N. SALTYKOW

Étude sur les transformations infinitésimales

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 53-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1905_6_1__53_0>

Étude sur les transformations infinitésimales;

PAR M. N. SALTYKOW.

1. Il s'agit, dans les lignes suivantes, d'étudier les rapports entre les transformations infinitésimales, les facteurs intégrants et les systèmes canoniques de Liouville [1], correspondant aux équations aux différentielles ordinaires ou totales. On en conclut que toute transformation infinitésimale qu'ils admettent définit une intégrale des équations de Liouville. Ce fait est d'une grande importance pour constater encore une fois le sens particulier de la théorie en question, comme il se trouve aussi indiqué dans mon travail : *Sur les transformations infinitésimales des équations différentielles* [2]; d'autre part, la même conclusion est importante pour l'intégration des équatious admettant un groupe de transformations infinitésimales. En effet, adoptant notre point de vue, le dernier problème devient un corollaire de la théorie des équations canoniques et l'on diminue aisément le nombre des quadratures nécessaires, d'après S. Lie, pour achever l'intégration des équations considérées.

2. Prenons d'abord une équation unique

$$dy = X\,dx, \tag{1}$$

(1) *Cf.* LAURENT, *Traité d'Analyse,* t. VI, p. 96.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 429.

X étant une fonction de x et y. Le facteur intégrant p de cette dernière équation est égal à $\frac{\partial f}{\partial y}$, la fonction f étant l'intégrale de l'équation

$$Xf \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

D'autre part, p est défini aussi par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial p}{\partial x} + X\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y}p = 0,$$

équivalente au système de deux équations ordinaires, dont la première est (1), la seconde étant

$$dp = -\frac{\partial X}{\partial y}p\,dx.$$

Ces deux équations forment le système canonique de Liouville

$$dy = \frac{\partial H}{\partial p}dx, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial y}dx,$$

où l'on a posé

$$H \equiv Xp.$$

Donc le facteur intégrant d'Euler coïncide avec la variable auxiliaire de Liouville qu'il introduit pour former son système canonique équivalent à une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Enfin, l'équation partielle corrélative au système canonique de Liouville est identiquement $Xf = 0$.

Soit la transformation infinitésimale admise par l'équation (1)

$$Uf \equiv \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

η dépendant de x et y. L'identité fondamentale

$$(Xf, Uf) = 0$$

fait voir que l'équation

$$\eta p = b$$

est une intégrale du système canonique de Liouville et que la valeur résultante

$$p = \frac{b}{\eta}$$

présente un facteur intégrant de (1), b désignant une constante arbitraire. Donc le rapport $\frac{1}{\eta}$ en est de même un facteur intégrant.

Les mêmes considérations s'étendent à une équation aux différentielles totales

$$dx = \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h, \tag{2}$$

équivalente au système jacobien

$$Xf \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les X_h étant des fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_m, x$. Le facteur intégrant p de (2) satisfait au système jacobien (¹)

$$\frac{\partial p}{dt_h} + X_h \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial X_h}{\partial x} p = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

équivalent à deux équations aux différentielles totales : l'équation (2) et la suivante

$$dp = -\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial X_h}{\partial x} p \, dt_h.$$

En introduisant les notations

$$X_h p \equiv H_h,$$

ces deux dernières équations deviennent

$$dx = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p} dt_h, \qquad dp = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x} dt_h$$

(¹) On nomme ordinairement *jacobiens* les systèmes homogènes seulement.

et forment le système que nous avons appelé *canonique* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1889; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1899, p. 454).

Chaque transformation infinitésimale de l'équation (2)

$$Uf = \eta \frac{\partial f}{\partial x},$$

η dépendant de $t_1, t_2, \ldots, t_m, x$, vérifie les identités

$$(X_h f, Uf) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Par conséquent, l'on a évidemment une intégrale du système canonique de Liouville généralisé

$$\eta p = b,$$

définissant les facteurs intégrants

$$\frac{b}{\eta}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\eta}$$

de l'équation (2) dont l'intégrale devient

$$\int \frac{1}{\eta}\left(dx - \sum_{h=1}^{m} X_h \, dt_h\right) = a,$$

où b et a sont des constantes arbitraires.

