JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PÉPIN

Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D et De^2 (Disquisitiones, n° 213 et 214)

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 1 (1905), p. 333-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1905_6_1__333_0>

Relations qui existent entre les formes quadratiques de deux déterminants D *et* De^2

(*Disquisitiones*, nos 213 et 214);

PAR LE P. PÉPIN.

---

1. Gauss est souvent difficile à comprendre parce qu'il supprime l'analyse par laquelle il est parvenu aux théorèmes qu'il expose. Cette remarque est particulièrement applicable aux deux articles cités des *Disquisitiones*. Dans ces deux articles, Gauss s'occupe des formes quadratiques renfermées dans d'autres formes quadratiques sans leur être équivalentes. D'après les articles 157 et 158 des *Disquisitiones*, si une forme f du déterminant D en renferme une autre F du déterminant E, le rapport des deux déterminants, E:D, est égal au carré du module $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ de la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ par laquelle la forme f se change en E. Si $\alpha\delta - \beta\gamma$ était égal à ± 1, la forme f serait aussi renfermée dans F, les deux formes seraient équivalentes. Gauss suppose $\alpha\delta - \beta\gamma = e$, $e^2 > 1$.

L'avantage de l'étude présente serait de déduire de la classification des formes de déterminant D celle des formes de déterminant De^2; mais, pour cela, il faudrait démontrer que toute forme du déterminant De^2 est renfermée dans quelque forme du déterminant D. C'est ce que Gauss ne fait pas ici; il avertit lui-même qu'il ne considère que les formes du déterminant De^2 renfermées dans des formes du déterminant D. Il considère deux formes f, F, la première, du déterminant D, la seconde, du déterminant De^2; il suppose que f renferme F et se transforme en F par la substitution propre α, β, γ, δ dont le module est égal à e.

La généralité avec laquelle le sujet est envisagé par Gauss a l'inconvénient d'exiger beaucoup de calculs de peu d'intérêt; car ce qui peut être utile dans une classification des formes du déterminant De^2, c'est l'ordre primitif. Ce problème est résolu dans la partie des *Disquisitiones* consacrée à la théorie de la composition des formes quadratiques; Gauss déduit la classification de l'ordre primitif du déterminant De^2 de celle de l'ordre primitif du déterminant D, en prenant pour intermédiaire l'ordre dérivé du déterminant De^2, obtenu en multipliant par e les éléments des formes primitives qui représentent les diverses classes primitives du déterminant D. C'est probablement pour cette raison que Gauss, en envisageant ici son sujet dans toute sa généralité, s'est contenté de donner les éléments de la solution de son problème avec une concision qui en rend l'intelligence difficile; d'autant plus qu'une erreur qu'on rencontre dans les lignes 3 et 4 de la page 209 (édition 1870) est propre à désorienter le lecteur.

Quelle que soit la raison de la concision de Gauss, son travail porte l'empreinte de son génie; il mérite d'être développé.

2. Supposons qu'une forme $F = (A, B, C)$ du déterminant De^2 soit renfermée dans une forme $f = (a, b, c)$ du déterminant D, et désignons par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la substitution propre qui transforme f en F. On aura

$$(1) \qquad A \equiv a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \qquad C = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = e, \qquad B^2 - AC = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = De^2.$$

Désignons par m, m', m'', ... les diviseurs positifs de e, y compris 1 et e; posons $e = mn = m'n' = m''n'' = \ldots$. Pour chacune des décompositions $e = mn$ déduisons de f les m formes qui s'en déduisent par les substitutions $(m, k, 0, n)$, où k désigne l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., $m-1$. Pour abréger, nous désignerons ces m formes par $(m; 0)$, $(m; 1)$, ..., $(m; k)$, ..., $(m; m-1)$.

