JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HADAMARD

Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 331-387.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__331_0>

Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique (¹);

PAR M. HADAMARD.

L'étude des équations différentielles se poursuit actuellement dans deux directions différentes. On peut avoir en vue la nature analytique des fonctions cherchées, et les considérer dans tout le champ des valeurs réelles ou complexes de la variable indépendante. Mais on peut aussi, en restant dans le domaine réel, suivre la voie tracée par les travaux de Sturm et par ceux de MM. Poincaré et Picard, où l'on se propose simplement de discuter le sens dans lequel varient les inconnues, et où les relations d'inégalité jouent un rôle prépondérant

C'est à ce dernier point de vue que je me placerai exclusivement, dans ce qui va suivre, pour étendre aux cas généraux certaines remarques simples qui s'offrent dans l'étude des problèmes les plus élémentaires de la Dynamique.

1. Considérons, parexemple, une surface de révolution, rapportée aux coordonnées semi-polaires r, θ, z et définie par une équation entre

(¹) Les principaux résultats contenus dans le présent travail ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un Mémoire couronné en 1896 (prix Bordin). Ce Mémoire contenait, en outre, un résultat relatif aux surfaces à courbures opposées et qui sera développé plus tard.

r et z, et le mouvement (sans frottement) d'un point sur cette surface, sous l'influence de forces dérivant d'une fonction de forces U indépendante de θ. Une discussion bien connue montre que la trajectoire reste, en général, comprise entre deux parallèles de la surface. Ces parallèles peuvent, par un choix convenable des constantes d'intégration, être choisis arbitrairement, mais sous la condition que la plus plus petite des deux valeurs de r corresponde à la plus grande des deux valeurs de U : ils comprennent, par conséquent, entre eux une région de la surface où r et U varient en sens contraire (1). S'il s'agit d'une géodésique, cette dernière conclusion subsiste en général, les deux parallèles limites devant, cette fois, avoir le même rayon.

C'est ainsi qu'un point pesant mobile sans frottement sur une sphère passe, en général, à quelque instant de son mouvement, dans l'hémisphère inférieur.

2. La circonstance que nous venons de rappeler n'est que l'application aux surfaces de révolution d'un principe général : comme nous allons le voir, dans le mouvement d'un point sur une surface quelconque, on peut toujours assigner une région R que la trajectoire doit (sauf dans un cas exceptionnel) traverser une infinité de fois.

Ce principe est d'ailleurs celui qui a été invoqué par M. Kneser dans son Mémoire intitulé : *Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen* (2). Toutefois ce géomètre ne l'a appliqué qu'à l'étude du mouvement dans le voisinage d'une position d'équilibre instable, au lieu qu'en réalité la portée en est plus générale. Cela tient à ce que la région R indiquée par l'auteur, du moins dans la forme algébrique de son raisonnement, est moins restreinte que celle que nous formerons (3).

3. Considérons, d'une manière générale, un système d'équations

---

(1) Sauf dans le cas exceptionnel où r et U ont leur maximum ou leur minimum en même temps.

(2) *Journal de Crelle*, t. 115, p. 300 et suiv.

(3) La région introduite par M. Kneser est celle à laquelle on serait conduit en partant de la remarque que nous donnons au n° 25.

différentielles du premier ordre,

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où les X_i sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces dernières quantités étant considérées comme les coordonnées d'un point M dans l'espace E_n à n dimensions, le système (1) définit un faisceau de trajectoires de ce point : si, comme nous le supposerons, les fonctions X sont univoques, il passe une trajectoire et une seule par un point pris au hasard.

Soit $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction univoque quelconque. Lorsque le point M décrira (t variant de t_0 à $+\infty$) sa trajectoire, cette fonction aura, en général, une infinité de maxima et de minima successifs.

Or ces maxima et minima ne peuvent évidemment être situés en des points arbitraires. Si l'on désigne par $X(f)$ le symbole

$$X(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

tout point où V est maximum ou minimum devra satisfaire à l'équation

$$(2) \qquad X(V) = 0,$$

laquelle représente, dans l'espace E_n, une multiplicité à $n-1$ dimensions. De plus, suivant qu'il y a maximum ou minimum, on devra avoir l'une ou l'autre des deux inégalités

$$(3) \qquad X[X(V)] \leqq 0,$$

$$(3') \qquad X[X(V)] \geqq 0,$$

lesquelles définissent chacune une portion de la surface (2), la première de ces portions étant constituée par les points où la trajectoire passe de la région $X(V) > 0$ à la région $X(V) < 0$, la seconde par les points où a lieu le passage inverse ; la limite de ces deux portions, qui est une multiplicité à $n-2$ dimensions, se compose des points où la trajectoire est tangente à la surface (2).

Ainsi *une trajectoire quelconque traversera, en général, une infinité de fois la surface* (2) *et cela, successivement, dans chacune des deux régions de cette surface déterminées respectivement par les inégalités* (3), (3').

4. Pour que la conclusion précédente tombe en défaut, il faut que, à partir d'une certaine valeur de t, la fonction V varie constamment dans le même sens; aille, par exemple, toujours en croissant.

Or, dans ces conditions, il arrivera, soit que cette quantité augmente indéfiniment avec t, soit qu'elle tende vers une limite.

Nous écarterons la première hypothèse, soit que V reste nécessairement fini dans le domaine des valeurs que peuvent prendre x_1, x_2, ..., x_n, soit que nous fassions abstraction des trajectoires le long desquelles il devient infini. Nous admettrons donc que V tend vers une limite et nous nous servirons du lemme suivant :

Si, lorsque la variable t augmente indéfiniment, la fonction V de cette variable tend vers une limite et que ses $n+1$ premières dérivées existent et restent finies, les n premières d'entre elles tendant vers zéro.

Bornons-nous, pour simplifier, à la dérivée première. Nous avons à faire voir que cette dérivée est, pour t suffisamment grand, plus petite en valeur absolue qu'un nombre quelconque donné ε.

Soit, à cet effet, l un nombre choisi arbitrairement. Dans la suite des valeurs de t, il ne peut exister une infinité d'intervalles ayant chacun une étendue supérieure à l et où $\left|\frac{dV}{dt}\right|$ soit plus grand que $\frac{\varepsilon}{2}$: car, dans un pareil intervalle, V varierait de plus de $\frac{l\varepsilon}{2}$, ce qui ne peut se produire indéfiniment puisque V tend vers une limite. A partir du moment où ces intervalles cesseront de se rencontrer, le module de $\frac{dV}{dt}$ sera manifestement plus petit que ε si nous avons pris pour l un nombre qui, multiplié par la limite supérieure de $\left|\frac{d^2V}{dt^2}\right|$, donne un produit inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Le même raisonnement s'étendant aux dérivées suivantes, notre lemme est démontré.

5. Appliquons ce lemme à la quantité V considérée aux numéros précédents, en admettant que cette fonction et ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, ainsi que les fonctions X_i et leurs dérivées partielles du premier et du second ordre, restent finies lorsque le point mobile s'éloigne indéfiniment sur cette trajectoire. Dans ce cas, $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$ et $\frac{d^3V}{dt^3}$ restent finis. Donc $\frac{dV}{dt} = X(V)$ et $\frac{d^2V}{dt^2} = X[X(V)]$ tendent vers zéro.

Nous arrivons, par conséquent, à la conclusion suivante :

Lorsque la fonction V et ses dérivées jusqu'au troisième ordre, les fonctions X_i et leurs dérivées jusqu'au second ordre restent finies pour t infini, la trajectoire traverse une infinité de fois chacune des régions de la surface (2) *définies respectivement par les inégalités* (3), (3′); *ou sinon, elle est asymptotique à la multiplicité à $n-2$ dimensions qui sert de limite commune à ces deux régions.*

Ce dernier cas doit d'ailleurs être regardé comme exceptionnel [1].

6. Quoique les équations de la Dynamique soient du second ordre et ne puissent être ramenées au premier que par l'introduction des vitesses comme inconnues auxiliaires, elles vont nous fournir des résultats très analogues aux précédents, surtout dans le cas le plus simple et dont nous allons nous occuper tout d'abord, celui où il n'y a que deux degrés de liberté.

Considérons un système dont la position ne dépend que de deux paramètres u, v, par exemple un point matériel, de masse égale à 1, mobile sans frottement sur une surface où u, v sont les coordonnées curvilignes. U étant la fonction des forces et $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$ la

(1) *Voir* plus loin, n° **53**.

force vive, les équations du mouvement donneront

$$
\begin{aligned}
(EG - F^2)\frac{d^2 u}{dt^2} = G\frac{\partial U}{\partial u} - F\frac{\partial U}{\partial v} &+ u'^2\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\
&+ u'v'\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\
&+ v'^2\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right), \\
(EG - F^2)\frac{d^2 v}{dt^2} = - F\frac{\partial U}{\partial u} + E\frac{\partial U}{\partial v} &+ u'^2\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right) \\
&+ u'v'\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right) \\
&+ v'^2\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right).
\end{aligned}
$$

Soit V une fonction de u, v dont nous désignerons, pour abréger, les dérivées partielles du premier et du second ordre par P, Q, R, S, T : il viendra

$$
(4) \qquad \frac{dV}{dt} = Pu' + Qv',
$$

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2 V}{dt^2} &= P\frac{d^2 u}{dt^2} + Q\frac{d^2 v}{dt^2} + Ru'^2 + 2Su'v' + Tv'^2 \\
&= \frac{EQ\frac{\partial U}{\partial v} - F\left(P\frac{\partial U}{\partial v} + Q\frac{\partial U}{\partial u}\right) + GP\frac{\partial U}{\partial u}}{EG - F^2} + \Phi(u', v'),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
\Phi(u', v') = \Bigg\{R + \frac{1}{EG - F^2}\bigg[&P\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\
&+ Q\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right)\bigg]\Bigg\} u'^2 \\
+ \Bigg\{2S + \frac{1}{EG - F^2}\bigg[&P\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\
&+ Q\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)\bigg]\Bigg\} u'v' \\
+ \Bigg\{T + \frac{1}{EG - F^2}\bigg[&P\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right) \\
&+ Q\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\bigg]\Bigg\} v'^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Le terme indépendant de u', v', dans l'expression de $\frac{d^2V}{dt^2}$, n'est autre que l'invariant désigné, dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux ([1]), par la notation $\Delta(U, V)$.

Faisons usage de l'équation des forces vives

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 2(U + h),$$

la différence

$$\frac{\Phi(u', v')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} - \frac{\Phi(Q, -P)}{EQ^2 - 2FPQ + GP^2}$$

contenant en facteur $Pu' + Qv'$, nous pouvons écrire

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} + \frac{dV}{dt}(\lambda u' + \mu v'), \tag{7}$$

où λ et μ ne contiennent d'autre dénominateur que la quantité

$$EQ^2 - 2FPQ + GP^2;$$

ΔV désigne, conformément aux notations de M. Darboux, le quotient de cette même expression $EQ^2 - 2FPQ + GP^2$ par $EG - F^2$; I_V a la valeur

$$\left\{\begin{aligned} I_V &= \frac{\Phi(Q, -P)}{EG - F^2} \\ &= \frac{RQ^2 - 2SPQ + TP^2}{EG - F^2} + \frac{1}{(EG - F^2)^2} \\ &\quad \times \left[P^3\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right) + P^2Q\left(F\frac{\partial F}{\partial v} + G\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{3}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\right. \\ &\quad \left. + PQ^2\left(F\frac{\partial F}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{3}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) + Q^3\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette quantité s'exprime également à l'aide des paramètres différentiels de M. Beltrami. En nous conformant toujours aux notations de

([1]) T. III, Liv. VII, Chap. I.