Donc, *toute équation aux différentielles totales, admettant une transformation infinitésimale, s'intègre par une quadrature.*

S. Lie avait indiqué ([1]) ce résultat en partant de sa théorie des multiplicateurs d'un système complet d'équations partielles linéaires du premier ordre d'une seule fonction. Or ce théorème est évident *a priori*, car une équation aux différentielles totales peut être transformée, d'après M. A. Mayer, dans une équation ordinaire, pour laquelle la conclusion analogue a lieu.

([1]) S. LIE, *Mathematische Annalen*, Bd. XI, p. 504-521. — A. MAYER, *Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen...* (*Berichte u. d. Verhandlungen d. K. Sächsischen G. d. W. zu Leipzig*, 1893).

Le même résultat s'obtient encore d'une nouvelle manière, indépendamment des équations canoniques de Liouville, car, en développant les identités caractéristiques $(X_h f, Uf) = 0$, on en tire les équations démontrant que le rapport $\frac{1}{\eta}$ est le facteur intégrant requis [1].

Or, l'introduction des équations de Liouville présente un avantage important, cette méthode se prêtant à la généralisation sur les systèmes d'équations simultanées; et, comme on le verra, le théorème de Liouville relatif aux intégrales en involution par rapport au système canonique résout d'une manière élégante le problème d'intégration, par des quadratures, des systèmes d'équations admettant un groupe de transformations infinitésimales satisfaisant à certaines conditions.

En appliquant, par exemple, le théorème en question au cas étudié d'une équation unique, on retrouve aisément l'intégrale écrite plus haut.

3. Considérons à présent un système d'équations différentielles ordinaires

$$(3) \qquad dx_i = X_i\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i étant des fonctions des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. En désignant par

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

le système de n facteurs intégrants de Jacobi des équations (3), on a les égalités suivantes (C. Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, 1896, p. 68)

$$(4) \qquad \begin{cases} p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k X_k = -\frac{\partial f}{\partial t}, \end{cases}$$

---

[1] Ces dernières sont évidemment

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_h} + X_h \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial X_h}{dx}\eta \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

f représentant une intégrale de l'équation partielle linéaire

$$(5) \qquad Xf \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

D'autre part, en éliminant la fonction f du système (4), on obtient les équations définissant les valeurs des p

$$(6) \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(7) \qquad \frac{\partial p_r}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_r},$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices r et k de 1 à n. Par conséquent, les fonctions requises p sont des solutions des équations (6), satisfaisant aux conditions (7). D'après Jacobi (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, p. 7, n° 5) le système (6) est équivalent aux équations

$$dx_i = X_i\, dt, \qquad dp_i = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_i} p_k\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

constituant précisément le système canonique de Liouville correspondant aux équations étudiées (3), car en posant

$$\sum_{k=1}^{n} X_k p_k \equiv H,$$

il s'ensuit

$$(8) \qquad dx_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \qquad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour en tirer les valeurs des p, vérifiant les conditions (7), le problème revient à intégrer l'équation partielle corrélative au système canonique (8). Or cette dernière équation, que l'on obtient en remplaçant dans H les p_i par les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, est identique à l'équation (5). Inversement le système canonique de Liouville s'obtient en appliquant à cette dernière équation linéaire la théorie générale des équations partielles.

Le système canonique de Liouville joue un rôle considérable dans la théorie des transformations infinitésimales. Soit, en effet,

$$\mathrm{U}f \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

une transformation infinitésimale des équations (3), $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignant des fonctions des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Comme $\mathrm{U}f$ est une intégrale de (5), en même temps que f, il s'ensuit l'identité fondamentale

$$(\mathrm{X}f, \mathrm{U}f) = 0.$$

Cela étant, *la formule*

$$\mathrm{U}f = b$$

est une intégrale du système canonique de Liouville, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *y étant remplacées par les variables* p_i *et* b *désignant une constante arbitraire* [1].