La décomposition $e = m'n'$ donne de même m' formes déduites de f par les m' substitutions représentées par la formule $(m', k, 0, n')$ où $k = 0, 1, 2, \ldots, m'-1$. Gauss représente par $(m'; k)$ la forme déduite de f par la substitution $(m', k, 0, n')$. De même $(m''; 0)$, $(m''; 1)$, ... désigneront les m'' formes déduites de f par les substitutions $(m'', 0, 0, n'')$, $(m'', 1, 0, n'')$, ..., et ainsi de suite pour m''', m^{iv}, ... Ainsi chaque forme f du déterminant D renferme proprement des formes du déterminant De^2 dont le nombre sera égal à la somme $m + m' + m'' + \ldots$ des diviseurs positifs de e. Nous désignons par Ω l'ensemble de ces formes.

Toutes les formes du groupe Ω sont différentes entre elles; mais elles n'appartiennent pas toujours à des classes différentes.

3. Pour reconnaître si la forme F est renfermée dans f, Gauss compare F avec les formes du groupe Ω pour trouver celles de ces formes qui lui sont proprement équivalentes. Cela suppose que, si F est renfermée dans f, une ou plusieurs des formes du groupe Ω lui sont équivalentes. Pour le démontrer, désignons par $S = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la transformation supposée de f en F et par $T = (f, g, f', h)$ une substitution unimodulaire, dont nous déterminerons les éléments de telle sorte que la substitution composée (ST) présente la forme $(m, k, 0, n)$, m et n étant les deux facteurs d'une décomposition $e = mn$ et k un nombre positif compris entre les limites 0, $m-1$. On a

$$(\mathrm{ST}) = \alpha f + \beta f',\ \alpha g + \beta h,\ \gamma f + \delta f',\ \gamma g + \delta h.$$

Pour donner à cette substitution la forme demandée, il faut d'abord résoudre l'équation $\gamma f + \delta f' = 0$ en tenant compte de l'équation

$$fh - f'g = 1, \tag{3}$$

que doivent vérifier les éléments de la substitution T. Les deux nombres f, f' étant premiers entre eux, f ne peut diviser le produit $\delta f'$ sans diviser δ. Posant donc $\delta = fn$, l'équation à résoudre divisée par f devient $\gamma + nf' = 0$. On prendra $f = \frac{\delta}{n}$, $f' = -\frac{\gamma}{n}$; d'où

$$\alpha f + \beta f' = \alpha\frac{\delta}{n} - \beta\frac{\gamma}{n} = \frac{e}{n} = m,$$

en vertu de l'équation (2). Les deux nombres f, f' étant premiers entre eux, n est le plus grand commun diviseur de γ et de δ. La résultante (ST) deviendra

$$(\mathrm{ST}) = m, \ \alpha g + \beta h, \ 0, \ n$$

en posant

$$(4) \qquad \gamma g + \delta h = n, \qquad \frac{\gamma}{n} g + \frac{\delta}{n} h = 1.$$

Les solutions de cette équation en nombres entiers se déduisent de l'une d'elles g_0, h_0 par les formules

$$(5) \qquad g = g_0 - \frac{\delta}{n} z, \qquad h = h_0 + \frac{\gamma}{n} z.$$

Le deuxième élément de (ST) prendra une valeur k comprise dans les limites 0 et $m-1$, pourvu qu'on donne à z une valeur convenable, ce qui est possible, mais d'une seule manière. On a, en effet,

$$\alpha g + \beta h = \alpha g_0 + \beta h_0 - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{n} z = \alpha g_0 + \beta h_0 - m z.$$

Pour que cette expression ait une valeur positive comprise dans les limites 0 et $m-1$, il faut que z vérifie la double inégalité

$$0 \leqq \alpha g_0 + \beta h_0 - m z < m;$$

c'est ce qu'on obtient en désignant par k le résidu minimum positif de $\alpha g_0 + \beta h_0 \pmod{m}$ et en prenant

$$(6) \qquad z = \frac{\alpha g_0 + \beta h_0 - k}{m}.$$

La substitution devient alors $\mathrm{T} = \frac{\delta}{n}, \ g_0 - \frac{\delta}{n} z, \ -\frac{\gamma}{n}, \ h_0 + \frac{\gamma}{n} z$.

