JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

# Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu ; extension des théorèmes sur les tourbillons

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 5 (1899), p. 137-153.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__137_0>

# *Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons;*

PAR M. P. APPELL.

---

1. Imaginons un milieu matériel continu qui subit une déformation finie n'altérant pas sa continuité. Soient $a$, $b$, $c$ les coordonnées rectangulaires d'une molécule avant la déformation, $x$, $y$, $z$ ses coordonnées après la déformation. Les quantités $x$, $y$, $z$ sont évidemment des fonctions de $a$, $b$, $c$,

$$x = f(a, b, c), \qquad y = f_1(a, b, c), \qquad z = f_2(a, b, c);$$

ces fonctions sont uniformes et continues dans l'intérieur de la masse primitive, et, inversement, $a$, $b$, $c$ sont des fonctions uniformes et continues de $x$, $y$, $z$ dans le milieu déformé; à chaque point du milieu primitif correspond ainsi un point du milieu déformé, et inversement. Ce mode de déformation se présente dans la théorie de l'élasticité et dans celle du mouvement des fluides, quand on adopte les variables de Lagrange.

Nous nous proposons d'indiquer, sur les familles de courbes qui se correspondent dans les deux milieux, quelques théorèmes comprenant comme cas particuliers les théorèmes classiques relatifs aux lignes de tourbillons. Ces derniers théorèmes apparaissent alors comme des applications de propositions générales relatives aux transformations ponctuelles de l'espace.

**2.** Soient $\mu_0$ la densité du premier milieu au point $a, b, c$; $\mu$ la densité du deuxième au point correspondant $x, y, z$; on sait que le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

a pour valeur

$$D = \frac{\mu_0}{\mu}.$$

Cette relation, appelée *équation de continuité*, exprime que la masse d'une portion infiniment petite du milieu ne change pas dans la déformation.

**3.** Considérons, dans le milieu primitif, une famille de lignes courbes dont les équations dépendent de deux paramètres. Soient

$$(L_0) \qquad \frac{da}{A} = \frac{db}{B} = \frac{dc}{C}$$

les équations différentielles de cette famille de courbes, équations obtenues par l'élimination des deux paramètres; dans ces équations A, B, C sont des fonctions déterminées de $a, b, c$, que nous supposons uniformes. Par la déformation, ces courbes se transforment en une famille de courbes à deux paramètres ayant pour équations différentielles

$$(L) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y, Z étant des fonctions de $x, y, z$. Cherchons les relations entre A, B, C et X, Y, Z. Quand le point $(a, b, c)$ subit un déplacement $da, db, dc$ sur $L_0$, le point $(x, y, z)$ subit, sur L, un déplacement correspondant

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.\end{aligned}\right.$$

Mais, d'après les relations ($L_0$) et (L), on a, en désignant par $\lambda_0$ et $\lambda$ des facteurs de proportionnalité

$$da = \lambda_0 A,\qquad db = \lambda_0 B,\qquad dc = \lambda_0 C,$$
$$dx = \lambda X,\qquad dy = \lambda Y,\qquad dz = \lambda Z.$$

Les relations (1) donnent donc

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_0}X &= A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c},\\ \frac{\lambda}{\lambda_0}Y &= A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c},\\ \frac{\lambda}{\lambda_0}Z &= A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces relations, le rapport $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ est entièrement arbitraire. En effet, on ne change pas les lignes ($L_0$) en multipliant A, B, C par un même facteur fonction de $a$, $b$, $c$, ni les lignes (L) en multipliant X, Y, Z par un autre facteur.

Nous supposerons, dans ce qui suit, que l'on ait déterminé le rapport de ces facteurs, de telle façon que $\frac{\lambda}{\lambda_0} = D$, D étant le déterminant fonctionnel du n° **2**.