---

(1) Comme il est connu, on obtient, en développant l'identité précédente, les équations définissant les *coefficients* ξ_i [M. A. Buhl, dans sa Thèse : *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe,* appelle les ξ_i *fonctions adjointes* et $\mathrm{U}f$ *forme aux dérivées partielles adjointe* du système (3)] :

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_k} \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce dernier système est équivalent, d'après Jacobi, au système formé par les équations (3) et les suivantes

$$d\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_k} \xi_k \, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui ne diffèrent *des équations aux variations* de M. H. Poincaré que par les notations des variables fonctionnelles $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, liées avec les ξ_i par les

4. Les résultats cités s'étendent immédiatement aux systèmes d'équations aux différentielles totales

$$(9) \qquad dx_i = \sum_{h=1}^{m} X_i^h \, dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i^h étant des fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D'abord il est évident que la transformation de Liouville s'applique aux dernières équations, car en introduisant les nouvelles variables

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

définies par les équations

$$dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} y_k \, dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble de ces dernières et des équations données représente un système canonique. En effet, les équations écrites forment, en premier lieu, un système aux différentielles totales. Secondement, en posant

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^h y_k = H_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les $2n$ équations étudiées prennent la forme *canonique*

$$dx_i = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial y_i} dt_h, \qquad dy_i = -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_i} dt_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1899; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1899, p. 454).

---

relations

$$\delta x_i = \xi_i \, \delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Remarquons, enfin, que les $2n$ équations considérées forment un système canonique, lorsque le système (3) est lui-même canonique.

Cela posé, les facteurs intégrants de Jacobi du système (9)

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

sont, d'après la définition même, les dérivées partielles correspondantes

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

f désignant une intégrale du système jacobien,

$$(10) \qquad X^h f \equiv \frac{\partial f}{\partial t_h} + \sum_{i=1}^{n} X_i^h \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

D'autre part, les p_i satisfont au système d'équations aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial p_i}{\partial t_h} + \sum_{k=1}^{n} X_k^h \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k^h}{\partial x_i} p_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les conditions (7) y étant jointes. Les nm équations obtenues représentent évidemment une généralisation de celle qui définit le facteur intégrant d'une seule équation différentielle ordinaire du premier ordre. J'ai donné la théorie de ces dernières équations dans mon travail : *Étude sur les intégrales d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (¹). Il en résulte que, dans le cas qui nous occupe, le système équivalent d'équations aux différentielles totales est précisément celui de Liouville, que l'on obtient en remplaçant les variables y_i par les p_i dans les équations canoniques écrites plus haut, ou bien encore en appliquant au système jacobien (10) la théorie générale des équations partielles. Quant aux conditions (7), on y satisfait aussi, moyennant cette dernière théorie.

Enfin, il est aisé de voir que *toute transformation infinitésimale*

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897, p. 423.

du système (9)

$$Uf \equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

ξ_i *désignant des fonctions de* $t_1, t_2, \ldots, t_m$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *donne lieu à une intégrale*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i = b$$

du système canonique de Liouville, équivalant aux équations (9), b *étant une constante arbitraire.*

Le fait constaté est fondamental et nous servira de base dans nos recherches ultérieures. Il va s'en dire qu'en introduisant les équations canoniques de Liouville, on augmente le nombre des variables. Or les nouvelles variables, étant introduites par la théorie des transformations infinitésimales, elles caractérisent la portée et la vraie valeur de la théorie étudiée; les complications résultant de leur introduction sont donc naturelles au problème d'intégration des équations en question.

En passant à présent à l'étude des intégrales des équations canoniques de Liouville, nous bornerons nos démonstrations aux équations ordinaires, car leur théorie présente une analogie complète avec celles aux différentielles totales.

5. Soient

$$(11) \qquad f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les n intégrales distinctes du système (3), les a_k désignant des constantes arbitraires. Les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_n}$$

représentent, d'après la définition même, n facteurs intégrants de Jacobi du système (3), que nous allons désigner par

$$p_{1k}, \quad p_{2k}, \quad \ldots, \quad p_{nk}.$$

Le nombre des intégrales distinctes (11) étant n, on a n systèmes distincts de facteurs intégrants, en faisant parcourir à l'indice k toutes les valeurs de 1 à n. Enfin les n dernières équations (8) étant linéaires par rapport aux p, elles admettent évidemment les solutions

$$p_i = \sum_{k=1}^{n} b_k p_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b_k désignant des constantes arbitraires. Comme le déterminant fonctionnel

$$M \equiv \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

représentant le *multiplicateur* du système (3) de Jacobi est distinct de zéro, les n dernières équations écrites nous donnent

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{ik}}{M} p_i = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

en désignant par M_{ik} le premier mineur de M, correspondant à son élément p_{ik} situé à l'intersection de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $i^{\text{ième}}$ ligne.

