JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 5-19.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide;

Par M. Paul APPELL.

1. Lorsqu'on étudie analytiquement le mouvement d'un fluide, il est évident qu'il faut chercher à mettre en évidence les combinaisons analytiques qui représentent des éléments géométriques ou cinématiques *indépendants du choix des axes;* ce sont là les seuls éléments qui puissent avoir une signification physique. Ces éléments sont de deux sortes : ce sont, ou bien des *vecteurs* définis en chaque point du fluide, comme la vitesse, l'accélération ou le tourbillon, ..., ou bien des *quantités algébriques* ayant une valeur déterminée en chaque point P du fluide, comme la grandeur de la vitesse, la grandeur du tourbillon, le produit géométrique de la vitesse et du tourbillon, etc.; nous appellerons ces *quantités algébriques* des *fonctions du point* P : elles s'expriment analytiquement en fonction des coordonnées x, y, z

du point P, mais leurs valeurs en un point P sont *indépendantes* du choix des axes.

Pour l'étude et la formation systématique de grandeurs vectorielles et de fonctions de point, dans toutes les questions où elles peuvent se présenter, nous renverrons au Mémoire de M. Heinrich Burckhardt (*Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen;* 1893).

Nous nous proposons ici d'étudier quelques-unes de ces fonctions de point dans le mouvement d'un fluide, en nous limitant aux fonctions qui sont formées uniquement avec les dérivées *premières* des composantes de la vitesse par rapport à x, y, z et à celles qui s'y rattachent.

2. En employant les notations dites d'*Euler*, désignons par u, v, w les projections sur les axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, des composantes de la vitesse W de l'élément fluide qui, à l'instant t, passe au point P de coordonnées x, y, z. Nous nous proposons de construire les fonctions de point qu'on peut former avec les neuf dérivées partielles du Tableau suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{array}\right.$$

D'après les notations bien connues, de la théorie de l'élasticité, nous poserons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ 2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}; \end{array}\right.$$

on sait que les quantités ξ, η, ζ sont les projections du vecteur tourbillon Ω relatif au point P.

Si, au point P, on considère un élément linéaire fluide ds issu de P et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, au temps $t+dt$ cet élément a pris une longueur ds_1, son coefficient de dilatation est $\frac{ds_1-ds}{ds}$. Les coordonnées d'un point de ds étant x, y, z, celles du point correspondant de ds_1 seront

$$x_1 = x + u\,dt, \qquad y_1 = y + v\,dt, \qquad z_1 = z + w\,dt;$$

on en déduit

$$dx_1 = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt, \ldots;$$

puis, en négligeant les termes en dt^2 et posant $dx = \alpha\,ds$, $dy = \beta\,ds$, $dz = \gamma\,ds$,

$$ds_1^2 = ds^2[1 + 2(\varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta)dt].$$

Extrayons la racine carrée, en développant le deuxième membre par la formule du binome et retenant seulement les termes en dt, nous aurons

$$(3) \qquad \frac{ds_1-ds}{ds} = (\varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta)dt;$$

tel est le coefficient de dilatation de l'élément ds pendant le temps dt. En divisant par dt, on a ce qu'on peut appeler la *vitesse de dilatation* $V(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'élément linéaire ds issu de P dans la direction α, β, γ.

$$(4) \qquad V(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta.$$

On peut alors écrire la formule (3) comme il suit : appelons l la longueur de l'élément *infiniment petit* ds issu de P, $l+dl$ sa longueur ds_1 à l'instant $t+dt$, on aura

$$(5) \qquad \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = V(\alpha, \beta, \gamma).$$

Ces formules résultent des formules classiques de la déformation infiniment petite d'un milieu continu; nous en avons rappelé la démonstration pour préciser le sens de nos notations.

