# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


GORDAN

**Les invariants des formes binaires**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 6 (1900), p. 141-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__141_0>

# *Les invariants des formes binaires;*

PAR M. GORDAN.

Le système des formes binaires est fini. J'ai démontré ce théorème et M. Hilbert l'a étendu aux formes de $n$ variables.

Dans cette Note, un théorème est donné, dont les autres découlent.

## CHAPITRE PREMIER.

### LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES PRODUITS.

### I. — Les systèmes des produits.

Les produits de $n$ variables

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

forment un système S si les exposants sont liés par des relations

$$(1) \qquad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \dots.$$

Ces relations définissent S.

*Premier exemple.* — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système

(S) $$x_1^3, \quad x_1^6, \quad x_1^9, \quad \ldots.$$

*Deuxième exemple.* — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système

(S) $$x_1^3, \quad x_1^4 x_2^2, \quad x_3^7 x_4^2, \quad \ldots.$$

*Troisième exemple.* — Les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

définissent le système

(S) $$x_1^2 x_2, \quad x_1 x_2 x_4^4, \quad x_1 x_3^2 x_4^3, \quad \ldots.$$

## II. — Les systèmes élémentaires.

Il peut arriver que les produits T de S soient divisibles les uns par les autres. Si l'on néglige les produits T, qui sont divisibles par d'autres T, il reste un système partiel $\Sigma$; il est appelé le *système élémentaire,* défini par les relations (1). Il contient les produits

($\Sigma$) $$P_1, \quad P_2, \quad \ldots,$$

qui ont les propriétés suivantes :

1° Les exposants $k$ satisfont aux relations (1);

2° Aucun P n'est divisible par un autre;

3° Chaque produit T de S est divisible par un au moins des P.

*Premier exemple.* — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système élémentaire

$$(\Sigma) \qquad x_1^3.$$

*Deuxième exemple.* — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

définit le système élémentaire

$$\begin{matrix} (2) \\ (\Sigma) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x_1^3, & x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1^2x_4, & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, \\ x_2^3, & x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^3, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, & x_4^3. \end{matrix} \right.$$

Ce sont les termes d'une forme quaternaire cubique dans l'ordre usuel. Je considère chacun d'eux comme *compliqué* par rapport à ceux qui le suivent et ces derniers comme plus *simples;* ainsi $x_4^3$ est le terme le plus simple et $x_1^3$ le terme le plus compliqué.

*Troisième exemple.* — Les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 > 0$$

définissent le système élémentaire

$$\begin{matrix} (3) \\ (\Sigma) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x_1^2x_2, & x_1^2x_3, & x_1^2x_4, & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, \\ x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2. & & \end{matrix} \right.$$

### III. — Les indices des systèmes élémentaires.

Le nombre des produits, contenus dans le système élémentaire $\Sigma$, est appelé l'*indice* de $\Sigma$. Si ces produits sont composés par $n$ variables, je représente cet indice par $h_n$. Si l'on a plusieurs systèmes élémentaires

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \Sigma_3, \quad \ldots,$$

je représente leurs indices par

$$h_{n,1}, \quad h_{n,2}, \quad h_{n,3}.$$

Si $n = 1$, on a

(4) $$h_1 \leqq 1.$$

*Premier exemple.* — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

a l'indice $h_1 = 1$.

*Deuxième exemple* — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

a l'indice $h_4 = 20$.

*Troisième exemple.* — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a l'indice $h_4 = 16$.

## IV. — Des systèmes partiels du système élémentaire $\Sigma$.

Si le produit

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$$

est contenu dans le système élémentaire $\Sigma$, on peut former les systèmes partiels

$L_0$ $$P_1,$$

$L_1$ $$x_1^g x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_n^{k_n} = x_1^g Q,$$

où

$$g \leqq \lambda_1;$$

$L_2$ $$x_1^{k_1} x_2^{g-\lambda_1} x_3^{k_3} \ldots x_n^{k_n} = x_2^{g-\lambda_1} Q,$$

où

$$\lambda_1 < g \leqq \lambda_1 + \lambda_2;$$

$L_3$ $$x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} x_4^{k_4} \ldots x_n^{k_n} = x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 < g \leqq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$L_g$ $$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{n-1}} = x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{n-1}} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} < g.$$

Leur nombre est

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 + \rho.$$

*Premier exemple.* — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod 3$$

n'a pas de systèmes partiels.