M. Darboux, nous trouvons successivement

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(V,\Delta_2 V) = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\Big[&(GP-FQ)^2R+2(GP-FQ)(EQ-EP)S+(EQ-FP)^2T\\ &+\frac{1}{2}(GP-FQ)\Big(\frac{\partial E}{\partial u}Q^2-\frac{2\,\partial F}{\partial u}PQ+\frac{\partial G}{\partial u}P^2\Big)\\ &+\frac{1}{2}(EQ-FP)\Big(\frac{\partial E}{\partial v}Q^2-\frac{2\,\partial F}{\partial v}PQ+\frac{\partial G}{\partial v}P^2\Big)\Big]\\ &+\frac{\Delta V\,\Delta(V,EG-F^2)}{2(EG-F^2)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(V,\Delta_2 V) = \frac{EQ^2-2FPQ+GP^2}{(EG-F^2)^2}\Big[&GR-2FS+ET+P\Big(\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\\ &+Q\Big(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\Big)-\frac{1}{2}\Delta(V,EG-F^2)\Big],\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$I_V = \Delta V\,\Delta_2 V - \frac{1}{2}\Delta(V,\Delta V). \tag{8'}$$

7. Faisons d'abord $V = U$: il viendra

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \Delta U + \frac{2(U+h)I_U}{\Delta U} + \frac{dU}{dt}(\lambda u' + \mu v'). \tag{9}$$

Considérons un maximum de U. Nous devrons avoir $\frac{dU}{dt} = 0$, $\frac{d^2U}{dt^2} \leqq 0$: comme ΔU est essentiellement positif, il en résulte

$$I_U \leqq 0, \tag{10}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $\Delta U = 0$, c'est-à-dire en une position d'équilibre.

Réciproquement, étant donné un point quelconque situé dans la région $I_U < 0$, il existe une trajectoire passant en ce point et y admettant un maximum de la fonction U. Car on peut prendre u' et v' pro-proportionnels à Q et $-P$, ce qui rend la fonction $\Phi(u', v')$ négative, puis donner à ces quantités u', v' des valeurs assez grandes pour que ce terme $\Phi(u', v')$ surpasse en valeur absolue ΔU.

Si nous divisons la surface donnée en deux régions, l'une où I_U est positif, l'autre où il est négatif, une trajectoire quelconque passera, en général, une infinité de fois dans la seconde de ces deux régions, à laquelle on peut, en conséquence, donner le nom de région *attractive*, pendant que la première, dans laquelle le point mobile ne peut rester constamment, est en quelque sorte une région *répulsive*.

Ainsi que l'a remarqué M. Kneser dans le cas où la surface donnée est un plan (¹), le maximum de U ne peut avoir lieu que là où *les lignes de niveau ont leur courbure géodésique tournée dans le sens des* U *croissants*. Ce résultat est équivalent à celui qui précède, comme on le voit en introduisant l'expression de cette courbure géodésique (²), expression dont le numérateur est précisément I_U.

La ligne de séparation des régions attractive et répulsive est constituée par le lieu des inflexions géodésiques des courbes de niveau, c'est-à-dire, d'une part, par les points où la courbe de niveau est tangente à une direction asymptotique (³); d'autre part, par les points où son plan osculateur est normal à la surface. Par exemple, dans le cas de la pesanteur, cette ligne de séparation se compose du contour apparent horizontal et du lieu des points où une direction asymptotique est horizontale.

8. Il est intéressant de comparer le résultat précédent avec celui que l'on rencontre dans le cas d'un paramètre, par exemple dans le mouvement d'un point sur une courbe sous l'influence d'une force fonction de la position du point. On sait qu'alors le mobile, s'il ne s'éloigne pas indéfiniment dans un sens déterminé, oscille périodiquement dans un certain intervalle et que cet intervalle comprend nécessairement une position d'équilibre stable. Dans le cas de deux paramètres, c'est la région attractive qui remplace, à cet égard, la position d'équilibre stable (⁴).

(¹) *Loc. cit.*

(²) Darboux, *loc. cit.*, t. III, p. 202, formule (19).

(³) Cette propriété caractéristique des lignes asymptotiques que les courbes qui leur sont tangentes avec un plan osculateur quelconque ont leur courbure géodésique nulle, est en relation évidente avec le rôle que jouent ces lignes dans la théorie de la déformation.

(⁴) La question, plusieurs fois discutée (*voir*, en particulier, Jordan, *Comptes*

9. Nous avons supposé que la fonction U avait des maxima en nombre infini. Nous devons maintenant examiner le cas où, à partir d'une certaine valeur de t, U varierait constamment dans le même sens. Pour voir ce qui peut se passer dans ces conditions, nous ferons, comme précédemment, certaines hypothèses. Nous admettrons :

1° Que U est, sur toute la surface, fini et inférieur en valeur absolue à une limite déterminée, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclusivement;

2° Que E, F, G restent également partout finis et inférieurs en valeur absolue à une limite déterminée ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre inclusivement;

3° Que $EG - F^2$ est partout différent de zéro et supérieur à une limite déterminée.

Sous la forme où nous venons de les énoncer, ces hypothèses sont trop restrictives et ne seraient pas réalisées en général. Ainsi, pour prendre le cas le plus simple, une sphère rapportée aux coordonnées astronomiques ordinaires ne satisferait pas aux conditions précédentes, $EG - F^2$ étant nul aux deux pôles. Nous ferons abstraction de ces singularités apparentes, en supposant qu'on ait défini un certain nombre de régions empiétant les unes sur les autres, de manière que : 1° tout point de la surface soit intérieur à l'une au moins de ces régions; 2° dans chacune d'elles on puisse faire choix d'un système de coordonnées tel que les conditions précédentes soient vérifiées. Si ces résultats ne peuvent être atteints qu'après séparation d'une ou plusieurs portions de la surface donnée, celles-ci seront véritablement singulières et nous les exclurons du raisonnement, en ne considérant que les trajectoires qui n'y passent point. C'est ce qui arrivera, par exemple s'il y a des nappes infinies.

Dans ces conditions, nous sommes assurés tout d'abord que u' et v' restent finis. Les singularités signalées par M. Painlevé (¹) sont donc

---

rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXIV, LXXV; BOUSSINESQ, *ibid.*), des lignes de faîte et des thalwegs trouverait peut-être sa solution dans des considérations analogues aux précédentes : les lignes de faîte étant en quelque sorte les lignes répulsives par excellence et les thalwegs les lignes attractives par excellence.

(¹) *Comptes rendus*, 26 octobre 1896.

exclues et il y a lieu de faire varier t jusqu'à $+\infty$. De plus, $\frac{dU}{dt}$, $\frac{d^2U}{dt^2}$ et $\frac{d^3U}{dt^3}$ restent finies et, par conséquent, d'après le lemme précédemment démontré, si U tend vers une limite, $\frac{dU}{dt}$ et $\frac{d^2U}{dt^2}$ tendent vers zéro. Si nous envisageons alors la formule (9), nous voyons que si ΔU n'est pas très petit, λ et μ sont finis, de sorte que le dernier terme du second membre est infiniment petit. Dès lors, ou bien il existe des valeurs de t aussi grandes que l'on veut pour lesquelles $I_U < 0$ et alors nous n'avons pas à modifier les conclusions des numéros précédents; ou bien ΔU tend vers zéro. Or les identités

$$E\Delta U = \frac{(EQ-FP)^2}{EG-F^2} + P^2, \qquad G\Delta U = \frac{(GP-FQ)^2}{EG-F^2} + Q^2$$

montrent que ΔU ne peut tendre vers zéro s'il n'en est pas de même de P et de Q. Si donc, comme c'est le cas général, la surface ne renferme qu'un nombre fini de positions d'équilibre, le mobile devra tendre vers une de ces positions. Dès lors la vitesse tend vers zéro, ainsi que l'a démontré M. Painlevé (1); c'est d'ailleurs ce qui résulte de notre lemme, appliqué aux coordonnées u et v considérées comme fonctions de t.

En un mot, *lorsque, sur une surface régulière et où U se comporte partout régulièrement, il n'y a qu'un nombre fini de positions d'équilibre, toute trajectoire qui ne passe pas une infinité de fois dans la région attractive tend asymptotiquement vers une de ces positions.*

10. Si l'on considérait, non seulement les valeurs de t supérieures à t_0, mais l'ensemble des valeurs de t de $-\infty$ à $+\infty$, on peut affirmer sans restriction que, pour une au moins de ces valeurs, le mobile passera dans la région attractive. Car le contraire ne pourrait avoir lieu que si la trajectoire tendait asymptotiquement vers une position

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France* et *Leçons sur l'intégration des équations de la Dynamique.*

d'équilibre tant pour t infini positif que pour t infini négatif. Mais, dans ce cas, les valeurs de U correspondant à ces deux positions limites seraient les mêmes et seraient atteintes par valeurs décroissantes (puisque la force vive tendrait vers zéro). Donc, dans l'intervalle, M passerait nécessairement par un maximum.

Une position d'équilibre ainsi atteinte asymptotiquement est nécessairement instable. Car on peut donner à t une valeur t_0 assez grande pour que le mobile prenne une position aussi voisine qu'on veut de l'équilibre avec une vitesse (u'_0, v'_0) aussi petite qu'on veut; on sait, d'autre part, que, dans un mouvement quelconque compatible avec la loi de forces donnée, on peut changer t en $t_0 - t$: le mouvement ainsi transformé est évidemment en contradiction avec l'hypothèse de la stabilité.

11. Si les positions d'équilibre, au lieu d'être en nombre fini, formaient sur la surface une ou plusieurs lignes, la conclusion précédente ne subsisterait pas nécessairement. La trajectoire pourrait être asymptotique à une ligne d'équilibre sans que la vitesse tende vers zéro; mais un pareil fait est loin de pouvoir se produire pour une ligne d'équilibre quelconque. Soit, en effet, $f(u, v) = 0$ l'équation de la ligne d'équilibre, f étant une fonction dont les dérivées partielles p et q ne sont pas nulles toutes deux en un point quelconque de cette ligne. [Par exemple, sur le tore à axe vertical représenté en coordonnées semi-polaires r, θ, z par l'équation $z^2 + (r-a)^2 = b^2$, si la force agissante est la pesanteur, on pourra prendre $f = r - a$.]

$\frac{df}{dt}$ et $\frac{d^2f}{dt^2}$ tendront vers zéro d'après notre lemme du n° 4, et comme il en est de même de $\Delta(U, f)$, si la vitesse ne tend pas vers zéro, il en résulte $\lim I_f = 0$, ce qui exige que I_f soit nulle sur la courbe d'équilibre. Δf étant différent de zéro, *cette ligne doit être une géodésique de la surface*, d'après l'expression précédemment rappelée de la courbure géodésique.

12. Notre théorème n'apprend quelque chose que si la région répulsive existe. Il est aisé de voir qu'il en est ainsi en général. Supposons, en effet, U partout fini sur la surface : il aura un maximum (position d'équilibre stable) et un minimum. Si ce maximum et ce minimum sont isolés, le premier sera intérieur à la région attractive, le second à la région répulsive; car, autour d'un point u_0, v_0 où il est minimum, U aura un développement de la forme

$$a(u-u_0)^2+2b(u-u_0)(v-v_0)+c(v-v_0)^2+\ldots$$

avec

$$b^2-ac<0,\ a>0.$$

Si l'on forme l'expression I_U, on voit que la partie

$$RQ^2-2SPQ+TP^2=aQ^2-2bPQ+cP^2+\ldots$$

est du second degré et essentiellement positive autour du point (u_0, v_0) pendant que la partie restante est de degré supérieur au second. Quant à ce point lui-même, il fait partie, comme point isolé, de la courbe $I_U=0$, mais on peut le considérer comme appartenant à la région répulsive, puisque toute trajectoire passant en ce point y admet un minimum de U.

Là encore, les conclusions peuvent être toutes différentes s'il existe pour U une ligne de minima ou de maxima. Ainsi, lorsqu'un point mobile sur une sphère est attiré par un diamètre, il est clair que la concavité des lignes de niveau est partout dirigée dans le sens de la force; il n'y a donc pas de région répulsive. Cela tient à l'existence d'une ligne de minima pour U, le grand cercle perpendiculaire au diamètre attirant.

