JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 389-403.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__389_0>

Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide compressible;

Par M. P. DUHEM.

Dans un précédent Mémoire (¹), nous avons étudié la stabilité de l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides compressibles, soumis à des forces extérieures quelconques dépendant d'une fonction potentielle. Nous n'avons pas obtenu la solution complète de cette question très générale; nous avons obtenu seulement :

1° Des conditions nécessaires, mais peut-être pas suffisantes pour la stabilité de l'équilibre;

2° Des conditions suffisantes, mais peut-être pas nécessaires.

C'est seulement dans le cas où les deux fluides, à la séparation desquels flotte le solide, confinent par une surface illimitée que nous avons pu donner les conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

Nous nous proposons, aujourd'hui, de résoudre la question, sinon dans son entière généralité, du moins dans des cas très étendus.

Les résultats que nous nous proposons d'établir sont les suivants :

1° Si le solide flotte à la surface qui sépare un fluide compressible d'un espace vide, quelle que soit la force extérieure, dépendant d'une

---

(¹) *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, p. 91; 1895).

fonction potentielle, à laquelle le fluide est soumis, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du flotteur soit stable.

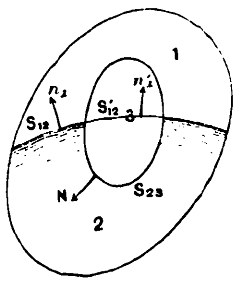
2° La méthode qui fournit ces résultats ne s'applique pas, en général, au cas où le solide flotte à la surface de séparation de deux fluides; toutefois, dans le cas particulier où les deux fluides sont homogènes et incompressibles, elle s'applique et donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre du flotteur.

3° Cette méthode s'étend, dans le premier cas, à un flotteur portant un lest fluide, compressible suivant une loi quelconque; dans le second cas, à un navire chargé d'un lest liquide incompressible.

I.

Un fluide 2 (*fig.* 1), compressible suivant une loi quelconque, porte un solide 3; au-dessus du fluide 2, se trouve un espace vide 1.

Fig. 1.



Soient: S_{12} la surface de contact des fluides 1 et 2;

n_1 la normale à cette surface vers l'intérieur de l'espace 1;

S_{23} la surface de séparation du solide et du fluide;

N la normale à cette surface vers l'intérieur du fluide;

Dx, Dy, Dz les composantes du déplacement d'un point du fluide;

Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement d'un point du solide;

δf, δg, δh, δl, δm, δn les trois composantes de la translation élémentaire et les trois composantes de la rotation élémentaire en lesquelles se décompose le déplacement virtuel le plus général de ce corps;

ρ_2 la densité du fluide;

$\delta\rho_2$ la variation de cette densité en un point fixe de l'espace;

V la fonction potentielle des forces extérieures qui sollicitent le fluide.

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit que l'on ait, en tout déplacement virtuel du système,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 \\ &+ \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]^2 dS_{12} \\ &+ Q > 0, \end{aligned}\right.$$

Q étant une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn dont nous avons formé les coefficients dans notre Mémoire : *Sur la stabilité des corps flottants*.

D'ailleurs, un déplacement virtuel est assujetti à la seule condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\, dS_{12} \\ &+ \int_{v_2} \delta\rho_2\, dv_2 \\ &- \int_{S_{23}} \rho_2[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]\, dS_{23} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui exprime que la masse du fluide 2 est demeurée invariable.

Dans cette égalité, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\delta m - y\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\delta n - z\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\delta l - x\delta m, \end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées du point du solide qui subit le déplacement infiniment petit Δx, Δy, Δz.

On obtiendra des conditions nécessaires pour la stabilité de l'équilibre en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée en de certains déplacements soumis à l'égalité (2). Nous allons, de la sorte, obtenir certaines conditions nécessaires, que nous démontrerons ensuite être suffisantes.

1° *La quantité* $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ *n'est négative en aucun point du fluide; elle n'est pas nulle en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.*

Si cette quantité était négative en un point du fluide, par raison de continuité, elle serait négative en tous les points d'un volume fini entourant ce point. Si donc l'hypothèse précédente était inexacte, on pourrait, à l'intérieur du volume v_2, tracer un volume fini u_2 tel que $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}$ ne serait positif en aucun point du volume u_2.

