JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BEGHIN

Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 29-33.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__29_0>

Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps;

PAR M. BEGHIN,

Étant donné un système soumis à des liaisons sans frottement et ne dépendant pas du temps, si l'on introduit brusquement des liaisons également sans frottement et ne dépendant pas du temps, le théorème de Carnot s'applique et peut s'énoncer ainsi :

Si les liaisons antérieures et les liaisons brusquement introduites subsistent après les percussions, la force vive perdue est égale à la force vive que posséderait le système si chaque point était animé de la vitesse qu'il a perdue.

Nous nous proposons d'étendre ce théorème, en le modifiant, aux systèmes dans lesquels les liaisons peuvent dépendre du temps, mais sont toujours assujetties à être sans frottement.

Pour l'établir, nous reproduirons, en la modifiant, la démonstration donnée par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1896, premier fascicule).

Soit un système holonome ou non, dépendant de k paramètres indépendants. Supposons que, pendant l'intervalle très court $t_0\, t_1$, on introduise de nouvelles liaisons, les unes exprimables par des relations en termes finis pouvant dépendre de t, les autres par des relations différentielles non intégrables pouvant contenir dt. Nous venons de montrer, M. Rousseau et moi, que les équations de Lagrange peuvent s'appliquer à ce problème de percussions. Pour plus de simplicité, nous supposerons effectué le changement de variables qu'on doit faire pour écrire ces équations; de sorte que le système dépendra avant la percussion des k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$, pendant la percussion des n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n (n < k)$, les liaisons introduites étant représentées les unes par

$$q_{n+1} = 0, \qquad q_{n+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_{n+r} = 0,$$

les autres par

$$dq_{n+r+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad dq_k = 0.$$

Dans ces conditions, si l'on remarque que les seconds membres des équations de Lagrange sont nuls, ces équations sont

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

La force vive $2T$ du système est une forme quadratique non homogène des variables $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, et l'on peut poser

$$2T = 2\varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + \psi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + f,$$

φ étant un polynome homogène du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; ψ un polynome homogène du premier degré, f étant indépendant de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$.

Nous nous proposons de montrer que le théorème de Carnot s'applique au problème que nous étudions, pourvu qu'on remplace la force vive $2T$ par la fonction 2φ, de sorte que le théorème sera : *La perte subie par la fonction 2φ est égale à la force vive due aux vitesses perdues.*

Si l'on désigne par $2T'$ la force vive due aux vitesses perdues, le théorème s'exprimera par la relation

$$2\varphi[(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0] - 2\varphi[(q'_1)_1, \ldots, (q'_k)_1] = 2T'$$

ou, en simplifiant les notations,

$$2\varphi_0 - 2\varphi_1 = 2T'.$$

1° *Calcul de* $2\varphi_0 - 2\varphi_1$. — D'après le théorème des fonctions homogènes, on a évidemment

$$\begin{aligned}2\varphi_0 - 2\varphi_1 &= \sum_1^k (q'_\nu)_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \sum_1^k (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_1 \\ &= \sum_1^k [(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 + \sum_1^k (q'_\nu)_1 \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_1\right].\end{aligned}$$

Posons, comme le fait M. Appell,

$$p_\nu = (q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1$$

et remarquons que l'on a, d'après une propriété connue des formes quadratiques,

$$\sum_1^k p_\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 = \sum_1^k (q'_\nu)_0 \frac{\partial\varphi}{\partial p_\nu}.$$

Remarquons de plus que $\frac{\partial\varphi}{\partial p_\nu}$ étant linéaire et homogène, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_\nu} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_1.$$

On aura donc

$$(2) \qquad 2\varphi_0 - 2\varphi_1 = \sum_1^k [(q'_\nu)_0 + (q'_\nu)_1]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_1\right].$$

Remarquons enfin que, $\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}$ et $\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}$ ne différant que par un terme indépendant de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q'_\nu}\right)_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1.$$

Mais, en se reportant aux équations (1), on voit que les différences $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1$ sont nulles pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$; de plus comme toutes les liaisons sont persistantes, on a $(q'_\nu)_1 = 0$ pour $\nu = n+1, n+2, \ldots, k$, de sorte que la relation (2) se réduit à

$$2\varphi_0 - 2\varphi_1 = \sum_{n+1}^{k} (q'_\nu)_0 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1\right].$$

2° *Calcul de* $2T'$. — Il est facile de constater que la force vive due aux vitesses perdues $2T'$ a pour valeur $2\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

En effet, les composantes x', y', z' de la vitesse du point x, y, z ont des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} x' &= a_1 q'_1 + \ldots + a_k q'_k + a, \\ y' &= b_1 q'_1 + \ldots + b_k q'_k + b, \\ z' &= c_1 q'_1 + \ldots + c_k q'_k + c. \end{aligned}$$

La vitesse perdue a donc pour composantes

$$\begin{aligned} x'_0 - x'_1 &= a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k, \\ y'_0 - y'_1 &= b_1 p_1 + \ldots + b_k p_k, \\ z'_0 - z'_1 &= c_1 p_1 + \ldots + c_k p_k. \end{aligned}$$

La force vive $2T'$ a pour expression

$$2T' = \sum m\left[(x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2 + (z'_0 - z'_1)^2\right],$$

on la déduit de la force vive réelle $2T$ en supprimant dans x', y', z' les termes a, b, c et remplaçant $q'_1, \ldots, q'_k$ par $p_1, p_2, \ldots, p_k$; on obtient ainsi, évidemment, $2\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

On peut alors écrire

$$2T' = \sum_1^k p_\nu \frac{\partial\varphi}{\partial p_\nu} = \sum_1^k \left[(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1\right]\left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1\right]$$

d'après une remarque précédente.

En raisonnant de la même manière que pour le calcul de $2\varphi_0 - 2\varphi_1$ on obtient

$$2\,T' = \sum_{n+1}^{k} (q'_\nu)_0 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1\right],$$

$2\,T'$ a donc bien même expression que $2\varphi_0 - 2\varphi_1$, et le théorème est démontré.

Remarque. — On sait que lorsqu'un système quelconque est soumis à des percussions, la perte de force vive est égale à la force vive due aux vitesses perdues diminuée de deux fois la somme des travaux des percussions, chaque point d'application étant supposé avoir une vitesse égale à sa vitesse finale. — Le théorème précédent permet d'avoir une expression de ce travail ϖ, on a

$$2(T_0 - T_1) = 2\,T' - 2\varpi$$

ou, en remplaçant $2\,T'$ par $2\varphi_0 - 2\varphi_1$, on a

$$2\varpi = 2\,T_1 - 2\varphi_1 - (2\,T_0 - 2\varphi_0)$$

ou

$$2\varpi = \psi_1 - \psi_0.$$

Dans le cas particulier où les percussions peuvent se réduire à une seule de direction connue, cette relation permettra de trouver sa valeur.