La substitution inverse

$$\mathrm{T}' = h_0 + \frac{\gamma}{n} z, \ -g_0 + \frac{\delta}{n} z, \ \frac{\gamma}{n}, \ \frac{\delta}{n}$$

transformera $(m; k)$ en F. En effet, S transforme f en F, T change F en la forme proprement équivalente $(m; k)$; la résultante (ST) transforme f en $(m; k)$. Ainsi la forme $(m; k)$ en laquelle se change la forme F par la substitution unimodulaire T est bien une forme du groupe Ω. Donc :

Théorème. — *Si une forme* F *du déterminant* De^2 *est renfermée dans une forme* f *du déterminant* D, *elle est proprement équivalente à quelque forme du groupe* Ω.

4. Pour reconnaître si la forme F est renfermée dans f, il suffit de comparer la forme F avec les formes du groupe Ω; si aucune forme de ce groupe n'est proprement équivalente à F, la forme f ne contient pas F; si plusieurs formes Φ, Φ', Φ'', ... du groupe Ω sont équivalentes à la forme F, la forme f renferme F et chacune des formes Φ, Φ', ... fournit, au moyen des formules précédentes, quelque transformation de f en F. En effet, l'analyse par laquelle on reconnaît l'équivalence des deux formes F et Φ fournit le moyen de calculer les éléments de la transformation T′ de Φ en F; d'ailleurs, la construction du groupe Ω fait connaître la substitution (m, k, o, n) par laquelle la forme Φ se déduit de f, c'est-à-dire la résultante (ST). En composant (ST) avec T′ on trouve (ST)T′ = S, car dans le produit STT′ on peut remplacer deux substitutions consécutives par leur produit, pourvu qu'on ne change pas l'ordre des substitutions. D'ailleurs on peut vérifier directement, à l'exemple de Gauss, que la résultante (ST)T′, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} m, & k \\ o, & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_0 + \frac{\gamma}{n} z, & -g_0 + \frac{\delta}{n} z \\ \frac{\gamma}{n}, & \frac{\delta}{n} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} m\left(h_0 + \frac{\gamma}{n} z\right) + k\frac{\gamma}{n}, & -mg_0 + m\frac{\delta}{n} z + k\frac{\delta}{n} \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix},$$

est identiquement la substitution $S = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ par laquelle f se change en F. Nous avons déjà les deux derniers éléments γ, δ; il nous suffit de démontrer que les deux premiers éléments s'identifient avec α, β respectivement, en vertu des équations précédentes (2), (3), (4) et (6). Nous entrerons dans le détail du calcul pour le premier élément seulement. On a

$$m\frac{\gamma}{n}z + mh_0 + k\frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma}{n}(\alpha g_0 + \beta h_0 - k) + k\frac{\gamma}{n} + mh_0$$
$$= \frac{\alpha\gamma g_0 + \gamma\beta h_0}{n} + mh_0;$$

remplaçant $\beta\gamma$ par $\alpha\delta - mn$, la dernière expression devient

$$\frac{\alpha(\gamma g_0 + \delta h_0)}{n} = \alpha.$$

On démontre de même que le second coefficient se réduit à β, en vertu des équations précédentes; il faut pour cela substituer l'expression (6) de z et remplacer $\alpha\delta$ par $\beta\gamma + mn$.

5. Notre analyse prépare la solution du problème dont Gauss s'occupe dans l'article 214.

Problème. — *Deux formes étant proposées, f de déterminant* D *et* F *de déterminant* De^2, *dont la première renferme proprement la seconde, on demande toutes les transformations de f en* F.