Les relations entre A, B, C et X, Y, Z s'écrivent alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} DX &= A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c},\\ DY &= A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c},\\ DZ &= A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules permettent de passer d'un système de lignes à deux paramètres dans le milieu primitif aux lignes correspondantes, dans le milieu déformé; elles sont la généralisation des formules établies par Cauchy dans le Mémoire intitulé : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* (équations 16, seconde partie), formules qui peuvent servir de point de départ à la théorie des tourbillons [1].

Résolvons les équations (3) par rapport à A, B, C. Pour cela, désignons par

$$\frac{d(yz)}{d(bc)}$$

le mineur

$$\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}$$

du déterminant D par rapport à l'élément $\frac{\partial x}{\partial a}$, et employons une notation analogue pour les autres mineurs. Nous aurons

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= X\frac{d(yz)}{d(bc)}+Y\frac{d(zx)}{d(bc)}+Z\frac{d(xy)}{d(bc)},\\ B &= X\frac{d(yz)}{d(ca)}+Y\frac{d(zx)}{d(ca)}+Z\frac{d(xy)}{d(ca)},\\ C &= X\frac{d(yz)}{d(ab)}+Y\frac{d(zx)}{d(ab)}+Z\frac{d(xy)}{d(ab)}. \end{aligned}\right.$$

4. *Entre les fonctions* A, B, C *et* X, Y, Z *a lieu la relation invariante*

$$(5)\qquad \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

En effet, dérivons la première des relations (4) par rapport à $a$, la deuxième par rapport à $b$, la troisième par rapport à $c$, et ajoutons,

---

(1) *Voyez*, à ce sujet, un article *Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons*, que nous avons publié dans ce Journal en 1896.

nous aurons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c} &= \frac{\partial X}{\partial a}\frac{d(yz)}{d(bc)}+\frac{\partial X}{\partial b}\frac{d(yz)}{d(ca)}+\frac{\partial X}{\partial c}\frac{d(yz)}{d(ab)} \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+X\left[\frac{\partial}{\partial a}\frac{d(yz)}{d(bc)}+\frac{\partial}{\partial b}\frac{d(yz)}{d(ca)}+\frac{\partial}{\partial c}\frac{d(yz)}{d(ab)}\right] \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En développant les calculs, on vérifie que le coefficient de X est identiquement nul; il en est de même des coefficients de Y et Z. Quant aux autres termes, on les transforme comme il suit : on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial X}{\partial b} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial X}{\partial c} &= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}; \end{aligned}$$

portant dans l'équation (6), on voit que la première ligne du deuxième membre de cette équation devient

$$\frac{\partial X}{\partial x}D.$$

On transforme de même les autres lignes et l'on a finalement

$$\frac{\partial A}{\partial a}+\frac{\partial B}{\partial b}+\frac{\partial C}{\partial c}=D\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

ce qui, d'après la valeur de D, est la relation (5).

**3.** Toutes les relations précédentes subsistent évidemment quand on multiplie A, B, C, X, Y, Z par un même facteur $\rho$ fonction de $a$, $b$, $c$. En effet, en remplaçant A, B, C, X, Y, Z par $\rho A$, $\rho B$, $\rho C$, $\rho X$, $\rho Y$, $\rho Z$ on n'altère pas les relations (3) dont toutes les autres ont été déduites. Mais on peut toujours déterminer $\rho$ de façon que l'on ait identiquement

$$(7)\qquad \frac{\partial(\rho A)}{\partial a}+\frac{\partial(\rho B)}{\partial b}+\frac{\partial(\rho C)}{\partial c}=0;$$

il suffit pour cela de prendre pour $\rho$ une solution de l'équation linéaire aux dérivées partielles (7); si les équations des lignes ($L_0$) sont connues sous forme finie, la recherche de $\rho$ se ramène à une quadrature.

Le facteur $\rho$ étant ainsi déterminé, nous multiplierons A, B, C, X, Y, Z par $\rho$, et, pour simplifier les notations, nous désignerons encore par A, B, C, X, Y, Z les produits ainsi obtenus.

