de Lagrange est défini par les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right).$$

Nous avons montré que les intégrales intermédiaires

$$y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z)$$

pouvaient être choisies de telle façon que l'expression

$$(2) \qquad f(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x)$$

devienne une différentielle exacte. Le problème avait été ramené à l'intégration d'une certaine équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre. Exposons maintenant une autre méthode pour la recherche d'intégrales intermédiaires.

Déterminons les intégrales des équations différentielles de Lagrange (1) de telle façon qu'elles représentent une courbe passant par un point donné (x_0, y_0, z_0) situé sur le chemin de Lagrange. Ces intégrales contiennent deux constantes arbitraires

$$y=\varphi(x, a, b), \qquad z=\psi(x, a, b). \tag{3}$$

Étant donné que la courbe représentée par ces équations passe par le point donné (x_0, y_0, z_0), on aura les identités

$$y_0 \equiv \varphi(x_0, a, b), \qquad z_0 \equiv \psi(x_0, a, b). \tag{4}$$

Les équations (3) nous donnent

$$y'=\varphi'(x, a, b), \qquad z'=\psi'(x, a, b). \tag{5}$$

En tirant a et b des équations (3) et en substituant leurs valeurs dans les formules (5), nous obtiendrons les intégrales intermédiaires cherchées

$$y'=p(x, y, z), \qquad z'=q(x, y, z),$$

qui transforment l'expression (2) en une différentielle exacte. Pour le prouver, considérons l'intégrale

$$\mathrm{V}=\int_{x_0}^{x} f(x, y, z, y', z')\,\partial x. \tag{6}$$

En remplaçant y, z, y', z' par leurs expressions (3) et (5), V devient une fonction des trois quantités, x, a et b. Prenons la différentielle totale de cette fonction par rapport à ces trois quantités

$$\left\{\begin{aligned} d\mathrm{V} &= f(x, y, z, y', z')\,\delta x \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial f}{\partial z'}\delta z'\right)\partial x, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

en posant

$$\delta y = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\partial b, \qquad \delta z = \frac{\partial \psi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi}{\partial b}\partial b,$$

$$\delta y' = \frac{\partial \varphi'}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi'}{\partial b}\partial b, \qquad \delta z' = \frac{\partial \psi'}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi'}{\partial b}\partial b.$$

En vertu des équations de Lagrange (1), nous pouvons substituer dans la formule (7) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)$ à $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

De même, on peut remplacer $\delta y'$ et $\delta z'$ par $\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}$, $\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}$.

L'expression placée sous le signe $\int$ devient une différentielle totale, et l'on aura, en intégrant,

$$dV = f(x, y, z, y', z')\partial x + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z - \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right|_{x=x_0}.$$

Dans cette expression, les deux derniers termes disparaissent, puisque δy et δz sont nuls pour $x = x_0$ en vertu des identités (4). Nous aurons donc

$$(8) \qquad dV = f(x, y, z, y', z')\partial x + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z'}\delta z.$$

Substituons, dans cette dernière formule, à a et b leurs valeurs tirées des équations (3); y et φ' deviennent égales à p, et z' et ψ' à q. En différentiant ensuite les équations (3), par rapport à toutes les variables, nous trouvons

$$\partial y = \varphi'\,\partial x + \frac{\partial \varphi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\partial b, \qquad \partial z = \psi'\,\partial x + \frac{\partial \psi}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \psi}{\partial b}\partial b;$$

d'où

$$\delta y = \partial y - p\,\partial x, \qquad \delta z = \partial z - q\,\partial x.$$

La formule (8) prend donc en définitive la forme suivante :

$$(9) \qquad dV = f(x, y, z, p, q)\partial x + \frac{\partial f}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial f}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x).$$

En résumé :

Substituons à y, z, y' et z' leurs expressions (3) et (5), et évaluons *l'intégrale* (6); *remplaçons ensuite a et b par leurs expressions tirées des équations* (3), *la différentielle totale de la fonction ainsi obtenue s'exprimera par la formule* (9).

V. — Conditions accessoires.

Supposons que nous ayons à trouver le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int f \partial x,$$

de façon qu'on ait en même temps

$$(1)\qquad \int f_1 \partial x = A_1, \qquad \int f_2 \partial x = A_2, \qquad \int f_3 \partial x = A_3, \qquad \ldots.$$

le nombre de ces équations de condition étant quelconque et toutes les intégrales étant prises entre les mêmes limites.

Ce problème peut être ramené à la recherche du maximum et du minimum absolu de l'intégrale

$$\int F \partial x,$$

dans laquelle

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \ldots,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des facteurs constants. Ces facteurs peuvent être choisis de façon à satisfaire aux égalités de condition (1).

Outre les conditions mentionnées plus haut, on rencontre dans le calcul des variations des conditions d'un autre genre. Examinons le cas le plus simple.

Supposons que nous ayons à déterminer y et z en fonction de x de façon à satisfaire à l'équation

$$(2)\qquad \varphi(x, y, z, y', z') = 0,$$

et que l'intégrale

$$(3) \qquad \int F(x, y, z, y', z')\,\partial x$$

soit maxima ou minima.