13. On remarquera que si l'on change U en $-U$, c'est-à-dire *si l'on passe du mouvement primitif à son conjugué*, I_U est changé en $-I_U$, de sorte que *les régions attractive et répulsive se permutent entre elles.*

14. Si nous connaissons une limite supérieure de la constante des forces vives, nous pouvons restreindre la région attractive, car, moyennant l'inégalité $h\leqq h_0$, notre formule (9) donne, en un maximum de U,

$$\Delta U + \frac{2(U+h_0)I_U}{\Delta U} \leqq 0, \tag{11}$$

qui, avec $U + h_0 \geqq 0$, définit une région de la surface, région manifestement comprise dans la première.

De même, si nous connaissons une limite inférieure de la constante des forces vives, nous connaîtrons par là même une région où devra se trouver le minimum de U, car les relations $\frac{dU}{dt} = 0$, $\frac{d^2U}{dt^2} \geqq 0$, $h \geqq h_0$, combinées avec la formule (9), donnent

$$\Delta U + \frac{2(U+h_0)I_U}{\Delta U} \geqq 0,$$

région qui comprend la région répulsive et une partie de la région attractive, cette dernière partie diminuant indéfiniment lorsque h_0 augmente indéfiniment.

15. Soit maintenant V quelconque, et supposons donnée la valeur de la constante des forces vives; dès lors, les inégalités

$$\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} \leqq 0, \tag{12}$$

$$\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} \geqq 0 \tag{13}$$

correspondent à une division de la surface en deux régions telles que tout maximum de V est nécessairement situé dans l'une, tout minimum dans l'autre.

Quant à la discussion du cas où V n'a pas une infinité de maxima et de minima, elle se fait d'après les principes invoqués précédemment. En supposant encore que V reste fini ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, il faudra que la trajectoire tende vers une certaine courbe limite $V = a$. De plus, la condition que $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ soient infiniment petits nous montre, d'après la formule (7), que $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V}$ tend vers zéro, à moins que ΔV et, par suite,

$\frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial v}$ ne soient eux-mêmes infiniment petits. Mais si cette dernière circonstance se produisait, il arriverait ou bien que $\frac{\partial V}{\partial u}$ et $\frac{\partial V}{\partial v}$ ne seraient nuls qu'en des points isolés de la courbe $V = a$, et alors le mobile devrait s'approcher indéfiniment d'un de ces points, qui devrait être une position d'équilibre instable ([1]), ou bien que les égalités $\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v} = 0$ auraient lieu sur toute la courbe limite, auquel cas nous remplacerions V par une autre fonction s'annulant sur la courbe $V = a$ sans que ses dérivées partielles soient nulles toutes deux. Reste l'hypothèse que $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V}$ tende vers zéro sur la trajectoire et, par suite, soit nul sur la courbe limite : alors celle-ci sera une trajectoire possible $\left(\text{puisque les conditions } V = a, \frac{dV}{dt} = 0 \text{ entraînent } \frac{d^2V}{dt^2} = 0\right)$.

Ainsi, *toute trajectoire sur laquelle* V *et ses dérivées partielles restent finies passera une infinité de fois dans chacune des deux régions* (12) *et* (13) et traversera, par conséquent, une infinité de fois leur ligne de séparation, *à moins qu'elle ne tende asymptotiquement vers une position d'équilibre instable ou vers une trajectoire fermée représentée par une équation de la forme* $V = a$.

16. On peut déduire du résultat précédent un autre qui soit indépendant de la valeur de la constante des forces vives, car l'équation $\Delta(U, V) + \frac{2(U+h)I_V}{\Delta V} = 0$, combinée avec l'inégalité $U + h > 0$, donne

$$\Delta(U, V)I_V < 0,$$

inégalité qui doit être vérifiée une infinité de fois sur toute trajectoire non exceptionnelle.

17. Prenons le cas des géodésiques. En faisant $U = 0$, nous voyons que, sur une géodésique, le maximum de V a lieu nécessairement

([1]) *Voir* PAINLEVÉ, *loc. cit.*

dans la région $I_V < 0$, le minimum dans la région $I_V > 0$: toute géodésique passera une infinité de fois dans chacune de ces deux régions, à moins qu'elle ne soit asymptotique à une géodésique fermée ayant pour équation $V = a$.

Ce résultat est en accord avec celui que nous avons établi en premier lieu (n° **7**), car on sait que les géodésiques peuvent être considérées comme les trajectoires limites d'un mobile qui se meut sous l'influence de forces dérivées d'un potentiel quelconque $\pm V$.

On peut, d'ailleurs, déduire tous les résultats précédents les uns des autres en partant des résultats que fournit le principe de la moindre action. Ce principe montre, en effet, que les géodésiques de l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ sont identiques aux trajectoires d'un mobile parcourant la surface d'élément linéaire

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{V}$$

sous l'action des forces dérivées du potentiel V. De même, on ne change pas les trajectoires en remplaçant simultanément l'élément linéaire $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ par $(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\frac{U}{V}$ et la fonction de forces U par V. Cette transformation permet de passer des résultats du n° **7** à ceux du n° **15**.

18. Si, en particulier, $V = 0$ est l'équation d'une géodésique fermée L, la quantité I_V est nulle tout le long de cette ligne. Si elle n'est pas nulle ailleurs, la ligne L devra être coupée une infinité de fois par toute autre géodésique.

Nous allons appliquer cette remarque en prenant pour V la distance géodésique d'un point de la surface à la ligne L et supposant que la courbure de la surface donnée garde un signe invariable.

Prenons pour coordonnées l'arc v de L, compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied d'une géodésique normale à la première, et l'arc u de cette dernière géodésique, compté à partir de son pied. L'élément linéaire sera $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$ et, pour $u = 0$, l'on aura $C = 1$, $\frac{\partial C}{\partial u} = 0$. Si nous prenons pour V la quantité u elle-même, la formule (8) donnera $I_u = \frac{\partial C}{\partial u}$, lequel est bien nul sur L.

Supposons maintenant que la surface donnée soit à courbure partout positive. Comme cette courbure a pour expression ([1])

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2},$$

la quantité $\frac{\partial C}{\partial u}$, qui est nulle avec u et croissante quand u décroît, a un signe contraire à celui de u. La valeur absolue de u ne peut donc avoir de minimum autre que zéro, et par conséquent, *sur une surface à courbure partout positive, toute géodésique fermée est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique.*

19. Toutefois, la démonstration ainsi présentée est loin d'être irréprochable, car nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la fonction V était univoque et avait ses deux premières dérivées déterminées et continues, et il est clair que ces propriétés n'appartiennent pas à la quantité u dont il vient d'être question. Non seulement, lorsqu'un point M′ se déplace sur une ligne L′, la géodésique le long de laquelle est comptée la distance minima de ce point à une ligne fermée L ne varie pas toujours continûment; mais il peut même arriver qu'il soit impossible de considérer comme variant continûment une géodésique, menée par le point M′ normalement à L. Si, par exemple, on prend sur l'équateur d'une sphère un arc AB plus petit qu'une demi-circonférence et qu'on remplace le reste de la circonférence par une ligne ayant avec celle-ci, en A et B, un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra mais située tout entière dans l'hémisphère supérieur, on fournira ainsi une ligne fermée L; lorsqu'un point M′, variable sur une ligne L′, passe au pôle supérieur, le pied de la géodésique normale à L, menée par ce point, passe brusquement de A en B.

Nous ne serons donc en droit d'affirmer la proposition précédente qu'après avoir examiné les objections auxquelles donnent lieu de telles singularités.

20. Nous admettrons, comme nous sommes en droit de le faire,

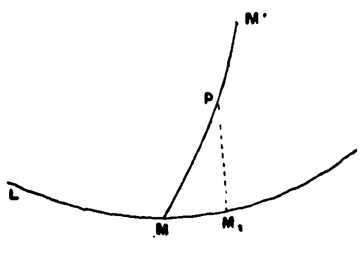
([1]) DARBOUX, *Leçons*, t. II, p. 416, formule (24).

d'après les principes établis dans les *Leçons* de M. Darboux, qu'entre deux points quelconques de la surface existe un chemin minimum. La longueur de ce chemin sera évidemment une fonction continue de la situation de chacun des deux points. Nous admettrons, en outre, que pour toute géodésique déterminée par un de ses points (de coordonnées curvilignes α, β) et par l'angle ω, qui définit sa direction en ce point, les coordonnées (soit curvilignes, soit cartésiennes) de l'extrémité d'un arc s, compté à partir du point (α, β), sont des fonctions de α, β, ω, s continues et admettant des dérivées partielles jusqu'à un ordre suffisamment élevé; c'est ce qui a lieu, moyennant des hypothèses très simples sur la nature de la surface, d'après les travaux de MM. Poincaré et Picard.

Dans ces conditions, la distance géodésique minima d'un point déterminé quelconque M′ de la surface à un point variable M de la ligne fermée L, variant continûment avec M, aura une valeur minima. A ce moment, la géodésique MM′ sera normale à L. Cela est hors de contestation dans le cas général où, en remplaçant cette géodésique MM′ par une autre de même longueur, mais faisant avec la première, au point M′, un angle infiniment petit, la position du point M est altérée d'un infiniment petit du même ordre; mais le contraire peut se présenter : c'est ainsi que, sur une sphère, on peut mener une infinité d'arcs de grands cercles différents et ayant pour extrémité commune le point diamétralement opposé au premier.

Pour montrer, dans tous les cas, que MM′ est normale à L, il suffit

Fig. 1.

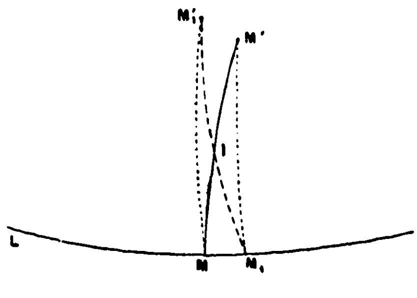


de prendre sur MM′ un point P suffisamment rapproché de M pour qu'une géodésique issue de P, et infiniment voisine de MM′, ne puisse couper celle-ci sur l'arc PM ni dans le voisinage de M. Alors la singularité qui pouvait se produire pour les géodésiques issues de M′ ne peut avoir lieu pour les géodésiques issues de P : si donc PM n'était pas normale à L (*fig.* 1), il y aurait nécessairement, dans le voisinage de M′, sur le segment de L qui fait avec MM′ un angle aigu, un point M_1 tel que sa distance à P soit plus petite que PM. Le chemin $M'PM_1$ serait donc, contrairement à l'hypothèse, plus court que M′M.

21. M′M étant la plus courte distance géodésique du point M′ à la ligne L, on pourra en général trouver, de part et d'autre du point M, deux points N, N_1 tels que les distances M′N, $M'N_1$ soient plus grandes que M′M. Si donc nous considérons un point M'_1 suffisamment voisin de M, les longueurs géodésiques M'_1N, M'_1N_1 seront plus grandes que M'_1M, et la distance de M'_1 à un point variable de L aura un minimum M'_1M_1 (qui pourra n'être qu'un minimum relatif) en un point M_1 situé entre N et N_1. Par le point M'_1 passera donc une géodésique normale à L et voisine de M′M. On voit que cette conclusion n'est en défaut que si au point M est attenant un certain segment de L dont tous les points sont à la même distance du point M′. C'est d'ailleurs ce qui peut arriver, comme nous l'avons vu tout à l'heure par l'exemple de la sphère.

Ces géodésiques, normales à L et voisines de MM′, ne couperont d'ailleurs pas l'arc MM′; car, si les arcs géodésiques MM′, M'_1M_1 se

Fig. 2.



coupaient en I (*fig.* 2), la distance M_1M' serait plus petite que MM′ ou la distance MM'_1 plus petite que $M_1M'_1$, suivant qu'on aurait

$IM_1 \leqq IM$ ou $IM \leqq IM_1$. De même, ces géodésiques ne se couperont pas entre elles dans leurs segments voisins de MM'.