Solution. — Continuant à désigner par Ω le groupe des formes déduites de f par les substitutions $(m, k, 0, n)$, il faut commencer par tirer du groupe Ω les formes auxquelles F est proprement équivalente. Soient Φ, Φ', Φ'', ... ces formes. Chacune d'elles donnera des transformations propres de f en F; aucune des transformations de f en F n'est donnée par deux formes différentes du groupe Ω; toutes les transformations propres de f en F se déduisent des formes de ce groupe. Comme la méthode est la même pour toutes les formes Φ, nous ne parlerons que d'une seule.

La construction du groupe Ω fait connaître la substitution

$$(m, k, 0, n)$$

par laquelle f se change en Φ. Cette substitution est la résultante des deux substitutions S, T dont la première change f en F et la seconde F en la forme $(m; k)$ désignée par Φ. Les composantes S, T ne sont pas connues; mais T et T' son inverse s'obtiennent facilement par la méthode qui fait reconnaître l'équivalence des deux formes F et Φ en les ramenant l'une et l'autre à une même forme par une suite de formes contiguës. On déduit de là, soit la transformation T de F en Φ, soit la transformation inverse T' de Φ en F. Désignons par a, b, c, d cette transformation. Nous obtiendrons la transformation $S=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de f en F en composant $(ST)=(m, k, 0, n)$ avec la substitution T', car $(ST)T'=S(TT')=S$. On trouve ainsi

$$S=(ST)T'=\begin{vmatrix} m, & k \\ 0, & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}=ma+kc,\ mb+kd,\ nc,\ nd.$$

Or la substitution T' étant unimodulaire, c et d sont premiers entre eux ainsi que a et b. On aura

$$(1)\qquad \alpha=ma+kc,\qquad \beta=mb+kd,\qquad \gamma=nc,\qquad \delta=nd.$$

Le nombre n sera le plus grand commun diviseur de γ et de δ, car, la substitution $T'=\left(a, b, \frac{\gamma}{n}, \frac{\delta}{n}\right)$ étant unimodulaire, on a

$$(2)\qquad \frac{a\delta-b\gamma}{n}=1.$$

Le déterminant de la résultante S est, en vertu des équations (1) et (2),

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\left(ma+k\frac{\gamma}{n}\right)\delta-\left(mb+k\frac{\delta}{n}\right)\gamma=m\left(\frac{a\delta-b\gamma}{n}\right)=mn,$$

$$(3)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=mn=e.$$

Enfin, en éliminant m entre les deux premières équations (1), on trouve

$$(4)\qquad a\beta-b\alpha=k.$$

Erratum : *Disq.*, page 209, lignes 3, 4, *au lieu de* : f transibit in Φ, *lisez* : f transibit in F.

L'équation (2) est toujours résoluble en nombres entiers, puisque $\frac{\delta}{n}$ et $\frac{\gamma}{n}$ sont premiers entre eux. Pour faire accorder nos notations avec celles de Gauss, désignons par $a = h$, $b = -g$ une première solution. Les autres solutions seront $a = h + \frac{\gamma}{n}z$, $b = -g + \frac{\delta}{n}z$, de sorte que l'équation (4) devient

$$k = \beta h + \alpha g - \left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{n}\right)z = \beta h + \alpha g - mz.$$

Cette formule donne une infinité de valeurs de k; mais une seule de ces valeurs est comprise entre les limites 0 et $m-1$, savoir celle qu'on obtient en prenant pour k le résidu minimum positif de

$$(\alpha g + \beta h) \qquad (\bmod m),$$

ce qui donne pour z la valeur évidemment entière

$$z = \frac{\alpha g + \beta h - k}{m}.$$

Sans entrer dans de plus amples détails qui nous amèneraient à répéter ce qui a été dit plus haut, nous concluons en disant que :

Théorème. — *Toute transformation propre de* Φ *en* F *détermine une transformation propre* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *de* f *en* F, *que l'on obtient par la méthode que nous venons d'exposer.*

