JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNST LINDELÖF

Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 213-221.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__213_0>

Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

---

1. Soit $\varphi(z, \alpha)$ une fonction analytique de la variable complexe $z = \rho e^{i\psi}$, dépendant d'un paramètre réel et *positif* α et vérifiant les conditions suivantes :

1° Elle est holomorphe pour $-\psi_0' \leqq \psi \leqq \psi_0$, quel que soit ρ, et pour $\rho < 1$, quel que soit ψ, ψ_0, ψ_0' étant des angles positifs compris entre 0 et π;

2° On a $|\varphi(z, \alpha)| < e^{K(\alpha)\rho}$ pour $-\psi_0' \leqq \psi \leqq \psi_0$, $K(\alpha)$ tendant vers zéro en même temps que α;

3° α tendant vers zéro, $\varphi(z, \alpha)$ tend uniformément vers l'unité dans toute portion finie du domaine où est supposée vérifiée l'hypothèse 1°;

4° $\lim\limits_{n=\infty} |\varphi(n, \alpha)|^{\frac{1}{n}} = 0$.

De ces hypothèses on peut conclure immédiatement que la série

$$(1) \qquad \sum_0^\infty \varphi(n, \alpha) x^n$$

représente une fonction entière de la variable x, et que cette fonction tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans toute aire intérieure au cercle $|x| = 1$, lorsque α décroît vers zéro.

2. Pour pousser plus loin l'étude de la fonction (1), nous ferons usage de la théorie des résidus de Cauchy. Dans le plan de la variable z, menons des rayons vecteurs l et l' dont les arguments soient respectivement égaux à ψ_0 et à $-\psi'_0$, et traçons de l'origine comme centre un cercle C de rayon $\nu + \frac{1}{2}$, et un cercle c d'un rayon inférieur à l'unité. Nous marquerons respectivement par A et a, A′ et a' les points d'intersection des rayons l et l' avec les cercles C et c, et nous désignerons par L′ le contour fermé composé du segment Aa du rayon l, de l'arc aa' du cercle c qui rencontre l'axe réel *négatif*, du segment a'A′ du rayon l', et de l'arc A′A du cercle C qui passe par le point $z = \nu + \frac{1}{2}$.

Ceci posé, le célèbre théorème de Cauchy nous permet d'écrire [1]

$$(2) \qquad \sum_{0}^{\nu} \varphi(n, \alpha) x^n = \int_{L'} \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour L′ dans le sens direct.

En faisant $x = re^{i\pi}$, on aura sur l'arc A′A de la circonférence C

$$\left| \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \right| < e^{-\left(\nu + \frac{1}{2}\right)[\pi |\sin \psi| - \log r \cos \psi - K(\alpha)]} [1 + \varepsilon(\nu)],$$

$\varepsilon(\nu)$ tendant vers zéro lorsque ν croît indéfiniment. Soient s la plus petite des quantités $\frac{\pi}{2} \sin \psi_0$ et $\frac{\pi}{2} \sin \psi'_0$, t la plus petite des quantités $\frac{\pi}{2} |\operatorname{tang} \psi_0|$ et $\frac{\pi}{2} |\operatorname{tang} \psi'_0|$, et Δ le segment de l'arc réel négatif compris

---

[1] Des intégrales définies du genre de celles que nous envisageons dans cette étude, et que nous avions envisagées dans la Note insérée dans les *Comptes rendus* du 29 décembre 1902, ont fait l'objet de recherches étendues de M. MELLIN (*voir*, par exemple, *Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. XX, et *Acta mathematica*, t. XXV).

entre les points $x = -e^{-\frac{i}{2}}$ et $x = -e^{-\frac{3}{2}i}$. Si l'on suppose le point x situé sur le segment Δ et le paramètre α inférieur à un certain nombre positif α'_0, déterminé de telle sorte qu'on ait $K(\alpha) < \frac{s}{4}$ pour $\alpha \leqq \alpha'_0$, la quantité $[\pi|\sin\psi| - \log r \cos\psi - K(\alpha)]$ sera supérieure à $\frac{s}{4}$ pour tout point z situé sur l'arc $A'A$ de la circonférence C. La partie correspondante de l'intégrale figurant au second membre de (2) tendra donc vers zéro, lorsqu'on fait croître ν indéfiniment, de sorte que, sous les conditions énoncées, on pourra de l'égalité (2) tirer la formule suivante :

$$\sum_0^\infty \varphi(n, \alpha)x^n = \int_L \frac{e^{-\pi i z}}{2i\sin\pi z}\varphi(z, \alpha)x^z dz, \tag{3}$$

le contour d'intégration L étant composé de l'arc aa' du cercle c et des segments des rayons l et l' qui sont extérieurs à ce cercle.

