JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Développements sur une forme nouvelle des équations de la dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 5-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique;

PAR M. PAUL APPELL.

Nous avons, dans un court Travail inséré au *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXI, indiqué une forme nouvelle des équations de la Dynamique présentant les deux avantages suivants, qui la rendent plus générale que la forme donnée par Lagrange : 1° ces équations sont applicables à tous les genres de liaisons, même aux liaisons qui, comme les roulements, s'expriment par des relations différentielles non intégrables; 2° elles s'appliquent encore quand, au lieu de définir la position d'un système par de véritables coordonnées, on emploie des paramètres liés aux coordonnées par des relations différentielles non intégrables (¹). Nous nous pro-

(¹) *Voyez* un opuscule intitulé : *Les mouvements de roulement en Dynamique*, que nous avons publié en 1899, chez Carré et Naud (Collection *Scientia*). On doit ajouter à la bibliographie placée en tête de cet Opuscule un article de FERRERS (*Quarterly Journal of Mathematics*, 1871-1873).

posons, dans le présent Mémoire, de développer des applications de cette théorie. Nous commencerons par rappeler rapidement comment on obtient les nouvelles équations.

1. Imaginons un système matériel assujetti à deux sortes de liaisons, A et B.

A. Soient d'abord des liaisons exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points : en vertu de ces liaisons, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque m du système peuvent être exprimées en fonction de h paramètres indépendants q_1, q_2, ..., q_h et du temps t :

$$x = f(q_1, q_2, \ldots, q_h, t),$$
$$y = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_h, t),$$
$$z = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_h, t).$$

Un déplacement virtuel, compatible avec ces liaisons, est défini par les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_h}\delta q_h, \\ \delta y &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\delta q_h, \\ \delta z &= \frac{\partial \psi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_h}\delta q_h, \end{aligned}\right.$$

et le déplacement réel pendant le temps dt est défini par les relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial f}{\partial t}dt, \\ dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt, \\ dz &= \frac{\partial \psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial q_h}dq_h + \frac{\partial \psi}{\partial t}dt. \end{aligned}\right.$$

Si ces liaisons existaient seules, le système serait ce que Hertz appelle, dans le troisième volume de ses Œuvres, *un système holonome*.

B. Supposons maintenant qu'entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_h$, qui sont de véritables coordonnées, et d'autres paramètres $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$, au nombre de s, on établisse des relations différentielles non intégrables au nombre de $p \geqq s$, que nous écrirons comme il suit. Les variations virtuelles $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{h+s}$ des anciens et nouveaux paramètres doivent être liées par p relations de la forme

$$(3)\quad \begin{cases} A_{11}\,\delta q_1 + A_{12}\,\delta q_2 + \ldots + A_{1h+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \\ A_{21}\,\delta q_1 + A_{22}\,\delta q_2 + \ldots + A_{2h+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p1}\,\delta q_1 + A_{p2}\,\delta q_2 + \ldots + A_{ph+s}\,\delta q_{h+s} = 0, \end{cases}$$

et les variations réelles des mêmes paramètres, pendant l'intervalle de temps dt, doivent être liées par les p relations

$$(4)\quad \begin{cases} A_{11}\,dq_1 + A_{12}\,dq_2 + \ldots + A_{1h+s}\,dq_{h+s} + A_1\,dt = 0, \\ A_{21}\,dq_1 + A_{22}\,dq_2 + \ldots + A_{2h+s}\,dq_{h+s} + A_2\,dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{p1}\,dq_1 + A_{p2}\,dq_2 + \ldots + A_{ph+s}\,dq_{h+s} + A_p\,dt = 0. \end{cases}$$

Dans ces relations, les coefficients A_{ij}, A_i sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_{h+s}, t$. Si ces p relations (3) et (4) sont exactement au nombre des nouveaux paramètres introduits $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$ $(p = s)$, elles doivent être considérées comme servant de définition aux nouveaux paramètres introduits et n'imposent aucune liaison nouvelle au système; si le nombre p des relations (3) et (4) est supérieur à s, ces relations servent de définition aux nouveaux paramètres et, en même temps, imposent au système $p - s$ liaisons nouvelles, puisque, par l'élimination de $\delta q_{h+1}, \delta q_{h+2}, \ldots, \delta q_{h+s}$ entre les p relations (3), on obtiendrait alors $p - s$ relations entre $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_h$. Comme une au moins de ces h variations doit être arbitraire, $p - s$ est au plus égal à $h - 1$.

Il peut se faire, bien entendu, qu'il n'y ait pas intérêt à introduire de nouveaux paramètres autres que $q_1, q_2, \ldots, q_h$; alors $s = 0$.

2. *Exemple.* — Pour montrer sur un exemple simple comment il faut comprendre l'introduction de ces nouvelles liaisons et de ces nouveaux paramètres, considérons une sphère solide homogène de rayon a assujettie d'abord à toucher un plan fixe $\xi O \eta$. La position de cette sphère dépend de cinq paramètres qui sont les coordonnées ξ et η de son centre de gravité G et les trois angles d'Euler, θ, φ, ψ, que font des axes Gx, y, z invariablement liés à la sphère avec trois axes Gx_1, y_1, z_1, parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$. Le ζ du point G est constant et égal à a. Ces cinq paramètres sont de véritables coordonnées dont les valeurs numériques déterminent la position de la sphère; ils jouent le rôle de $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

Désignons par p_1, q_1, r_1 les composantes de la rotation instantanée de la sphère suivant les axes Gx_1, y_1, z_1; on a, d'après des formules connues (voyez mon *Traité de Mécanique*, t. II, p. 257),

$$\begin{aligned} p_1 &= \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi, \\ q_1 &= \theta' \sin\psi - \varphi' \sin\theta \cos\psi, \\ r_1 &= \psi' + \varphi' \cos\theta. \end{aligned}$$

Cela posé, assujettissons la sphère à rouler sur le plan; cette condition s'exprime en écrivant que la vitesse du point matériel de la sphère qui touche le plan est nulle

$$\frac{d\xi}{dt} - a q_1 = 0, \qquad \frac{d\eta}{dt} + a p_1 = 0;$$

en même temps, introduisons trois nouveaux paramètres λ, μ, ν, dont les variations réelles, pendant le temps dt, sont définies par

$$d\lambda = p_1\, dt, \qquad d\mu = q_1\, dt, \qquad d\nu = r_1\, dt.$$

Nous aurons, d'après les valeurs de p_1, q_1, r_1 les cinq équations suivantes :

$$(4') \qquad \left\{ \begin{aligned} d\lambda - d\theta \cos\psi - d\varphi \sin\theta \sin\psi &= 0, \\ d\mu - d\theta \sin\psi + d\varphi \sin\theta \cos\psi &= 0, \\ d\nu - d\psi - d\varphi \cos\theta &= 0, \\ d\xi - a\, d\mu &= 0, \\ d\eta + a\, d\lambda &= 0, \end{aligned} \right.$$

dont trois servent de définition aux trois nouveaux paramètres et les deux autres aux nouvelles liaisons. Les variations virtuelles des anciens et des nouveaux paramètres seront, de même, liées par les cinq relations

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\lambda - \delta\theta\cos\psi - \delta\varphi\sin\theta\sin\psi &= 0, \\ \delta\mu - \delta\theta\sin\psi + \delta\varphi\sin\theta\cos\psi &= 0, \\ \delta\nu - \delta\psi - \delta\varphi\cos\theta &= 0, \\ \delta\xi - a\,\delta\mu &= 0, \\ \delta\eta + a\,\delta\lambda &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces relations jouent, dans cet exemple, le rôle des relations (3) et (4). Les paramètres λ, μ, ν jouent le rôle de $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$. Les nombres h, s et p sont respectivement 5, 3 et 5.