6. Pour compléter la solution du problème proposé, nous démontrerons que toutes les transformations obtenues sont différentes entre elles; on voit immédiatement que deux transformations différentes de $(m; k)$ en F ne peuvent pas donner la même transformation α, β, γ, δ, car les formules (1) sont linéaires. Nous nous bornons à démontrer que deux formes différentes $\Phi = (m; k)$, $\Phi' = (m'; k')$ ne peuvent pas donner la même transformation α, β, γ, δ. Soit, en effet,

$$\alpha = ma + kc = m'a' + k'c', \tag{1}$$

$$\beta = mb + kd = m'b' + k'd', \tag{2}$$

et

$$\gamma = \quad nc \quad = n'c', \tag{3}$$

$$\delta = \quad nd \quad = n'd', \tag{4}$$

$$ad - bc = 1, \qquad a'd' - b'c' = 1. \tag{5}$$

Des équations (4) et (3) multipliées respectivement par a et par b on déduit par soustraction, en ayant égard à l'équation (5),

$$a(nd - n'd') - b(nc - n'c') = n - n'(ad' - bc') = 0;$$

des mêmes équations, multipliées respectivement par a', b', on déduit

$$a'(n'd' - nd) - b'(n'c' - nc) = n' - n(a'd - b'c) = 0.$$

Le nombre n est donc divisible par n' et n' par n; comme ces deux nombres sont positifs, on a nécessairement $n = n'$, $m = m'$ et, par conséquent, les équations (3) et (4) donnent $c = c'$, $d = d'$. Les équations (1) et (2) deviennent

$$ma + kc = ma' + k'c, \qquad mb + kd = mb' + k'd.$$

En les combinant par soustraction après avoir multiplié la première par b et la seconde par a, on trouve

$$k(bc - ad) = m(a'b - b'a) + k'(bc - ad),$$
$$k' - k = m(a'b - b'a),$$

ce qui est impossible, parce que k et k' étant compris l'un et l'autre dans les limites 0 et $m - 1$, il est impossible que $k' - k$ soit divisible par m sans que l'on ait $k = k'$ et par conséquent $\Phi = \Phi'$, contrairement à l'hypothèse. Donc la même transformation de f en F ne peut pas correspondre à deux transformations de deux formes différentes Φ, Φ' en F.

On ne peut supposer non plus que la même transformation de f en F corresponde à deux transformations différentes d'une même forme $(m; k)$ en F, car si l'on fait $m' = m$, $k' = k$, $n' = n$ dans les formules (1), (2), (3), (4), les formules (3), (4) donnent immédiatement $c = c'$, $d = d'$; les équations (1) et (2) deviennent alors $ma = ma'$, $mb = mb'$, de sorte que les deux transformations supposées se réduisent à une seule.

Il résulte de là qu'une même forme $\Phi = (m; k)$ donne autant de transformations différentes de f en F qu'il y a de transformations de Φ en F. Si D est négatif, on peut trouver par la méthode générale toutes les transformations de $(m; k)$ en F, de sorte que la méthode précédente fera connaître toutes les transformations possibles de f en F.

Si, au contraire, D est positif non carré, le nombre des transformations de Φ en F est infini; mais on peut les exprimer en un nombre fini de formules au moyen des solutions de l'équation

$$T^2 - De^2 u^2 = 1.$$

Enfin, si la forme F est improprement renfermée dans f, on cherchera par la méthode précédente toutes les transformations propres de f en la forme F′ opposée à la forme F; ces transformations, que nous désignons indéfiniment par α, β, γ, δ, seront les transformations impropres de f en F; les transformations propres seront α, $-\beta$, γ, $-\delta$.