L'ensemble des équations (11) et (12) définit les $2n$ intégrales distinctes du système (8). Il s'ensuit donc que, les n intégrales du système étudié (3) étant connues, les n autres intégrales du système canonique de Liouville correspondant s'obtiennent par des opérations de différentiation.

Il est aisé de voir que les intégrales (11) et (12) forment un système *canonique*. Effectivement on a, en premier lieu,

$$(f_s, f_r) = 0,$$

pour les valeurs distinctes des indices s et r de 1 à n. Comme toutes les valeurs p_{ik} satisfont aux conditions (7), il en est de même des fonctions p_i. Par conséquent, les intégrales (12) sont en involution. En désignant donc par F_k les premiers membres des équations (12), on a les identités

$$(F_s, F_r) = 0,$$

les indices s et r parcourant les valeurs de 1 à n. Enfin, l'on a

$$(F_s, f_r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} \frac{\partial f_r}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_s}{\partial p_k} p_{kr}.$$

En substituant les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_s}{\partial p_k}$, on obtient

$$(F_s, f_r) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{n} M_{ks} p_{kr},$$

et il en résulte, moyennant les propriétés du déterminant M,

$$(F_s, f_r) = \begin{cases} 0, & r \gtrless s, \\ 1, & r = s. \end{cases}$$

Donc les intégrales (11) et (12) représentent le système *canonique par rapport aux équations* (8). Il s'ensuit, de plus, que *ces dernières admettent n intégrales en involution linéaires par rapport aux variables auxiliaires de Liouville p_i.*

6. Ces préliminaires posés, passons au but principal de la théorie des transformations infinitésimales : l'intégration des équations étudiées (3).

Il ne s'agit ici que des cas où l'on connaît un groupe de transformations infinitésimales admis par le système (3). Dans les considérations qui vont suivre, nous mettrons de côté toutes les opérations, pour former de nouvelles transformations infinitésimales, ou en tirer de nouvelles intégrales des équations (3), et nous supposerons qu'il n'y ait point d'intégrale connue, car on parvient, dans tous ces cas, à un nouveau problème d'intégration analogue, dont l'ordre est moindre que celui du primitif.

Soient

$$(13) \qquad U_1 f, \quad U_2 f, \quad \ldots, \quad U_n f$$

les transformations infinitésimales distinctes ([1]) du groupe admis par le système (3), en introduisant la notation

$$U_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Cela étant, le système (8) admet n intégrales linéaires par rapport aux variables auxiliaires de Liouville, et le problème revient à intégrer un système canonique, dont on connaît la moitié des intégrales linéaires relativement aux variables d'une même classe. Donc l'idée de S. Lie consiste, au fond, à introduire dans le calcul les intégrales de la seconde classe, par rapport au système canonique de Liouville, en rapportant les intégrales requises à la première classe.

Considérons, en premier lieu, l'hypothèse où les transformations infinitésimales (13) forment un *groupe en involution*, c'est-à-dire que l'on a les identités

$$(U_s f, U_r f) = 0$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices s et r de 1 à n. Les équations

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ik} p_i = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

forment alors n intégrales distinctes en involution du système (8), b_k désignant des constantes arbitraires. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \ldots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

ne s'annulant pas, il vient, en désignant par Δ_{ri} le mineur de Δ corres-

---

([1]) Nous appelons *distinctes* les transformations infinitésimales qui ne sont pas liées entre elles par des relations linéaires.

pondant à son élément ξ_{ri},

$$p_r = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta_{ri}}{\Delta} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

ces dernières valeurs p_r satisfaisant aux conditions (7). Il en résulte, les b_k étant des constantes arbitraires, les identités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\Delta_{ri}}{\Delta}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\Delta_{ki}}{\Delta}\right) \qquad (k, r = 1, 2, \ldots, n),$$

l'indice i parcourant toutes les valeurs de 1 à n. On en conclut que les rapports

$$\frac{\Delta_{1i}}{\Delta}, \quad \frac{\Delta_{2i}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_{ni}}{\Delta}$$

représentent un système de facteurs intégrants des équations (3). Par conséquent, leurs intégrales requises deviennent

$$\int \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}(dx_k - \mathrm{X}_k dt) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions sous le signe d'intégrale étant des différentielles exactes et les a_i désignant des constantes arbitraires.