Revenons maintenant à la théorie générale.

3. Pour obtenir les équations du mouvement, désignons par n la différence positive

$$n = h + s - p.$$

Les variations $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_{h+s}$, au nombre de $n+p$, étant liées par les p relations linéaires et homogènes (3), on peut regarder n d'entre elles comme arbitraires et les p autres comme des fonctions de celles-là, définies par les relations (3).

Ces variations arbitraires peuvent être choisies aussi bien parmi les variations des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_h$ que parmi les variations des nouveaux paramètres $q_{h+1}, q_{h+2}, \ldots, q_{h+s}$.

Pour fixer les idées, nous regarderons $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ comme arbitraires; nous aurons alors, en résolvant les équations (3) par rapport à $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \ldots, \delta q_{n+p}$, $(n+p=h+s)$,

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta q_{n+1} &= \alpha_1\,\delta q_1 + \alpha_2\,\delta q_2 + \ldots + \alpha_n\,\delta q_n, \\ \delta q_{n+2} &= \beta_1\,\delta q_1 + \beta_2\,\delta q_2 + \ldots + \beta_n\,\delta q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta q_{n+p} &= \lambda_1\,\delta q_1 + \lambda_2\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_n\,\delta q_n; \end{aligned} \right.$$

les équations (4) résolues par rapport à $dq_{n+1}, dq_{n+2}, \ldots, dq_{n+p}$ donnent de même

$$(6)\quad \begin{cases} dq_{n+1} = \alpha_1\, dq_1 + \alpha_2\, dq_2 + \ldots + \alpha_n\, dq_n + \alpha\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dq_{n+p} = \lambda_1\, dq_1 + \lambda_2\, dq_2 + \ldots + \lambda_n\, dq_n + \lambda\, dt. \end{cases}$$

Ceci posé, le principe de d'Alembert, combiné avec le théorème du travail virtuel, donne pour l'équation générale du mouvement du système

$$(7)\quad \sum m(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z''\,\delta z) = \sum (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z).$$

Dans cette équation, m désigne la masse du point de coordonnées x, y, z; x'', y'', z'' les dérivées totales deuxièmes de x, y, z par rapport au temps; X, Y, Z les projections de la force appliquée au point x, y, z. Les déplacements $\delta x, \delta y, \delta z$ sont les déplacements compatibles avec les liaisons à l'instant t. Si les liaisons ont lieu *sans frottement*, les forces de liaison s'éliminent dans la relation (7), car, sous cette réserve, les travaux des forces de liaison ont une somme nulle pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons.

Les expressions de $\delta x, \delta y, \delta z$ sont fournies par les relations (1), où les $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k$ vérifient les équations (3). En remplaçant $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \ldots, \delta q_{n+p}$ par leurs expressions (5), on a, pour $\delta x, \delta y, \delta z$, des expressions de la forme

$$(8)\quad \begin{cases} \delta x = a_1\, \delta q_1 + a_2\, \delta q_2 + \ldots + a_n\, \delta q_n, \\ \delta y = b_1\, \delta q_1 + b_2\, \delta q_2 + \ldots + b_n\, \delta q_n, \\ \delta z = c_1\, \delta q_1 + c_2\, \delta q_2 + \ldots + c_n\, \delta q_n. \end{cases}$$

De même, en remplaçant dans les expressions de dx, dy, dz les quantités $dq_{n+1}, dq_{n+2}, \ldots, dq_{n+p}$ par leurs valeurs (6), on a, pour le déplacement réel,

$$(9)\quad \begin{cases} dx = a_1\, dq_1 + a_2\, dq_2 + \ldots + a_n\, dq_n + a\, dt, \\ dy = b_1\, dq_1 + b_2\, dq_2 + \ldots + b_n\, dq_n + b\, dt, \\ dz = c_1\, dq_1 + c_2\, dq_2 + \ldots + c_n\, dq_n + c\, dt, \end{cases}$$

où

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad a,\qquad \ldots,\qquad c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_n,\quad c$$

sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et t.

Ceci posé, en remplaçant dans l'équation (7) δx, δy, δz par leurs expressions (8), on a une équation de la forme

$$P_1\,\delta q_1 + P_2\,\delta q_2 + \ldots + P_n\,\delta q_n = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_n\,\delta q_n,$$

qui doit avoir lieu quels que soient $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$; elle se décompose donc en n équations

$$(10)\qquad P_1 = Q_1,\qquad P_2 = Q_2,\qquad \ldots,\qquad P_n = Q_n,$$

qui, jointes aux p équations (6), définissent les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ en fonction de t. Dans ces équations, les deuxièmes membres se calculent comme dans les équations de Lagrange

$$Q_1 = \Sigma(a_1 X + b_1 Y + c_1 Z),\qquad \ldots.$$

Quant aux premiers membres, on peut les calculer comme il suit. Prenons P_1. On a

$$P_1 = \Sigma m\,(x'' a_1 + y'' b_1 + z'' c_1);$$

or les expressions (9) s'écrivent en divisant par dt et désignant par $x', y', z', q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ les dérivées de $x, y, z, q_1, q_2, \ldots, q_n$ par rapport à t

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= a_1 q'_1 + a_2 q'_2 + \ldots + a_n q'_n + a,\\ y' &= b_1 q'_1 + b_2 q'_2 + \ldots + b_n q'_n + b,\\ z' &= c_1 q'_1 + c_2 q'_2 + \ldots + c_n q'_n + c;\end{aligned}\right.$$

prenons les dérivées totales de ces expressions par rapport au temps; nous aurons

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} x'' &= a_1 q''_1 + a_2 q''_2 + \ldots + a_n q''_n + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial a_1}{\partial q_{n+p}} q'_{n+p} + \frac{\partial a_1}{\partial t}\right) q'_1 + \ldots,\\ y'' &= b_1 q''_1 + b_2 q''_2 + \ldots + b_n q''_n + \ldots,\\ z'' &= c_1 q''_1 + c_2 q''_2 + \ldots + c_n q''_n + \ldots;\end{aligned}\right.$$

mais alors on a évidemment

$$a_1 = \frac{\partial x''}{\partial q''_1}, \qquad b_1 = \frac{\partial y''}{\partial q''_1}, \qquad c_1 = \frac{\partial z''}{\partial q''_1}.$$

L'expression de P_1 s'écrit donc

$$P_1 = \sum m \left(x'' \frac{\partial x''}{\partial q''_1} + y'' \frac{\partial y''}{\partial q''_1} + z'' \frac{\partial z''}{\partial q''_1} \right),$$

et en posant

$$S = \frac{1}{2} \sum m \, (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

on a

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q''_1}.$$

On obtient de même $P_2, \ldots, P_n$ et les équations du mouvement sont finalement

$$(13) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_2} = Q_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_n} = Q_n.$$

Telle est la forme d'équations que nous avions en vue. Pour écrire ces équations, il faut calculer les fonctions

$$S = \frac{1}{2} \sum m J^2,$$

où J est l'accélération absolue du point m, fonction qui est composée avec les accélérations comme la demi-force vive l'est avec les vitesses. Il faut exprimer cette fonction S à l'aide des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et de leurs dérivées premières et deuxièmes, en ayant soin de ne laisser subsister dans la fonction que les dérivées deuxièmes $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ des paramètres regardés comme indépendants; cela est toujours possible, car à l'aide des relations (6) on peut toujours exprimer, par dérivation, $q''_{n+1}, q''_{n+2}, \ldots, q''_{n+p}$ en fonction linéaire de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$. La fonction S étant ainsi calculée, on écrit les n équations (13) qui, jointes aux p relations (6), déterminent les $n+p$ paramètres

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n+p},$$

en fonction de t.