Dans le calcul des variations, ce problème est résolu de la façon suivante. Considérons la fonction

$$\Phi = F + \mu\varphi,$$

μ étant une fonction inconnue auxiliaire de la variable x. On détermine les trois fonctions inconnues à l'aide de l'équation (2) et des équations de Lagrange

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\right).$$

Ici encore, on peut démontrer que les intégrales intermédiaires

$$(4) \quad y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z), \qquad \mu = \mu(x, y, z)$$

peuvent être choisies de telle façon que l'expression

$$(5) \quad \Phi(x, y, z, p, q)\,\partial x + \frac{\partial\Phi}{\partial p}(\partial y - p\,\partial x) + \frac{\partial\Phi}{\partial q}(\partial z - q\,\partial x)$$

devienne une différentielle exacte. Ces intégrales intermédiaires peuvent être trouvées de deux façons différentes, comme nous l'avons indiqué dans les paragraphes III et IV.

Étant donné que l'expression (5) devient une différentielle exacte, nous arrivons à cette conclusion que l'accroissement total de l'intégrale (3) peut être exprimé par l'intégrale

$$\int\Big[\Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) - \frac{\partial\Phi}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial\Phi}{\partial q}(z' - q)\Big]\,\partial x,$$

prise le long d'un chemin voisin.

Le signe de cette intégrale dépend de celui de la fonction sous le signe $\int$:

$$(6)\quad \begin{cases} W(x, y, z, y', z') = \Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial\Phi}{\partial p}(y' - p) - \dfrac{\partial\Phi}{\partial q}(z' - q). \end{cases}$$

La seule différence entre ce problème et le problème précédent est que, dans le cas présent, il faut examiner le signe de la fonction de Weierstrass (6) pour celles des valeurs des variables qui satisfont à l'équation de condition (2).

Les conditions restrictives sont ici les mêmes qu'auparavant. Tout d'abord, les fonctions y, z, y', z' et μ doivent être continues entre les limites d'intégration; en second lieu, la fonction Φ et ses dérivées $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z'}$ doivent être continues le long du chemin voisin arbitraire.

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) ne dépendent du signe de la fonction de Weierstrass (6) que dans le cas où les intégrales intermédiaires (4) sont continues le long d'un chemin voisin arbitraire.

L'analyse précédente peut être étendue à un nombre quelconque de variables, avec un nombre quelconque de conditions accessoires.

VI. — Dépendance du maximum et du minimum du signe de la fonction de Weierstrass.

Bornons-nous à l'étude de l'intégrale la plus simple

$$(1)\qquad \int f(x, y, y')\,\partial x;$$

mais les résultats que nous allons établir peuvent être étendus au cas le plus général du calcul des variations.

Nous avons montré au paragraphe II que l'accroissement total de l'intégrale (1) s'exprime par l'intégrale :

$$\int \left[f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p) \right] \partial x,$$

prise le long d'un chemin voisin; nous avons vu que le signe de la dernière intégrale dépend de celui de la fonction sous le signe $\int$:

$$W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p).$$

Ce résultat n'est exact que dans le cas où l'intégrale intermédiaire

$$(2) \qquad y' = p(x, y)$$

est une fonction continue des deux variables x et y sur le chemin voisin.

Nous supposons que y' est continue le long du chemin de Lagrange; il s'ensuit que $p\ (x,\ y)$ est également continue le long du même chemin, l'équation (2) étant vérifiée identiquement sur le chemin de Lagrange. Mais, si la fonction $p\ (x, y)$ est continue sur le chemin de Lagrange, il ne s'ensuit nullement que cette fonction soit également continue sur un chemin voisin.

Sur ce chemin, la fonction $p(x,y)$ peut être discontinue dans deux cas que nous indiquerons plus loin.

Supposons que la fonction $p(x,y)$ ait un point critique sur le chemin de Lagrange.

On appelle point critique un point où plusieurs valeurs d'une fonction multiforme deviennent égales.

Supposons qu'en parcourant le chemin de Lagrange, la fonction $p(x,y)$ change de valeur, en passant par le point critique. Il est clair que la fonction $p(x,y)$ ne cesse pas d'être continue, attendu qu'au point critique $p_1(x,y) = p(x,y)$, $p_1(x,y)$ étant la nouvelle valeur de la fonction. Si nous pouvons trouver sur le chemin voisin un point critique pour lequel $p_1 = p$, la fonction $p(x,y)$ sera également continue sur ce chemin. Mais si, au contraire, il n'y a pas de point critique sur le chemin voisin, il est impossible, en parcourant ce chemin, de passer d'une manière continue de la valeur p à la valeur p_1. Dans ce cas, le résultat trouvé par nous est inexact : le maximum et le minimum ne peuvent pas être déterminés par le signe de la fonction de Weierstrass, et il y a incertitude.

Examinons ces cas avec plus de détails.

La fonction $p(x,y)$ contient deux variables; par conséquent, les points critiques de cette fonction seront situés sur une certaine *ligne critique :*

$$y = \psi(x). \tag{3}$$

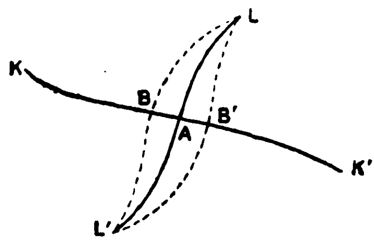
Tout d'abord, faisons observer que, sous le nom de chemin de Lagrange, nous n'entendons que la partie de ce chemin le long de laquelle est prise l'intégrale (1).