S. Lie avait trouvé ce résultat en démontrant que la résolution du problème considéré exigeait n quadratures distinctes (*Math. Annalen*, Bd. XI, p. 517). Or il est aisé de voir qu'il suffit d'effectuer une seule quadrature, les intégrales requises s'en déduisant par différentiation.

On a effectivement, en appliquant la théorie des équations aux dérivées partielles, que l'expression

$$df = -\mathrm{H}\, dt + \sum_{r=1}^{n} p_r\, dx_r$$

est une différentielle exacte, les p_r ayant les valeurs trouvées plus haut. Soit

$$f = \mathrm{V}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) + b$$

l'intégrale de cette dernière différentielle, b étant une nouvelle constante arbitraire. Le théorème de Jacobi-Liouville nous donne alors les intégrales demandées sous la forme suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les premiers membres sont indépendants des constantes b_i, car ces dernières entrent linéairement dans la fonction V. D'ailleurs, moyennant l'expression de cette dernière fonction, on voit aisément que les intégrales dernièrement écrites sont identiques aux précédentes.

Les résultats obtenus se rapportent également à tout système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, admettant un groupe de transformations infinitésimales, dont les parenthèses de Poisson s'expriment en fonction des premiers membres des équations données et que nous nommerons *groupe complet*. En effet, dans ce dernier cas, l'intégration des équations considérées revient au problème précédent, moyennant des opérations algébriques.

Comme application de la théorie développée, considérons, par exemple, le système

$$dx = X\,dt, \qquad dy = Y\,dt,$$

admettant le groupe de transformations infinitésimales distinctes

$$U_1 f \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad U_2 f \equiv \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

X, Y, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 désignant des fonctions de t, x, y.

Il y a deux cas à distinguer : ou bien l'on a

$$(U_1 f, U_2 f) = 0,$$

ou, secondement, il existe la relation

$$(U_1 f, U_2 f) = U_1 f.$$

En posant, dans la première hypothèse,

$$U_1 f = b_1, \qquad U_2 f = b_2,$$

b_1, b_2 étant des constantes arbitraires, effectuons la quadrature

$$f = \int \frac{1}{\Delta} [(b_1 \eta_2 - b_2 \eta_1)(dx - \mathrm{X}\, dt) + (b_2 \xi_1 - b_1 \xi_2)(dy - \mathrm{Y}\, dt)] + b,$$

b étant une nouvelle constante arbitraire et Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1.$$

Les deux intégrales requises deviennent

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial b_2} = a_2,$$

où a_1 et a_2 sont des constantes arbitraires, les dérivées $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, $\frac{\partial f}{\partial b_2}$ ne contenant point b_1 et b_2.

Dans la seconde hypothèse, on a évidemment le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial f} + \mathrm{Y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

admettant la transformation infinitésimale $\mathrm{U}_2 f$. En résolvant ces deux dernières équations par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, on obtient un système jacobien; l'équation équivalente aux différentielles totales devient

$$dy = \frac{\eta_1}{\xi_1} dx + \left(\mathrm{Y} - \frac{\eta_1}{\xi_1} \mathrm{X}\right) dt,$$

et admet la transformation infinitésimale

$$\mathrm{U}'_2 f \equiv \frac{\Delta}{\xi_1} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Par conséquent, le rapport $\frac{\xi_1}{\Delta}$ représente le facteur intégrant de la dernière équation aux différentielles totales, et son intégrale

$$\int \frac{\xi_1}{\Delta} \left[dy - \frac{\eta_1}{\xi_1} dx - \left(\mathrm{Y} - \frac{\eta_1}{\xi_1} \mathrm{X}\right) dt \right] = a_1$$

est, en même temps, l'une des intégrales des équations données, a_1 désignant une constante arbitraire.