*Deuxième exemple.* — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3$$

a les systèmes partiels

$L_1$ $$P_1 = x_1^3,$$

$L_2$ $$x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_3,$$

$L_3$ $$x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$L_4$ $$x_2^3,\ x_2^2 x_3,\ x_2^2 x_4,\ x_2 x_3^2,\ x_2 x_3 x_4,\ x_2 x_4^2,\ x_3^3,\ x_3^2 x_4,\ x_3 x_4^2,\ x_4^3.$$

*Troisième exemple.* — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod 3,$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a les systèmes partiels

$$
\begin{array}{llllllll}
L_0 & & & & P_1 = x_1^2 x_2, & & & \\
L_1 & x_1 x_2^2, & x_1 x_2 x_3, & x_1 x_2 x_4, & x_1 x_3^2, & x_1 x_3 x_4, & x_1 x_4^2, & \\
L_2 & x_2^2 x_3, & x_2^2 x_4, & x_2 x_3^2, & x_2 x_3 x_4, & x_2 x_4^2, & x_3^2 x_4, & x_3 x_4^2, \\
L_3 & x_1^2 x_3, & x_1^2 x_4, & x_1 x_3^2, & x_1 x_3 x_4, & x_1 x_4^2, & x_3^2 x_4, & x_3 x_4^2.
\end{array}
$$

### V. — Relation pour l'indice $h_n$.

Si le produit

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

est contenu dans $\Sigma$ et diffère de

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n},$$

il n'est pas divisible par $P_1$ ; il a du moins un exposant

$$k_\sigma < \lambda_\sigma$$

et est contenu dans le système partiel $L_g$, où

$$k_\sigma = g - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_{\sigma-1}.$$

Tous les P de $\Sigma$ sont contenus dans les L. Si l'on représente le nombre de produits contenus dans $L_g$ par $l_g$, on a

$$(5) \qquad h_n \leqq 1 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_\rho.$$

*Premier exemple.*

$$(5) \qquad h_1 \leqq 1, \qquad l_g = 0.$$

*Deuxième exemple.*

$$(5) \quad h_4 = 20, \quad l_1 = 3, \quad l_2 = 6, \quad l_3 = 10, \quad 20 = 1 + 3 + 6 + 10.$$

*Troisième exemple.*

$$(5) \quad h_4 = 16, \quad l_1 = 6, \quad l_2 = 7, \quad t_3 = 7, \quad 16 < 1 + 6 + 7 + 7.$$

## VI. — Les systèmes correspondants.

Les produits situés dans le système partiel $L_g$ sont de la forme

$$L_g \qquad x_\sigma^r Q_1, \quad x_\sigma^r Q_2, \quad x_\sigma^r Q_3, \quad \ldots,$$

et aucun d'eux n'est divisible par un autre. Le système

$$\Sigma_g \qquad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots$$

correspond au système $L_g$.

Les Q ne sont composés que par les $n - 1$ variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{\sigma-1}, \quad x_{\sigma+1}, \quad \ldots, \quad x_n;$$

aucun d'eux n'est divisible par un autre. Les exposants $k$ des Q sont assujettis à des relations

$$(1_a) \qquad H_1, \quad H_2, \quad \ldots$$

dérivées des relations

$$(1) \qquad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots.$$

Les $\Sigma_g$ sont des systèmes élémentaires, définis par les relations $(1_a)$.

*Premier exemple.* — Comme il n'y a aucun $L_g$, il n'y a pas non plus de systèmes correspondants $\Sigma_g$.

*Deuxième exemple.* — Aux systèmes partiels

$$L_1 \qquad x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4,$$

$$L_2 \qquad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$$L_3 \quad x_2^3, \; x_2^2 x_3, \; x_2^2 x_4, \; x_2 x_3^2, \; x_2 x_3 x_4, \; x_2 x_4^2, \; x_3^3, \; x_3^2 x_4, \; x_3 x_4^2, \; x_4^3,$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\Sigma_1 \qquad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

$$\Sigma_2 \qquad x_2^2, \quad x_2 x_3, \quad x_2 x_4, \quad x_3^2, \quad x_3 x_4, \quad x_4^2,$$

$$\Sigma_3 \quad x_2^3, \; x_2^2 x_3, \; x_2^2 x_4, \; x_2 x_3^2, \; x_2 x_3 x_4, \; x_2 x_4^2, \; x_3^3, \; x_3^2 x_4, \; x_3 x_4^2, \; x_4^3,$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 \quad \text{par} & k_2+k_3+k_4 \equiv 1 & (\text{mod } 3), \\ \Sigma_2 \quad \text{»} & k_2+k_3+k_4 \equiv 2 & (\text{mod } 3), \\ \Sigma_3 \quad \text{»} & k_2+k_3+k_4 \equiv 0 & (\text{mod } 3). \end{array}$$