Dès lors, donnons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile;

2° La surface S_{12} demeure indéformable;

3° La densité du fluide 2 demeure invariable en tous les points qui se trouvent à l'extérieur du volume u_2 et à sa surface;

4° En tout point intérieur au volume u_2, la densité éprouve une variation $\delta\rho_2$ différente de 0, mais vérifiant l'égalité

$$\int_{u_2} \delta\rho_2 dv_2 = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) est vérifiée. Mais le premier membre de l'inégalité (1) se réduit à

$$\int_{u_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (\delta\rho_2)^2 du_2,$$

quantité qui ne peut être que nulle ou négative.

On trouve donc cette première condition nécessaire :

I. *On doit avoir, en tout point du fluide,*

$$(4) \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geqq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'un volume fini, si petit soit-il.

2. *On doit avoir, en tout point de la surface* S_{12},

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} \geqq 0, \tag{5}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tous les points d'une aire finie, si petite soit-elle.

Si, en effet, cette condition n'était pas remplie, on pourrait, sur la surface S_{12}, tracer une aire a_{12} telle qu'en aucun point de cette aire, $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ n'aurait une valeur positive.

Cela étant, imposons au système un déplacement virtuel défini de la manière suivante :

1° Le solide 3 demeure immobile;

2° La densité ρ_2 demeure invariable en tout point du volume v_2;

3° La partie de la surface S_{12}, qui est extérieure à l'aire a_{12}, et le contour de cette aire demeurent invariables;

4° L'aire a_{12} se déforme de telle sorte que

$$\int_{a_{12}} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]\, da_{12} = 0.$$

Il est aisé de voir qu'en un semblable déplacement, l'égalité (2) serait vérifiée. Mais, d'autre part, le premier membre de l'inégalité (1) se réduirait à

$$\rho_2 \int_{a_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)Dx + \cos(n_1, y)Dy + \cos(n_1, z)Dz]^2\, da_{12},$$

quantité qui ne pourrait être que nulle ou négative, en sorte que l'inégalité (1) ne pourrait être vérifiée.

3. Donnons au solide un déplacement virtuel arbitraire δf, δg, δh, δl, δm, δn, et associons-lui un déplacement du fluide défini de la manière suivante :

1° En tout point de la surface S_{12}, le fluide éprouve un déplacement dont les composantes dx, dy, dz vérifient l'égalité

$$(6)\qquad \cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{\theta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}},$$

θ étant une quantité infiniment petite dont la valeur est indépendante de x, y, z;

2° En tout point du volume v_2, la densité éprouve une variation

$$(7)\qquad \delta\rho_2 = \frac{\theta}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}.$$

Ce déplacement virtuel vérifiera la condition (2), si l'on détermine la valeur de θ par l'égalité

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta\left[\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2\right] \\ &= \int_{S_{23}}\rho_2[\cos(N, x)\Delta x + \cos(N, y)\Delta y + \cos(N, z)\Delta z]dS_{23}. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir qu'en vertu des égalités (3) et (8) on peut écrire

$$(9)\qquad \theta = \alpha_1\delta f + \alpha_2\delta g + \alpha_3\delta h + \beta_1\delta l + \beta_2\delta m + \beta_3\delta n,$$

égalité dans laquelle α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 sont six constantes.

Les constantes α_1, β_1 sont données par les égalités :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\int_{S_{23}}\rho_2\cos(N, x)dS_{23}}{\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2}, \\ \beta_1 &= \frac{\int_{S_{23}}\rho_2[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]dS_{23}}{\rho_2\int_{S_{12}}\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}dS_{12} + \int_{v_2}\frac{1}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités α_2, α_3 se déduisent de α_1 en imposant une permutation circulaire aux lettres x, y, z; les quantités β_2, β_3 se déduisent de même de β_1.

Nous dirons que le déplacement virtuel du fluide défini par les égalités (6), (7), (9) et (10) constitue le ***déplacement associé*** au déplacement

$$\delta f,\ \delta g,\ \delta h,\ \delta l,\ \delta m,\ \delta n$$

du solide.

Nous obtiendrons évidemment une condition nécessaire pour la stabilité du système en écrivant que l'inégalité (1) est vérifiée lorsqu'on donne au flotteur un déplacement virtuel quelconque et, au fluide, le déplacement associé.