Les nouvelles fonctions A, B, C, X, Y, Z vérifient alors toutes les relations précédentes, et en outre la relation

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0. \tag{8}$$

Mais la relation (5) montre que l'on a aussi

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Dans tout ce qui suit A, B, C, X, Y, Z désigneront ces nouvelles fonctions.

**6.** La relation (8) étant satisfaite, on peut toujours trouver trois fonctions $p_0$, $q_0$, $r_0$ de $a$, $b$, $c$ vérifiant les relations

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{\partial r_0}{\partial b} - \frac{\partial q_0}{\partial c}, \\ B &= \frac{\partial p_0}{\partial c} - \frac{\partial r_0}{\partial a}, \\ C &= \frac{\partial q_0}{\partial a} - \frac{\partial p_0}{\partial b}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

comme on le verra, par exemple, dans le premier Volume du *Traité d'Analyse* de M. Picard. De même, la relation (9) étant satisfaite, on peut déterminer trois fonctions $p$, $q$, $r$ de $x$, $y$, $z$ telles que

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \\ Y &= \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \\ Z &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

**7.** Nous allons démontrer le théorème suivant : *L'expression*

$$(12) \qquad p\,dx + q\,dy + r\,dz - (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc)$$

*est une différentielle totale exacte.*

En effet, on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

L'expression (12) s'écrit alors

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(p\frac{\partial x}{\partial a} + q\frac{\partial y}{\partial a} + r\frac{\partial z}{\partial a} - p_0\right)da + \left(p\frac{\partial x}{\partial b} + q\frac{\partial y}{\partial b} + r\frac{\partial z}{\partial b} - q_0\right)db, \\ &\qquad + \left(p\frac{\partial x}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c} + r\frac{\partial z}{\partial c} - r_0\right)dc, \end{aligned} \right.$$

expression de la forme

$$\mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \mathcal{C}\,dc;$$

et les relations telles que (4) signifient, comme on le vérifie facilement,

$$(13) \qquad \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c}, \qquad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial c} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial a}, \qquad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial a} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial b}.$$

Ainsi, en détaillant la première condition

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial b} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial c} = 0,$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial p}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial r}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial r_0}{\partial b} - \frac{\partial q_0}{\partial c}.$$

Si, dans cette équation, en suivant le calcul déjà cité de Cauchy, on remplace $\frac{\partial p}{\partial b}, \frac{\partial p}{\partial c}, \cdots$ par les expressions suivantes

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

on voit qu'elle se réduit à la première des relations (4). On vérifie de même que les deux autres conditions (13) sont identiques aux deux autres relations (4).

Ainsi le théorème est démontré, et l'on a identiquement

$$(14)\quad p\,dx + q\,dy + r\,dz - (p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc) = d\mathrm{F}(a, b, c),$$

F étant une fonction de $a$, $b$, $c$.

Réciproquement, prenons trois fonctions $p_0$, $q_0$, $r_0$ de $a$, $b$, $c$ et trois fonctions $p$, $q$, $r$ de $x$, $y$, $z$ de telle façon que l'expression (12) soit une différentielle exacte en vertu des formules déterminant $x$, $y$, $z$ en fonction de $a$, $b$, $c$; calculons ensuite les fonctions A, B, C, X, Y, Z par les relations (10) et (11); les lignes

$$\frac{da}{\mathrm{A}} = \frac{db}{\mathrm{B}} = \frac{dc}{\mathrm{C}}$$

et

$$\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\mathrm{Y}} = \frac{dz}{\mathrm{Z}}$$

sont correspondantes, A, B, C, X, Y, Z remplissant toutes les conditions indiquées.

Les conséquences de la formule (14) sont identiques à celles que l'on rencontre dans la théorie des tourbillons. Nous les indiquerons sommairement.