3. On a sur le rayon l, en écrivant $x = re^{i\omega}$,

$$\left|\frac{e^{-\pi i z}}{2i\sin\pi z}\varphi(z, \alpha)x^z\right| < e^{\rho[\log r\cos\psi_0 - \omega\sin\psi_0 + K(\alpha)]}[1 + \varepsilon(\rho)],$$

et sur le rayon l'

$$\left|\frac{e^{-\pi i z}}{2i\sin\pi z}\varphi(z, \alpha)x^z\right| < e^{\rho[\log r\cos\psi'_0 + (\omega - 2\pi)\sin\psi'_0 + K(\alpha)]}[1 + \varepsilon'(\rho)],$$

les quantités $\varepsilon(\rho)$ et $\varepsilon'(\rho)$ tendant vers zéro lorsque ρ tend vers l'infini.

Désignons par S' le domaine du plan des x défini par les inégalités

$$\left\{\begin{aligned} &\log r\cos\psi_0 - \omega\sin\psi_0 < 0, \\ &\log r\cos\psi'_0 + (\omega - 2\pi)\sin\psi'_0 < 0, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et choisissons dans son intérieur une aire finie et connexe quelconque T renfermant le segment Δ de l'axe réel (lequel est bien intérieur au domaine S', comme on le voit de suite en se reportant au n° **2**). On pourra trouver deux nombres positifs, $\alpha_0 (< \alpha'_0)$ et η, tels que l'inégalité

$$(5) \qquad \left| \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \right| < e^{-\eta\rho}$$

soit vérifiée sur les rayons l et l' à partir d'une certaine valeur de ρ, et cela pour tout point x du domaine T et pour toute valeur α inférieure à α_0.

On en conclut que le second membre de l'égalité (3) représente, pour $\alpha < \alpha_0$, une fonction holomorphe de x dans tout le domaine T. Comme il en est de même du premier membre, puisque c'est une fonction entière de x, et comme l'égalité en question, d'après le n° **2**, est vérifiée sur le segment Δ de l'axe réel qui est intérieur à T, le principe fondamental du prolongement analytique nous permet donc d'affirmer que *l'égalité* (3) *subsiste dans tout le domaine* T, *dès que* $\alpha < \alpha_0$.

4. Les conclusions des deux derniers numéros restant toutes valables lorsqu'on remplace la fonction $\varphi(z, \alpha)$ par l'unité, il s'ensuit que l'égalité

$$(6) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_L \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} x^z \, dz$$

subsiste également dans tout le domaine T. Or, en vertu de l'hypothèse 3° et de l'inégalité (5), laquelle est vérifiée encore pour

$$\varphi(z, \alpha) = 1,$$

la différence entre les seconds membres des égalités (3) et (6) tend uniformément vers zéro dans le domaine T, lorsque α décroît vers zéro. Par suite, il en sera de même de la différence

$$\sum_0^\infty \varphi(n, \alpha) x^n - \frac{1}{1-x},$$

et puisque celle-ci, comme nous l'avons déjà dit, tend encore vers zéro dans toute aire intérieure au cercle $|x| = 1$, nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Le paramètre α *tendant vers zéro, la fonction entière* (1) *tend uniformément vers* $\frac{1}{1-x}$ *dans toute aire finie intérieure au domaine* S, *lieu des points* x *qui font partie soit du domaine* S', *soit du cercle* $|x| < 1$.

On voit facilement que S est un domaine d'un seul tenant dont le contour est formé par les arcs des spirales logarithmiques

$$r = e^{\omega \operatorname{tang} \psi_0} \quad \text{et} \quad r = e^{-\omega \operatorname{tang} \psi_0},$$

compris entre le point $x = 1$ et le premier point où ces spirales se coupent en dehors du cercle $|x| = 1$.