Or, dans ce cas, en vertu des égalités (6) et (7), on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \int_{v_2}\frac{d^2\varphi(\rho_2)}{d\rho_2^2}(d\rho_2)^2 dv_2 \\ &\quad + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}[\cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz]^2 d\mathrm{S}_{12} \\ &= \theta^2\left[\int_{v_2}\frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2 + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}}\frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}}d\mathrm{S}_{12}\right]. \end{aligned}\right.$$

En vertu des égalités (9) et (10) cette égalité devient

$$(12)\qquad \mathrm{T} = \frac{(a_1\delta f + a_2\delta g + a_3\delta h + b_1\delta l + b_2\delta m + b_3\delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_2}\frac{1}{\dfrac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}}dv_2 + \rho_2\int_{\mathrm{S}_{12}}\frac{1}{\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1}}d\mathrm{S}_{12}}.$$

Dans cette égalité, a_1, b_1 sont donnés par les égalités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \int_{\mathrm{S}_{23}}\rho_2\cos(\mathrm{N}, x)\,d\mathrm{S}_{23}, \\ b_1 &= \int_{\mathrm{S}_{23}}\rho_2[y\cos(\mathrm{N}, z) - z\cos(\mathrm{N}, y)]\,d\mathrm{S}_{23}; \end{aligned}\right.$$

a_2, a_3 se déduisent de a_1 en imposant aux lettres x, y, z une permutation tournante; b_2, b_3 se déduisent de même de b_1.

La quantité T est, comme Q, une forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn. Nous sommes donc amenés à énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il est nécessaire que la forme quadratique (T + Q) *soit une forme définie positive :*

$$\mathrm{T} + \mathrm{Q} > 0. \tag{14}$$

Nous allons maintenant démontrer que *les trois conditions énoncées sont suffisantes pour assurer la stabilité de l'équilibre du système.*

Considérons, en effet, un déplacement virtuel quelconque du système; il vérifie l'égalité (2).

Imposons ensuite au solide le même déplacement virtuel, et au fluide le *déplacement associé;* l'égalité (2) sera encore vérifiée dans ce dernier cas; de plus, dans les deux cas, le troisième terme du premier membre de l'égalité (2) aura même valeur.

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\,\mathrm{D}z]\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \delta\rho_2\, dv_2 - \int_{v_2} d\rho_2\, dv_2 = 0,
\end{aligned}$$

égalité qui peut encore s'écrire, en multipliant toutes les quantités sous les signes $\int$ par la constante Θ, et en tenant compte des égalités (6) et (7),

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]^2\, dS_{12} \\
&- \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1} [\cos(n_1, x)\,\mathrm{D}x + \cos(n_1, y)\,\mathrm{D}y + \cos(n_1, z)\,\mathrm{D}z] \\
&\qquad\qquad \times [\cos(n_1, x)\, dx + \cos(n_1, y)\, dy + \cos(n_1, z)\, dz]\, dS_{12} \\
&+ \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} (d\rho_2)^2\, dv_2 - \int_{v_2} \frac{d^2 \varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, d\rho_2\, \delta\rho_2\, dv_2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (11), transforme l'inégalité (1) en celle-ci :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2 - d\rho_2)^2\, dv_2 \\ &+\rho_2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\quad \cos(n_1,x)\,Dx + \cos(n_1,y)\,Dy + \cos(n_1,z)\,Dz \\ &\qquad\qquad - \cos(n_1,x)\;dx - \cos(n_1,y)\;dy - \cos(n_1,z)\,dz]^2\, dS_{12} \\ &+ T + Q > 0. \end{aligned}\right.$$

Or, il est clair que cette inégalité résulte des trois conditions précédemment énoncées et exprimées par les inégalités (4), (5) et (14). Nous avons donc obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équilibre du système soit stable.

Quelques remarques au sujet de ces conditions.

En vertu des conditions nécessaires (4) et (5), la forme T, donnée par l'égalité (12), ne peut jamais être négative ; on obtient donc, comme nous l'avons reconnu ailleurs par une autre voie, des conditions suffisantes pour la stabilité de l'équilibre en associant aux conditions (4) et (5) celle-ci :

La forme quadratique Q *est une forme définie positive.*

Mais cette dernière condition n'est pas, en général, nécessaire ; elle ne devient nécessaire que lorsque T est identiquement nul. C'est ce qui a lieu assurément dans le cas où le fluide est illimité et où l'une au moins des deux quantités $\frac{\partial V}{\partial n_1}$, $\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}$ ne croît pas au delà de toute limite lorsqu'on s'éloigne indéfiniment du lieu où se trouve le corps flottant.

Toutes ces conclusions sont d'accord avec celles que nous avons obtenues directement dans notre Mémoire *Sur la stabilité des corps flottants.*

II.