Si la ligne critique (3) n'a pas de point commun avec le chemin de Lagrange, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

Supposons maintenant que la ligne critique (3) a un point commun avec le chemin de Lagrange; dans ce cas, il faudrait voir si la ligne critique coupe le chemin de Lagrange ou non.

Supposons que la ligne critique KK′ coupe le chemin de Lagrange LL′ au point A (*fig.* 1). Dans ce cas, sur tout chemin voisin,

Fig. 1.

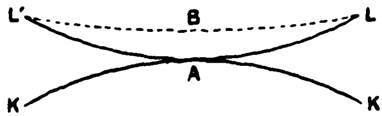


nous pouvons trouver un point critique B ou B′ où p se transforme en p_1, sans solution de continuité. Dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass.

Supposons que la ligne critique KK′ ne traverse pas le chemin de Lagrange LL′ au point A commun aux deux courbes (*fig.* 2). Dans ce cas, il n'existe pas de point critique sur le chemin voisin LBL′ et, par conséquent, on ne peut pas transformer d'une manière continue p en p_1 en parcourant LBL′. Dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) restent douteux. En d'autres termes :

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) *sont douteux lorsque la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne le traverse pas en ce point.*

Fig. 2.



Ce cas douteux sera élucidé dans le paragraphe suivant.

Une fonction de plusieurs variables peut avoir un point d'indétermination.

Nous appellerons point d'indétermination *un point où une fonction de plusieurs variables a une valeur indéterminée qui dépend du chemin qui nous amène à ce point.*

Considérons, par exemple, la fonction

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Au point $(x = 0, y = 0)$ cette fonction peut prendre une valeur arbitraire, ce qui est facile à montrer. Supposons qne nous approchions du point $(x = 0, y = 0)$ en suivant la parabole $y = 2hx^2 - x$; nous aurons

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{2h}{1+(2hx-1)^2}.$$

Pour $x = 0$, la fonction devient égale à h.

Supposons maintenant que la fonction $p(x, y)$ ait un point d'indétermination sur le chemin de Lagrange; l'existence d'un tel point ne rend pas la fonction discontinue sur ce chemin. Nous pouvons former un chemin voisin avec deux courbes qui se rencontrent au point d'indétermination sous un angle quelconque. Sur un tel chemin, la fonction $p(x, y)$ sera discontinue. Dans ce cas, le maximum et le minimum restent douteux.

Le maximum et le minimum de l'intégrale (1) *restent douteux* *si l'intégrale intermédiaire* (2) *a un point d'indétermination sur le chemin de Lagrange.*

Ce cas douteux sera élucidé dans le paragraphe VIII.

Il ne nous reste plus qu'à indiquer à quels signes on peut reconnaître d'avance si la ligne critique (3) traverse le chemin de Lagrange ou non. Cette question peut être résolue d'une façon très simple. Prenons deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de la ligne critique (3); substituons les coordonnées de ces points dans l'intégrale intermédiaire (2). Si y' est réelle aux deux points, la ligne critique traverse le chemin de Lagrange; si y' est imaginaire pour l'un des deux points et réelle pour l'autre, la ligne critique (3) ne peut pas traverser le chemin de Lagrange; enfin, si y' est imaginaire pour les deux points, la ligne critique n'a pas de points communs avec le chemin de Lagrange.

Pour avoir deux points situés de part et d'autre de la ligne critique (3), nous supposerons la coordonnée x arbitraire, et la coordonnée

$$y = \psi(x) \pm \delta^2,$$

où δ est une quantité infiniment petite.

Supposons, par exemple, que l'intégrale intermédiaire ait la forme suivante :

$$y' = 3x^2 + (y - x^3)\sqrt{y - x^2}. \tag{4}$$

Les deux valeurs de la fonction qui figure au second membre sont égales entre elles dans les deux cas suivants :

$$y = x^2, \tag{5}$$

$$y = x^3. \tag{6}$$

La ligne critique (5) ne peut pas traverser le chemin de Lagrange, car, en posant $y = x^2 - \delta^2$, la valeur de y' tirée de l'équation (4) est imaginaire. En ce qui concerne la ligne critique (6), elle traverse tout chemin de Lagrange, car, en posant $y = x^2 \pm \delta^2$, la valeur de y' tirée de l'équation (4) est réelle ([1]).

VII. — Points conjugués.

Prenons de nouveau l'intégrale la plus simple

$$\int f(x, y, y')\,dx. \tag{1}$$

Tout ce que nous allons démontrer pourra s'appliquer au cas le plus général. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que le maximum et le minimum de l'intégrale (1) restaient douteux lorsque la ligne critique, tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne traverse pas ce chemin. Cette circonstance a pu se produire par suite du choix spécial de l'intégrale intermédiaire. En effet, l'intégrale intermédiaire est susceptible de formes diverses. Voyons quelle forme il faut donner à l'intégrale intermédiaire pour que la question de l'existence du maximum et du minimum puisse être résolue sans le moindre doute.