La fonction S est du deuxième degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$. Il suffit évidemment de calculer dans S les termes contenant les dérivées secondes des paramètres, car les autres ne donnent rien quand on prend les dérivées partielles par rapport à $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$.

On peut remarquer, d'après les formules (11) et (12), que si l'on forme la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

les coefficients des termes du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ dans T sont identiques aux coefficients des termes du deuxième degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ dans S. Dans cette fonction S, les coefficients des termes du deuxième degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ dépendent des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$ et du temps; ceux des termes du premier degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ contiennent en outre, au second degré, les dérivées premières $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{n+p}$.

4. *Application au mouvement plan d'un point matériel en coordonnées polaires.* — Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point (x, y) de masse m. On a

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$S = \frac{m}{2}(x''^2 + y''^2) = \frac{m}{2}[(r'' - r\theta'^2)^2 + (r\theta'' + 2r'\theta')^2].$$

En appelant P la composante de la force appliquée X, Y, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur et R sa composante, suivant le rayon vecteur, on voit immédiatement que le travail virtuel

$$X\delta x + Y\delta y$$

de la force est

$$P r\delta\theta + R\delta r.$$

Les équations de mouvement sont donc

$$\frac{\partial S}{\partial \theta''} = Pr, \qquad \frac{\partial S}{\partial r''} = R,$$

ou

$$mr(r\theta'' + 2r'\theta') = Pr, \qquad m(r'' - r\theta'^2) = R.$$

Remarque. — Dans S, la quantité

$$r\theta'' + 2r'\theta'$$

admet un facteur intégrant r. Introduisons alors, à la place de θ, un paramètre λ dont la variation réelle est définie par

$$d\lambda = r^2\, d\theta$$

et la variation virtuelle par

$$\delta\lambda = r^2\, \delta\theta.$$

Nous aurons

$$\lambda' = r^2\theta', \qquad \lambda'' = r(r\theta'' + 2r'\theta');$$

donc

$$S = \frac{m}{2}\left[(r'' - r\theta'^2)^2 + \frac{1}{r^2}\lambda''^2\right],$$

$$X\,\delta x + Y\,\delta y = \frac{P}{r}\,\delta\lambda + R\,\delta r,$$

et les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial S}{\partial r''} = R, \qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda''} = \frac{P}{r};$$

la seconde est

$$m\lambda'' = Pr.$$

Si P est nul, λ' est constant, ce qui donne le théorème des aires.

5. Systèmes. — Théorème analogue au théorème de Kœnig. — Soient, dans un système, x, y, z les coordonnées absolues d'un point m, ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives du même point, par rapport à des axes $G\,x_1, y_1, z_1$, parallèles aux axes fixes et menés par G. Appelons J_0 l'accélération absolue du point G

$$J_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2,$$

J_1 l'accélération relative du point m, par rapport aux axes G, $x_1\, y_1$, z_1

$$J_1^2 = x_1''^2 + y_1''^2 + z_1''^2.$$

Désignons enfin par M la masse totale du système. On a

$$x = \xi + x_1, \qquad y = \eta + y_1, \qquad z = \zeta + z_1,$$
$$x'' = \xi'' + x_1'', \qquad y'' = \eta'' + y_1'', \qquad z'' = \zeta'' + z_1''.$$

Calculons alors la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2 = \frac{1}{2}\Sigma m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

en remarquant que,

$$\Sigma m x_1, \quad \Sigma m y_1, \quad \Sigma m z_1$$

étant nuls, on a aussi

$$\Sigma m x_1'' = \Sigma m y_1'' = \Sigma m z_1'' = 0;$$

nous avons

$$S = \frac{1}{2} M J_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma m J_1^2,$$

ce que nous écrirons

$$S = \frac{1}{2} M J_0^2 + S_1. \tag{14}$$

On a ainsi un théorème analogue au théorème de Kœnig pour la force vive.

6. *Application à un corps solide qui se meut parallèlement à un plan fixe.* — Prenons comme plan de la figure le plan de la courbe décrite par le centre de gravité. Soient, dans ce plan, deux axes fixes Ox et Oy, ξ et η les coordonnées de G. Il suffit évidemment de connaître le mouvement de la figure plane (P), section du corps par le plan xOy. Appelons alors θ l'angle que fait avec Ox un rayon GA invariablement lié à cette figure plane (P), et Mk^2 le moment d'inertie

du corps par rapport à l'axe mené par G perpendiculairement au plan xOy.

Le mouvement du corps autour du centre de gravité G est une rotation autour d'un axe fixe dans le corps, la vitesse angulaire de rotation étant θ'. On a donc, pour la fonction S_1 calculée dans le mouvement du corps autour de G

$$S_1 = \frac{Mk^2}{2}(\theta''^2 + \theta'^4).$$

Donc

$$S = \frac{M}{2}[\xi''^2 + \eta''^2 + k^2\theta''^2 + \ldots],$$

où il est inutile d'écrire les termes ne contenant pas les dérivées secondes.

D'autre part, si l'on appelle X_0, Y_0 les projections de la résultante générale des forces appliquées, et N_0 la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe mené par G perpendiculairement au plan xOy, on a

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = X_0\,\delta\xi + Y_0\,\delta\eta + N_0\,\delta\theta.$$

Le corps n'étant supposé soumis à aucune autre liaison, les paramètres ξ, η, θ sont indépendants et les équations de mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \xi''} = X_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \eta''} = Y_0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = N_0,$$

$$M\,\xi'' = X_0, \qquad M\,\eta'' = Y_0, \qquad Mk^2\theta'' = N_0.$$

On retrouve ainsi les équations que donnent immédiatement les théorèmes généraux.

Supposons que le corps soit assujetti à une nouvelle liaison, que cette liaison soit exprimée par une relation en termes finis

$$f(\xi, \eta, \theta, t) = 0,$$

ou par une relation différentielle

$$\begin{aligned} A\,d\xi + B\,d\eta + C\,d\theta + D\,dt &= 0, \\ A\,\delta\xi + B\,\delta\eta + C\,\delta\theta \quad &= 0, \end{aligned}$$

A, B, C, D étant des fonctions de ξ, η, θ, t. On pourra alors exprimer η'' en fonction de ξ'' et θ'' par exemple, $\delta\eta$ en fonction de $\delta\xi$ et $\delta\theta$; par suite, calculer S en fonction de ξ'' et θ'', rendre $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ linéaire et homogène en $\delta\xi$ et $\delta\theta$, puis égaler $\frac{\partial S}{\partial \xi''}$ au coefficient de $\delta\xi$ et $\frac{\partial S}{\partial \theta''}$ à celui de $\delta\theta$.

7. *Application à un corps solide mobile autour d'un point fixe.* — Commençons par calculer la fonction S pour un corps solide mobile autour d'un point fixe O, en nous plaçant dans le cas le plus général. Il suffira ensuite pour chaque exemple particulier, d'employer cette fonction S calculée une fois pour toutes.

Rapportons le mouvement du corps à un trièdre trirectangle $Oxyz$, d'origine O, animé d'un mouvement connu. Soient Ω la rotation instantanée de ce trièdre, P, Q, R les composantes de cette rotation suivant les arêtes Ox, Oy, Oz ; soient de même ω la rotation instantanée absolue du corps solide, p, q, r ses composantes suivant les axes $Oxyz$. Une molécule m du corps de coordonnées x, y, z possède une vitesse absolue v de projections

$$(15)\qquad \begin{cases} v_x = qz - ry, \\ v_y = rx - pz, \\ v_z = py - qx; \end{cases}$$

cette molécule possède une accélération absolue J ayant pour projections

$$(16)\qquad \begin{cases} J_x = \dfrac{dv_x}{dt} + Qv_z - Rv_y, \\[2ex] J_y = \dfrac{dv_y}{dt} + Rv_x - Pv_z, \\[2ex] J_z = \dfrac{dv_z}{dt} + Pv_y - Qv_x; \end{cases}$$

ces formules s'écrivent immédiatement si l'on remarque que l'accélération J est la vitesse absolue du point géométrique ayant pour coordonnées v_x, v_y, v_z par rapport aux axes mobiles $Oxyz$.