Le cône, réel ou imaginaire, formé par les directions issues de P et annulant $V(\alpha, \beta, \gamma)$ est le cône formé par les éléments fluides qui ne subissent ni allongement ni raccourcissement pendant le temps dt suivant l'instant t : on peut appeler ce cône le cône des *dilatations nulles* au point P à l'instant t. Ce cône a évidemment une situation indépendante du choix des axes. Il en est de même du cône *supplémentaire* obtenu en annulant la forme quadratique adjointe

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V_a(\alpha, \beta, \gamma) = {} & (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\alpha^2 \\ & + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\beta^2 + (4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\gamma^2 \\ & + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\beta\gamma + 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\gamma\alpha \\ & + 2(\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

3. Cela posé, les six quantités suivantes ont des valeurs indépendantes du choix des axes rectangulaires et sont, par suite, des fonctions du point P :

$$\text{(I)}\qquad \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$\text{(II)}\qquad \delta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$\text{(III)}\qquad \varkappa = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2,$$

$$\text{(IV)}\qquad \Omega_2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$\text{(V)}\qquad \varphi = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \gamma_1\eta\zeta + \gamma_2\zeta\xi + \gamma_3\xi\eta,$$

$$\text{(VI)}\qquad \left\{\begin{aligned} \psi = {} & (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\eta^2 \\ & + 4(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\zeta^2 + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\eta\zeta \\ & + 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\zeta\xi + 2(\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\xi\eta. \end{aligned}\right.$$

Chacune de ces six quantités est homogène par rapport aux dérivées du Tableau (1). Les trois premières dépendent seulement de la déformation : ce sont les invariants élémentaires de la forme quadratique $V(X, Y, Z)$. Les trois dernières dépendent, en outre, du tourbillon : la quatrième Ω^2 est le carré du vecteur tourbillon; la cinquième est égale au produit de Ω^2 par la vitesse de dilatation $\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$ de l'élément fluide l, issu de P et dirigé suivant le vecteur tourbillon Ω; la condition $\varphi = 0$ signifie que, au point P, le vecteur tourbillon Ω est situé sur le cône de dilatation *nulle*; la condition $\psi = 0$ signifie que le tourbillon est sur le cône supplémentaire. Les trois dernières fonctions sont nulles quand le tourbillon en P est nul.

Ces six invariants (I), (II), ..., (VI) sont indépendants d'après leurs significations géométriques. Mais il ne peut y avoir plus de six fonctions des neuf dérivées du Tableau (1) qui soient indépendantes du choix des axes, car, en faisant tourner les axes, on dispose de trois angles arbitraires et l'on peut faire prendre à trois des neuf dérivées (1) ou à trois des neuf quantités (2) des valeurs arbitraires.

Toute autre fonction des neuf dérivées (1), indépendante du choix des axes, pourra donc s'exprimer en fonction des six fonctions fondamentales (I), ..., (VI).

Par exemple, le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est une fonction du point P; il est facile de l'exprimer en fonction des six fonctions fondamentales. En effet, on a, d'après les notations (2),

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_3 - \zeta, & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_2 + \eta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_3 + \zeta, & \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_1 - \xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_2 - \eta, & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_1 + \xi, & \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3. \end{array}\right.$$

Portant ces expressions dans le déterminant H et développant, on a

$$(8)\qquad H = \frac{1}{4}\varkappa + \varphi.$$

De même l'expression

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} K = (2\varepsilon_1\xi + \gamma_3\eta + \gamma_2\zeta)^2 + (\gamma_3\xi + 2\varepsilon_2\eta + \gamma_1\zeta)^2 \\ + (\gamma_2\xi + \gamma_1\eta + 2\varepsilon_3\zeta)^2 \end{aligned} \right.$$

est une fonction de point, facile à exprimer à l'aide des six fonctions fondamentales. En effet, on a

$$K - 4\theta\varphi = \xi^2[\gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] + \ldots + 2\eta\zeta(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1) + \ldots,$$

en retranchant de cette expression le produit $\Omega^2\delta$, on trouve

$$K - 4\theta\varphi - \Omega^2\delta = (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + \ldots + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\eta\zeta + \ldots = \psi.$$

Donc enfin

$$(10)\qquad K = 4\theta\varphi + \Omega^2\delta + \psi.$$

4. A l'instant t, dans chaque particule fluide, les six quantités (I), (II), ..., (VI) ont des valeurs déterminées. Si l'on suit la particule dans son mouvement, ces six quantités sont des fonctions de t; leurs dérivées totales, par rapport au temps, sont évidemment d'autres fonctions de point, c'est-à-dire d'autres fonctions ayant à chaque instant t, en chaque point P, des valeurs indépendantes du choix des axes. Seulement ces nouvelles fonctions dépendent non seulement des neuf dérivées (1) du vecteur vitesse $W(u, v, w)$, mais aussi des dérivées analogues du vecteur accélération J : elles sont égales à un invariant simultané des vecteurs vitesse et accélération suivi d'un polynome entier en θ, δ, $\varkappa$, Ω^2, φ et ψ.