La seconde intégrale s'obtient tout de suite par une quadrature. Effectivement, en substituant dans les équations données la valeur de y, tirée de l'intégrale trouvée, on obtient une équation unique

$$dx = (\mathrm{X})\,dt$$

admettant la transformation infinitésimale

$$\mathrm{U}'_1 f \equiv (\xi_1)\frac{\partial f}{\partial x},$$

les parenthèses désignant le résultat de l'élimination effectuée. Donc l'intégrale requise devient

$$\int \frac{1}{(\xi_1)}[dx - (\mathrm{X})\,dt] = a_2,$$

a_2 étant une constante arbitraire.

7. Passons à présent au second cas d'intégrabilité par des quadratures, correspondant à l'hypothèse que le groupe des transformations infinitésimales (13) du système (3) est *intégrable*. S. Lie achève alors l'intégration des équations étudiées par n quadratures. Il est évident, en effet, que, dans ces conditions, on arrive à intégrer l'une après l'autre n équations aux différentielles totales, admettant chacune une transformation infinitésimale ([1]).

Or, nous allons démontrer que le nombre des quadratures nécessaires pour achever l'intégration du système (3), admettant le groupe intégrable (13), que nous désignerons par G, est égal au nombre des *sous-groupes dérivés* du groupe G augmenté d'une unité. Donc, *toutes les fois que* G *admet moins de n sous-groupes dérivés, il suffit du même nombre de quadratures augmenté d'une unité pour achever l'intégration de* (3).

([1]) S. LIE, *Mathematische Annalen*, t. XI, p. 517-518. — S. LIE et ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. III, p. 708-709.

Supposons, en effet, que les m transformations infinitésimales distinctes

$$U_1 f, \quad U_2 f, \quad \ldots, \quad U_m f$$

engendrent le premier sous-groupe dérivé de G, en sorte que les identités suivantes

$$(U_s f, U_r f) = \sum_{k=1}^{m} c_{srk} U_k f$$

aient lieu pour toutes les valeurs distinctes des indices s et r de 1 *à n,* c_{srk} désignant des constantes.

Cela étant, on a évidemment le système complet des équations

$$Xf = 0, \qquad U_1 f = 0, \qquad U_2 f = 0, \qquad \ldots, \qquad U_m f = 0,$$

admettant le *groupe complet* de $n - m$ transformations infinitésimales distinctes

$$U_{m+1} f, \quad U_{m+2} f, \quad \ldots, \quad U_n f.$$

L'intégration de ces dernières équations s'effectue par une quadrature et l'on en tire $n - m$ intégrales du système primitif (3). Soient ces dernières résolubles par rapport aux variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$. En substituant leurs valeurs obtenues dans les équations (3), on obtient le système équivalent

$$X'f \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} (X_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

admettant le groupe de m transformations infinitésimales distinctes

$$(14) \qquad U'_1 f, \quad U'_2 f, \quad \ldots, \quad U'_m f,$$

où l'on a posé

$$U'_k f \equiv \sum_{i=1}^{m} (\xi_{ik}) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

les parenthèses désignant le résultat de la substitution opérée.

Or, d'après l'hypothèse faite sur le groupe G, son sous-groupe transformé (14) admet un sous-groupe dérivé. Donc le nouveau problème d'intégration est analogue au précédent; en répétant le même procédé, on parvient aisément à évaluer toutes les intégrales requises du système (3); moyennant des quadratures, dont le nombre est identique au nombre des sous-groupes dérivés du groupe G augmenté d'une unité.

Considérons, par exemple, le système

$$dx = X\,dt, \qquad dy = Y\,dt, \qquad dz = Z\,dt,$$

admettant le groupe des transformations infinitésimales distinctes

$$U_1 f, \quad U_2 f, \quad U_3 f,$$

assujetties aux conditions

$$(U_1 f, U_2 f) = 0, \qquad (U_1 f, U_3 f) = U_1 f, \qquad (U_2 f, U_3 f) = 0,$$

en posant

$$U_i f \equiv \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Le premier sous-groupe dérivé de notre groupe contient une seule transformation infinitésimale $U_1 f$. Par conséquent, en intégrant le système

$$Xf = 0, \qquad U_1 f = 0, \qquad U_2 f = b_1, \qquad U_3 f = b_2,$$

on obtient, par une quadrature,

$$f = V(t, x, y, z, b_1, b_2) + b,$$

b_1, b_2, b étant des constantes arbitraires. Il en résulte deux intégrales du système donné

$$\frac{\partial V}{\partial b_1} = a_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_2} = a_2,$$

a_1, a_2 désignant deux constantes arbitraires.