Supposons que nous sachions trouver l'intégrale complète de l'équation différentielle de Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Déterminons les constantes d'intégration de telle façon que la ligne représentée par l'intégrale passe par le point initial (x_0, y_0) du chemin de Lagrange considéré. Après cela, l'équation contiendra encore une constante arbitraire

$$y = \varphi(x, a). \tag{2}$$

En substituant la valeur de a tirée de cette équation dans l'équation

$$y' = \varphi'(x, a),$$

([1]) Si, bien entendu, x est plus grand que l'unité; dans le cas contraire, la ligne critique (3) n'a pas de point commun avec le chemin de Lagrange.

nous obtiendrons l'intégrale

$$y' = p(x, y) \tag{3}$$

sous la forme qui permet de résoudre les cas douteux indiqués dans le paragraphe VI.

Nous n'examinerons que le premier de ces cas.

Remarquons tout d'abord que l'équation (2) représente le système des chemins de Lagrange passant par le point donné (x_0, y_0).

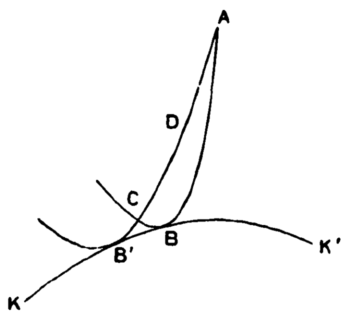
Supposons que la fonction (3) ait une ligne critique, dont l'équation est

$$y = \psi(x). \tag{4}$$

Il est convenu d'appeler *point conjugué d'un point initial* (x_0, y_0) le point commun à la ligne critique (4) et au chemin de Lagrange. Nous avons à résoudre la question de l'existence du maximum et du minimum au delà du point conjugué.

Au paragraphe VI nous avons montré que le cas est douteux lorsque la ligne critique (4), tout en ayant un point commun avec le chemin de Lagrange, ne traverse pas ce chemin. Ce cas douteux est résolu ici dans ce sens qu'*au delà d'un tel point conjugué, il n'existe ni maximum, ni minimum*. En effet, menons par le point donné A deux

Fig. 3.



chemins de Lagrange infiniment voisins l'un de l'autre; ces deux chemins se couperont nécessairement en un autre point C (*fig.* 3).

Supposons que la fonction de Weierstrass soit positive. Étant donné que le chemin ADC ne contient pas de point critique, l'intégrale (1) prise le long de ce chemin est minima, cette intégrale est donc plus petite que celle prise le long du chemin de Lagrange ABC infiniment voisin du chemin de Lagrange ADC. Il s'ensuit que l'intégrale (1) prise le long du chemin ABC n'est pas minimum bien que la fonction de Weierstrass soit positive. C. Q. F. D.

Faisons ici quelques remarques au sujet de la ligne critique (4).

Il peut arriver que la ligne critique (4) soit une intégrale de l'équation différentielle (3). Dans ce cas, la ligne critique (4) est l'enveloppe des chemins de Lagrange issus du point (x_0, y_0). C'est ce dernier cas qui est étudié ordinairement dans les Traités du calcul des variations. Mais il peut y avoir d'autres cas.

Il peut arriver que la ligne critique (4) ne soit pas une intégrale de l'équation différentielle (3). Dans ce cas, la ligne critique (4) ne sera plus l'enveloppe des chemins de Lagrange, mais elle contiendra ou les points de contact des chemins de Lagrange issus d'un même point (x_0, y_0), ou bien les points multiples des chemins de Lagrange à branches tangentes.

VIII. — Cas où deux points ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange.

Reprenons l'étude de l'intégrale la plus simple

$$\int f(x, y, y')\,\partial x. \tag{1}$$

L'équation différentielle de Lagrange est

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right). \tag{2}$$

Déterminons l'intégrale complète de telle façon que la courbe passe par le point initial (x_0, y_0) du chemin de Lagrange. Soit

$$y = \varphi(x, a) \tag{3}$$

cette intégrale. Nous avons donc l'identité

$$y_0 \equiv \varphi(x_0, a). \tag{4}$$

En portant dans l'équation

$$y' = \varphi'(x, a)$$

la valeur de a tirée de l'équation (3), nous obtiendrons l'intégrale intermédiaire

$$y' = p(x, y), \tag{5}$$

qui nous permettra de résoudre les cas douteux indiqués dans le paragraphe VI. Le premier de ces cas douteux est déjà résolu; occupons-nous maintenant du second.

Montrons tout d'abord que l'intégrale intermédiaire (5) devient indéterminée au point initial (x_0, y_0). En effet, l'équation (5) donne la direction de la tangente en un point quelconque du chemin de Lagrange (3); mais, au point (x_0, y_0), tous les chemins de Lagrange représentés par l'équation (3) se rencontrent sous des angles différents. Il s'ensuit que $p(x_0, y_0)$ devient indéterminée; (x_0, y_0) est donc un point d'indétermination de la fonction $p(x, y)$.

Supposons qu'il existe un autre point (x_1, y_1) par lequel passent tous les chemins de Lagrange représentés par l'équation (3); nous aurons donc l'identité

$$y_1 \equiv \varphi(x_1, a). \tag{6}$$

Ce point doit être un point d'indétermination de la fonction $p(x, y)$. Ainsi, il existe deux points, (x_0, y_0) et (x_1, y_1), qui ne déterminent pas complètement le chemin de Lagrange. Appelons ces points : *points opposés* [1].