22. Soit maintenant M' un point situé sur une ligne L' et dont la distance à L est minima par rapport aux points voisins de L'. Nous verrons, comme tout à l'heure, que MM' est normale à L'. Il en résulte tout d'abord qu'il ne peut exister une infinité de géodésiques égales à MM' et allant du point M à la ligne L, car l'une au moins de ces lignes ne serait pas normale à L'. Donc, chaque point de l'entourage de M' pourra être joint à L par une géodésique normale voisine de M'M. Reprenons alors le système de coordonnées précédemment considérées, tel que u soit la distance du point (u, v) à la ligne L. L'élément linéaire de la surface sera $du^2 + C^2 dv^2$ où, d'après nos hypothèses, la fonction C admettra, au voisinage du point M', des dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

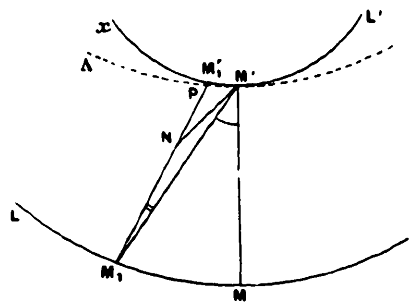
Supposons C différent de zéro en M'. Alors la courbe Λ, lieu des extrémités d'arcs M_1P égaux à MM' et portés à partir de L sur les géodésiques normales à L, autrement dit la courbe parallèle à L passant par M', sera une ligne normale à MM' et à laquelle les formules connues (¹) assigneront une courbure finie, ainsi que sa dérivée par rapport à l'arc; et, par conséquent, la distance d'un point quelconque de L' à cette ligne (c'est-à-dire $u -$ MM') aura une dérivée et une dérivée seconde en M'. Notre raisonnement est dès lors applicable sans objection.

Quant à l'hypothèse $C = 0$ (au point M'), elle est incompatible avec la propriété de minimum supposée à MM'. En effet, la courbe Λ doit, d'une part, être située du même côté de L' que le segment M'M et, d'autre part, être normale à ce dernier, ainsi qu'on le verrait comme précédemment. Si C était nul en M', une géodésique normale à L en un point M_1 (*fig.* 3), distant de M d'un infiniment petit du premier ordre, et égale à MM', aurait pour extrémité un point P distant de M' d'un infiniment petit du second ordre (au moins). En supposant que la géodésique M_1 est abaissée d'un point M'_1 de L', nous voyons que les distances PM'_1 et, par suite, $M'M'_1$, seraient également du second

(¹) DARBOUX, *Leçons*, Liv. V, Chap. II, Tableaux II et IV.

ordre. Je dis que la ligne $M'M'_1$ fait avec la ligne L', prise dans le sens $M'x$ qui s'éloigne de M', un angle aigu.

Fig. 3.



En effet, tout d'abord, nous savons que la ligne M'_1M_1 ne coupe pas MM'. Joignons $M'M_1$. L'angle $\widehat{M_1M'M}$ est infiniment petit du premier ordre, et l'angle $\widehat{M'M_1M'_1}$ du second ou, du moins, s'il n'en est pas ainsi, on pourra trouver sur $M_1M'_1$ un point N tel que l'angle $\widehat{M'_1NM'}$ soit du second ordre. Il en sera, par suite, de même de la différence entre les angles $\widehat{NM'x}$ et $\widehat{NM'_1x}$. Le premier de ces angles différant de l'angle droit d'un infiniment petit du premier ordre, le second est bien aigu. Dès lors, la distance du point M'_1 à la ligne L devrait être décroissante quand ce point s'éloigne de M', ce qui est impossible.

L'hypothèse $C = 0$ doit donc être écartée et la validité de notre raisonnement est assurée.

Nous avons toutefois à nous demander si une géodésique de la surface ne pourrait pas être asymptotique à L. La théorie générale des solutions asymptotiques montrerait qu'il n'en peut être ainsi ; mais c'est ce qui résulte également des notions précédentes, car si u devait tendre vers zéro par valeurs positives, par exemple, $\frac{du}{dt}$ devrait tendre vers zéro par valeurs négatives et, par conséquent, $\frac{d^2u}{dt^2}$ devrait être positif pour des valeurs très grandes de t : ce qui ne peut avoir lieu, ainsi que nous venons de le montrer.

Il est donc établi que la ligne L est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique. En particulier, une surface à courbure partout positive ne peut avoir deux géodésiques fermées qui ne se rencontrent pas.

23. Ce dernier résultat, au moins s'il s'agit de géodésiques sans points doubles, est susceptible d'une autre démonstration très simple. Si, en effet, nous admettons que la surface est simplement connexe, deux géodésiques fermées ne se rencontrant pas devraient comprendre entre elles une aire à laquelle la relation de Bonnet (¹) assignerait une courbure totale nulle, ce qui ne se peut.

Or une surface à deux côtés et sans points singuliers, à courbure partout positive (la valeur zéro et les valeurs infiniment petites étant exclues) est toujours simplement connexe.

Pour le démontrer, nous considérerons la représentation sphérique. La surface étant à deux côtés, à chacun de ses points correspond une représentation sphérique bien déterminée. Si la surface est d'ailleurs quelconque, cette représentation sphérique pourra être à plusieurs feuillets. Ces feuillets pourront se raccorder les uns aux autres de diverses façons : par exemple, ils pourront se joindre par un bord commun, de manière à former par leur ensemble un pli : c'est ainsi qu'une surface de révolution dont la méridienne présente une inflexion aura une représentation sphérique pliée en deux, suivant le cercle qui correspond au parallèle d'inflexion. Dans ce cas, le sens des aires sphériques et, par suite, le signe de la courbure totale change évidemment quand on passe d'un feuillet à l'autre.

Si, d'autre part, la courbure s'annule, même sans changer de signe, la représentation sphérique peut présenter certains points singuliers influant sur le mode de raccordement des feuillets. Mais lorsque, conformément à nos hypothèses actuelles, on suppose la courbure toujours supérieure à un nombre positif déterminé, il n'en peut être ainsi. Si M est un point quelconque de la surface et m sa représentation sphérique, une petite région de la surface entourant le point M est représentée par une petite région de sphère recouvrant une seule

(¹) Darboux, *Leçons*, t. III, p. 126.

fois l'entourage du point m, et le rapport des étendues de ces deux régions varie entre deux limites finies. De plus, tout point de la sphère sert de représentation sphérique à un point de la surface : autrement dit, la représentation sphérique n'a pas de bord, car, puisque le rapport des aires correspondantes reste fini, un pareil bord devrait correspondre à un bord de la surface.

Il est aisé d'en conclure que la représentation sphérique se compose d'un seul feuillet. Si, en effet, m et m' étaient deux points superposés de cette représentation sphérique, correspondant à deux points distincts M et M' de la surface, à une ligne L, joignant ces derniers, correspondrait une ligne l, joignant les deux représentations sphériques, et, en l'absence de toute singularité, cette ligne pourrait être déformée jusqu'à être infiniment petite, ce qui est absurde.

La représentation sphérique recouvre donc simplement la sphère entière et est, par suite, simplement connexe; il en est de même de la surface donnée qui lui équivaut au point de vue de la géométrie de situation.

L'étude des surfaces à courbures opposées, relativement auxquelles on obtient des résultats beaucoup plus complets que les précédents, fera l'objet d'un travail ultérieur.

24. On peut, dans certains cas, restreindre la région attractive en appliquant le théorème à une trajectoire déterminée, issue d'un point donné. En ce point, la fonction V, supposée croissante pour fixer les idées, a une certaine valeur V_0 et le premier maximum de V devra être au moins égal à V_0. Nous pourrons donc affirmer que la trajectoire (toujours sauf le cas d'asymptotisme ou celui de V infini) passe non seulement dans la région donnée par l'inégalité (12), mais dans la partie de cette région où V est supérieur à V_0.

Cette remarque se distingue, comme on le voit, des précédentes en ce qu'elle donne des conclusions différentes pour les différentes trajectoires compatibles avec la même loi de force, et cela indépendamment de toute intégrale connue.

Elle peut d'ailleurs être appliquée à plusieurs reprises par l'introduction de deux fonctions V et V_1. La considération du maximum de V permet de délimiter une région R où toute trajectoire doit passer une infinité de fois. Dans cette région, V_1 a un maximum M_1; dès lors toute trajectoire doit passer dans la fonction R_1 de la région

$$\Delta(U, V_1) + \frac{2(U+h)I_{V_1}}{\Delta V_1} \leqq 0,$$

où V_1 est supérieur à M_1. Dans cette nouvelle région R_1, la fonction V a un maximum M' et toute trajectoire devra passer une infinité de fois dans la portion R' de la région R où V est supérieur à M', etc.

25. Il est à remarquer qu'on peut aussi obtenir des renseignements sur le signe de $\frac{d^2V}{dt^2}$ sans faire intervenir la condition $\frac{dV}{dt} = 0$. Le rapport $\frac{\Phi(u', v')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ reste, en effet, lorsque u' et v' varient, compris entre deux limites fixes λ_1 et λ_2. Si donc les sommes $\frac{\Delta(U, V)}{U+h} + \lambda_1$ et $\frac{\Delta(U, V)}{U+h} + \lambda_2$ sont de même signe, ce signe sera celui de $\frac{d^2V}{dt^2}$.

Il est clair que cette circonstance se présentera, en particulier, en tout point de la surface où V est maximum ou minimum absolu, et par conséquent, en général, aux environs d'un tel point; et, en effet, la forme $\Phi(u', v')$ est alors définie et l'on a, de plus, $\Delta(U, V) = 0$.

26. L'expression $\frac{\Phi(u', v')}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ et, par suite, les quantités λ_1, λ_2 sont, d'ailleurs, susceptibles d'une expression géométrique très simple. Si, en effet, on suppose $U = 0$, t étant alors l'arc s d'une géodésique, on voit que le rapport en question représente la dérivée $\frac{d^2V}{ds^2}$, prise sur la géodésique de direction (u', v'). Si, d'ailleurs, on décompose le dénominateur en carrés, de manière à avoir

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

moyennant quoi la forme $\Phi(u', v')$ peut s'écrire

$$\Phi(u', v') = \varphi(\xi, \eta),$$

ξ et η représenteront des coordonnées rectangulaires dans le plan tangent à la surface, et l'équation

$$\varphi(\xi, \eta) = 1$$

sera celle d'une conique, lieu de l'extrémité d'une longueur $\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{d^2V}{ds^2}}}$ portée sur la tangente à la géodésique. Les nombres λ_1 et λ_2 sont les inverses des carrés des axes de cette conique.

L'équation qui détermine λ_1, λ_2, exprimée à l'aide des paramètres de Beltrami, est

$$\lambda^2 - \lambda\Delta_2 V + \frac{2\Delta(V, \Delta V)\Delta_2 V - \Delta\Delta V}{4\Delta V} = 0;$$

on voit, en particulier, que *la somme des valeurs de* $\frac{d^2V}{ds^2}$ *sur deux géodésiques rectangulaires quelconques est constante et égale à* $\Delta_2 V$.

27. Notre proposition fondamentale peut être considérée comme fournissant un moyen de transformation des expressions différentielles qui interviennent dans la théorie des géodésiques. Par exemple, nos calculs donnent une démonstration de ce fait, utilisé précédemment, que l'équation $I_V = 0$, vérifiée sur la ligne $V = a$, exprime la condition pour que cette ligne soit une géodésique; puisque, moyennant cette condition, les relations $V = a$, $\frac{dV}{dt} = 0$ entraînent (sur la géodésique) $\frac{d^2V}{dt^2} = 0$. On en déduirait même sans difficulté l'expression de la courbure géodésique d'une ligne quelconque $V = a$, puisque celle-ci dépend de la dérivée $\frac{d^2\delta}{ds^2}$, δ désignant la distance à cette ligne d'un point de la ligne géodésique tangente, distance sensiblement égale à $\frac{V-a}{\frac{dV}{dn}}$.