**8.** Soient $(\mathrm{C}_0)$ une courbe fermée prise dans le milieu initial et (C) la courbe fermée suivant laquelle sont disposées après la déformation les molécules qui étaient primitivement sur $(C_0)$. On a

$$(15)\qquad \int_{(C)}(p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int_{(C_0)}(p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc),$$

la première intégrale étant prise le long de $(C)$ et la deuxième le long de $(C_0)$.

En effet, d'après l'identité (14), la différence des deux intégrales (15) est

$$\int_{C_0} d\mathrm{F}(a, b, c),$$

c'est-à-dire o, puisque la courbe $(C_0)$ est fermée.

Imaginons une surface $S_0$ simplement connexe ayant $(C_0)$ comme contour, et de même une surface $S$ ayant $(C)$ comme contour. D'après le théorème d'Ampère et de Stokes, on a

$$\int_{(C_0)}(p_0\,da + q_0\,db + r_0\,dc) = \int\int_{S_0}(A\alpha + B\beta + C\gamma)\,d\sigma_0,$$

où l'intégrale double est étendue à l'aire de $S_0$, $d\sigma_0$ désignant un élément de cette aire, et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale à cet élément. (*Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. I.)

Soit $H_0$ le vecteur ayant pour origine le point $a$, $b$, $c$ et pour projections les valeurs de $A$, $B$, $C$ en ce point. La quantité

$$A\alpha + B\beta + C\gamma$$

est la projection de $H_0$ sur la normale : nous la désignerons par $(H_0)_n$; l'intégrale ci-dessus est alors

$$\int\int_{S_0}(H_0)_n\,d\sigma_0.$$

De même, on a

$$\int_{(C)}(p\,dx + q\,dy + r\,dz) = \int\int_{S}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\,d\sigma,$$

intégrale qu'on peut écrire

$$\int\int_{S} H_n d\sigma,$$

en appelant $H_n$ la projection du vecteur H de composantes X, Y, Z sur la normale à $d\sigma$.

La relation (15) peut donc s'écrire

$$\int\int_{S_0} (H_0)_n d\sigma_0 = \int\int_{S} H_n d\sigma.$$

Sous cette forme, elle a une signification simple. En regardant $H_0$ et H comme des forces et employant une locution connue, on peut dire que

$$(H_0)_n d\sigma_0$$

est le flux de force à travers l'élément $d\sigma_0$ et que

$$H_n d\sigma$$

est le flux à travers $d\sigma$. La relation signifie que le flux de force total à travers $S_0$ est égal au flux total à travers S.

**9.** Le point de départ de cette étude est la considération d'un système de lignes $L_0$, à deux paramètres, tracées dans le milieu primitif. Nous appellerons *surface* $L_0$ une surface engendrée par une suite continue de lignes $L_0$. Par la déformation, les lignes $L_0$ se changent en lignes L et la *surface* $L_0$ en une *surface* L. Cela posé, si l'on trace sur la surface $L_0$ une courbe fermée $(C_0)$ limitant, sur cette surface, une aire simplement connexe, la courbe correspondante (C) sera située sur la surface correspondante L. Dans ce cas, *la valeur commune des deux intégrales* (15) *est nulle*.

En effet, d'après le théorème d'Ampère et de Stokes appliqué à la portion de surface $L_0$ limitée par la courbe $(C_0)$, on a

$$\int_{(C_0)} (p_0 da + q_0 db + r_0 dc) = \int\int (H_0)_n d\sigma_0,$$

l'intégrale double étant étendue à la portion de surface $L_0$ considérée.

Mais en chaque point $a$, $b$, $c$ de la surface $L_0$ le vecteur $H_0$ de projections A, B, C est tangent à cette surface, d'après la définition même des lignes $L_0$. On a donc identiquement $(H_0)_n = 0$, et l'intégrale considérée est nulle.