Remarquons encore qu'en posant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

et en désignant par Δ_{ri} le mineur de ce dernier déterminant correspondant à son élément situé à l'intersection de la $r^{\text{ième}}$ colonne et de la $i^{\text{ième}}$ ligne, on met aisément les deux intégrales obtenues sous la forme des quadratures suivantes, moyennant les considérations du n° **6**,

$$\int\left[\frac{\Delta_{12}}{\Delta}(dx - \mathrm{X}\,dt) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}(dy - \mathrm{Y}\,dt) + \frac{\Delta_{32}}{\Delta}(dz - \mathrm{Z}\,dt)\right] = a_1,$$

$$\int\left[\frac{\Delta_{13}}{\Delta}(dx - \mathrm{X}\,dt) + \frac{\Delta_{23}}{\Delta}(dy - \mathrm{Y}\,dt) + \frac{\Delta_{33}}{\Delta}(dz - \mathrm{Z}\,dt)\right] = a_2.$$

Les deux dernières intégrales supposées résolubles par rapport à y et z, la troisième intégrale demandée s'obtient par une quadrature

$$\int \frac{1}{(\xi_1)}[dx - (\mathrm{X})\,dt] = a_3,$$

a_3 étant une nouvelle constante arbitraire.

8. S. Lie a appliqué, dans le Tome XI des *Mathematische Annalen* (p. 521), la théorie des transformations infinitésimales à la résolution de la question connue sous le nom du *problème de S. Lie*, et dont j'ai donné une solution élémentaire dans ma Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 24 août 1903. La théorie qui vient d'être développée nous permet de simplifier l'exposition de S. Lie, car on va voir que le problème revient, en définitive, à une seule quadrature, résultant du théorème classique de Jacobi-Liouville.

Considérons, en effet, le système des équations en involution

$$(15) \qquad f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignent les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, le déterminant fonctionnel

$$\mathrm{D}\left(\frac{f_1, f_2, \ldots, f_q}{p_1, p_2, \ldots, p_q}\right)$$

ne s'annulant pas. Supposons que le système en involution correspondant

$$(16) \qquad (f_k, f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

admette r intégrales distinctes

$$(17) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_q, \quad f_{q+1}, \quad \ldots, \quad f_r \qquad (r < 2n - q),$$

formant un groupe fonctionnel. Cela étant, le système (16) admet $r - q$ transformations infinitésimales distinctes

$$\mathrm{U}_i f \equiv (f_{q+i}, f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r - q).$$

Nous allons chercher à en former de nouvelles

$$\mathrm{V}f \equiv \sum_{i=1}^{r-q} \pi_i(f_1, f_2, \ldots, f_r)\,\mathrm{U}_i f,$$

s'annulant pour les valeurs (17) de la fonction f. Il est donc nécessaire, pour définir les $r - q$ valeurs inconnues $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{r-q}$, d'avoir les égalités

$$(18) \qquad \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_{is}\pi_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r - q),$$

où l'on a posé

$$\alpha_{is} \equiv (f_{q+i}, f_{q+s}).$$

Comme ce dernier système est linéaire, homogène, le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{r-q,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{r-q,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{1,r-q} & \alpha_{2,r-q} & \ldots & \alpha_{r-q,r-q} \end{vmatrix}.$$

doit être identiquement nul. Supposons de plus que les intégrales (17) jouissent des propriétés d'annuler non seulement Δ, mais aussi tous ses mineurs depuis le premier ordre jusqu'à l'ordre $m - 1$. Comme il est bien connu, le nombre $r - q - m$ est alors pair; nous le désignerons par 2ρ

$$r - q - m \equiv 2\rho.$$

Soit, pour fixer les idées,

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2\rho,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\rho,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,2\rho} & \alpha_{2,2\rho} & \dots & \alpha_{2\rho,2\rho} \end{vmatrix},$$

le premier mineur de Δ distinct de *zéro*.