28. Nous pourrons encore former aisément la quantité I_V lorsque la surface est donnée par son équation cartésienne

$$f(x, y, z) = 0, \tag{14}$$

V étant alors une fonction des coordonnées x, y, z. Il nous suffira pour cela de reprendre, dans cette nouvelle hypothèse, nos calculs primitifs en écrivant tout d'abord les équations du mouvement d'un point sur la surface. Nous supposerons la masse du point égale à 1, et nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

d'où (x', y', z' désignant les composantes de la vitesse)

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} = {} & \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \\ & + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}z'^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}x'y', \end{aligned}\right.$$

et λ est déterminé par la condition

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2f}{dt^2} = {} & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2 \\ & + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}y'z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}z'x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}x'y' \\ & + \lambda\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Nous trouvons donc bien l'expression de $\frac{d^2V}{dt^2}$ comme se composant de deux termes

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta(U,V) = {} & \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z} \\ & - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned}\right.$$

indépendant des vitesses, l'autre

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x', y', z') \\ &\quad = \Phi(u', v') \\ &\quad = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} y' z' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} z' x' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} x' y' \\ &\quad - \frac{\left[\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} z' x' + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} x' y'\right) \\ &\qquad \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\end{aligned}\right]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned}\right.$$

quadratique par rapport à ces vitesses.

Nous aurons enfin I_V en supposant

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial z} z' = 0,$$

d'où

$$\frac{x'}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{y'}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{z'}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}}$$

et

$$\frac{\psi(x', y', z')}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{\psi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2};$$

le dénominateur du premier membre représente la force vive, celui du second membre est égal à $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] \Delta V$, d'après la formule (16). On a donc finalement

$$(18)\quad I_V = \frac{\psi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

résultat qu'on déduirait également, bien entendu, des formules de Beltrami [1].

---

[1] DARBOUX, *Leçons*, n° 679, t. III.

La fonction f étant donnée, la fonction $I_V = 0$ est l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui coupent les surfaces $f = \text{const.}$ suivant des lignes géodésiques.

Si, par exemple, la surface considérée est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'axe des z étant supposé vertical descendant, les formules deviennent, pour $V = \lambda x + \mu y + \nu z$,

$$(19) \quad \Phi(u', v') = \psi(x', y', z') = -\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) \frac{\left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2}\right)}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

$$(20) \quad I_V = -\sum \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mu z}{c^2} - \frac{\nu y}{b^2}\right)^2 \frac{\left(\frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\mu y}{b^2} + \frac{\nu z}{c^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

La ligne $I_z = 0$ se réduit à la section principale horizontale qui, nous le savions déjà, doit être coupée par toute géodésique, en sa qualité de géodésique fermée. De plus, un point pesant mobile sur la surface passera toujours dans l'hémisphère inférieur (sauf le cas d'asymptotisme à la position d'équilibre instable).

Plus généralement, toute géodésique coupe toute section diamétrale, celle-ci pouvant toujours être considérée comme contour apparent de la surface relativement à une direction convenablement choisie.

Quant aux trajectoires des mobiles pesants, obtenues en prenant $U + h = g(z + k)$, elles passent dans la région attractive définie par l'inégalité (11), soit

$$\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^2 - \frac{2(z+k)z(c^2 - z^2)}{a^2 b^2 c^4} \leqq 0.$$

De plus, si nous prenons $V = \lambda x + \mu y$, nous voyons que toute trajectoire devra couper la courbe $\Delta(U, V)\Delta V + 2(U + h)I_V = 0$, soit ici

$$\left(\frac{\lambda x}{a^2}+\frac{\mu y}{b^2}\right)\left\{\frac{z}{c^2}\left[(\lambda^2+\mu^2)\frac{z^2}{c^4}+\left(\frac{\lambda y}{b^2}-\frac{\mu x}{a^2}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+2(z+k)\left[\left(\frac{\lambda^2}{b^2}+\frac{\mu^2}{a^2}\right)\frac{z^2}{c^4}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\lambda y}{b^2}-\frac{\mu x}{a^2}\right)^2\right]\right\}=0.$$

Soient $\alpha>\beta>\gamma$ les axes de l'ellipsoïde rangés par ordre de grandeur. Si les quantités $\frac{z}{c^2}+\frac{2(z+k)}{\alpha^2}$ et $\frac{z}{c^2}+\frac{2(z+k)}{\gamma^2}$ sont de même signe pour $z+k>0$, $c^2-z^2>0$, ce qui arrivera lorsque k sera négatif ou, au contraire, supérieur à $c+\frac{\alpha^2}{2c}$, le facteur entre crochets dans le premier membre de l'équation ci-dessus ne pourra s'annuler et, par conséquent, pour les valeurs correspondantes de la constante des forces vives, la trajectoire coupera tout vertical de la surface.

Sur l'hyperboloïde à une nappe, la ligne $I_{\lambda x+\mu y+\nu z}=0$ ne se composera pas toujours uniquement du contour apparent relatif à la direction (λ, μ, ν), mais comprendra également les sections par les plans tangents de mêmes cosinus directeurs, puisque ces sections sont des lignes asymptotiques de la surface.

29. Notons encore que nos résultats subsistent, dans une certaine mesure, lorsqu'il y a frottement ou résistance passive quelconque. En effet, une telle résistance agit suivant la tangente à la trajectoire, et la région attractive est définie par une propriété de la composante *normale* de la force agissante (celle-ci devant être de même sens que la courbure géodésique). Il est donc encore démontré qu'un maximum de la fonction U ne peut exister en dehors de la région que nous avons appelée *attractive*. C'est d'ailleurs ce qui résulte de nos formules, car la résistance tangentielle ajoute aux valeurs de $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, tirées des équations de Lagrange, des termes proportionnels à $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, auxquels correspond, dans l'expression de $\frac{d^2U}{dt^2}$, un ensemble nul avec $\frac{dU}{dt}$. Cette même démonstration s'applique au cas d'une fonction quelconque V. Seulement il n'est pas certain que les fonctions U ou V aient un maximum si elles ne varient pas toujours dans le même sens, puisque le mouvement peut s'arrêter au bout d'un temps fini.

30. Nous allons arriver à des résultats analogues, quoique moins complets, dans le cas de plus de deux variables.

Soit, par exemple, un point matériel libre dans l'espace, sollicité par des forces données et soit U la fonction de forces. Considérons un maximum de U sur la trajectoire. Au point où ce maximum aura lieu, la trajectoire sera tangente à la surface de niveau et la normale principale sera, en direction et sens, la ligne d'action de la force, c'est-à-dire la normale à la surface de niveau dirigée dans le sens des U croissants. Mais, d'autre part, puisqu'il s'agit d'un maximum, la trajectoire doit être, par rapport à la surface, du côté des U décroissants. Il y a contradiction manifeste si la concavité de la surface de niveau est tournée dans le sens opposé à la force.

Ainsi les points où les surfaces de niveau tournent leur convexité dans le sens de la force forment une région qu'on peut appeler *répulsive* et où aucune trajectoire ne peut demeurer indéfiniment, à moins que U ne varie constamment dans le même sens. Mais, au lieu que nous avons pu diviser une surface en deux régions, suivant le sens de la courbure des lignes de niveau, ici trois hypothèses peuvent se présenter : ou bien les surfaces de niveau tournent leur convexité dans le sens de la force, ou bien dans le sens contraire, ou bien elles sont à courbures opposées. Un maximum de U pourra être soit dans l'une soit dans l'autre des régions correspondant aux deux dernières hypothèses. Il en résulte que les régions répulsives relatives, l'une à un mouvement déterminé quelconque, l'autre à son conjugué, ne remplissent pas à elles deux tout l'espace, ainsi qu'il arrivait dans le cas de deux degrés de liberté.

31. Il est aisé de traduire analytiquement ces résultats. Soient, en général, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n paramètres ou coordonnées dont dépend la position d'un système matériel, U la fonction des forces, la force vive étant

$$(21) \qquad 2\mathrm{T} = \sum a_{ik} x'_i x'_k = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

les équations de Lagrange donneront encore les valeurs de la quantité

$$x''_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

par une somme de deux termes, l'un homogène et du second degré par rapport aux x', l'autre indépendant de ces quantités et égal à

$$\frac{1}{A}\sum A_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)},$$

A étant le discriminant de la forme f, A_{ik} un de ses mineurs, F la forme adjointe de f. On aura donc

$$(22) \qquad \frac{d^2 V}{dt^2} = \frac{1}{A}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} + \Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

Φ étant une certaine forme quadratique en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Dans le cas où $V = U$, le terme $\sum \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} = F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ est essentiellement positif. Par conséquent, si l'on considère un maximum de U, c'est-à-dire un point où l'on a

$$(23) \qquad \frac{dU}{dt} = 0,$$

$$(24) \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} \leqq 0,$$

ces conditions entraîneront

$$(25) \qquad \Phi(x') \leqq 0.$$

Or, moyennant l'égalité (23), la forme Φ devient une forme à $n-1$ variables et l'inégalité ne pourra avoir lieu si la forme ainsi exprimée est définie positive. Il y a donc lieu de considérer comme formant une région répulsive, dans laquelle la trajectoire ne reste pas, en général, constamment comprise, l'ensemble des points pour lesquels cette circonstance se présente; les points où la forme Φ (considérée comme forme à $n-1$ variables) contient $1, 2, 3, \ldots, n-1$ carrés négatifs constituant une région non répulsive.

Lorsque V sera quelconque, on fera usage de l'équation des forces vives $2T = U + h$. Moyennant l'égalité (23), la forme f est, elle aussi, une forme (définie positive) à $n-1$ variables et le rapport des formes Φ et $2T$ restera supérieur à un certain minimum λ_0 (la plus petite racine de l'équation en λ relative au faisceau $\Phi - 2\lambda T$ à $n-1$ variables) et le maximum de V aura lieu dans la région où la quantité

$$(26) \qquad \frac{1}{A}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\right)} + \lambda_0(U+h)$$

est négative.

Le rapport $\frac{\Phi}{2T}$ n'est d'ailleurs autre que la valeur de $\frac{d^2V}{ds^2}$ comptée sur la géodésique de la forme T tangente à la trajectoire; il est clair que cette valeur est, au facteur $\frac{dV}{dn}$ près, la courbure normale de la surface $V = \text{const.}$, correspondant à la direction de cette trajectoire dans l'espace d'élément linéaire $2T\,dt^2$, de sorte que λ_0 est, au même facteur près, l'une des courbures principales de cette surface.

D'une façon générale, on aura des limites de $\frac{d^2V}{dt^2}$ en remplaçant, dans l'expression (26), λ_0 par les limites extrêmes entre lesquelles varie $\frac{\Phi}{2T}$ lorsque $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ prennent toutes les valeurs possibles.

32. La discussion des trajectoires exceptionnelles le long desquelles la fonction considérée varie toujours dans le même sens est tout à fait analogue à celle qui a été présentée plus haut. Si l'on exclut : 1° les cas où cette fonction, ou bien l'une de ses dérivées jusqu'au troisième ordre, augmenterait indéfiniment avec t; 2° les cas où il en serait ainsi de l'un des coefficients a_{ik} ou d'une de leurs dérivées jusqu'au second ordre inclusivement; 3° les cas où l'un des axes de la quadrique, représentée par l'équation

$$f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 1,$$

augmenterait indéfiniment, on voit, comme précédemment, que $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro.

Prenons le cas de $V = U$: si le mobile reste indéfiniment dans la région répulsive, il pourra arriver qu'il s'éloigne indéfiniment. Sinon, $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}$ tendront vers zéro; en effet, si $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, par exemple, était une infinité de fois supérieur à un nombre déterminé α, on pourrait tirer x'_1 de l'identité

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial U}{\partial x^2}x'_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}x'_n, \tag{27}$$

pour reporter cette valeur dans l'expression Φ, moyennant quoi il viendrait

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1}{A}F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \Psi(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n) + \frac{dU}{dt}Q,$$

Q, ne contenant en dénominateur que $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, resterait fini dans les conditions où nous nous plaçons et, par conséquent, puisque Ψ est, dans la région répulsive, une forme définie positive, $F\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ devrait tendre vers zéro, ce qui est impossible si les dérivées de U ne sont pas toutes infiniment petites.