Deux points sont dits opposés *si les équations du chemin de Lagrange passant par ces points contiennent une constante arbitraire.*

Montrons maintenant que *l'intégrale* (1) *prise le long du chemin de Lagrange entre deux points opposés ne dépend pas de la con-*

[1] Dans la recherche du chemin le plus court sur la surface d'une sphère, ces points sont réellement diamétralement opposés.

stante arbitraire figurant dans l'équation du chemin de Lagrange (3).

Posons

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,\partial x. \tag{7}$$

En substituant à y sa valeur (3), l'intégrale (7) devient une fonction de a. Prenons la dérivée par rapport à a :

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi'}{\partial a} \right) \partial x.$$

En vertu de l'équation de Lagrange (2), nous pouvons remplacer $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$; en outre, $\frac{\partial \varphi'}{\partial a}$ peut être remplacé par $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)$. Après ces substitutions, l'expression sous le signe $\int$ se transforme en une différentielle exacte :

$$\frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{x_1} d\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right).$$

Nous en déduisons

$$\frac{dV}{da} = \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{x=x_1} - \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{x=x_0}.$$

Le second membre est, en vertu des identités (4) et (6), égal à zéro. Donc

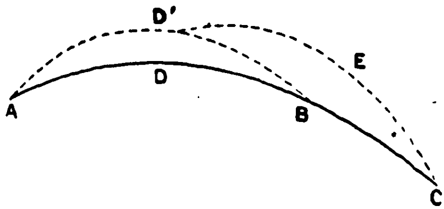
$$\frac{dV}{da} = 0.$$

Par conséquent, l'intégrale (7) ne dépend pas de a.

Il résulte de ce théorème qu'au delà d'un point opposé, l'intégrale (1) n'est pas minima même dans le cas où la fonction de Weierstrass est positive.

Soient, en effet, A et B deux points opposés situés sur le chemin de Lagrange AC (*fig.* 4). Entre ces deux points, on peut tracer un chemin de Lagrange AD'B infiniment voisin du chemin donné. En vertu du théorème que nous venons de démontrer, les valeurs de l'intégrale (1) prise le long des chemins ADB et AD′B sont égales entre elles. D'autre part, le chemin D′BC se compose des branches de deux chemins de Lagrange. On peut donc tracer un chemin de La-

Fig. 4.



grange D′EC infiniment voisin du chemin D′BC. Nous supposons que la fonction de Weierstrass est positive; il s'ensuit que la valeur de l'intégrale (1), prise le long du chemin D′EC, est plus petite que celle de la même intégrale prise le long du chemin D′BC. Il résulte de ce qui précède que la valeur de l'intégrale (1) prise le long du chemin de Lagrange ADBC est plus grande que celle de la même intégrale prise le long du chemin voisin AD′EC. Ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

Si le chemin de Lagrange contient deux points opposés, l'intégrale (1) *prise le long d'un tel chemin n'est ni maxima ni minima, même dans le cas où la fonction de Weierstrass est toujours positive ou toujours négative.*

Les résultats établis dans les paragraphes VI, VII et VIII peuvent être aisément étendus au cas le plus général du calcul des variations.

IX. — Détermination du signe de la fonction de Weierstrass.

Montrons en quelques mots à quoi se réduit la recherche du signe de la fonction de Weierstrass.

Commençons par le cas le plus simple :

$$(1) \qquad \int f(x, y, y')\,\partial x.$$

La fonction de Weierstrass, comme nous l'avons montré dans le paragraphe II, a pour expression

$$(2)\qquad W(x, y, y') = f(x, y, y') - f(x, y, p) - \frac{\partial f}{\partial p}(y' - p).$$

Pour un maximum et un minimum faibles, $y' - p$ est une quantité infiniment petite.

Montrons comment on procède dans ce cas, pour déterminer le signe de la fonction (2).

Le signe de cette fonction est le même que celui de l'expression

$$(3)\qquad \frac{2\,W(x, y, y')}{(y' - p)^2}.$$

Pour $y' = p$, cette expression se présente sous une forme indéterminée; sa valeur vraie est

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 f(x, y, p)}{\partial p^2}.$$

Lorsque le point (x, y) situé sur le chemin voisin se rapproche du chemin de Lagrange, p tend vers y' et l'expression (4) vers

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 f(x, y, y')}{\partial y'^2}.$$

Les fonctions (3), (4) et (5) diffèrent entre elles de quantités infiniment petites; le signe de la fonction (5) sera donc le même que celui de la fonction (3). Par conséquent le problème se ramène à la recherche du signe de la fonction (5) en chaque point du chemin de Lagrange.

Si la fonction (5) conserve un signe constant, l'intégrale (1) est, suivant le signe de (5), maxima ou minima.

Il peut arriver que, en un point (ξ, η) du chemin de Lagrange, la fonction (5) devienne égale à zéro ou à ∞; dans ce cas, le signe de la fonction (3) reste inconnu, mais on posera

$$x = \xi + \delta x, \qquad y = \eta + \delta y, \qquad y' = p + \delta p,$$

et l'on examinera le signe de la fonction (2) pour des valeurs infiniment petites de δx, δy, δp. On ne peut pas donner de règle générale pour cette analyse.

Pour le maximum et le minimum forts, $y' - p$ est finie. Dans ce cas, il est impossible d'indiquer de règle générale pour la détermination du signe de la fonction de Weierstrass (2).