Nous appellerons u', v', w' les projections sur les axes de l'accélération J de la particule fluide qui, au temps t, se trouve au point $P(x, y, z)$. Les quantités u', v', w' seront ainsi des fonctions de x, y, z, t.

Rappelons que, si l'on a une fonction $F(x, y, z, t)$ des coordonnées x, y, z d'une particule fluide et du temps t, la dérivée totale, par rapport au temps, $\frac{dF}{dt}$, de cette fonction, prise en suivant la particule dans son mouvement, est

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w + \frac{\partial F}{\partial t},$$

u, v, w désignant les projections de la vitesse de la particule.

On a ainsi, pour les projections de l'accélération J, les formules classiques

$$
(\mathrm{J})\quad \left\{
\begin{aligned}
u' &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t},\\
v' &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t},\\
w' &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous déduirons du vecteur $J(u', v', w')$ neuf quantités analogues aux quantités (2) déduites du vecteur vitesse, en posant

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varepsilon'_1 = \frac{\partial u'}{\partial x}, && \varepsilon'_2 = \frac{\partial v'}{\partial y}, && \varepsilon'_3 = \frac{\partial w'}{\partial z},\\
&\gamma'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, && \gamma'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, && \gamma'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y},\\
&2\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, && 2\eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, && 2\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités ξ', η', ζ' sont les projections d'un vecteur Ω', issu de P, constituant le *tourbillon de l'accélération,* ou encore *l'accélération rotatoire,* suivant l'expression de M. Maurice Lévy [1].

Nous allons calculer les dérivées totales par rapport au temps des cinq premières fonctions fondamentales $\theta, \delta, \varkappa, \Omega^2, \varphi$. Pour cela, nous calculerons d'abord

$$
\frac{d\varepsilon_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\gamma_1}{dt}, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \ldots.
$$

3. *Calcul de* $\frac{d\varepsilon_1}{dt}, \frac{d\gamma_1}{dt}$ et $\frac{d\xi}{dt}$. On a

$$
\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}u + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}v + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}w + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t},
$$

(1) *L'hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées,* 15 décembre 1890).

ou, comme $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} v + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} w + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right];$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

D'où enfin, d'après les expressions (7) de $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ en fonction des ε_i, γ_i, ξ, η, ζ,

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon'_1 - \varepsilon_1^2 - \frac{1}{4}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) - \xi^2 + \Omega^2. \tag{12}$$

On aurait évidemment deux formules analogues pour ε_2 et ε_3.

Calculons de même les dérivées totales de γ_1, γ_2, γ_3, ξ, η, ζ par rapport au temps. Tout d'abord, on a, par une transformation identique à la précédente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dt}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dt}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

D'après les notations précédentes, on a donc

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_2 - \eta\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_3 - \zeta\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \xi\right)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right],\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \frac{\partial v'}{\partial z} - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_2 + \eta\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_3 + \zeta\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - \xi\right)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right].\end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces relations membre à membre on a

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma'_1 - \left[\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\eta\zeta\right] \tag{14}$$

et deux expressions analogues pour les dérivées de γ_2 et γ_3.

En retranchant membre à membre les deux relations (13), on a de même

$$(15) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi' - \left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi - \frac{1}{2}\gamma_3\eta - \frac{1}{2}\gamma_2\zeta\right]$$

ou, en remplaçant $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ par $\theta - \varepsilon_1$,

$$(16) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi' - \theta\xi + \varepsilon_1\xi + \frac{1}{2}\gamma_3\eta + \frac{1}{2}\gamma_2\zeta;$$

par permutation circulaire, on obtient deux formules analogues pour les dérivées totales de η et de ζ.