Si donc, les positions d'équilibre sont isolées, toute trajectoire devra quitter la région répulsive, sauf celles qui se rapprochent asymptotiquement d'une position d'équilibre instable, ou qui passent dans des régions singulières, ou qui s'éloignent indéfiniment.

33. Comme dans le cas de deux paramètres, nous sommes assurés en général de l'existence d'une région répulsive par la considération du minimum de U, la forme Φ étant définie positive dans le voisinage de ce point, puisqu'elle se réduit à $\sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i dx_k}x'_i x'_k$. La même remarque s'applique pour une fonction quelconque V, puisque le terme $\frac{1}{A}\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)}$ disparaît en un minimum de V.

Un cas particulier intéressant est celui où la région répulsive remplit tout l'espace. On sait, par exemple, qu'un mobile soumis à une répulsion émanée d'un point fixe et fonction de la seule distance ne décrit jamais de trajectoires restant à distance finie, sauf le cas, exceptionnel d'ailleurs, où, la force s'annulant avec la distance, la trajectoire s'approche indéfiniment du point fixe. Les considérations précédentes nous montrent que cette propriété appartient à toute une catégorie de forces, que l'on peut appeler *forces répulsives* et caractérisées par cette condition que la force est partout dirigée vers la convexité des surfaces de niveau. Toute trajectoire s'éloigne alors à l'infini ou tend asymptotiquement vers une position d'équilibre instable (s'il n'y a pas de points singuliers pour les composantes de la force).

34. Étant donnée une position quelconque du système, laquelle ne soit pas une position d'équilibre, on peut choisir la fonction V de manière que la quantité (26) soit positive dans le voisinage de cette position pour toutes les valeurs des x', puisqu'on peut disposer arbitrairement des dérivées de V. On a ainsi un moyen de construire, d'une infinité de façons, un domaine entourant la position considérée et d'où toute trajectoire doit sortir.

35. Nous pouvons répéter, dans le cas général, ce que nous avons dit précédemment relativement au frottement. Il est clair, en effet, que, lorsqu'un point qui se meut dans l'espace sous l'action de forces données est soumis à des résistances passives agissant suivant la tangente à la trajectoire, le maximum de U sur celle-ci aura encore lieu dans la région non répulsive. La même conclusion subsiste dans le cas des systèmes si les composantes du frottement sont proportionnelles aux composantes du déplacement réel.

36. Les considérations ci-dessus développées permettent de démontrer la réciproque du théorème de Dirichlet sur la stabilité de l'équilibre, autrement dit le théorème suivant :

Une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima est instable.

C'est, en effet, nous l'avons dit, par la considération du minimum de U sur la trajectoire que M. Kneser est parvenu à la démonstration dans le cas particulier où la fonction des forces est *minima*. Quant au cas général, il a été traité par M. Liapounoff en 1892 dans un Mémoire malheureusement écrit en langue russe, mais dont un extrait a été inséré au journal de M. Jordan en 1897 [1], et dont j'ignorais l'existence lorsque j'ai communiqué à l'Académie des Sciences les remarques qui précèdent et la démonstration qui s'y rattache étroitement. Comme cette démonstration est analogue, mais non identique à celle de M. Liapounoff, je crois utile de la reproduire ici.

On peut, en premier lieu, arriver au résultat en étudiant une fonction convenablement choisie des coordonnées. Supposons, comme d'habitude, que, par un changement de variables convenable, on ait amené la force vive à la forme

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\mathrm{T} = {} & \sum(1+\ldots)x'^2 = \sum_i(1+\ldots)x_i'^2 \\ & + \sum_k(1+\ldots)x_k'^2 + \sum_l(1+\ldots)x_l'^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

et la fonction des forces à la forme

$$2\mathrm{U} = \sum_i a_i x_i^2 - \sum_k b_k x_k^2 + \ldots,$$

les termes représentés par des points étant de degrés supérieurs à ceux qui sont écrits et les variables étant partagées en trois groupes (x_i), (x_k), (x_l), suivant qu'elles sont représentées dans la partie quadratique de U par des carrés positifs, négatifs ou nuls. Nous admettons que l'absence du maximum se reconnaît à l'inspection des termes quadratiques et, par conséquent, qu'il existe au moins une variable x_i.

Nous considérerons la fonction

$$(29)\qquad 2\mathrm{V} = (1+\alpha)\sum_i x_i^2 + \sum_k x_k^2 - \beta\sum_l x_l^2,$$

---

[1] 5e série, t. III, fasc. 1, p. 81.

où α et β sont deux nombres positifs tels que $1+\alpha > \beta$. Nous aurons

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \sum_i [a_i(1+\alpha)+\ldots]x_i^2 - \sum_k (b_k+\ldots)x_k^2 + \Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

$$\begin{aligned}\Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = &\sum_i (1+\alpha+\ldots)x_i'^2 \\ &+ \sum_k (1+\ldots)x_k'^2 - \sum_l (\beta+\ldots)x_l'^2 + \ldots,\end{aligned}$$

de sorte que, si l'on désigne, comme précédemment, par λ_0 la plus petite (algébriquement) des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{\Phi}{2T}$ lorsque $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ varient, on a

$$\lambda_0 > -(\beta+\varepsilon)$$

et

$$\Phi(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) > -2(\beta+\varepsilon)(U+h),$$

ε étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

Bornons-nous aux trajectoires pour lesquelles la constante h des forces vives est nulle ou négative et qui partent d'un point vérifiant l'inégalité $V>0$; on aura alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dt^2} &> \sum_i (1+\alpha+\ldots)a_i x_i^2 - \sum_k (1+\ldots)b_k x_k^2 - (\beta+\varepsilon)U \\ &> \sum_i (1+\alpha-\beta-\varepsilon)a_i x_i^2 - \sum_k (1-\beta-\varepsilon)b_k x_k^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Moyennant les inégalités $U>0$, $V>0$, le dernier membre est nécessairement positif. $2U$ est, en effet, égal à la différence des deux quantités

$$P = \sum_i a_i x_i^2,$$

$$Q = \sum_k b_k x_k^2 + \ldots$$

et (à des termes d'ordre supérieur près) le dernier membre en question est égal à $(1+\alpha-\beta-\varepsilon)P-(1-\beta-\varepsilon)Q$. A cause de l'inégalité $P>Q$, cette dernière quantité est positive et dans un rapport non infiniment petit avec $P+Q$, par conséquent aussi (à cause de $V>0$) avec

$$\sum x_i^2+\sum x_k^2+\sum x_l^2 :$$

il dépasse donc en valeur absolue l'ensemble des termes d'ordre supérieur, lequel est très petit par rapport à

$$\sum x_i^2+\sum x_k^2+\sum x_l^2.$$

Si donc on a initialement $V>0$, $\frac{dV}{dt}>0$, V devra croître constamment et indéfiniment, à moins qu'on ait, à un moment déterminé,

$$U>0,$$
$$V>0,$$
$$\sum_i(1+\alpha-\beta-\varepsilon)a_i x_i^2-\sum_k(1-\beta-\varepsilon)b_k x_k^2+\ldots<0.$$

Or, ainsi que nous venons de le voir, la région définie, dans l'espace lieu du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$, par cette triple inégalité n'est pas attenante à l'origine.

Le théorème est donc démontré.

37. Une méthode qui se présenterait assez naturellement à l'esprit, pour établir la proposition précédente, est celle qui reposerait sur l'étude des petits mouvements : il est aisé de voir que l'on peut donner à ce mode de raisonnement une forme analogue à la précédente : on retombe en effet, sur cette méthode, en prenant $V=x_i^2$ (où la lettre x_i a la même signification que tout à l'heure). D'ailleurs on se heurterait, en suivant cette voie, à des objections que la marche suivie tout à l'heure a permis d'éviter.

Toutefois l'étude des petits mouvements fait entrevoir un fait intéressant : c'est (dans le cas où la fonction de forces n'est pas minima) l'existence de trajectoires particulières sur lesquelles l'instabilité ne se manifeste pas. La méthode précédente ne permet pas de discuter complètement quelles peuvent être ces trajectoires, puisque nous avons dû nous borner aux cas où la constante des forces vives est nulle ou négative. Une seconde démonstration, analogue à celle de M. Liapounoff et fondée, comme elle, sur la considération d'une expression qui contient les vitesses, permet de combler cette lacune.

38. Soient encore

$$2T = \sum(1+\ldots)x_i'^2 + \sum_k (1+\ldots)x_k'^2 + \ldots,$$

$$2U = \sum_i a_i x_i^2 - \sum_k b_k x_k^2 + \ldots,$$

les variables x_i étant, cette fois, celles qui fournissent à la partie quadratique de U des carrés positifs, les x_k celles qui fournissent des carrés négatifs ou nuls; de sorte que tous les a_i sont positifs, tous les b_k positifs ou nuls et que, comme précédemment, il y a au moins une variable x_i. Nous prendrons

$$(30) \qquad 2V = \sum_i \alpha_i x_i^2 - \sum_k \beta_k x_k^2 + \sum_i A_i x_i'^2 - \sum_k B_k x_k'^2,$$

les nombres α_i, β_k, A_i, B_k étant positifs.

Les équations du mouvement donneront

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} = {} & \sum_i (\alpha_i a_i + A_i a_i^2) x_i^2 + \sum_k (\beta_k b_k - B_k b_k^2) x_k^2 \\ & + \sum_i (\alpha_i + A_i a_i) x_i'^2 + \sum_k (B_k b_k - \beta_k) x_k'^2 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

ou encore, ρ étant un nombre positif,

$$(31') \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = 2\rho V + F(x, x') + \ldots,$$

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(x,x') = {} & \sum_i [\alpha_i(a_i-\rho)+A_i a_i^2]\,x_i^2 + \sum_k [\beta_k(b_k+\rho)-B_k b_k^2]\,x_k^2 \\
& + \sum_i [\alpha_i + A_i(a_i-\rho)]\,x_i'^2 + \sum_k [B_k(b_k+\rho)-\beta_k]\,x_k'^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Si les nombres α, β, A, B, ρ satisfont aux conditions, évidemment compatibles,

$$(33)\qquad \rho \leqq a_i,$$

$$(34)\qquad \frac{b_k^2}{b_k+\rho} < \frac{\beta_k}{B_k} < b_k + \rho,$$

la forme F sera définie positive; son rapport à la somme

$$S_0 = \sum (x^2 + x'^2)$$

restera supérieur à un nombre fixe et, par conséquent, lorsque les x et les x' seront tous suffisamment petits, F surpassera en valeur absolue l'ensemble des termes non explicitement écrits de l'équation (31).

Donc, dans les mêmes conditions, l'inégalité $V > 0$ entraînera

$$\frac{d^2V}{dt^2} > 0.$$

Si donc la trajectoire considérée est telle que, à l'instant initial V soit positif et qu'on la suive dans un sens tel que $\frac{dV}{dt} \geqq 0$, la quantité V ne cessera de croître jusqu'au moment où l'on aura à la fois $V > 0$, $\frac{d^2V}{dt^2} \leqq 0$.

Nous venons de voir que ces deux inégalités ne sont pas compatibles au voisinage de la position d'équilibre.

L'instabilité est donc démontrée.