*Troisième exemple.* — Aux systèmes partiels

$$\begin{array}{llllllll} L_1 & & x_1x_2^2, & x_1x_2x_3, & x_1x_2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, \\ L_2 & x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, \\ L_3 & x_4^2x_3, & x_4^2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, \end{array}$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\begin{array}{llllllll} \Sigma_1 & & x_2^2, & x_2x_3, & x_2x_4, & x_3^2, & x_3x_4, & x_4^2, \\ \Sigma_2 & x_2^2x_3, & x_2^2x_4, & x_2x_3^2, & x_2x_3x_4, & x_2x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2, \\ \Sigma_3 & x_1^2x_3, & x_1^2x_4, & x_1x_3^2, & x_1x_3x_4, & x_1x_4^2, & x_3^2x_4, & x_3x_4^2; \end{array}$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 \quad \text{par} & k_2+k_3+k_4 \equiv 2 & (\text{mod } 3), \\ \Sigma_2 & \left\{ \begin{array}{l} k_2+k_3+k_4 \equiv 0 \\ k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4 > 0 \end{array} \right. & (\text{mod } 3), \\ \Sigma_3 \quad \text{»} & \left\{ \begin{array}{l} k_1+k_3+k_4 \equiv 0 \\ k_1k_3+k_1k_4+k_3k_4 > 0 \end{array} \right. & (\text{mod } 3). \end{array}$$

## VII. — Relations entre les indices de plusieurs systèmes.

Le nombre des produits P contenus dans $L_g$ égale celui des produits Q contenus dans $\Sigma_g$

$$l_g = h_{n-1,g}.$$

Aux formules (5) correspondent les formules

$$(6)\quad \begin{cases} h_n \leqq 1 + h_{n-1,1} + h_{n-1,2} + \ldots + h_{n-1,\rho}, \\ h_1 \leqq 1, \\ 20 = 1 + 3 + 6 + 10, \\ 16 < 1 + 6 + 7 + 7. \end{cases}$$

**VIII. — Les indices des systèmes élémentaires sont des nombres finis.**

*Démonstration.* — $h_1 \leqq 1$ est un nombre fini. Les nombres

$$(7)\quad \begin{cases} h_2 \leqq 1 + h_{1,1} + h_{1,2} + \ldots + h_{1,\rho_1}, \\ h_3 \leqq 1 + h_{2,1} + h_{2,2} + \ldots + h_{2,\rho_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont aussi des nombres finis.

Les nombres $\rho$ sont définis § IV par les degrés de produits quelconques contenus dans les $\Sigma$.

## CHAPITRE II.

### LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

**I. — L'ordre des termes d'une fonction homogène.**

Les termes d'une fonction homogène $f$ de $n$ variables sont des produits

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Nous les supposons écrits dans un ordre tel que chacun d'eux précède ceux qui sont plus simples. Le premier terme $P_1$ est le plus compliqué. Si l'on pose

$$f = c_1 P_1 + \chi,$$

les termes de $\chi$ sont plus simples que $P_1$.

## II. — L'ordre des fonctions homogènes.

Nous classerons les fonctions homogènes

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots$$

d'après leurs degrés, les $f$ des degrés inférieurs précédant celles des degrés supérieurs. Les formes du même degré sont arrangées d'après leurs premiers termes.

Celles dont les premiers termes sont simples précèdent celles dont les premiers termes sont plus compliqués.

Cet ordre est inverse de l'ordre des termes dans une fonction homogène. Les formes $f$ étant ainsi ordonnées, nous considérerons chacune d'elles comme plus *simple* que celles qui la suivent.