On peut remarquer que ξ', η', ζ' seraient nuls si les accélérations dérivaient d'un potentiel.

Si l'on appelle ρ la densité du fluide à l'instant t au point x, y, z, l'équation de continuité s'écrit

$$(17) \qquad \theta = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt};$$

on voit alors que les équations telles que (16) se ramènent facilement à des équations données par Helmholtz. En effet, en y remplaçant θ par sa valeur (17), on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{\xi'}{\rho} + \varepsilon_1\frac{\xi}{\rho} + \frac{1}{2}\gamma_3\frac{\eta}{\rho} + \frac{1}{2}\gamma_2\frac{\zeta}{\rho};$$

cette équation n'est autre chose qu'une des équations de Helmholtz, reproduites dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique*, p. 350, avec l'hypothèse que l'accélération u', v', w' dérive d'un potentiel $Q(x, y, z, t)$, ce qui rend nuls les termes ξ', η', ζ'.

6. *Calcul de* $\frac{d\theta}{dt}$. — D'après les expressions (12) de $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, on a immédiatement

$$(18) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 - \theta^2 - \frac{1}{2}\delta + 2\Omega^2$$

où le premier terme du deuxième membre est une *fonction de point*, la *divergence* du vecteur accélération, d'après une terminologie expliquée dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique*, Chapitre XXVIII.

Par exemple, si, dans un liquide incompressible, la divergence de l'accélération est nulle, on a

$$\theta = 0, \quad \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = 0;$$

donc

$$\delta = 4\Omega^2.$$

7. *Calcul de* $\frac{d\delta}{dt}$. — D'après la définition de δ, on a

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \ldots - 4\left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \ldots\right].$$

En remplaçant $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ et $\frac{d\gamma_1}{dt}$ par leurs expressions (12) et (14), nous aurons une somme qu'en peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} = {} & 2\Sigma[\gamma_1\gamma'_1 - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon'_1] - 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ & + 4\Sigma\varepsilon_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2\Sigma\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 4\Sigma\gamma_1\eta\zeta \\ & - 4\Omega^2\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 4\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi^2, \end{aligned}$$

où chaque sommation Σ est étendue aux trois termes obtenus en permutant les indices 1, 2, 3 et les lettres ξ, η, ζ.

Or on a immédiatement

$$- 2\Sigma\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 3\Sigma\gamma_1^2\varepsilon_1 - \theta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2),$$

$$- 4\Omega^2\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 4\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi^2 = - 4\Omega^2\theta - 4\Sigma\varepsilon_1\xi^2.$$

On peut donc écrire, d'après les expressions de δ et $\varkappa$,

$$(19) \qquad \frac{d\delta}{dt} = 2\Sigma[\gamma_1\gamma'_1 - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon'_1] - 3\varkappa - \theta\delta - 4\varphi - 4\Omega^2\theta.$$

Dans cette formule, le premier terme

$$\delta_{01} = 2\Sigma[\gamma_1\gamma'_1 - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon'_1]$$

est une fonction de point : c'est un invariant simultané des deux vecteurs *vitesse* (u, v, w) et *accélération* (u', v', w'), qui se rattache à l'invariant analogue à δ, relatif à la forme quadratique

$$(\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon'_1)X^2 + (\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon'_2)Y^2 + (\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon'_3)Z^2 + (\gamma_2 + \lambda\gamma'_2)(\gamma_3 + \lambda\gamma'_3)YZ$$
$$+ (\gamma_3 + \lambda\gamma'_3)(\gamma_1 + \lambda\gamma'_1)ZX + (\gamma_1 + \lambda\gamma'_1)(\gamma_2 + \lambda\gamma'_2)XY;$$

l'invariant analogue à δ est, pour cette forme,

$$\begin{aligned}\delta(\lambda) &= \Sigma[(\gamma_1 + \lambda\gamma'_1)^2 - 4(\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon'_2)(\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon'_3)] \\ &= \delta + \lambda[2\Sigma\gamma_1\gamma'_1 - 4\Sigma(\varepsilon_2\varepsilon'_3 + \varepsilon_3\varepsilon'_2)] + \lambda^2\delta'.\end{aligned}$$

Le coefficient de λ, invariant simultané des deux formes quadratiques, pour tout changement d'axes rectangulaires, est précisément la quantité δ_{01}.