Considérons maintenant l'intégrale plus générale

$$\int F(x, y, z, y', z')\,dx. \tag{6}$$

Nous avons montré au paragraphe III que la fonction de Weierstrass a la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} W = F(x, y, z, y', z') &- F(x, y, z, p, q) \\ &- \frac{\partial F}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial F}{\partial q}(z' - q). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Pour le maximum et le minimum faibles, il faut poser

$$y' = p + \delta p, \qquad z' = q + \delta q,$$

où δp et δq sont des quantités infiniment petites. En faisant cette substitution et en ne conservant que les termes de l'ordre le moins élevé, nous aurons

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\delta p\,\delta q + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\delta q^2. \tag{8}$$

Si le point du chemin voisin se rapproche du chemin de Lagrange, p et q tendent vers y' et z', et $2W$ vers

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\,\partial z'}\delta p\,\delta q + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\delta q^2. \tag{9}$$

La différence entre les fonctions (8) et (9) s'exprime par des quantités infiniment petites d'ordres supérieurs au second; ces fonctions sont donc du même signe. Il reste à examiner le signe de l'expression (9) en chaque point du chemin de Lagrange pour des valeurs arbitraires de δp et de δq.

Si l'expression (9) conserve un signe constant, l'intégrale (6) est, suivant le signe de (9), maxima ou minima.

Il peut arriver que l'expression (9), tout en conservant un signe constant, s'annule en un point (ξ, η, ζ) du chemin de Lagrange pour des valeurs particulières de δp et de δq. Dans ce cas, le signe de la fonction de Weierstrass (7) reste inconnu. Ce signe reste également inconnu lorsqu'en un point quelconque (ξ, η, ζ) du chemin de Lagrange, l'expression (9) devient infinie. Dans ce cas, il faut poser $x = \xi + \delta x$, $y = \eta + \delta y$, $z = \zeta + \delta z$, $y' = p + \delta p$, $z' = q + \delta q$, et examiner le signe de la fonction (7) pour des valeurs infiniment petites de δx, δy, δz, δp, δq. Il est impossible d'indiquer des règles générales pour une pareille recherche. Il est également impossible de donner des règles générales pour la recherche du maximum et du minimum forts.

Supposons maintenant que les fonctions inconnues soient liées par l'équation de condition

$$\varphi(x, y, z, y', z') = 0. \tag{10}$$

Il a été démontré, dans le paragraphe V, que la fonction de Weierstrass était dans ce cas :

$$W = \Phi(x, y, z, y', z') - \Phi(x, y, z, p, q) - \frac{\partial \Phi}{\partial p}(y' - p) - \frac{\partial \Phi}{\partial q}(z' - q),$$

où

$$\Phi = F + \mu\varphi.$$

Il faut tenir compte de ce que les intégrales intermédiaires

$$y' = p(x, y, z), \qquad z' = q(x, y, z)$$

doivent satisfaire à l'équation (10). Il est facile de montrer que, dans le cas du maximum et du minimum faibles, le problème se ramène à l'examen du signe de l'expression

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\delta p^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'\,\partial z'}\delta p\,\delta q + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}\delta q^2,$$

en chaque point du chemin de Lagrange pour celles des valeurs de δp

et de δq qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta p + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\delta q = 0.$$

Les règles permettant de déterminer le signe de la fonction de Weierstrass dans les cas considérés dans ce paragraphe peuvent être étendues facilement au problème le plus général du calcul des variations.

X. — Problème général du calcul des variations.

Montrons comment les résultats obtenus plus haut peuvent être étendus au problème le plus général du calcul des variations.

Il s'agit de trouver le maximum et le minimum de l'intégrale

$$(1) \qquad \int \mathrm{F}(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\,\partial x,$$

les variables étant liées par les équations :

$$(2) \qquad \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Le nombre de ces relations doit être inférieur à celui des variables, $m < n$.

Nous admettons qu'il est impossible d'éliminer des équations (2) toutes les dérivées $y'_1, \ldots, y'_n$; sans cela quelques-unes d'entre les variables pourraient être exprimées en fonctions des autres et le nombre des variables serait réduit.

Nous supposons également que l'intégrale (1) soit prise entre des points donnés, c'est-à-dire que $y_1, \ldots, y_n$ prennent des valeurs données pour chacune des limites.

Dans le calcul des variations, ce problème est résolu de la façon suivante : Posons

$$\Phi = \mathrm{F} + \mu_1\varphi_1 + \ldots + \mu_m\varphi_m,$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sont des fonctions inconnues auxiliaires. Les fonctions $y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ peuvent être déterminées à l'aide des équations (2) et des équations suivantes de Lagrange :

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il a été montré dans le paragraphe III que l'intégration des équations différentielles de Lagrange peut être ramenée à celle d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Nous allons donner ici une démonstration plus simple de ce même théorème.

Posons

$$(4) \qquad \Phi = \frac{\partial v}{\partial x} + y'_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} + \ldots + y'_n \frac{\partial v}{\partial y_n},$$

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y'_i} = \frac{\partial v}{\partial y_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où v est une certaine fonction inconnue auxiliaire.

En éliminant $y'_1, \ldots, y'_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ de ces équations et des équations (2), nous obtenons une équation aux dérivées partielles :

$$(6) \qquad \Theta\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Soit

$$(7) \qquad v = v(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) + c$$

une intégrale complète de cette équation.