**10.** Associons des lignes $L_0$ de façon à former une surface tubulaire que nous appellerons *tube* $L_0$. Par la déformation, ce tube se change en un *tube* L. On démontre, comme dans la théorie des tourbillons [1], les propositions suivantes :

*Soit une courbe fermée quelconque* $(C_0)$ *située sur le tube* $L_0$ *et l'entourant une fois; l'intégrale*

$$\int_{(C_0)} (p_0 da + q_0 db + r_0 dc)$$

*a, tout le long du tube* $L_0$, *la même valeur, quelle que soit la courbe* $C_0$.

*Cette valeur est égale à celle de l'intégrale*

$$\int_{(C)} (p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

*prise le long d'une courbe fermée quelconque située sur le tube* L *et l'entourant une fois.*

**11.** Voici encore une relation de forme invariante. Nous avons vu que l'expression (12′) du n° **7** est la différentielle totale d'une certaine fonction F de $a$, $b$, $c$. On peut donc écrire

$$p_0 + \frac{\partial F}{\partial a} = p\frac{\partial x}{\partial a} + q\frac{\partial y}{\partial a} + r\frac{\partial z}{\partial a},$$

$$q_0 + \frac{\partial F}{\partial b} = p\frac{\partial x}{\partial b} + q\frac{\partial y}{\partial b} + r\frac{\partial z}{\partial b},$$

$$r_0 + \frac{\partial F}{\partial c} = p\frac{\partial x}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c} + r\frac{\partial z}{\partial c}.$$

---

[1] POINCARÉ, *Leçons sur la théorie des tourbillons;* Carré, 1893.
V. BJERKNES, *Ueber die Bildung von Cirkulations bewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten,* bei Jacob Dybwad, Christiana; 1898.

D'autre part, les quantités A, B, C sont données en fonction de X, Y, Z par les relations (4). Si l'on forme la combinaison

$$\left(p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}\right) A + \left(q_0 + \frac{\partial F}{\partial b}\right) B + \left(r_0 + \frac{\partial F}{\partial c}\right) C,$$

on voit immédiatement qu'elle est égale à

$$D(pX + qY + rZ).$$

Donc, comme $\mu D = \mu_0$,

$$\frac{1}{\mu_0}(p_0 A + q_0 B + r_0 C) + \frac{1}{\mu_0}\left(A \frac{\partial F}{\partial a} + B \frac{\partial F}{\partial b} + C \frac{\partial F}{\partial c}\right) = \frac{1}{\mu}(pX + qY + rZ).$$

Les fonctions $p_0$, $q_0$, $r_0$ ont été assujetties uniquement à vérifier les relations (10); or ces relations restent vérifiées quand on y remplace $p_0$, $q_0$, $r_0$ par

$$p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}, \quad q_0 + \frac{\partial F}{\partial b}, \quad r_0 + \frac{\partial F}{\partial c},$$

car les termes provenant de F disparaissent. Si nous appelons encore $p_0$, $q_0$, $r_0$ ces nouvelles fonctions $p_0 + \frac{\partial F}{\partial a}$, $\ldots$, la relation ci-dessus prend la forme plus simple

$$\frac{1}{\mu_0}(p_0 A + q_0 B + r_0 C) = \frac{1}{\mu}(pX + qY + rZ).$$

**12.** Nous terminerons par une remarque sur ce qu'on peut appeler la *composition des systèmes de lignes correspondantes.*

Soit une famille de lignes à deux paramètres

$$(L'_0) \qquad \frac{da}{A'} = \frac{db}{B'} = \frac{dc}{C'},$$

où $A'$, $B'$, $C'$ sont des fonctions de $a$, $b$, $c$ vérifiant la condition

$$\frac{\partial A'}{\partial a} + \frac{\partial B'}{\partial b} + \frac{\partial C'}{\partial c} = 0$$

et

$$(L') \qquad \frac{dx}{X'} = \frac{dy}{Y'} = \frac{dz}{Z'}$$

les lignes correspondantes dans le milieu déformé, définies par les relations (3).