8. *Calcul de* $\frac{d\varkappa}{dt}$. — La valeur développée de $\frac{d\varkappa}{dt}$ est

$$\frac{d\varkappa}{dt} = \Sigma(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \Sigma(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\frac{d\gamma_1}{dt};$$

en y remplaçant $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ et $\frac{d\gamma_1}{dt}$ par leurs expressions (12) et (14), on a donc

$$\begin{aligned}\frac{d\varkappa}{dt} = {} & \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon'_1 + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma'_1] - \Sigma\varepsilon_1^2(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \tfrac{1}{4}\Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2\gamma_3(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1) \\ & - \Sigma\gamma_1(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \Omega^2\Sigma(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\eta\zeta].\end{aligned}$$

Le coefficient de Ω^2 est $-\delta$; la dernière somme Σ est ψ. L'ensemble des autres sommes, en laissant de côté la première, peut s'écrire

$$\begin{aligned}& -4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\theta + \Sigma\varepsilon_1^2\gamma_1^2 - \tfrac{1}{4}\Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2^2\gamma_3^2 - \theta\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + 2\Sigma\varepsilon_1\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3).\end{aligned}$$

Remplaçons, dans la dernière somme, $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ par $\theta - \varepsilon_1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
&-\theta(4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_1\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2)\\
&-\tfrac{1}{4}\Sigma(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2^2\gamma_3^2 + \theta\Sigma\varepsilon_1\gamma_1^2 - \Sigma\varepsilon_1^2\gamma_1^2.
\end{aligned}$$

Dans cette expression, la deuxième ligne est identiquement nulle, et la première est $-\theta\varkappa$. Donc enfin

$$(20)\qquad \frac{d\varkappa}{dt} = \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon_1' + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma_1'] - \Omega^2\delta - \theta\varkappa - \psi.$$

Dans cette équation, le premier terme du second membre est encore un invariant simultané des vecteurs vitesse et accélération. Dans un liquide incompressible animé d'un mouvement irrotationnel, ($\theta = 0$, $\Omega = 0$), cet invariant est égal à $\frac{d\varkappa}{dt}$, car ψ est nul.

9. *Calcul de* $\frac{d\Omega^2}{dt}$. On a

$$\frac{d\Omega^2}{dt} = 2\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Remplaçant $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ par leurs valeurs (16), on obtient immédiatement

$$(21)\qquad \frac{d\Omega^2}{dt} = 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - 2\theta\Omega^2 + 2\varphi.$$

Le premier terme du deuxième membre est le produit géométrique $\Omega\Omega'\cos(\Omega, \Omega')$ du tourbillon Ω et de l'accélération rotatoire Ω'; la quantité θ est égale à $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, enfin φ est égale à $\Omega^2\frac{dl}{l\,dt}$; l désignant la longueur d'un élément linéaire infiniment petit, issu de P à l'instant t dans la direction Ω, et $l + dl$ sa longueur à l'instant $t + dt$. On peut donc écrire, en divisant tous les termes par 2Ω,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega' \cos(\Omega, \Omega') + \frac{\Omega}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\Omega}{l}\frac{dl}{dt}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega}{\rho l}\right) = \frac{\Omega'}{\rho l}\cos(\Omega, \Omega'). \tag{22}$$

Dans le cas où $\Omega' \cos(\Omega, \Omega')$ est nul, soit que Ω' étant nul, les accélérations dérivent d'un potentiel, soit que Ω' fasse un angle droit avec Ω, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega}{\rho l}\right) = 0, \qquad \frac{\Omega}{\rho l} = \text{const.},$$

équation qui exprime une propriété élémentaire des tubes de tourbillon infiniment déliés, comme on le verra dans mon *Traité de Mécanique rationnelle,* t. III, p. 396, n° 760.