La méthode précédente ne s'applique pas à la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité de l'équilibre d'un solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides compressibles. Il est aisé de voir, en effet, que la possibilité de déterminer la quantité θ, qui définit le déplacement du fluide *associé* à un déplacement virtuel du solide, repose essentiellement sur ce fait qu'*une seule* condition (2) est imposée aux divers déplacements virtuels du fluide. Or, dans le cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide compressible, il faut associer à la condition (2) une deuxième condition analogue, exprimant que la masse du fluide 1 ne varie pas et la méthode exposée au paragraphe précédent ne peut plus servir.

Il est, toutefois, un cas important où la méthode précédente demeure applicable à un corps solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides; c'est le cas où ces deux fluides sont homogènes et incompressibles; dans ce cas, en effet, la condition (2) revient à exprimer que les divers déplacements virtuels ne font pas varier le volume occupé par le fluide 2; mais l'invariabilité de ce volume assure l'invariabilité du volume occupé par le fluide 1 et, partant, l'invariabilité de la masse de ce fluide. Une seule condition est donc imposée aux déplacements virtuels de la masse fluide et le déplacement *associé* à un déplacement virtuel du solide peut être déterminé comme dans le cas précédent.

L'égalité (12) est remplacée, ici, par

$$(16)\qquad T' = \frac{(a'_1\,\delta f + a'_2\,\delta g + a'_3\,\delta h + b'_1\,\delta l + b'_2\,\delta m + b'_3\,\delta n)^2}{\displaystyle\int_{S_{12}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}}\,dS_{12}},$$

avec

$$(17)\qquad \begin{cases} a'_1 = \displaystyle\int_{S_{23}} \cos(N, x)\,dS_{23}, & a'_2 = \ldots, \qquad a'_3 = \ldots, \\ b'_1 = \displaystyle\int_{S_{23}} [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,dS_{23}, & b'_2 = \ldots, \qquad b'_3 = \ldots. \end{cases}$$

Dans ces expressions, les deux surfaces S_{23}, S_{13} ne jouent pas un rôle symétrique. On peut faire disparaître cet inconvénient. Soit S'_{12} la flottaison, c'est-à-dire le prolongement analytique de la surface S_{12} à l'intérieur du solide; soit n'_1 la normale à cette surface dirigée dans le même sens que n_1; nous pourrons écrire

$$
(17\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
a'_1 &= -\int_{S'_{12}} \cos(n'_1, x)\, dS'_{12}, &\quad a'_2 &= \ldots, &\quad a'_3 &= \ldots.\\
b'_1 &= -\int_{S'_{12}} [y\cos(n'_1, z) - z\cos(n'_1, y)]\, dS'_{12}, &\quad b'_2 &= \ldots, &\quad b'_3 &= \ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour que l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface de séparation de deux fluides incompressibles 1 *et* 2 *soit un équilibre stable, il faut et il suffit :*

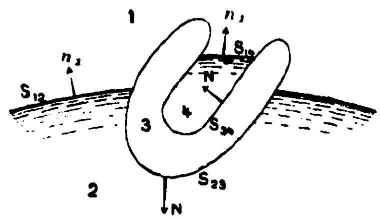
1° *Qu'en tout point de la surface de séparation, la direction de la force passe du fluide moins dense au fluide plus dense;*

2° *Que la forme quadratique en* $\delta f, \delta g, \delta h, \delta l, \delta m, \delta n \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} T' + Q\right)$ *soit une forme définie positive.*

III.

La méthode exposée au § I s'étend au cas où le solide 3 qui flotte à la surface de séparation du fluide compressible 2 et du vide 1 porte

Fig. 2.



un chargement liquide 4, compressible suivant une loi quelconque (*fig.* 2).

Dans ce cas, pour que l'équilibre du système soit stable il faut et il suffit que l'on ait ([1]), pour tout déplacement virtuel,

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{v_2} \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2 dv_2 + \int \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(\delta\rho_4)^2 dv_4 \\
&+ \rho_2 \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)Dx + \cos(n_1,y)Dy + \cos(n_1,z)Dz]^2 dS_{12} \\
&+ \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)Dx + \cos(n_1,y)Dy + \cos(n_1,z)Dz]^2 dS_{14} + R > 0,
\end{aligned}
\right.
$$

R étant une forme quadratique en

$$
\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n.
$$

Les modifications virtuelles du système sont assujetties aux deux conditions

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\rho_2 \int_{S_{12}} [\cos(n_1,x)Dx + \cos(n_1,y)Dy + \cos(n_1,z)Dz]dS_{12} \\
&- \int_{S_{23}} \rho_2[\cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z]dS_{23} \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_{v_2} \delta\rho_2 dv_2 = 0, \\
&\rho_4 \int_{S_{14}} [\cos(n_1,x)Dx + \cos(n_1,y)Dy + \cos(n_1,z)Dz]dS_{14} \\
&- \int_{S_{34}} \rho_4[\cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z]dS_{34} \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_{v_4} \delta\rho_4 dv_4 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces deux conditions permettent de définir un déplacement des fluides *associés* à un déplacement virtuel quelconque du solide.