Cela posé, on a

$$\frac{dv_x}{dt} = q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt} + zq' - yr', \ldots,$$

p', q', r' désignant les dérivées de p, q, r par rapport au temps. Les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les projections sur Ox, Oy, Oz de la vitesse relative v_r de la molécule m par rapport à ces axes : si l'on appelle v_e la vitesse d'entraînement de cette même molécule, on a

$$(v_r)_x = v_x - (v_e)_x,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry - (Qz - Ry).$$

On a de même, en permutant, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$. D'après cela, les expressions (16) de J_x, J_y, J_z prennent la forme suivante, où nous écrivons seulement J_x :

$$\begin{aligned} J_x = {} & q[(p-P)y - (q-Q)x] - r[(r-R)x - (p-P)z] \\ & + zq' - yr' + Q(py - qx) - R(rx - pz), \end{aligned}$$

ou en ordonnant

$$\begin{aligned} J_x = {} & -x(q^2 + r^2) + y[q(p-P) + pQ - r'] \\ & + z[r(p-P) + pR + q']. \end{aligned}$$

On a de même, en permutant, J_y et J_z. Faisant la somme des carrés, on a J^2, et enfin la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Dans cette somme figurent comme coefficients les moments d'inertie

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \qquad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

et les produits d'inertie

$$D = \Sigma myz, \qquad E = \Sigma mzx, \qquad F = \Sigma mxy,$$

par rapport aux axes $Oxyz$. Ces six quantités seront, en général, variables avec le temps, puisque les axes $Oxyz$ se déplacent dans le corps.

Actuellement les paramètres sont les angles qui fixent l'orientation du corps autour du point O : les quantités p, q, r contiennent les *dérivées premières* de ces paramètres par rapport au temps ; le trièdre $Oxyz$ étant supposé animé d'un mouvement connu, P, Q, R doivent être regardés comme des fonctions connues du temps ; les dérivées secondes des paramètres ne figurent donc que dans p', q', r'. Alors, d'après une remarque précédente, il suffit de calculer les termes de S qui dépendent des accélérations, c'est-à-dire de p', q', r', car ces termes seuls dépendent des dérivées secondes des paramètres.

Posons, pour abréger,

$$(17) \quad qR - rQ = P_1, \qquad rP - pR = Q_1, \qquad pQ - qP = R_1,$$

et désignons, pour un moment, par a, b, c les sommes Σmx^2, Σmy^2, Σmz^2. On peut écrire

$$(18) \left\{ \begin{aligned} 2S = a&[(q' - Q_1 - pr)^2 + (r' - R_1 + pq)^2] \\ &+ b[(r' - R_1 - qp)^2 + (p' - P_1 + qr)^2] \\ &+ c[(p' - P_1 - rq)^2 + (q' - Q_1 + rp)^2] \\ &- 2D[(q^2 - r^2)p' + (q' - Q_1 + pr)(r' - R_1 - pq)] \\ &- 2E[(r^2 - p^2)q' + (r' - R_1 + qp)(p' - P_1 - qr)] \\ &- 2F[(p^2 - q^2)r' + (p' - P_1 + rq)(q' - Q_1 - rp)] + \ldots \end{aligned} \right.$$

Développons et ordonnons par rapport à $p' - P_1$, $q' - Q_1$, $r' - R_1$, en remarquant que

$$b + c = A, \qquad c + a = B, \qquad a + b = C,$$
$$b - c = C - B, \qquad c - a = A - C, \qquad a - b = B - A;$$

nous pouvons écrire, en laissant de côté des termes indépendants de p', q', r'

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & A(p'-P_1)^2 + B(q'-Q_1)^2 + C(r'-R_1)^2 \\ & - 2D(q'-Q_1)(r'-R_1) - 2E(r'-R_1)(p'-P_1) \\ & \qquad\qquad - 2F(p'-P_1)(q'-Q_1) \\ & + 2[(C-B)qr - D(q^2-r^2) - Epq + Fpr](p'-P_1) \\ & + 2[(A-C)rp - E(r^2-p^2) - Fqr + Dqp](q'-Q_1) \\ & + 2[(B-A)pq - F(p^2-q^2) - Drp + Erq](r'-R_1) + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette formule peut être écrite d'une façon simple à l'aide de la forme quadratique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} 2S = {} & f(p'-P_1, q'-Q_1, r'-R_1) + (p'-P_1)\left(q\frac{\partial f}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial q}\right) \\ & + (q'-Q_1)\left(r\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial r}\right) + (r'-R_1)\left(p\frac{\partial f}{\partial q} - q\frac{\partial f}{\partial p}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

où $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, \frac{\partial f}{\partial r}$ sont les dérivées partielles de $f(p, q, r)$.

Remarque. — Si les axes $Oxyz$ sont *fixes dans l'espace*, on a

$$P = Q = R = 0;$$

par suite $P_1 = Q_1 = R_1 = 0$, la fonction $2S$ est alors

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & f(p', q', r') + (rq'-qr')\frac{\partial f}{\partial p} + (pr'-rp')\frac{\partial f}{\partial q} \\ & + (qp'-pq')\frac{\partial f}{\partial r} + \ldots \end{aligned}\right.$$

La même forme convient encore si les axes sont *fixes dans le corps*, car dans ce cas

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad R = r,$$

et l'on a aussi

$$P_1 = Q_1 = R_1 = 0.$$

On voit que l'on remonte de l'expression (20) de la partie utile de S dans ces deux cas, à celle de la partie utile de S dans le cas général, en y remplaçant p', q', r' par $p' - P_1$, $q' - Q_1$, $r' - R_1$.

Équations générales du mouvement. — Prenons comme paramètres servant à définir la suite des positions du corps les quantités λ, μ, ν, dont les variations pendant le temps dt sont liées à p, q, r par les formules

$$(21) \qquad d\lambda = p\,dt, \qquad d\mu = q\,dt, \qquad d\nu = r\,dt.$$

On voit que $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ sont les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour de Ox, Oy, Oz pour l'amener de la position actuelle à la position infiniment voisine qu'il occupe à l'instant $t + dt$. Nous appellerons de même $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les variations virtuelles qu'il faudrait donner à λ, μ, ν pour amener le corps de la position actuelle à une position infiniment voisine quelconque.

Dans ces conditions, la somme des travaux virtuels des forces appliquées

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$$

prend la forme

$$L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu,$$

où L, M, N sont respectivement les sommes des moments des forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz : ainsi L est la somme des moments par rapport à Ox, parce que le déplacement $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$, $\delta\lambda \neq 0$ est une rotation autour de l'axe Ox supposé fixe.

D'autre part, les formules (21) donnent, en employant la notation des dérivées de Lagrange,

$$p = \lambda', \qquad q = \mu', \qquad r = \nu',$$
$$p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''.$$

La fonction S devient alors une forme quadratique de λ'', μ'', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N,$$

ou encore

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = N. \tag{22}$$

La première de ces équations est, d'après (19),

$$\left\{ \begin{aligned} & A(p' - P_1) - F(q' - Q_1) - E(r' - R_1) \\ & + (C - B)qr - D(q^2 - r^2) - Epq + Fpr = L. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Les deux autres s'obtiennent par permutation circulaire.

Remarque. — On verrait que l'introduction des paramètres λ, μ, ν est légitime et conforme à la théorie générale que nous venons d'exposer, en montrant que ces paramètres sont liés aux angles d'Euler par des relations différentielles linéaires non intégrables. C'est ce que nous montrons en détail dans les exemples élémentaires suivants.