En substituant la valeur trouvée de la fonction v dans les équations (4), (5) et (2), ces équations admettront une solution de la forme :

$$(8) \qquad y'_i = p_i(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(9) \qquad \mu_i = \mu_i(x, y_1, \ldots, y_n, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il nous faut démontrer maintenant que les équations (8) et (9) sont des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2) et (3). Il faut établir, à cet effet, que les intégrales des équations différentielles (8) jointes aux équations (9) sont des intégrales complètes des équations (2) et (3).

En substituant à $y'_1, \ldots, y'_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ leurs valeurs (8) et (9) dans les équations (2), (4) et (5), ces dernières deviennent des identités. Prenons alors les dérivées des deux membres de l'équation (4) par rapport à la variable y_i; nous aurons

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k}\frac{\partial\mu_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\Phi}{\partial y'_k}\frac{\partial y'_k}{\partial y_i} \\ \qquad = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} y'_k\frac{\partial^2 v}{\partial y_k\,\partial y_i} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial v}{\partial y_k}\frac{\partial y'_k}{\partial y_i}. \end{cases}$$

La première $\sum$ du premier membre de cette équation disparaît, car, en vertu des équations (2),

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_k} = \varphi_k = 0.$$

En outre, les dernières $\sum$ des deux membres de l'équation (10) se détruisent en vertu des équations (5). Nous avons donc définitivement

$$(11)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_1} + y'_1\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_i} + \ldots + y'_n\frac{\partial^2 v}{\partial y_n\,\partial y_i}.$$

Supposons maintenant que nous ayons trouvé les intégrales complètes des équations différentielles (8) et que nous ayons substitué dans les équations (2), (4) et (5) les valeurs trouvées de $y_1, \ldots, y_n$, ainsi que celles de $\mu_1, \ldots, \mu_m$ tirées des formules (9). Ces équations se transforment alors en identités.

Dans cette hypothèse, prenons les dérivées totales par rapport à x de chacune des équations (5). Nous obtenons ainsi

$$(12)\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'_i}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y_i} + y'_1\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_i} + \ldots + y'_n\frac{\partial^2 v}{\partial y_n\,\partial y'_i}.$$

En comparant les équations (11) et (12), nous trouvons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'_i}\right).$$

Cela prouve que les équations (8) et (9) sont des intégrales intermédiaires des équations différentielles de Lagrange (2) et (3).

Nous allons établir maintenant une propriété plus remarquable encore de l'équation aux dérivées partielles (6). Cette propriété peut être énoncée ainsi :

Les intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange (2) et (3) *peuvent être trouvées à l'aide de simples différenciations si l'on connaît une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles* (6).

En substituant à $y'_1, \ldots, y'_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ leurs valeurs (8) et (9), dans les équations (2), (4) et (5), ces dernières se transforment ne identités.

Prenons, dans cette hypothèse, les dérivées par rapport à a_i de chacun des membres de l'équation (4). Nous trouvons ainsi :

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_s} \frac{\partial \mu_k}{\partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_k} \frac{\partial y'_k}{\partial a_i}$$
$$= \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} y'_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial v}{\partial y_k} \frac{\partial y'_k}{\partial a_i}.$$

La première $\sum$ du premier membre de l'équation s'annule pour la raison indiquée plus haut; les deux dernières $\sum$ des deux membres de l'équation se détruisent en vertu des équations (5). Nous trouvons en définitive :

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial a_i} + y'_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \, \partial a_i} + \ldots + y'_n \frac{\partial^2 v}{\partial y_n \, \partial a_i}.$$

En multipliant par ∂x, les deux membres deviennent des différentielles exactes. En intégrant, il vient :

$$b_i = \frac{\partial v}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Telles sont les expressions des intégrales complètes des équations différentielles de Lagrange (2) et (3).

Pour la recherche du maximum et du minimum, il nous faut des intégrales qui soient vérifiées par les coordonnées du point initial du chemin de Lagrange. Pour trouver de telles intégrales, on posera, dans les équations (13),

$$b_i = \frac{\partial v_0}{\partial a_i},$$

où v_0 est la valeur de la fonction v (7) au point initial :

$$v_0 = v(x_0, y_{1_0}, \ldots, y_{n_0}, a_1, \ldots, a_n) + c.$$

Les intégrales cherchées seront

$$(14) \qquad \frac{\partial v}{\partial a_i} = \frac{\partial v_0}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En tirant $a_1, \ldots, a_n$ des équations (14) et en substituant leurs valeurs dans les équations (8) et (9), nous obtiendrons les intégrales intermédiaires qu'il s'agissait de trouver :

$$(15) \qquad y'_i = q_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(16) \qquad \mu_i = \mu_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Considérons maintenant les points critiques des fonctions (15) et (16). Le point critique des fonctions (15) et (16) est dit *point conjugué du point initial.*

Les points critiques des fonctions (15) et (16) sont situés sur une certaine surface (dans l'espace à plusieurs dimensions) :

$$(17) \qquad \psi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Il faut examiner la position du chemin de Lagrange par rapport à la surface critique (17). Nous considérerons le cas général où la fonction qui figure au premier membre de l'équation (17) change de signe en passant par zéro. Il faut alors poser

$$(18) \qquad \psi(x, y_1, \ldots, y_n) = \pm \delta^2,$$

où δ est une quantité infiniment petite.