39. Notre démonstration ne laisse de côté que des trajectoires exceptionnelles. En effet, l'unique restriction que nous avons dû apporter au choix de la trajectoire est l'inégalité $V > 0$. Or on peut, sans que la double inégalité (34) cesse d'être vérifiée, prendre les nombres B_k et β_k aussi petits qu'on le veut et, par conséquent, si l'on se donne la condition que le rapport de la plus grande des quantités $|x_k|$, $|x'_k|$ à la plus petite des quantités $|x_i|$, $|x'_i|$ ne surpasse pas un nombre déterminé N aussi grand qu'on le veut d'ailleurs, on pourra choisir les nombres B_k, β_k de manière à vérifier l'inégalité en question. Le théorème n'est donc en défaut que relativement aux écarts initiaux très petits pour lesquels le nombre N est infiniment grand. Toutefois, bien entendu, le domaine dont la trajectoire sort nécessairement se resserre à mesure que N augmente.

Il reste encore à voir ce qui se passe lorsque, partant d'un mouvement initial tel que $V > 0$, on le suit dans un sens tel que $\frac{dV}{dt}$ soit négatif. Si à un instant ultérieur les conditions $V > 0$, $\frac{dV}{dt} \geqq 0$ sont vérifiées, nous sommes ramenés au cas général. Si l'inégalité $V > 0$ continue à être vérifiée, mais que $\frac{dV}{dt}$ ne change plus de signe, V tend vers une limite non négative et, d'après le raisonnement du n° 4, $\frac{dV}{dt}$ et $\frac{d^2V}{dt^2}$ tendent vers zéro. La limite de V ne peut être que zéro, à cause de la formule (31'). Puisque V et $\frac{d^2V}{dt^2}$ sont infiniment petits, il en est de même de la forme $F(x, x')$ et, comme cette forme est définie, il en résulte que la trajectoire tend asymptotiquement vers la position d'équilibre.

Ce cas écarté, il faut admettre que la trajectoire entre dans la région $V < 0$. Si elle en ressort à un moment quelconque, V sera croissant à ce moment et nous sommes encore ramenés au cas général. Il faut donc supposer que l'inégalité $V < 0$ ne cesse plus d'être vérifiée. La trajectoire ne repassera donc pas dans le voisinage d'une position déjà occupée. Or dans ce cas, d'ailleurs exceptionnel, il existe [1] une ou plusieurs trajectoires T desquelles la trajectoire considérée s'approche indéfiniment pour des valeurs infiniment grandes de t, et qui peuvent d'ailleurs se réduire à un point, à savoir une position d'équi-

---

([1]) *Voir* plus loin, n° 54.

libre. Une trajectoire T ne passera jamais dans la région $V > 0$, sans quoi la trajectoire considérée y passerait une infinité de fois, supposition que nous venons d'exclure.

Ainsi un mobile abandonné dans le voisinage d'une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima s'en écarte d'une quantité finie. Il ne peut y avoir d'exception que : 1° pour les trajectoires telles que les écarts et les vitesses des paramètres par rapport auxquels il y a instabilité soient et restent très petits relativement aux écarts et aux vitesses des autres paramètres; 2° pour les trajectoires asymptotiques aux précédentes; 3° en particulier pour les trajectoires qui tendent asymptotiquement vers la position d'équilibre considérée ou une position d'équilibre très voisine, s'il en existe.

On trouve une vérification des conclusions que nous venons d'énoncer dans le mouvement d'un point sur le paraboloïde hyperbolique à axe vertical, tel qu'il a été étudié par M. de Saint-Germain ([1]). Le sommet de la surface est une position d'équilibre instable et le plan tangent en ce point partage la surface en deux parties, l'une au-dessus de ce plan (région répulsive), l'autre au-dessous. Il est à peu près évident *a priori* que le mobile abandonné sans vitesse initiale dans la seconde de ces régions s'éloignera indéfiniment vers le bas. Mais on pourrait être tenté de croire que d'un point quelconque situé au-dessus du plan tangent et voisin du sommet, part une trajectoire stable. Il n'en est rien, ainsi que nous venons de le voir et c'est ce que montre la discussion de M. de Saint-Germain; les seules trajectoires qui ne s'écartent pas du sommet sont, soit des arcs de la parabole principale à concavité supérieure, soit des courbes asymptotiques à ces arcs.

Dans le cas où il n'y a que deux degrés de liberté et où la fonction de force est minima, M. Kneser a pu, par une méthode simple et élégante, constater la présence de trajectoires asymptotiques à la position d'équilibre. Il est clair que dans le cas général une discussion analogue serait beaucoup plus compliquée. Par exemple, il ne passe pas par un point quelconque du paraboloïde hyperbolique une trajectoire tendant asymptotiquement vers le sommet : la seule trajectoire présentant ce caractère est la parabole principale à concavité inférieure.

([1]) Ce journal, 3e série, t. III, p. 401 et suiv.; 1877.

40. Revenons au mouvement d'un point sur une surface. Dans le cas des surfaces de révolution, notre proposition fondamentale correspond exactement à l'une des propriétés que nous avons reconnues en commençant, la région attractive que nous avons définie au n° **7** étant précisément celle où $\frac{dU}{dr}$ est négatif. On a, en effet,

$$I_U = \frac{1}{E^2 r^3}\left(\frac{dU}{dr}\right)^3$$

(en désignant par $E\,dr^2 + r^2\,d\theta^2$ l'élément linéaire de la surface).

Mais cette propriété est loin d'être la plus importante de celles que nous avons rappelées en cet endroit. Elle n'est qu'un cas particulier de la relation d'inégalité qui doit exister entre les deux parallèles limites de la trajectoire. Par exemple, dans le mouvement du point pesant sur la sphère, le théorème de la région attractive montre seulement que le mobile passe dans l'hémisphère inférieur. Or nous savons que, lorsqu'il a passé en un point déterminé A de l'hémisphère supérieur, non seulement il doit traverser l'hémisphère inférieur, mais encore il doit passer au-dessous du parallèle symétrique, par rapport à l'équateur, de celui qui contient le point A. Notre théorie ne nous donne pas l'équivalent de ce fait. Nous avons appris, il est vrai, à restreindre la région attractive suivant les valeurs prises par la constante des forces vives. C'est ainsi qu'un point pesant mobile sur l'ellipsoïde (n° **28**) passe nécessairement à l'intérieur d'une courbe C entourant le point le plus bas et d'autant plus resserrée autour de ce point que la constante des forces vives est plus petite. Mais il est clair que ce résultat n'est pas celui que nous cherchons. Si, par exemple, nous supposons le mobile abandonné sans vitesse initiale en un point A de la moitié supérieure de la surface, la courbe C sera d'autant moins resserrée que le point A aura été pris plus élevé, et c'est le contraire qui devrait avoir lieu, le mobile descendant d'autant plus bas qu'il est monté plus haut.

Malheureusement un pareil résultat paraît très difficile à établir. Il se distingue, en effet, des précédents par ce caractère qu'il différencie les unes des autres les diverses trajectoires, et cela indépendamment de l'intégrale des forces vives. La remarque faite au n° **24** présente seule ce caractère; elle ne répond pas néanmoins au désidératum actuel.

On pourra, quoique d'une manière très incomplète, combler cette lacune en employant la remarque du n° 25. Nous avons vu, en effet, à ce moment que la fraction $\frac{\Phi(u', v')}{2T}$ avait, lorsque u' et v' variaient, un certain minimum λ_1 et que l'on avait

$$\frac{d^2V}{dt^2} > \Delta(U, V) + 2\lambda_1(U + h). \tag{35}$$

Considérons une ligne $V = \text{const}$. Sur cette ligne, ou du moins sur la partie de cette ligne où $U + h$ est positif, le second membre aura un certain minimum $\mathfrak{M}$ qui sera fonction de V et l'on pourra écrire

$$\frac{d^2V}{dt^2} > \mathfrak{M}(V).$$

Considérons une portion de trajectoire comprise entre un minimum de V et le maximum suivant, μ et ν étant ces valeurs maxima et minima de V. Nous pourrons multiplier l'inégalité précédente par $\frac{dV}{dt}dt$ et intégrer. $\frac{dV}{dt}$ s'annule aux limites d'intégration, et il vient

$$\int_\mu^\nu \mathfrak{M}\, dV < 0.$$

Si la fonction $\mathfrak{M}$ est positive pour $V = \mu$, on aura ainsi une limite inférieure de ν. Or c'est ce qui arrive dans le voisinage du minimum de V, le second membre de l'inégalité (35) étant essentiellement positif.

Pour fixer les idées, admettons que $\mathfrak{M}$ soit positif jusqu'à une certaine valeur de V, puis devienne ensuite négatif. La courbe qui a pour abscisse V et pour ordonnée $\mathfrak{M}(V)$ sera formée d'une branche ascendante $x'S$ et d'une branche descendante Sx. Soit μ une valeur de V correspondant à un point de la branche ascendante : la branche descendante comprendra un point de même ordonnée et d'abscisse ν (cette dernière étant d'ailleurs d'autant plus grande que la première était plus petite), et telle que, sur toute trajectoire qui part de la ligne $V = \mu$ et s'en éloigne de manière que V croisse, la valeur maxima suivante de V soit plus grande que ν.

Il y aura souvent avantage à prendre $V = U$, de manière à faire figurer dans $\mathfrak{M}$ le terme essentiellement positif ΔU.

Par exemple, dans le mouvement du point pesant sur l'ellipsoïde à axe vertical on obtient aisément ainsi (à l'aide des formules du n° **28**) une limite de la hauteur à laquelle était descendu le mobile dans la moitié inférieure de la surface en fonction de la hauteur à laquelle il est monté dans la moitié supérieure.

41. Toutefois la valeur de $\mathfrak{M}$ ainsi calculée est trop élevée et, par conséquent, la valeur de ν trop petite. On peut, théoriquement du moins, trouver une limite plus approchée en utilisant l'identité

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u} u' + \frac{\partial V}{\partial v} v',$$

et prenant pour λ_1 la plus petite des deux valeurs du rapport $\frac{\Phi}{2T}$ qui correspondent aux valeurs de u', v' satisfaisant à cette identité et à l'équation des forces vives. λ_1 sera alors une fonction de u, v, $\frac{dV}{dt}$. Laissant cette dernière quantité invariable, on fera varier le point (u, v) sur la ligne $V =$ const. La valeur ainsi calculée du second membre de l'inégalité (35) aura un minimum $\mathfrak{M}$ qui sera une fonction de V, $\frac{dV}{dt}$ et l'on sera conduit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \mathfrak{M}. \tag{36}$$

Mais il est clair que ce procédé ne sera pas, en général, applicable à cause des difficultés que présente l'intégration de cette équation.

42. Il est pourtant un cas où celle-ci prend une forme très simple, c'est celui où les trois formes quadratiques Φ, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, $\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$ sont en involution, de sorte que l'on a

$$\Phi = A\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + B\left(\frac{dV}{dt}\right)^2.$$

Dans ces conditions, l'équation (36) devient linéaire et du premier ordre par rapport à $\left(\frac{dV}{dt}\right)^2$ considérée comme fonction de V. Or, si nous écrivons le déterminant des coefficients des trois formes quadratiques, nous trouvons une expression qui, à une puissance près de $EG - F^2$, se réduit à $\Theta(V, \Delta V)$. Cette expression, égalée à zéro, exprime que ΔV est une fonction de V, c'est-à-dire, comme on sait, que les courbes $V = \text{const.}$ forment une famille de courbes parallèles.