8. Première application élémentaire. — *Formules d'Euler.* — Supposons le trièdre $Oxyz$ lié au corps et formé d'axes principaux d'inertie. Alors la rotation instantanée Ω du trièdre est identique à celle du corps ω : on a

$$P = p, \qquad Q = q, \qquad R = r, \qquad P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0, \qquad R_1 = 0;$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} 2S = {} & Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 + 2(C - B)qrp' \\ & + 2(A - C)rpq' + 2(B - A)pqr' + \ldots . \end{aligned} \right. \tag{24}$$

La position du corps dépend de trois paramètres, les trois angles d'Euler θ, φ, ψ du trièdre $Oxyz$ avec un trièdre fixe ; on a, d'après des formules connues (¹),

$$(25) \qquad \begin{cases} p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi, \\ q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \psi' \cos\theta + \varphi'; \end{cases}$$

en dérivant par rapport au temps et écrivant seulement les termes en θ'', φ'', ψ'', on a de même

$$(26) \qquad \begin{cases} p' = \psi'' \sin\theta \sin\varphi + \theta'' \cos\varphi + \ldots, \\ q' = \psi'' \sin\theta \cos\varphi - \theta'' \sin\varphi + \ldots, \\ r' = \psi'' \cos\theta + \varphi'' + \ldots. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on imprime au corps un déplacement virtuel obtenu en faisant varier θ, φ, ψ de $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, on a, pour la somme des travaux des forces appliquées,

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$(27) \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = \Theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \Phi, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = \Psi.$$

Écrivons l'équation relative à φ''. Comme r' seul contient φ'', on a évidemment

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \frac{\partial S}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial \varphi''} = C r' + (B - A) pq,$$

car $\dfrac{\partial r'}{\partial \varphi''} = 1$. La deuxième des équations (27) est donc

$$C r' + (B - A) pq = \Phi;$$

c'est une des équations d'Euler.

(¹) Voyez, par exemple, mon *Traité de Mécanique*, t. II, Chap. XX.

Les deux autres équations (27) ne donnent pas immédiatement les deux autres équations d'Euler.

Mais nous pouvons procéder autrement d'une façon beaucoup plus symétrique, grâce à ce fait que la nouvelle forme d'équations s'applique à des paramètres qui ne sont pas de véritables coordonnées, mais qui sont liés aux paramètres θ, φ, ψ par des relations différentielles non intégrables. Introduisons alors trois nouveaux paramètres λ, μ, ν, dont les variations virtuelles sont liées à $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ par les formules

$$\begin{aligned}
\delta\lambda &= \sin\theta \sin\varphi\, \delta\psi + \cos\varphi\, \delta\theta,\\
\delta\mu &= \sin\theta \cos\varphi\, \delta\psi - \sin\varphi\, \delta\theta,\\
\delta\nu &= \cos\theta\, \delta\psi + \delta\varphi.
\end{aligned}$$

Nous pouvons considérer $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ comme indépendants et $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ comme donnés en fonction de $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ par les équations ci-dessus. Dans ces conditions, la somme des travaux virtuels des forces appliquées prend la forme

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu,$$

L, M, N désignant les sommes des moments des forces par rapport aux axes Ox, Oy, Oz; en effet, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sont les angles infiniment petits dont il faut faire tourner le corps autour de Ox, Oy, Oz pour l'amener de la position actuelle à une position infiniment voisine. Le déplacement obtenu en faisant $\delta\mu = 0$, $\delta\nu = 0$ est donc une rotation autour de Ox, et l'on a, pour expression du travail virtuel, $L\,\delta\lambda$, L étant la somme des moments des forces par rapport à Ox.

Le déplacement réel est donné par

$$d\lambda = \sin\theta \sin\varphi\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta, \quad \ldots,$$

ou, en divisant par dt,

$$\begin{aligned}
p &= \lambda' = \sin\theta \sin\varphi\, \psi' + \cos\varphi\, \theta',\\
q &= \mu' = \sin\theta \cos\varphi\, \psi' - \sin\varphi\, \theta',\\
r &= \nu' = \cos\theta\, \psi' + \varphi'.
\end{aligned}$$

On en tire

$$p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''.$$

La fonction $2S$, donnée par la formule (24), est alors exprimée en fonction de λ'', μ'', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N,$$

ou encore, puisque λ'', μ'', ν'' sont égaux à p', q', r',

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = L, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = M, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = N.$$

Ce sont là les trois équations d'Euler

$$Ap' + (C - B)qr = L, \qquad \ldots.$$

9. *Deuxième application élémentaire.* — Supposons maintenant que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point fixe O soit de révolution; prenons comme axe Oz l'axe de révolution et comme axes Ox et Oy deux axes mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace, définis comme il suit. Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1 trois axes fixes : l'axe Oy sera perpendiculaire au plan zOz_1 et l'axe Ox perpendiculaire au plan yOz. L'angle θ est alors l'angle z_1Oz, ψ l'angle x_1Oy. La rotation instantanée Ω du trièdre $Oxyz$ est la résultante de deux rotations, l'une $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ autour de Oy, l'autre $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$ autour de Oz_1; les composantes de cette rotation, suivant Ox, Oy, Oz, sont donc

$$(28) \qquad P = -\psi' \sin\theta, \qquad Q = \theta', \qquad R = \psi' \cos\theta.$$

Une fois le trièdre $Oxyz$ placé, il faut définir la position du solide par rapport à ce trièdre; pour cela, il suffit de connaître l'angle φ que fait une droite liée au corps dans le plan xOy avec l'axe Oy : la dérivée $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ de cet angle mesure la rotation propre du corps autour de Oz. La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rotation Ω du trièdre et de la rotation propre φ' autour de Oz. On a donc, pour les projections p, q, r de ω sur les axes $Oxyz$,

$$(29)\quad \begin{cases} p = P = -\psi'\sin\theta, \qquad q = Q = \theta', \\ \qquad r = R + \varphi' = \psi'\cos\theta + \varphi'. \end{cases}$$

On en conclut, en dérivant par rapport à t,

$$p' = -\psi''\sin\theta + \ldots, \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \psi''\cos\theta + \varphi'' + \ldots.$$

En outre, l'ellipsoïde d'inertie étant de révolution autour de Oz,

$$B = A.$$

L'expression générale (19) de S devient actuellement, en remplaçant P et Q par p et q et remarquant que $D = E = F = 0$, puisque les axes mobiles sont des axes principaux d'inertie,

$$(30)\quad 2S = A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots.$$

Pour une variation $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ des trois angles, la somme des travaux des forces appliquées prend la forme

$$\Theta\,\delta\theta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi;$$

comme le déplacement virtuel obtenu en faisant $\delta\varphi = \delta\psi = 0$ est une rotation autour de Oy, Θ est la somme $\mathfrak{M}_y$ des moments des forces par rapport à Oy; de même, Φ est la somme $\mathfrak{M}_z$ des moments des forces par rapport à Oz et Ψ la somme $\mathfrak{M}_{z_1}$ des forces par rapport à Oz_1.