Soient, de même,

$$(L''_0) \qquad \frac{da}{A''} = \frac{db}{B''} = \frac{dc}{C''},$$

$$(L') \qquad \frac{dx}{X''} = \frac{dy}{Y''} = \frac{dz}{Z''}$$

deux autres systèmes de lignes correspondantes avec

$$\frac{\partial A''}{\partial a} + \frac{\partial B''}{\partial b} + \frac{\partial C''}{\partial c} = 0.$$

Les deux systèmes de lignes

$$(L_0) \qquad \frac{da}{A' + kA''} = \frac{db}{B' + kB''} = \frac{dc}{C' + kC''},$$

$$(L) \qquad \frac{dx}{X' + kX''} = \frac{dy}{Y' + kY''} = \frac{dz}{Z' + kZ''},$$

où $k$ est une constante, sont encore *correspondants*. Cela résulte de ce que les relations (3), qui expriment que deux systèmes de lignes se correspondent, sont linéaires et homogènes en A, B, C, X, Y, Z.

Si l'on détermine les fonctions

$$p'_0, \quad q'_0, \quad r'_0, \quad p', \quad q', \quad r',$$
$$p''_0, \quad q''_0, \quad r''_0, \quad p'', \quad q'', \quad r'',$$

relatives aux deux systèmes de lignes correspondantes, on peut prendre pour les fonctions analogues relatives au système résultant $L_0$ et L,

$$p'_0 + kp''_0, \quad q'_0 + kq''_0, \quad r'_0 + kr''_0,$$
$$p' + kp'', \quad q' + kq'', \quad r' + kr''.$$

**13.** Dans la théorie des tourbillons, les fonctions A, B, C et X, Y, Z sont les projections du vecteur tourbillon $\xi_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ et $\xi$, $\eta$, $\zeta$ aux instants $t_0$ et $t$. Les fonctions $p_0$, $q_0$, $r_0$ et $p$, $q$, $r$ sont alors les projections de la vitesse d'une molécule $u_0$, $v_0$, $w_0$ et $u$, $v$, $w$ aux mêmes instants.

**14.** Un autre exemple se rencontre dans le mouvement *permanent* d'un fluide. Dans ce cas les trajectoires des molécules se conservent : elles se confondent avec les lignes de courant. On sait que l'on appelle *lignes de courant* un système de lignes telles que la tangente en chacun de leurs points coïncide avec la vitesse de la molécule fluide placée en ce point. En général, ces lignes changent avec le temps; mais, si le mouvement est *permanent,* comme nous le supposons, les lignes de courant sont les mêmes à l'instant $t_0$ et à l'instant $t$.

Appelons $a$, $b$, $c$ les coordonnées d'une molécule à l'instant $t_0$ ; $u_0$, $v_0$, $w_0$ les projections de sa vitesse; appelons $x$, $y$, $z$ les coordonnées de la même molécule au temps $t$; $u$, $v$, $w$ les projections de sa vitesse. On a

$$x = f(a, b, c, t),$$
$$y = f_1(a, b, c, t),$$
$$z = f_2(a, b, c, t).$$

Les lignes de courant à l'instant $t_0$ sont définies par les relations

$$(l_0) \qquad \frac{da}{u_0} = \frac{db}{v_0} = \frac{dc}{w_0},$$

et à l'instant $t$ par

$$(l) \qquad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Ces lignes correspondantes $l$ et $l_0$ sont actuellement *identiques*. En effet, le mouvement étant permanent, $u_0$, $v_0$, $w_0$ sont exprimés en $a$, $b$, $c$ de la même façon que $u$, $v$, $w$ en $x$, $y$, $z$ : on peut dire aussi que les molécules qui, à l'instant $t_0$, se trouvent sur une ligne de courant $l_0$ suivent cette ligne dans leur mouvement, et, à l'instant $t$, se trouvent sur la même ligne; la ligne $l$ correspondant à $l_0$ se confond donc avec $l_0$.

Il est aisé de vérifier directement que les quantités $u_0$, $v_0$, $w_0$ et $u$, $v$, $w$ satisfont à des relations telles que (2).