Cela étant, les 2ρ premières équations (18) nous donnent

$$\pi_i = -\sum_{\sigma=1}^{m} \frac{D_{i\sigma}}{D} \pi_{2\rho+\sigma} \qquad (i = 1, 2, \dots, 2\rho),$$

$D_{i\sigma}$ désignant ce que devient le déterminant D, en y remplaçant ses éléments de la $i^{\text{ième}}$ colonne par les valeurs

$$\alpha_{2\rho+\sigma,1}, \quad \alpha_{2\rho+\sigma,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2\rho+\sigma,2\rho}.$$

En substituant les valeurs obtenues des π_i, l'expression Vf devient

$$Vf \equiv \sum_{\sigma=1}^{m} \pi_{2\rho+\sigma} V_\sigma f,$$

où l'on a posé

$$V_\sigma f \equiv U_{2\rho+\sigma} f - \sum_{i=1}^{2\rho} \frac{D_{i\sigma}}{D} U_i f \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Les coefficients $\pi_{2\rho+\sigma}$ étant complètement arbitraires, il en résulte que les fonctions $V_\sigma f$ sont des transformations infinitésimales distinctes du système (16), s'annulant pour les valeurs (17) de la fonction f. On démontre de plus aisément que ces dernières transformations infinitésimales forment un *groupe en involution*. En effet, d'après les propriétés de Δ, le groupe fonctionnel (17) admet m fonctions *distinguées*, distinctes des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_q$. En les désignant par Φ_1, $\Phi_2, \dots, \Phi_m$, on a les identités

$$V_\sigma f \equiv \sum^{m} \alpha_{i\sigma}(\Phi_i, f) + \sum^{q} \beta_{k\sigma}(f_k, f),$$

$\alpha_{i\sigma}$, $\beta_{k\sigma}$ représentant des fonctions des intégrales (17). Il en résulte [1] donc que les $V_\sigma f$ sont en involution. Par conséquent, l'ensemble des équations (16) et des suivantes

$$V_\sigma f = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

forme un système en involution, possédant r intégrales (17), et dont l'intégration fournit, dans le cas le moins favorable, moyennant $n - q - m - \rho$ opérations d'intégration, $n + \rho - r$ intégrales en involution

$$(19) \qquad f_{r+1}, \quad f_{r+2}, \quad \ldots, \quad f_{n+\rho},$$

étant de plus en involution avec les intégrales (17). Les parenthèses de Poisson

$$V_{m+s} f \equiv (f_{r+s}, f) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n - q - m - \rho)$$

offrent donc de nouvelles transformations infinitésimales du système (16), engendrant avec les m précédentes $V_\sigma f$ un *groupe en involution* de $n - q - \rho$ transformations infinitésimales distinctes et s'annulant pour toutes les valeurs (17), (19) de f.

Cela étant, introduisons, au lieu de $x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, comme nouvelles variables les intégrales (17), (19), supposées résolubles par rapport aux précédentes variables. Soit le système (16) transformé

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{n-q-\rho} X_{sk} \frac{\partial f}{\partial x_{q+s}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

admettant évidemment le groupe en involution de $n - q - \rho$ transformations infinitésimales distinctes

$$V'_\sigma f \equiv \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \xi_{s\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_{q+s}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n - q - \rho),$$

[1] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 50-51.

où les coefficients X_{sk}, $\xi_{s\sigma}$ dépendent des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}$ et des valeurs $f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho}$ considérées comme constantes.

Posons

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n-q-\rho,1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n-q-\rho,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \xi_{1,n-q-\rho} & \xi_{2,n-q-\rho} & \cdots & \xi_{n-q-\rho,n-q-\rho} \end{vmatrix},$$

et soit Δ'_{si} le mineur correspondant à l'élément ξ_{si}. L'intégration du dernier système s'achève par une seule quadrature de la différentielle exacte

$$df = \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \sum_{i=1}^{n-q-\rho} b_i \frac{\Delta'_{si}}{\Delta'} \left(dx_{q+s} - \sum_{k=1}^{q} X_{sk}\, dx_k \right),$$

les intégrales requises étant représentées par les formules

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-q-\rho),$$

que l'on met encore aisément sous la forme suivante

$$\int \sum_{s=1}^{n-q-\rho} \frac{\Delta'_{si}}{\Delta'} \left(dx_{q+s} - \sum_{k=1}^{q} X_{sk}\, dx_k \right) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-q-\rho),$$

les b_i, a_i désignant des constantes arbitraires.

Enfin, l'intégrale complète des équations (15) s'obtient par une nouvelle quadrature.