Cela posé, écrivons les équations

$$\frac{\partial S}{\partial\theta''} = \Theta, \qquad \frac{\partial S}{\partial\varphi''} = \Phi, \qquad \frac{\partial S}{\partial\psi''} = \Psi.$$

Nous avons

$$Aq' + p(AR - Cr) = \mathfrak{M}_{y_1},$$

$$Cr' = \mathfrak{M}_z,$$

$$-Ap'\sin\theta + Cr'\cos\theta + q(AR - Cr)\sin\theta = \mathfrak{M}_{z_1},$$

La troisième équation se simplifie si l'on remarque que, en appelant $\mathfrak{M}_x$ la somme des moments par rapport à Ox, on a

$$\mathfrak{M}_{z_1} = \mathfrak{M}_z \cos\theta - \mathfrak{M}_x \sin\theta.$$

Les termes en $\cos\theta$ disparaissent alors dans la troisième équation, en vertu de la deuxième, et l'on a finalement les trois équations

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} - (AR - Cr)q &= \mathfrak{M}_x, \\ A\frac{dq}{dt} + (AR - Cr)p &= \mathfrak{M}_y, \\ C\frac{dr}{dt} &= \mathfrak{M}_z. \end{aligned}$$

On obtiendrait ces équations plus rapidement, sous la forme définitive, en introduisant, ainsi que nous l'avons fait dans le cas général, comme paramètres les trois quantités λ, μ, ν définies par les relations

$$\delta\lambda = -\sin\theta\,\delta\psi, \qquad \delta\mu = \delta\theta, \qquad \delta\nu = \cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi;$$

d'où, pour le déplacement réel,

$$\begin{gathered} p = \lambda' = -\sin\theta\,\psi', \qquad q = \mu' = \theta', \qquad r = \nu' = \cos\theta\,\psi' + \varphi', \\ p' = \lambda'', \qquad q' = \mu'', \qquad r' = \nu''. \end{gathered}$$

Les quantités $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ sont donc encore les rotations élémentaires autour de Ox, Oy, Oz, et l'on a

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \mathfrak{M}_x\,\delta\lambda + \mathfrak{M}_y\,\delta\mu + \mathfrak{M}_z\,\delta\nu.$$

La fonction $2S$ donnée par l'expression (30) s'exprime alors immédiatement en fonction de λ'', μ'', ν'' et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda''} = \mathfrak{M}_x, \qquad \frac{\partial S}{\partial\mu''} = \mathfrak{M}_y, \qquad \frac{\partial S}{\partial\nu''} = \mathfrak{M}_z,$$

ou, comme $\lambda'' = p'$, $\mu'' = q'$, $\nu'' = r'$,

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = \mathfrak{M}_x, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = \mathfrak{M}_y, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = \mathfrak{M}_z.$$

Ce sont précisément les trois équations trouvées plus haut.

10. *Corps solide entièrement libre.* — Pour un corps solide entièrement libre, on obtient la fonction S en appliquant la formule (14) analogue à celle de König. Le terme $\Sigma m J_1^2$, relatif au mouvement du corps autour de son centre de gravité, sera donné par la formule (19) qui se rapporte au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. On a donc alors

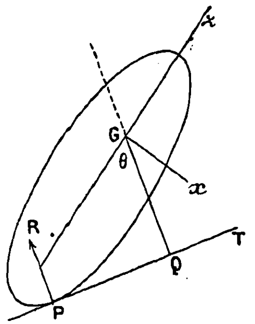
$$2S = MJ_0^2 + 2S_1,$$

S_1 désignant la fonction (19).

11. *Première application. Corps homogène pesant de révolution assujetti à glisser sans frottement sur un plan horizontal fixe.* — Imaginons un corps solide pesant assujetti aux conditions suivantes: 1° l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour d'un axe Gz; 2° le corps touche un plan horizontal fixe par une surface de révolution autour du même axe. Ces conditions sont remplies en particulier pour un solide homogène pesant de révolution.

Représentons (*fig.* 1) la méridienne de la surface de révolution par

Fig. 1.



laquelle le corps doit toucher le plan fixe. Le plan tangent en un point P de cette méridienne est perpendiculaire au plan méridien zGP sur lequel il a pour trace PQ. Soient ζ la distance GQ du centre de gravité au plan tangent et θ l'angle de cette perpendiculaire GQ avec Gz : ζ est une fonction de θ

$$\zeta = f(\theta)$$

qui est déterminée dès que la méridienne est donnée. Inversement, on peut se donner *a priori* la fonction $f(\theta)$: la surface correspondante a pour méridienne une courbe enveloppe des droites PT vérifiant cette condition. Il est évident en outre que, la méridienne étant déterminée, la distance PQ est aussi une fonction connue de θ. Pour déterminer cette fonction, remarquons que, par rapport aux axes Gx et Gz situés dans le plan de la méridienne, la tangente PT a pour équation

$$x \sin\theta - z \cos\theta = f(\theta).$$

La méridienne étant l'enveloppe de cette droite quand θ varie, on obtient les coordonnées du point de contact P, en associant à l'équation précédente sa dérivée par rapport à θ

$$x \cos\theta + z \sin\theta = f'(\theta).$$

Cette dernière équation représente une droite passant par P : c'est la normale PR; sa distance au point G est égale à QP. On a donc

$$\text{QP} = \pm f'(\theta).$$

En outre, en résolvant les deux équations ci-dessus par rapport à x et z, on a les coordonnées de P.

$$(31) \qquad \begin{cases} x = f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)\sin\theta, \\ z = f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

Ceci posé, plaçons le solide sur un plan horizontal fixe $\xi O \eta$ sur lequel il est assujetti à glisser sans frottement (*fig.* 2). Soit P le point de contact, GQ la distance du centre de gravité au plan : la verticale QGz_1 fait avec Gz un angle θ et l'on a, d'après ce qui précède,

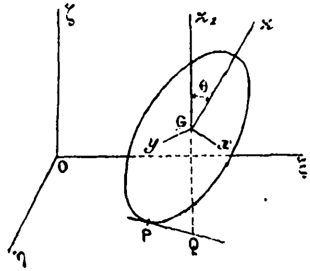
$$\text{GQ} = \zeta = f(\theta).$$

Prenons comme axes fixes deux axes $O\xi$, $O\eta$ dans le plan horizontal et une verticale ascendante $O\zeta$; appelons ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G par rapport à ces axes : ζ est la quantité $f(\theta)$ que nous venons de définir.

Menons par le centre de gravité G trois axes de directions fixes $Gx_1y_1z_1$ parallèles aux axes fixes $O\xi\eta\zeta$; l'axe Gz_1 est la verticale ascendante; cet axe est seul représenté sur la *fig.* 2.

Prenons, pour trièdre de référence, le trièdre formé par l'axe de révolution Gz, par l'axe Gx, perpendiculaire à Gz dans le plan méridien PGz du point de contact, enfin par l'axe Gy perpendicu-

Fig. 2.



laire aux précédents. Le plan zGx est vertical; l'axe Gy horizontal. Nous appellerons ψ l'angle de Gy avec une direction fixe du plan horizontal, Gx_1, par exemple. Dans ces conditions, la rotation instantanée Ω du trièdre mobile $Gxyz$ est la résultante de deux rotations l'une $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ autour de Gy, l'autre $\frac{d\psi}{dt} = \psi'$ autour de Gz_1. Les composantes P, Q, R de cette rotation suivant Gx, Gy, Gz sont donc

$$(\Omega) \qquad \begin{cases} P = -\psi' \sin\theta, \\ Q = \theta', \\ R = \psi' \cos\theta. \end{cases}$$

Pour fixer l'orientation du solide autour du point G, il faut connaître la position du solide par rapport aux axes $Gxyz$; pour cela, il suffit de connaître l'angle φ que fait une droite liée au corps dans le plan xGy avec la droite Gy. La dérivée, $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$, de cet an4le mesure la rotation propre du corps autour de Gz.

La rotation instantanée ω du corps est la résultante de la rotation Ω du trièdre $Gxyz$ et de la rotation propre φ' autour de Gz. On a donc pour les projections p, q, r de ω, les sommes des projections de Ω et φ',

$$(\omega) \qquad \left\{\begin{aligned} p &= P = -\psi'\sin\theta, \\ q &= Q = \theta', \\ r &= R + \varphi' = \psi'\cos\theta + \varphi'. \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que

$$(32) \qquad R = -p\cot\theta;$$

cette relation nous sera utile plus loin.