10. *Calcul de* $\frac{d\varphi}{dt}$. — En remarquant que l'expression (16) de $\frac{d\xi}{dt}$ peut s'écrire

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi' - \theta\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

on a pour $\frac{d\varphi}{dt}$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \sum\left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\xi^2 + \frac{d\gamma_1}{dt}\eta\zeta\right)\\
&= \sum\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon'_1\xi^2 + \gamma'_1\eta\zeta)\\
&\quad -\theta\sum\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2\\
&\quad -\sum\left[\varepsilon_1^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2^2+\gamma_3^2)\right]\xi^2 - \sum\left[\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(\varepsilon_2+\varepsilon_3)\right]\eta\zeta\\
&\quad +\sum(\eta^2+\zeta^2)\xi^2 - 2\sum\eta^2\zeta^2.
\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes se détruisent; on a, de plus,

$$\sum\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 2\varphi, \qquad \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 = \text{K},$$

K désignant l'invariant (9) calculé précédemment. Pour évaluer l'ensemble des autres termes, remarquons que

$$\theta\varphi = \sum [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2 + \sum [\gamma_1\varepsilon_1 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2,$$

$$\Omega^2\delta = \sum [\gamma_1^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)]\xi^2 - 4\sum [\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2.$$

On en conclut :

$$\theta\varphi + \frac{1}{4}\Omega^2\delta + \frac{1}{4}\psi = \sum \left[\varepsilon_1^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)\right]\xi^2 + \sum \left[\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]\eta\zeta,$$

où le deuxième nombre forme l'ensemble des termes restant à évaluer. On a ainsi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta) - 2\theta\varphi + \frac{1}{2}K - \theta\varphi - \frac{1}{4}\Omega^2\delta - \frac{1}{4}\psi,$$

ou, enfin, en remplaçant K par son expression (10),

$$(23)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta) - \theta\varphi + \frac{1}{4}\Omega^2\delta + \frac{1}{4}\psi.$$

Dans cette expression, chacune des sommes

$$\sum \frac{\partial\varphi}{d\xi}\xi', \qquad \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta)$$

est une fonction de point dépendant des dérivées par rapport à x, y, z des deux vecteurs (u, v, w) et (u', v', w'). La première somme serait nulle si les directions du tourbillon (ξ, η, ζ) et de l'accélération rotatoire (ξ', η', ζ') étaient conjuguées par rapport au cône des dilatations nulles.

11. *Remarque.* — En désignant par λ une quelconque des quatre quantités θ, δ, $\varkappa$, φ, on remarquera que, dans l'expression de $\frac{d\lambda}{dt}$, figure le terme $-\theta\lambda$. Si l'on fait passer ce terme dans le premier membre en remplaçant θ par $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, on a, dans le premier membre, la quantité

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\lambda = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right).$$

On obtient ainsi, à la place des formules (18), (19), (20) et (23), des formules un peu plus simples donnant les dérivées de $\frac{\theta}{\rho}$, $\frac{\delta}{\rho}$, $\frac{\varkappa}{\rho}$, $\frac{\omega}{\rho}$ par rapport à t.

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel pour la particule considérée, les trois premières équations deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\rho}\right) = A - \frac{1}{2}\frac{\delta}{\rho},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta}{\rho}\right) = B - 3\frac{\varkappa}{\rho},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varkappa}{\rho}\right) = C,$$

A, B, C désignant les trois invariants

$$A = \frac{1}{\rho}\sum\varepsilon'_1, \qquad B = \frac{1}{\rho}\delta_{01},$$

$$C = \frac{1}{\rho}\sum[(4\,\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon'_1 + (\gamma_2\gamma_3 - 2\,\varepsilon_1\gamma_1)\gamma'_1]$$

Si l'invariant C était constamment nul, on en déduirait que $\frac{\varkappa}{\rho}$ reste constant dans la molécule correspondante. S'il était possible que C et B fussent constamment nuls, on en déduirait que $\frac{\varkappa}{\rho}$ est constant et $\frac{\delta}{\rho}$ une fonction linéaire de t.

12. Des méthodes analogues peuvent être appliquées à toutes les fonctions de points formées avec u, v, w et leurs dérivées des divers ordres par rapport à x, y, z, par exemple aux fonctions W^2, $V(u, v, w)$, $V_a(u, v, w)$, $\Omega W\cos(\Omega, W)$, ...