7. *Exemple.* — On demande toutes les transformations de (2, 5, 7) en (275, 0, −1) qu'elle renferme tant proprement qu'improprement. On a $D = 4$ et $e = 5$, de sorte que le groupe Ω se compose de six formes, savoir (1; 0), (5; 0), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), qui par le développement deviennent

$$(2, 25, 175),\quad (50, 25, 7),\quad (50, 35, 19),\quad (50, 45, 35),$$
$$(50, 55, 55),\quad (50, 65, 79).$$

Pour reconnaître l'équivalence de deux formes indéfinies, il convient de calculer la période des formes contiguës fournie par l'une d'elles pour reconnaître plus aisément la forme périodique à laquelle on peut les ramener l'une et l'autre pour trouver une transformation de l'une en l'autre.

La forme F étant propre, il n'y a pas lieu de la comparer avec les deux formes impropres $(50, 45, 35)$, $(50, 55, 55)$. Il suffit donc de considérer les quatre autres formes. Pour reconnaître celles qui sont équivalentes à la forme F, nous formerons la période de la forme $(-1, 0, 275)$ en développant $\sqrt{275}$ en fraction continue.

$$\sqrt{275} = 16 + \text{transformées de Lagrange,}$$

$$\begin{aligned}
\frac{16+\sqrt{275}}{19} &= 1 + \qquad (19, -16, -1),\\
\frac{3+\sqrt{275}}{14} &= 1 + \qquad (-14, 3, 19),\\
\frac{11+\sqrt{275}}{11} &= 2 + \qquad (11, -11, -14),\\
\frac{11+\sqrt{275}}{14} &= 1 + \qquad (-14, 11, 11),\\
\frac{3+\sqrt{275}}{19} &= 1 + \qquad (19, -3, -14),\\
\frac{16+\sqrt{275}}{12} &= 2 + \qquad (-1, 16, 19),\\
\frac{16+\sqrt{275}}{19} &= 1 + \qquad (+19, -16, -1),
\end{aligned}$$

....

La période des quotients se compose de 6 termes, on a

$$\sqrt{275} = 16(1, 1, 2, 1, 1, 32).$$

La période des transformées correspondantes est

$$(19, -16, -1), \quad (-14, 3, 19), \quad (11, -11, -14),$$
$$(-14, 11, 11), \quad (19, -3, -14), \quad (-1, 16, 19).$$

La forme

$$(5; 1) = (50, 35, 19)$$

est contiguë à la forme

$$(19, -16, -1),$$

laquelle est elle-même contiguë à la forme

$$(-1, 0, 275) = F'.$$

La forme (5; 1) se transforme en F′ par la substitution

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1, & -16 \\ 1, & 15 \end{vmatrix}$$

et en la forme F par la substitution composée

$$\begin{vmatrix} -1, & -16 \\ 1, & 15 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16, & 1 \\ 15, & -1 \end{vmatrix}.$$

En composant la substitution (ST) = (5, 1, 0, 1) qui transforme f en $\Phi = (5; 1)$ avec $T' = (-16, 1, 15, -1)$ qui change (5; 1) en F, on obtient une transformation de f en F, savoir $(-65, 4, 15, -1)$; nous en déduirons les transformations semblables de f en F déterminées par la forme (5; 1), en composant la forme S avec l'expression générale des transformations propres de F en elle-même, savoir

$$(t, u, 275u, t),$$

où t, u expriment indéfiniment toutes les solutions entières de l'équation $t^2 - 275u^2 = 1$. On trouve ainsi

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \alpha = -65t + 1100u, \qquad \beta = 4t - 65u, \qquad \gamma = 15t - 275u, \\ \qquad\qquad \delta = -t + 15u. \end{cases}$$

On fait coïncider ces formules avec celles de Gauss en remplaçant t, u par $-t$, $-u$.