On a alors pour l'accélération du point G

$$J_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2.$$

Mais la relation $\zeta = f(\theta)$ donne

$$\zeta' = f'(\theta)\,\theta', \qquad \zeta'' = f'(\theta)\,\theta'' + f''(\theta)\,\theta'^2.$$

Donc

$$J_0^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + f'^2(\theta)\,\theta''^2 + 2f'f''\theta''\theta'^2 + \ldots.$$

D'autre part, la fonction S_1, dans le mouvement du corps autour du centre de gravité, a la forme (30), car les axes sont précisément ceux qui ont conduit à la forme (30). Donc

$$(33) \qquad 2S_1 = A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots.$$

Nous avons alors, en remplaçant R par sa valeur $-p\cot\theta$

$$\begin{aligned} 2S = {} & M[\xi''^2 + \eta''^2 + f'^2(\theta)\,\theta''^2 + 2f'f''\theta''\theta'^2] \\ & + A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 - 2(Ap\cot\theta + Cr)(pq' - qp') + \ldots \end{aligned}$$

Les forces appliquées dérivent d'ailleurs d'une fonction de forces $-Mg\zeta$ ou $-Mgf(\theta)$ et

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = -Mgf'(\theta)\,\delta\theta.$$

La position du système dépend de cinq paramètres arbitraires qui sont, si l'on veut,

$$\xi, \eta, \theta, \varphi, \psi.$$

On peut écrire alors les cinq équations du mouvement

$$(34) \qquad \frac{\partial S}{\partial \xi''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \eta''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \varphi''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = 0.$$

$$(35) \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta''} = -Mgf'(\theta),$$

dont l'une, la dernière, par exemple, peut être remplacée par l'équation de forces vives.

Les équations

$$p = -\psi' \sin\theta, \qquad q = \theta', \qquad r = \psi' \cos\theta + \varphi'$$

donnent

$$p' = -\psi'' \sin\theta + \ldots, \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \psi'' \cos\theta + \varphi'' + \ldots.$$

Donc S dépend de φ'' et ψ'' par l'intermédiaire de p' et r' et l'on a

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi''} = \frac{\partial S}{\partial r'}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \psi''} = -\frac{\partial S}{\partial p'} \sin\theta + \frac{\partial S}{\partial r'} \cos\theta.$$

D'après cela, en écrivant les équations (34), on a

$$M\xi'' = 0, \qquad M\eta'' = 0, \qquad Cr' = 0,$$
$$-Ap' \sin\theta + Cr' \cos\theta - (Ap \cot\theta + Cr) \sin\theta\, \theta' = 0.$$

Ces équations s'intégrent immédiatement et donnent

$$\xi' = \xi'_0, \qquad \eta' = \eta'_0, \qquad r = r_0,$$
$$-Ap \sin\theta + Cr \cos\theta = K;$$

on retrouve ainsi les intégrales connues, auxquelles on peut adjoindre l'intégrale des forces vives.

12. Deuxième application. — *Corps homogène pesant de révolution assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe* $\xi O \eta$.

Employons les mêmes notations et les mêmes axes que dans le numéro précédent. Dans ce nouveau problème, les seuls paramètres indépendants sont θ, φ, ψ; si l'on donne à θ, φ, ψ des variations arbitraires $\delta\theta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, les variations de ξ, η, ζ s'en déduisent par la condition que le corps roule et pivote sur le plan.

Pour calculer actuellement J_0^2 en fonction de θ'', φ'', ψ'' il paraît plus commode de ne pas conserver ξ et η, mais d'introduire les projections u, v, w de la vitesse absolue V_0 du point G sur les axes mobiles $Gxyz$. Nous avons, dans le numéro précédent, calculé les coordonnées x, y, z du point, P, de contact avec le plan, par rapport aux axes $Gxyz$; nous avons vu que $y = 0$ et que x et z sont des fonctions du seul angle θ dépendant de la fonction $f(\theta)$ qui détermine la forme du corps (formules 31).

Exprimons que le corps roule et pivote sur le plan. Pour cela, il faut écrire que la vitesse absolue du point matériel du corps qui est en P est *nulle*. Or cette vitesse est la résultante d'une vitesse d'entraînement V_0 égale à la vitesse de G et d'une vitesse relative due à la rotation du corps autour de G. On a ainsi les conditions

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u + qz - ry = 0, \\ & v + rx - pz = 0, \\ & w + py - qx = 0, \end{aligned} \right.$$

où y est nul, mais où nous laissons provisoirement y pour ne pas détruire la symétrie.

Cela posé, l'accélération absolue J_0 du point G a pour projections sur les axes $Gxyz$ les quantités

$$\frac{du}{dt} + qw - Rv,$$

$$\frac{dv}{dt} + Ru - pw,$$

$$\frac{dw}{dt} + pv - qu.$$

Ce sont là des formules connues que l'on établira sans peine en remarquant que l'accélération d'un point est la vitesse de l'extrémité d'un segment, d'origine fixe, égal à la vitesse du point. On a donc ici

$$J_0^2 = (u' + qw - Rv)^2 + (v' + Ru - pw)^2 + (w' + pv - qu)^2,$$

en désignant par des accents les dérivées par rapport au temps. En développant et se bornant aux termes en u', v', w'

$$\begin{aligned} J_0^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 &+ 2p(vw' - wv') \\ &+ 2q(wu' - uw') + 2R(uv' - vu') + \ldots. \end{aligned}$$

Mais les relations (36) donnent

$$(37)\quad \begin{cases} u = ry - qz, & u' = r'y - q'z + ry' - qz', \\ v = pz - rx, & v' = p'z - r'x + pz' - rx', \\ w = qx - py, & w' = q'x - p'y + qx' - py'; \end{cases}$$

on en déduit facilement

$$\begin{aligned} vw' - wv' &= x(up' + vq' + wr') + \ldots, \\ wu' - uw' &= y(up' + vq' + wr') + \ldots, \\ uv' - vu' &= z(up' + vq' + wr') + \ldots, \end{aligned}$$

d'où la formule

$$J_0^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2(px + qy + Rz)(up' + vq' + wr') + \ldots.$$

L'expression de $2S_1$ est la même que dans l'exemple précédent (formule 33).

Nous avons donc pour $2S = MJ_0^2 + 2S_1$, l'expression suivante que nous écrivons, en prenant la masse du corps M pour unité,

$$(38)\quad \begin{cases} 2S = u'^2 + v'^2 + w'^2 + 2(px + qy + Rz)(up' + vq' + wr') \\ \qquad + A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \ldots. \end{cases}$$

expression où il faut supposer u, v, w, u', v', w' remplacés par les expressions (37).