## III. — Le système S de fonctions homogènes.

Des relations

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots,$$

qui lient les coefficients des fonctions homogènes, définissent un système (S) constitué par l'ensemble des fonctions homogènes

$$(\mathrm{S}) \qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots$$

dont les coefficients satisfont à ces relations. Les $f$ de (S) sont arrangées d'après le n° II. Des systèmes dont les fonctions homogènes sont simples sont appelés *simples*.

## IV. — Des systèmes dérivés.

D'un système donné de fonctions homogènes

$$(\mathrm{S}) \qquad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots,$$

on peut faire dériver d'autres systèmes

$$(8)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \varphi_1, \\ \eta_2 = A_{21}\varphi_1 + \varphi_2, \\ \eta_3 = A_{31}\varphi_1 + A_{32}\varphi_2 + \varphi_3, \\ \eta_4 = A_{41}\varphi_1 + A_{42}\varphi_2 + A_{43}\varphi_3 + \varphi_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les A sont des fonctions quelconques, qui font les fonctions $\eta$ homogènes.

### V. — Réduction des systèmes dérivés.

Il peut arriver que, parmi les $\eta$ d'un système dérivé M

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots,$$

il y ait deux fonctions (n° I)

$$\eta_\lambda = c_\lambda P_\lambda + \chi_\lambda,$$
$$\eta_\mu = c_\mu P_\mu + \chi_\mu,$$

telles que le premier terme $P_\lambda$ de $\eta_\lambda$ soit divisible par le premier terme $P_\mu$ de $\eta_\mu$

$$P_\lambda = RP_\mu.$$

Dans ce cas je forme l'agrégat

$$(9)\qquad \overline{\eta_\lambda} = \eta_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R\eta_\mu = \chi_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R\chi_\mu,$$

et je le substitue au lieu de $\eta_\lambda$ dans le système M.

Soit $M_1$ le système qui résulte de cette substitution.

$\overline{\eta_\lambda}$ et $M_1$ sont plus simples que $\eta_\lambda$ et M. M est réduit à $M_1$ par la substitution (9). Si l'on a

$$(10)\qquad \overline{\eta_\lambda} = 0,$$

le système $M_1$ contient une fonction de moins que M.

Dans ce cas on a, d'après (8),

$$(11)\qquad 0 = A_{\lambda,1}\varphi_1 + A_{\lambda 2}\varphi_2 + \ldots + A_{\lambda,\lambda-1} + \varphi_{\lambda-1} + \varphi_\lambda,$$

c'est-à-dire $\varphi_\lambda$ est un agrégat de fonctions $\varphi$ plus simples.

### VI. — Le système irréductible N.

Si l'on continue le procédé de réduction, on arrive à un système irréductible

$$(N)\qquad f_1,\quad f_2,\quad \ldots.$$

Les premiers termes des fonctions $f$ sont des produits

$$P_1,\quad P_2,\quad \ldots,$$

dont aucun n'est divisible par un autre. Ils forment un système élémentaire $\Sigma$. Soit $h$ son indice. Le système N contient $h$ fonctions

$$(N)\qquad f_1,\quad f_2,\quad \ldots,\quad f_h.$$

### VII. — Le système élémentaire L.

Si le nombre $h$ est inférieur au nombre des fonctions $\varphi$, on peut réduire par la formule (11) tous les $\varphi$ à des fonctions plus simples, excepté $h$ fonctions. Représentons par $\Phi$ ces fonctions qui restent. Le système

$$(L)\qquad \Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \ldots,\quad \Phi_h$$

est appelé le *système élémentaire* défini par les relations

$$\Theta_1,\quad \Theta_2,\quad \ldots.$$

### VIII. — Le théorème de Hilbert.

Tous les $\varphi$, excepté les $\Phi$, sont des agrégats de fonctions $\varphi$ plus simples. En continuant cette réduction, on arrive à la formule

$$\varphi = c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \ldots + c_h\Phi_h. \tag{12}$$

---

## CHAPITRE III.

### APPLICATION AUX INVARIANTS.

---

### I. — Transformation des formes binaires.

La forme binaire

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} x_2^2 + \ldots$$

est transformée par la substitution

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 \\ x_2 &= \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 \end{aligned} \right. \tag{13}$$

dans la forme

$$f = A_0 y_1^n + \binom{n}{1} A_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} A_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \ldots.$$

Le déterminant de la substitution est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix},$$

et les coefficients A sont les polaires de $f$ par rapport aux variables $\xi$, $\eta$.