Suivons, en effet, une molécule dans son mouvement. A l'instant $t_0$ cette molécule est dans la position $M_0(a, b, c)$ avec la vitesse $u_0$, $v_0$, $w_0$; elle suit ensuite une trajectoire $l_0$ et au temps $t$ elle est dans une position $M(x, y, z)$ avec la vitesse $u$, $v$, $w$ : entre $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$, $t$ ont lieu les relations

$$\begin{aligned} x &= f\ (a, b, c, t), \\ y &= f_1(a, b, c, t), \\ z &= f_2(a, b, c, t). \end{aligned}$$

Soit une deuxième molécule $M'_0$ située, à l'instant $t_0$, sur la même trajectoire $l_0$ infiniment près de $M_0$; soient $(a + da, b + db, c + dc)$ les coordonnées de $M'_0$; à l'instant $t$ cette molécule occupe, sur la même trajectoire $l_0$, une position $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ infiniment voisine de M.

On a, entre $dx$, $dy$, $dz$ et $da$, $db$, $dc$, les relations évidentes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial a}\,da + \frac{\partial x}{\partial b}\,db + \frac{\partial x}{\partial c}\,dc, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial a}\,da + \frac{\partial y}{\partial b}\,db + \frac{\partial y}{\partial c}\,dc, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial a}\,da + \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc. \end{aligned}\right.$$

Mais, le mouvement étant permanent, on peut aussi regarder $M'_0$ comme la position de la molécule à l'instant $t_0 + \delta t$, et $M'$ comme la position de M à l'instant $t + \delta t$ : on a donc

$$da = u_0\,\delta t, \qquad db = v_0\,\delta t, \qquad dc = w_0\,\delta t$$

car la molécule $M_0$ a pour vitesse $(u_0, v_0, w_0)$; et, de même,

$$dx = u\,\delta t, \qquad dy = v\,\delta t, \qquad dz = w\,\delta t.$$

Les relations (16) deviennent alors

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 \frac{\partial x}{\partial a} + v_0 \frac{\partial x}{\partial b} + w_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ v &= u_0 \frac{\partial y}{\partial a} + v_0 \frac{\partial y}{\partial b} + w_0 \frac{\partial y}{\partial c}, \\ w &= u_0 \frac{\partial z}{\partial a} + v_0 \frac{\partial z}{\partial b} + w_0 \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}\right.$$

Ces relations sont de la forme prévue (2). Pour les ramener à la forme (3), partons de l'équation du nº **2**,

$$D\mu = \mu_0;$$

puis multiplions les relations (17) à gauche par $D\mu$ et à droite par $\mu_0$: nous avons

$$\begin{aligned} D.\mu u &= \mu_0 u_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \mu_0 v_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \mu_0 w_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ D.\mu v &= \mu_0 u_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \mu_0 v_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \mu_0 w_0 \frac{\partial y}{\partial c}, \\ D.\mu w &= \mu_0 u_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \mu_0 v_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \mu_0 w_0 \frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned}$$

Ces relations sont bien de la forme (3), où

$$A = \mu_0 u_0, \qquad B = \mu_0 v_0, \qquad C = \mu_0 w_0.$$
$$X = \mu u, \qquad Y = \mu v, \qquad Z = \mu w.$$

En outre, l'équation de continuité, dans le cas du mouvement permanent, donne

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0,$$
$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

On pourrait donc appliquer les théorèmes généraux aux trajectoires; mais actuellement ces théorèmes sont intuitifs, car ils se réduisent, au fond, à ce fait que le débit à travers une section quelconque d'un filet fluide est invariable.

**15.** Dans un mouvement permanent, les lignes de tourbillons et les lignes de courant se conservent. On peut donc, d'après le principe de la composition (nº **12**), appliquer les théorèmes précédents aux lignes résultant de la composition des lignes de tourbillons et des lignes de courant.