Conservons alors le paramètre θ et prenons au lieu de φ et ψ deux paramètres λ et ν définis par

$$\delta\lambda = -\sin\theta\,\delta\psi, \qquad \delta\nu = \cos\theta\,\delta\psi + \delta\varphi.$$

On aura

$$\begin{aligned} p &= -\sin\theta\,\psi' = \lambda', \qquad q = \theta', \qquad r = \cos\theta\,\psi' + \varphi' = \nu', \\ (39) \qquad p' &= \lambda'', \qquad q' = \theta'', \qquad r' = \nu''. \end{aligned}$$

Enfin, pour une variation virtuelle $\delta\lambda$, $\delta\theta$, $\delta\nu$ attribuée à ces paramètres on a, pour la somme des travaux des forces appliquées, le travail de la seule pesanteur

$$-g\,\delta\zeta = -g f'(\theta)\,\delta\theta.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial\nu''} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial\theta''} = -g f'(\theta).$$

Ou encore, d'après (39),

$$(40) \qquad \frac{\partial S}{\partial p'} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial r'} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q'} = -g f'(\theta).$$

La troisième de ces équations pourra être remplacée par l'intégrale des forces vives

$$2T = -g f(\theta) + h.$$

Nous allons écrire les deux premières. D'après la valeur (38) de S et les expressions (37) de u', v', w' en fonction de p', q', r', on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial p'} &= u'\frac{\partial u'}{\partial p'} + v'\frac{\partial v'}{\partial p'} + w'\frac{\partial w'}{\partial p'} \\ &\quad + u(px + qy + Rz) + Ap' - (AR - Cr)q; \end{aligned}$$

mais

$$\frac{\partial u'}{\partial p'} = 0, \qquad \frac{\partial v'}{\partial p'} = z, \qquad \frac{\partial w'}{\partial p'} = -y.$$

On a ainsi, en se rappelant maintenant que y est nul,

$$\frac{\partial S}{\partial p'} = zv' + u(px + Rz) + Ap' - (AR - Cr)q.$$

On trouve par un calcul analogue

$$\frac{\partial S}{\partial r'} = -xv' + w(px + Rz) + Cr'.$$

Nous avons donc, pour les deux équations $\frac{\partial S}{\partial p'} = 0$ et $\frac{\partial S}{\partial r'} = 0$, les deux équations suivantes que nous écrivons, en remplaçant q par θ', R par sa valeur $-p\cot\theta$, u, v, w par leurs expressions (37),

$$(41) \quad \begin{cases} zv' - pz(x - z\cot\theta)\theta' + Ap' + (Ap\cot\theta + Cr)\theta' = 0, \\ -xv' + px(x - z\cot\theta)\theta' + Cr' = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace v', θ', p', r' par $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$, on voit que dt disparaît et ces équations peuvent être regardées comme définissant p et r en fonction de θ, par deux équations linéaires et homogènes simultanées que nous allons écrire.

Nous remplacerons la première équation de ce système par celle qu'on obtient en éliminant v' entre les deux : on a ainsi les deux équations

$$Ax\frac{dp}{d\theta} + Cz\frac{dr}{d\theta} + x(Ap\cot\theta + Cr) = 0,$$

$$-x\frac{dv}{d\theta} + px(x - z\cot\theta) + C\frac{dr}{d\theta} = 0,$$

où d'après (37)

$$\frac{dv}{d\theta} = z\frac{dp}{d\theta} - x\frac{dr}{d\theta} + p\frac{dz}{d\theta} - r\frac{dx}{d\theta}.$$

Remplaçant $\frac{dv}{d\theta}$ par cette valeur, nous avons le système des deux équations

$$
(42) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{A}x\frac{dp}{d\theta} + \mathrm{C}z\frac{dr}{d\theta} + x(\mathrm{A}p\cot\theta + \mathrm{C}r) = 0, \\
& -xz\frac{dp}{d\theta} + (\mathrm{C} + x^2)\frac{dr}{d\theta} + px\left(x - z\cot\theta - \frac{dz}{d\theta}\right) + rx\frac{dx}{d\theta} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

pour déterminer p et r en fonction de θ.

Il convient de rappeler que, dans ces équations, x et z sont des fonctions connues de θ dépendant de la forme du corps : ces fonctions sont définies par les formules (31) que nous rappelons ici

$$
(43) \quad \left\{
\begin{aligned}
x &= f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)\sin\theta, \\
z &= f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarques sur ces équations. — L'étude de ce système de deux équations linéaires et des formes de la fonction $f(\theta)$ qui en permettent l'intégration constitue un problème d'Analyse intéressant. Nous nous bornerons ici à faire quelques remarques sur ces équations.

En éliminant $\frac{dp}{d\theta}$ entre les deux équations (42), on a

$$
(44) \quad (\mathrm{AC} + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}z^2)\frac{dr}{d\theta} + \mathrm{A}px\left(x - \frac{dz}{d\theta}\right) + rx\left(\mathrm{C}z + \mathrm{A}\frac{dx}{d\theta}\right) = 0,
$$

d'où

$$
(45) \qquad \mathrm{A}p = -\frac{(\mathrm{AC} + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}z^2)\frac{dr}{d\theta} + rx\left(\mathrm{C}z + \mathrm{A}\frac{dx}{d\theta}\right)}{x\left(x - \frac{dz}{d\theta}\right)}.
$$

Portant cette valeur de p dans la première des équations (42), on obtient une équation linéaire homogène du deuxième ordre donnant r en fonction de θ. Cette équation étant intégrée, la relation (44) donne p en fonction de θ. Puis l'intégrale des forces vives donne t en θ par une quadrature.

Cas particuliers. — 1° Dans le cas particulier où x et z sont des constantes indépendantes de θ, $x = a$, $z = c$, on retrouve les équations du mouvement d'un corps homogène pesant, de révolution, roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal (*Voyez* un article inséré dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, suivi d'une lettre de M. Korteweg, 1er fascicule 1900).

2° Un autre cas particulier où l'équation (44) peut s'intégrer est le cas où la forme du corps est telle que

$$x - \frac{dz}{d\theta} = 0.$$

D'après les expressions (43) de x et z, cette condition devient

$$f''(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta = 0,$$

d'où

$$f(\theta) = a\cos\theta + b,$$

a et b désignant deux constantes. La méridienne de la surface de révolution correspondante est alors l'enveloppe de la droite

$$x\sin\theta - z\cos\theta = a\cos\theta + b;$$

c'est un cercle dont le centre est sur Gz. La surface est alors une *sphère*. Actuellement

$$x = b\sin\theta, \qquad z = -a - b\cos\theta,$$

et l'équation (44) donne r en fonction de θ par une quadrature élémentaire.

Cette équation s'écrit, en effet,

$$\frac{dr}{r} = -\frac{x\left(\mathrm{A}\dfrac{dx}{d\theta} + \mathrm{C}z\right)d\theta}{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{AC}},$$

d'après la relation $\frac{dz}{d\theta} = x$; le numérateur du deuxième membre est, au facteur 2 près, la dérivée du dénominateur et l'on a

$$r = \frac{k}{\sqrt{Ax^2 + Cz^2 + AC}}.$$

La première des équations (42) donne alors p par une quadrature.

3° Un autre cas où la forme des équations (42) se simplifie est le cas où la forme du corps est telle que

$$x - z \cot\theta - \frac{dz}{d\theta} = 0.$$

13. *Remarque sur l'équation des forces vives.* — Supposons les liaisons indépendantes du temps. Alors on a, en reprenant les formules (9) où a, b, c sont nuls

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_1 q'_1 + a_2 q'_2 + \ldots + a_n q'_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Donc x', y', z' sont homogènes et linéaires en q'_1, q'_2, …, q'_n.

La demi-force vive T est alors liée à S par la formule

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n.$$

En effet,

$$S = \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} = \sum m\left(x'' \frac{\partial x''}{\partial q''_1} + y'' \frac{\partial y''}{\partial q''_1} + z'' \frac{\partial z''}{\partial q''_1}\right).$$

Mais

$$\frac{\partial x''}{\partial q''_1} = a_1, \qquad \frac{\partial y''}{\partial q''_1} = b_1, \qquad \frac{\partial z''}{\partial q''_1} = c_1.$$

Donc

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} = \sum m(x'' a_1 + y'' b_1 + z'' c_1).$$

De même

$$\frac{\partial S}{\partial q''_2} = \sum m(x'' a_2 + y'' b_2 + z'' c_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Multipliant par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ et ajoutant, on a, d'après les expressions (46) de x', y', z',

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n = \sum m(x''x' + y''y' + z''z') = \frac{dT}{dt}.$$

Le théorème des forces vives est alors exprimé par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_n q'_n,$$

équivalente à

$$dT = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 + \ldots + Q_n\, dq_n.$$