On procède d'une manière semblable pour obtenir les transformations de f en F déterminées par la forme (5; 4), c'est-à-dire

$$(50, 65, 79).$$

On reconnaît d'abord l'équivalence des deux formes (5; 1) et F en les ramenant l'une et l'autre à une même transformée périodique

$$(-1, 14, 79),$$

ce qui permet de former la suite de formes contiguës par laquelle on obtient la transformation de $(5; 4)$ en F. On trouve

$$(50, 65, 79)(79, 14, -1)(-1, 0, 275)(275, 0, -1).$$

La première forme se change en la dernière par la substitution composée

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & +1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -14 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14, & +1 \\ -15, & -1 \end{vmatrix}.$$

En composant $(ST) = (5, 4, 0, 1)$ avec $T' = (14, 1, -15, -1)$ on trouve

$$S = (10, 1, -15, -1)$$

qui transforme f en F. On obtiendra l'expression générale des transformations de f en F en composant la transformation obtenue S avec $(t, u, 275u, t)$ qui transforme F en elle-même. On trouve ainsi

$$(10t + 275u, \; t + 10u, \; -15t + 275u, \; -t - 15u).$$

Ainsi toutes les transformations propres de f en F, déduites de la formule $\Phi' = (50, 65, 79)$, sont exprimées par les formules

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \alpha = 10t + 275u, \qquad \beta = t + 10u, \qquad \gamma = -15t - 275u, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \delta = -t - 15u. \end{cases}$$

On reconnaît aisément qu'aucune des formes $(5, 2)$, $(5, 3)$ n'est équivalente à F. Par conséquent, toutes les transformations propres de f en F sont exprimées par les formules (I) et (II), t et u désignant indéfiniment toutes les solutions entières, positives ou négatives, de l'équation

$$t^2 - 275u^2 = 1.$$

Les transformations impropres de f en F s'obtiennent en remplaçant β, δ par $-\beta$, $-\delta$ dans les formules (I) et (II).

8. Pour compléter la solution précédente nous calculerons l'expression générale des solutions de la dernière équation. Nous avons trouvé que la racine carrée de 275 est exprimée par la fraction continue 16(1, 1, 2, 1, 1, 32), où les quotients entiers renfermés entre parenthèses se répètent indéfiniment dans le même ordre. Les moindres nombres positifs qui satisfont à l'équation pellienne sont les deux termes de la réduite obtenue au moyen des quotients qui précèdent le dernier quotient de la première période :

Quotients....	»,	16,	1,	1,	2,	1,	1
Réduites.....	$\frac{1}{0}$,	$\frac{16}{1}$,	$\frac{17}{1}$,	$\frac{33}{2}$,	$\frac{83}{5}$,	$\frac{116}{7}$,	$\frac{199}{12}$

Les moindres nombres qui vérifient l'équation de Pell sont $t = 199$, $u = 12$. Les autres solutions s'en déduisent par la formule

$$\pm t \pm \sqrt{275}\,u = (199 + 12\sqrt{275})^n,$$

en donnant à n toutes les valeurs entières et positives de 1 à ∞; ou bien

$$\pm t \pm 5u\sqrt{11} = (199 + 60\sqrt{11})^n.$$

La note mise au bas de la page 211 dit que toutes les transformations propres de f en F sont exprimées plus simplement par la formule

$$(\text{II}') \qquad 10t + 55u, \qquad t + 2u, \qquad -15t - 55u, \qquad -t - 3u,$$

où l'on désigne par t, u tous les nombres entiers qui vérifient l'équation $t^2 - 11u^2 = 1$. Or les moindres nombres positifs qui vérifient cette équation sont $t = 10$, $u = 3$; les nombres t, u s'obtiennent en donnant à n les valeurs entières $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ et en prenant pour chaque valeur de n les quatre combinaisons de signes que comporte la formule

$$\pm t \pm u\sqrt{11} = (10 + 3\sqrt{11})^n.$$

Les valeurs paires de n déterminent les transformations exprimées par les formules (II), tandis que les valeurs impaires donnent celles qui sont exprimées par les formules (I).