5. Étant donnée une série de Taylor quelconque

$$(7) \qquad f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

ayant un rayon de convergence fini et non nul, construisons un domaine S_f d'après le principe suivant :

Soit $\overline{S}$ le domaine obtenu en transformant la partie du plan qui est extérieure à S par une inversion ayant l'origine pour centre, et soit $(x\overline{S})$ le domaine qu'on déduit de $\overline{S}$ en multipliant géométriquement par x; S_f sera, par définition, l'ensemble des points x tels que $f(x)$ soit holomorphe à l'intérieur du domaine $(x\overline{S})$.

Cela posé, une application très intéressante de l'intégrale de Cauchy, qui a été indiquée par M. Borel [1], nous permet de tirer du résultat du n° **4** le théorème suivant :

Lorsque α *tend vers zéro, la fonction entière* $\sum_0^\infty a_n \varphi(n, \alpha) x^n$ *tend*

---

[1] *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 63-64 et 133-134.

uniformément vers la fonction donnée $f(x)$ dans toute aire finie intérieure au domaine S_f.

Ce résultat s'applique encore si les hypothèses du n° **1** sont vérifiées, non pas pour $\varphi(z, \alpha)$, mais pour $\varphi(z + n_0, \alpha)$, n_0 étant un entier positif quelconque, sauf à remplacer, s'il est nécessaire, le facteur $\varphi(n, \alpha)$ par l'unité dans certains des n_0 premiers termes de la fonction entière en question.

6. On peut donner une autre forme au résultat qui précède. En effet, $\varepsilon(\alpha)$ étant une fonction positive quelconque qui tend vers zéro en même temps que α, il suit de l'hypothèse 4° du n° **1** qu'on peut trouver, pour toute valeur de α, un entier positif ν_α tel qu'on ait

$$(8) \qquad |\varphi(n, \alpha)|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon(\alpha) \quad \text{pour } n > \nu_\alpha.$$

Considérons alors la somme

$$\sum_{\nu_\alpha+1}^{\infty} a_n \varphi(n, \alpha) x^n,$$

en supposant $|x| \leqq r$, r étant aussi grand qu'on voudra. Puisque la série (7) admet un rayon de convergence différent de zéro, on a, pour toute valeur de n, $|a_n| < k^n$, k étant une quantité finie. Pour $n > \nu_\alpha$ on aura donc, d'après l'inégalité (8), $|a_n \varphi(n, \alpha) x^n| < [kr\varepsilon(\alpha)]^n$. Or la quantité $kr\varepsilon(\alpha)$ tend vers zéro en même temps que α, de sorte qu'elle sera, par exemple, $< \frac{1}{2}$ lorsque α sera inférieur à une certaine limite. La somme en question étant alors inférieure à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_\alpha}$, on voit qu'elle tend uniformément vers zéro dans le cercle $|x| \leqq r$, et cela quelque grand que soit r. En rapprochant ce résultat du théorème du n° **5**, nous arrivons donc à la conclusion suivante :

α tendant vers zéro, le polynome $\sum_{0}^{\nu_\alpha} a_n \varphi(n, \alpha) x^n$ tendra uniformément vers $f(x)$ dans toute aire finie intérieure au domaine S_f,

si, pour toute valeur de α, on détermine l'entier ν_α conformément à la condition (8).

Les deux expressions analytiques que nous avons obtenues pour la fonction $f(x)$, à savoir l'expression limite double

$$f(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_0^\infty a_n \varphi(n, \alpha) x^n, \tag{9}$$

et l'expression limite simple

$$f(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_0^{\nu_\alpha} a_n \varphi(n, \alpha) x^n, \tag{10}$$

sont, d'après ce qui précède, complètement équivalentes entre elles, en ce sens que, si l'une d'elles est valable pour une valeur donnée de x, il en est de même de l'autre.

7. Nous allons examiner la forme géométrique des domaines S et S_f, en faisant diverses hypothèses relatives aux arguments ψ_0 et ψ'_0.