([1]) *Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II, p. 23; 1896).

Posons, en tout point du fluide 2,

$$(20) \qquad \delta\rho_2 = d\rho_2 = \frac{\theta}{\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}};$$

en tout point de la surface S_{12},

$$(21) \qquad \cos(n_1, x)dx + \cos(n_1, y)dy + \cos(n_1, z)dz = \frac{\theta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}};$$

en tout point du fluide 4,

$$(22) \qquad \delta\rho_4 = d\rho_4 = \frac{\eta}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}};$$

en tout point de la surface S_{14},

$$(23) \qquad \cos(x_1, x)dx + \cos(x_1, y)dy + \cos(x_1, z)dz = \frac{\eta}{\frac{\partial V}{\partial n_1}},$$

θ, η étant deux fonctions de δf, δg, δh, δl, δm, δn linéaires, homogènes, à coefficients constants, que déterminent les égalités (19).

θ est donné par les égalités (9) et (10); η s'exprime d'une manière analogue par les égalités

$$(9\,bis) \qquad \eta = \gamma_1\delta f + \gamma_2\delta g + \gamma_3\delta h + \lambda_1\delta l + \lambda_2\delta m + \lambda_3\delta n,$$

$$(10\,bis) \qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\displaystyle\int_{S_{41}} \rho_4 \cos(N, x)dS_{41}}{\displaystyle\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4}, \\ \lambda_1 &= \frac{\displaystyle\int_{S_{41}} \rho_4[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]dS_{41}}{\displaystyle\rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14} + \int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4}; \end{aligned}\right.$$

γ_2, γ_3, λ_2, λ_3 s'expriment par des égalités analogues.

Pour un tel déplacement, on a

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} U = & \int_{v_4} \frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}(d\rho_4)^2 dv_4 \\ & + \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{\partial V}{\partial n_1}[\cos(n_1,x)dx + \cos(n_1,y)dy + \cos(n_1,z)dz]^2 dS_{14} \\ = & \frac{(c_1\delta f + c_2\delta g + c_3\delta h + d_1\delta l + d_2\delta m + d_3\delta n)^2}{\displaystyle\int_{v_4} \frac{1}{\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2}} dv_4 + \rho_4 \int_{S_{14}} \frac{1}{\frac{\partial V}{\partial n_1}} dS_{14}}, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} c_1 &= \int_{S_{34}} \rho_4 \cos(N,x)\,dS_{34}, & c_2 &= \ldots, & c_3 &= \ldots, \\ d_1 &= \int_{S_{34}} \rho_4 [y\cos(N,z) - z\cos(N,y)]\,dS_{34}, & d_2 &= \ldots, & d_3 &= \ldots . \end{aligned}\right.$$

On peut énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre du système soit stable, il faut et il suffit :

1° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 2,

$$\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini;

2° *Que l'on ait, en tout point du fluide* 4,

$$\frac{d^2\varphi_4(\rho_4)}{d\rho_4^2} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'un volume fini;

3° *Que l'on ait, en tout point des surfaces* S_{12}, S_{14},

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} \geqq 0,$$

l'égalité n'ayant pas lieu à la fois en tous les points d'une aire finie;

4° *Que la forme quadratique en δf, δg, δh, δl, δm, δn,*

$$T + U + R$$

soit une forme définie positive.

Cette méthode s'étend sans peine au cas où l'espace 1, au lieu d'être vide, est rempli par un fluide, à la condition que les trois fluides 1, 2 et 4 soient incompressibles.

On peut ainsi déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un navire, flottant sur un liquide pesant et portant un chargement liquide pesant, soit en équilibre stable. Une règle (1), résolvant ce problème, était usitée depuis plusieurs années en architecture navale; le raisonnement dont on faisait usage pour établir cette règle en justifiait la nécessité, mais non la suffisance. La méthode précédente démontre que cette règle est, pour la stabilité d'équilibre d'un navire, condition à la fois nécessaire et suffisante, ainsi que nous l'avons indiqué ailleurs (2).

(1) E. GUYOU, *Théorie du Navire*, p. 120. — POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du Navire*, t. II, p. 54.

(2) *Bulletin de l'Association technique maritime*, n° 7, session de 1896, p. 43.