## II. — Développement en séries.

Chaque fonction homogène $F(x, y)$ de deux séries de variables cogrédientes

$$x_1, \quad x_2 \qquad \text{et} \qquad y_1, \quad y_2$$

peut être développée en une série dont les termes sont des produits des puissances de

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

et des polaires des covariants élémentaires de F. En posant symboliquement, si $x$ et $y$ ont le même degré dans F,

$$F(x, y) = r_x^m s_y^m,$$

on a la série

$$(14) \qquad F = \sum_k \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{2m-k+1}{k}} (\overline{r, s})_{y^k}^{m-k} (xy)^k.$$

## III. — Le système élémentaire des invariants.

Les invariants $i$ de $f$ sont des fonctions entières homogènes $\varphi$ des coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Les coefficients de $\varphi$ satisfont aux relations

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots,$$

qui sont dérivées des équations partielles différentielles des invariants. Supposons le système élémentaire L des $\varphi$ formé des invariants

$$(\mathrm{L}) \qquad I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_h.$$

Chaque invariant $i$ a, d'après le théorème de Hilbert, la forme

$$(15) \qquad i = c_1(a)\mathrm{I}_1 + c_2(a)\mathrm{I}_2 + \ldots + c_h(a)\mathrm{I}_h.$$

Les $c(a)$ sont des fonctions des $a$, qui font l'expression homogène.

## IV. — Transformation de la formule (15).

Les invariants $i$ de $f$ obtiennent par la substitution (13) des puissances de $\Delta$ en facteurs.

Si les invariants

$$i, \quad \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_2, \quad \mathrm{I}_3, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_h$$

ont les poids

$$\nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \ldots, \quad \nu_h;$$

ils obtiennent les facteurs

$$\Delta^\nu, \quad \Delta^{\nu_1}, \quad \Delta^{\nu_2}, \quad \Delta^{\nu_3}, \quad \ldots, \quad \Delta^{\nu_h}.$$

La formule (15) est transformée par la substitution (13) en

$$(16) \qquad \Delta^\nu i = c_1(\mathrm{A})\Delta^{\nu_1}\mathrm{I}_1 + c_2(\mathrm{A})\Delta^{\nu_2}\mathrm{I}_2 + \ldots + c_h(\mathrm{A})\Delta^{\nu_h}\mathrm{I}_h.$$

## V. — Simplification de la formule (16).

Les $c_g(\mathrm{A})$ sont des fonctions des polaires A et ils sont des covariants de $f$. En posant symboliquement

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c_g(\mathrm{A}) = r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g}, \\ & \frac{1}{\nu-\nu_g}(\overline{r_g, s_g})^{\nu-\nu_g} = \mathrm{B}_g, \end{aligned} \right.$$

la formule (16) devient

$$\Delta^\nu i = r_{1,\xi}^{\nu-\nu_1} s_{1,\eta}^{\nu-\nu_1}\Delta^{\nu_1}\mathrm{I}_1 + r_{2,\xi}^{\nu-\nu_2} s_{2,\eta}^{\nu-\nu_2}\Delta^{\nu_2}\mathrm{I}_2 + \ldots + r_{h,\xi}^{\nu-\nu_h} s_{h,\eta}^{\nu-\nu_h}\Delta^{\nu_h}\mathrm{I}_h.$$

En substituant, au lieu des

$$r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g},$$

leurs séries (14), on obtient une équation identique en $\Delta$ de degré $\nu$. En comparant les coefficients de $\Delta^\nu$, on obtient

$$(18)\qquad \Delta^\nu = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \ldots + B_h i_h.$$

## VI. — Les invariants $i$ sont des fonctions entières des I.

*Démonstration.* — En arrangeant les invariants $i$ selon leurs degrés, les invariants des degrés inférieurs précèdent et les invariants des degrés supérieurs succèdent.

En voulant représenter $i$ en fonction entière des I, les invariants $B_g$ sont déjà exprimés

$$B_g = F_g(I).$$

Si nous substituons ces valeurs dans (18), nous obtenons

$$i = F_1(I)I_1 + F_2(I)I_2 + \ldots + F_h(I)I_h = F(I).$$