Supposons d'abord $\psi'_0 = \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Le contour du domaine S est formé par l'arc de la spirale logarithmique $r = e^{\omega \tang \psi_0}$ compris entre les points $x = 1$ et $x = -e^{\pi \tang \psi_0}$, et le symétrique de cet arc par rapport à l'axe réel. Cette hypothèse se trouve réalisée, par exemple, dans le cas où $\varphi(z, \alpha) = e^{-\alpha z^\mu}$, μ étant un nombre positif supérieur à l'unité. Ici l'on a $\psi_0 = \psi'_0 = \frac{\pi}{2\mu}$. Pour $\mu = 2$, on retrouve un résultat démontré par MM. Le Roy et Phragmén [1] à l'aide des fonctions ϑ de Jacobi.

Soit maintenant $\psi'_0 = \psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, le domaine S comprend tout le plan, excepté le segment $+1 — +\infty$ de l'arc réel, et le domaine S_f se confond avec l'étoile principale A de M. Mittag-Leffler. On retrouve ainsi le résultat que nous avions énoncé à la fin de la Note citée plus haut.

[1] *Comptes rendus* du 5 juin 1900.

D'après les recherches de M. Borel (¹), le domaine A ne constitue pas toujours une *étoile de convergence* pour l'expression limite (10), dans le sens donné à ce terme par M. Mittag-Leffler (²). Le résultat du n° **6** fait voir que cette même remarque s'applique également à l'expression limite (9).

Soit, en dernier lieu, $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\psi'_0 = \frac{\pi}{2} + \beta$, où β désigne un angle quelconque compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Le domaine S comprend tout le plan, excepté les points de la spirale logarithmique $r = e^{\omega \cot \beta}$ qui sont extérieurs au cercle $r = 1$. Quant au domaine S_f, il est facile de voir qu'on l'obtient par la construction suivante :

Imaginons qu'on prolonge analytiquement la série $\sum_0^\infty a_n x^n$ en cheminant le long de la spirale logarithmique $r = e^{\omega \cot \beta}$ dans le sens des rayons vecteurs croissants. Si l'on est arrêté par un point singulier, on mènera une coupure suivant le prolongement de la spirale depuis ce point jusqu'à l'infini. On fera ensuite tourner la spirale autour de l'origine et, pour chacune de ses positions, on procédera de la même manière.

Le domaine cherché sera formé par l'ensemble des points x ne faisant partie d'aucune des coupures dont le plan a été sillonné.

Nous désignerons le domaine ainsi construit par A_β. C'est une *étoile curviligne* qui, pour $\beta = 0$, se confond avec l'étoile principale A.

8. Le cas le plus simple des théorèmes qui précèdent correspond à l'hypothèse $\varphi(z, \alpha) = z^{-\sigma z}$, $\sigma = \alpha e^{i\beta}$, l'argument β ayant une valeur quelconque comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. L'égalité

$$|\varphi(z, \alpha)| = e^{-\alpha\rho[\log\rho \cos(\psi+\beta) - \psi \sin(\psi+\beta)]}$$

montre que les hypothèses du n° **1** sont vérifiées pour la fonction

(¹) *Acta mathematica*, t. XXIV.

(²) *Acta mathematica*, t. XXIV, p. 203.

$\varphi(z+1, \alpha)$, si l'on fait $\psi_0 = -\frac{\pi}{2} - \beta$, $\psi'_0 = -\frac{\pi}{2} + \beta$, et nos théorèmes conduisent donc, dans ce cas particulier, au résultat très simple que voici :

Le paramètre σ tendant vers zéro avec un argument déterminé β compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, la fonction entière

$$\sum_0^\infty a_n \left(\frac{x}{n^\sigma}\right)^n$$

tendra uniformément vers la fonction $f(x)$, définie par la série $\sum_0^\infty a_n x^n$, dans toute aire finie intérieure au domaine A_β, lequel se confond avec l'étoile principale A, pour $\beta = 0$.

Il en sera de même du polynome

$$\sum_0^{\nu_\sigma} a_n \left(\frac{x}{n^\sigma}\right)^n,$$

à condition qu'on fasse croître ν_σ avec $\left|\frac{1}{\sigma}\right|$ de telle sorte qu'on ait constamment

$$\nu_\sigma > e^{\left|\frac{1}{\sigma}\right| \chi\left(\frac{1}{\sigma}\right)},$$

$\chi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ étant une fonction qui croît vers l'infini, d'ailleurs aussi lentement qu'on le voudra, lorsque σ tend vers zéro.

Helsingfors, janvier 1903.