Examinons maintenant les fonctions (15) et (16) pour celles des valeurs des variables qui satisfont à l'équation (18). Si les fonctions (15) et (16) sont réelles pour les deux valeurs de δ^2, le criterium fondamental s'applique malgré la présence du point critique, comme nous l'avons montré dans le paragraphe VI; dans ce cas, le maximum et le minimum de l'intégrale (1) dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si, par contre, les fonctions (15) et (16) sont imaginaires pour l'une des valeurs de δ^2 dans (18), il n'existe. au delà d'un tel point critique, ni maximum, ni minimum, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant comme nous l'avons montré au paragraphe VII.

Les fonctions (15) prennent au point initial du chemin de Lagrange des valeurs indéterminées. Si le chemin de Lagrange, outre son point initial, contient encore un point d'indétermination de l'une des fonctions (15) et (16), il n'existe, au delà d'un tel point, ni maximum, ni minimum, même dans le cas où la fonction de Weierstrass ne change pas de signe. Cette propriété a été démontrée dans le paragraphe VIII,

La fonction de Weierstrass a la forme suivante :

$$W = \Phi(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) - \Phi(x, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}(y'_k - q_k).$$

Examinons le signe de cette fonction pour celles des valeurs des variables qui satisfont aux équations (2).

Pour le maximum et le minimum faibles, le problème, consistant à déterminer le signe de la fonction de Weierstrass, peut être ramené à la recherche du signe de l'expression

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_i \partial y'_k} \delta q_i \delta q_k$$

en chacun des points du chemin de Lagrange pour celles des valeurs de $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ qui satisfont aux équations

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_1} \delta q_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y'_n} \delta q_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que le maximum et le minimum puissent exister, l'expression (19) doit conserver un signe constant.

Remarque.

Dans les paragraphes VII et VIII, nous avons indiqué deux cas où le maximum et le minimum font défaut, même si la fonction de Weierstrass conserve un signe constant.

Dans ces cas, le chemin de Lagrange est traversé par les chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial. Lorsqu'il existe un maximum ou un minimum, le chemin de Lagrange n'est pas traversé par les chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Si un chemin de Lagrange n'est pas traversé par des chemins de Lagrange infiniment voisins passant par le point initial, le maximum et le minimum relatifs à ce chemin dépendent du signe de la fonction de Weierstrass. Si un chemin de Lagrange est traversé par un autre chemin de Lagrange infiniment voisin du premier et passant par le point initial, il n'y aura ni maximum, ni minimum, même dans le cas où la fonction de Weierstrass conserve un signe constant (1).

Ainsi, le problème peut être ramené à la recherche du point d'intersection de chemins de Lagrange infiniment voisins. Mais cette recherche est aussi compliquée, sinon plus, que la recherche des points critiques indiquée plus haut. Montrons par un exemple, choisi parmi les plus simples, comment peut se faire la recherche du point d'intersection de deux chemins de Lagrange infiniment voisins.

---

(1) Ce théorème paraît être contredit par la figure 3 (p. 121). Au chemin de Lagrange ADC peut correspondre un maximum ou un minimum, quoique ce chemin soit traversé par le chemin infiniment voisin ABC. Cette contradiction apparente disparaît si, par point d'intersection, nous entendons la position limite de ce point qui se trouve en B′ sur le prolongement du chemin ADC.

Supposons que l'équation du chemin de Lagrange passant par le point donné soit

$$\varphi(x, y, a) = 0. \tag{1}$$

Admettons que la fonction figurant au premier membre de cette équation soit holomorphe par rapport aux trois variables x, y, a. L'équation d'une courbe infiniment voisine sera alors

$$\varphi(x, y, a + \delta a) = 0.$$

La position limite des points d'intersection est déterminée, comme on le sait, par les équations

$$\varphi(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0.$$

Supposons que ces équations aient une solution réelle $x = x_1$, $y = y_1$. Il ne s'ensuit nullement que les deux courbes infiniment voisines se coupent réellement. Pour le voir, il est nécessaire de faire une recherche complémentaire.

Posons

$$x = x_1 + \delta x, \qquad y = y_1 + \delta y,$$

où δx et δy sont des quantités infiniment petites. Formons les équations :

$$\varphi(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y, a) = 0, \qquad \varphi(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y_1, a + \delta a). \tag{2}$$

Si ces équations ont des solutions réelles par rapport à δx et δy, les courbes infiniment voisines se coupent réellement. Mais, dans certains cas, les équations (2) n'admettent pas de solutions réelles par rapport à δx et à δy; les courbes infiniment voisines n'ont pas alors de point d'intersection.

Si les expressions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial a} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial a}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2} \tag{3}$$

ne s'annulent pas, lorsque $x = x_1$, $y = y_1$, les équations (2) admettent une solution réelle par rapport à δx et δy. Mais si les deux expressions (3) deviennent égales à zéro, pour $x = x_1$, $y = y_1$ la recherche des solutions réelles des équations (2) devient plus compliquée.

Cette recherche devient encore plus compliquée lorsque la fonction figurant au premier membre de l'équation (1) n'est pas holomorphe.