Supposons donc qu'on connaisse une famille de courbes parallèles fermées et qu'on rapporte la surface à ces courbes et aux géodésiques qui leur sont orthogonales. Si

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$$

désigne l'élément linéaire, en dirigeant le calcul comme il vient d'être dit, nous voyons que l'équation différentielle des géodésiques prend la forme particulièrement simple

$$(37) \qquad \frac{d}{du}\log\left[1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right] = -\frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial u}.$$

$1 - \left(\frac{du}{ds}\right)^2$ est égal au carré du cosinus de l'angle α que fait la géodésique considérée avec la ligne $u = \text{const.}$; quant à la quantité $\xi = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}$, elle est liée à la courbure totale par l'équation

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi^2 = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = \frac{1}{RR'}.$$

Supposons que la surface ait sa courbure partout positive et comprise entre deux limites k^2 et k'^2. Prenons pour la ligne $u = 0$ une géodésique. L'équation précédente donne

$$k^2 < \frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi^2 < k'^2,$$

et, par conséquent (puisque ξ s'annule avec u),

$$|k \operatorname{tang} ku| < |\xi| < |k' \operatorname{tang} k'u|.$$

Tant que u est inférieur à $\frac{\pi}{2k'}$, ξ est fini, C différent de zéro (ce qui se déduit d'ailleurs, bien entendu, des recherches connues de Bonnet); par conséquent, dans la bande ainsi définie, u et v sont des fonctions bien déterminées de la position du point. Prenons alors l'équation (37) ou

$$(38) \qquad d \log \cos \alpha = \xi du.$$

Cette équation nous donnera

$$|-d \log \cos ku| < |d \log \cos \alpha| < |-d \log \cos k' u_0|.$$

Si α désigne l'angle fait par un arc de géodésique quelconque avec la géodésique $u = 0$, le maximum u_0 de u sur cet arc sera compris entre $\frac{\alpha}{k'}$ et $\frac{\alpha}{k}$, puisqu'on aura $\cos k u_0 > \cos \alpha > \cos k' u$.

En particulier, si $\alpha < \frac{k}{k'} \frac{\pi}{2}$, ce maximum sera plus petit que $\frac{\pi}{2k'}$ et, par conséquent, u et v seront uniformes sur cet arc. Celui-ci coupera à nouveau la géodésique $u = 0$ sous un angle β, tel que le rapport $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ soit compris entre le rapport $\frac{\cos k u_0}{\cos k' u_0}$ et son inverse.

Enfin, on aura une relation d'inégalité entre deux écarts maxima consécutifs de part et d'autre de la ligne $u = 0$: il est clair que le rapport de ces deux écarts est compris entre $\frac{k}{k'}$ et $\frac{k'}{k}$.

Lorsque le mobile est soumis à une force accélératrice, on trouve, en utilisant l'équation des forces vives,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \left[2(U + h) - \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right],$$

laquelle, si U est fonction de u seul, prend la forme, tout à fait analogue à (37),

$$\frac{d}{du}\log\left[2(U+h)-\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\frac{d}{du}\log(U+h)\left[1-\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right]=-\frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial u},$$

d'où l'on pourrait déduire un certain nombre de conséquences analogues aux précédentes.

43. Une autre notion que l'on peut considérer comme correspondant à celle des parallèles limites sur une surface de révolution est celle de ce qu'on pourrait appeler le *domaine* d'une ligne géodésique ou d'une trajectoire de Dynamique, et qui est analogue aux ensembles introduits par M. Poincaré dans son Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles ([1]).

Soit une géodésique d'une surface de révolution (ou une trajectoire de Dynamique sur cette surface) qui oscille entre deux parallèles limites.

Lorsqu'un point mobile, parcourant cette courbe dans un sens déterminé, passe de l'un à l'autre de ces deux parallèles, le plan méridien qui le contient tourne autour de l'axe de révolution d'un certain angle constant. Si cet angle est commensurable avec π, la géodésique est fermée. Mais, dans le cas contraire, on sait que cette géodésique passe aussi près qu'on le veut de n'importe quel point situé dans la bande de surface comprise entre les deux parallèles extrêmes. Si l'on traçait la courbe en noir, en la continuant indéfiniment, on noircirait toute la bande en question, et cela quelque petite que soit l'épaisseur du trait. Nous pourrons dire que notre géodésique *remplit* cette bande ou que cette bande constitue son *domaine*.

Lorsque l'élément linéaire, au lieu d'être de révolution, a la forme de Liouville $(U-V)(du^2+dv^2)$, le domaine est une bande limitée par deux lignes $u=\text{const.}$ ou $v=\text{const.}$ (ou des branches de ces lignes), etc.

([1]) Troisième Partie, ce journal, 4e série, t. I, p. 225 et suiv.; 1885.

44. u et v étant les coordonnées curvilignes sur notre surface, posons, comme d'ordinaire,

$$p = \frac{\partial T}{\partial u'}, \qquad q = \frac{\partial T}{\partial v'}, \qquad 2T = A^2 u'^2 + C^2 v'^2 + 2AC \cos\alpha\, u'v',$$

T étant la demi-force vive; de sorte que u, v, p, q seront, dans l'espace E_4 à quatre dimensions, les coordonnées d'un point qui représentera la position du mobile et sa vitesse. D'ailleurs, au lieu des coordonnées p et q, on peut introduire $\frac{ds}{dt} = s'$ et l'angle ω que fait la tangente à la trajectoire avec l'axe des x d'un trièdre attaché à la surface, quantités liées aux premières par les formules [1]

$$(39) \qquad p = As' \cos(\omega - m), \qquad q = Cs' \cos(n - \omega).$$

Bornons-nous au cas des géodésiques et faisons $s' = 1$. L'état de mouvement du point mobile M sera alors représenté, dans un espace à trois dimensions E_3, par un point P de coordonnées u, v, ω; autrement dit, la position de ce dernier définira un élément de ligne sur la surface donnée. Bien entendu, on ne devra pas considérer comme distinctes deux valeurs de ω différant d'un multiple de 2π, de sorte qu'on pourra considérer cette quantité comme toujours comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. D'ailleurs, la même remarque s'appliquera le plus souvent aux coordonnées u et v. Si, par exemple, la surface est une sphère et que u, v soient la longitude et la latitude, u variera de 0 à 2π, v de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, de sorte que la multiplicité lieu du point P sera un parallélépipède où l'on devra supposer : 1° que les points correspondants de deux faces opposées quelconques sont confondus; 2° que les faces $v = \pm\frac{\pi}{2}$ sont contractées de manière à se réduire chacune à une diagonale [2].

---

[1] T. II, Liv. V, Chap. II, Tableau III. La signification des lettres p et q est seule changée.

[2] Les relations topologiques des courbes entre elles peuvent évidemment être assez différentes sur la surface primitive et sur la multiplicité E_3 lieu du

Lorsque le point M décrira une géodésique, le point P décrira une courbe donnée par les équations différentielles

$$(40)\quad \begin{cases} du = dt\dfrac{\sin(n-\omega)}{A\sin\alpha}, \qquad dv = dt\dfrac{\sin(\omega-m)}{C\sin\alpha},\\ d\omega = -r\,du - r_1\,dv. \end{cases}$$

t, qui représente la longueur de l'arc décrit par le point M, sera dit aussi, pour abréger, la longueur de l'arc décrit par P.

13. Écrivons, dans ce système de notations, les invariants intégraux de M. Poincaré et, en particulier, le *volume*

$$\int\int\int\int du\,dv\,dp\,dq.$$

Si, dans cette intégrale quadruple, on opère le changement de variables (39), elle devient

$$\begin{aligned}\int\int\int\int du\,dv\,dp\,dq &= \int\int du\,dv\int\int\frac{\mathrm{D}(p,q)}{\mathrm{D}(s',\omega)}ds'\,d\omega\\ &= \int\int\int\int \mathrm{H}s'\,du\,dv\,d\omega\,ds',\end{aligned}$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{AC}\sin\alpha.$$

---

point P. C'est ainsi que les courbes, dont les projections stéréographiques sont représentées *fig.* 4 et 5, sont réductibles l'une à l'autre par déformation continue sur la sphère, mais qu'il n'en est pas de même des courbes qui leur correspon-

Fig. 4.

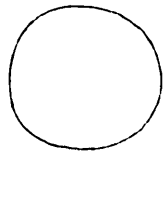
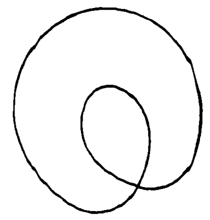


Fig. 5.



dent dans la multiplicité E_3. Cela tient à ce que le passage de la ligne 4 à la ligne 5 ne peut avoir lieu sans qu'il se produise à un certain moment un point de rebroussement, entraînant une discontinuité dans la direction de la tangente.

Étendons cette intégrale au cylindre à quatre dimensions qui a pour base un volume quelconque de l'espace E_3 et pour hauteur le segment $\alpha < s' < \beta$ (α et β étant deux nombres positifs quelconques); elle se décomposera en facteurs

$$\int\int\int\int \mathrm{H}s'\,ds'\,du\,dv\,d\omega = \int_\alpha^\beta s'\,ds' \int\int\int \mathrm{H}\,du\,dv\,d\omega.$$

Le second facteur étant constant, il en est de même du premier. Nous aurons ainsi, dans l'espace E_3, l'invariant intégral que l'on peut appeler *volume*

$$\mathrm{J} = \int\int\int \mathrm{H}\,du\,dv\,d\omega.$$

46. Une application simple s'obtient en considérant toutes les géodésiques qui partent des différents points d'une aire déterminée σ. L'intégrale J, étendue aux éléments initiaux de toutes ces géodésiques, est évidemment égale à $2\pi\sigma$. On devra donc retrouver la même valeur en portant sur chacune d'elles un arc déterminé l. Or on obtient ainsi tous les points d'une certaine portion de surface Σ, lieu des centres des cercles géodésiques [1] de rayon l et coupant l'aire primitive σ. Sur chacun de ces cercles, cette aire découpera un arc qui sera vu du centre du cercle sous un certain angle V et l'existence de l'invariant intégral nous montre que l'expression $\int\int \mathrm{V}\,d\Sigma$, étendue à l'aire Σ, est égale à $2\pi\sigma$.

47. Si la surface est fermée, l'invariant étendu à l'ensemble des positions du point P sera fini et égal à $2\pi s$, où s est l'aire totale de la surface.

48. De cette intégrale triple, on déduit une intégrale double invariante en étendant, ainsi que l'indique M. Poincaré, l'intégrale triple

(1) Nous appelons ici *cercle géodésique* le lieu des points géodésiquement équidistants d'un point déterminé.

à un tube de trajectoires issues d'une portion de surface Σ quelconque (pourvu qu'elle ne soit pas elle-même un lieu de trajectoires). Soient ξ, η des coordonnées curvilignes sur la surface Σ, de sorte que u, v, ω sont sur cette surface fonctions de ξ, η. On pourra rapporter les points du tube de trajectoires que nous considérons aux coordonnées ξ, η, t et l'intégrale deviendra

$$J = \int\int\int H \frac{\partial(u, v, \omega)}{\partial(\xi, \eta, t)} d\xi \, d\eta \, dt = \int I \, dt,$$

$$(41) \qquad I = \int\int H(u' \, dv \, d\omega + v' \, d\omega \, du + \omega' \, du \, dv),$$

où l'on doit remplacer les dérivées par rapport à t par leurs valeurs tirées des équations (40). L'intégrale I, étendue à la portion de surface Σ, ne changera pas, non seulement si l'on remplace chaque point de cette surface par son conséquent, c'est-à-dire par la position qu'il vient occuper au bout d'un temps déterminé τ, mais encore si l'on remplace Σ par une portion de n'importe quelle autre surface limitée par le même tube de trajectoires.

49. Enfin l'intégrale I peut être considérée comme déduite d'une intégrale simple par l'emploi du théorème de Stokes. Elle est, en vertu de ce théorème, identique à l'intégrale

$$I = \int p \, du + q \, dv,$$

prise le long du contour de Σ.

L'intégrale I, étendue à un contour fermé quelconque, étant invariante, cette même intégrale prise le long d'un chemin ouvert sera invariante à une quantité près qui ne dépend que des extrémités.

Nous ramenons ainsi les propriétés des invariants intégraux à ce fait bien connu que si un arc de géodésique varie de manière que son origine décrive une ligne AB et son extrémité une ligne A′B′, on a

$$BB' - AA' = \int_{A'B'} (p \, du + q \, dv) - \int_{AB} (p \, du + q \, dv).$$

50. Pour définir le domaine d'une trajectoire déterminée, prenons dans l'espace E_3 une portion de surface Σ qui soit traversée une infinité de fois par cette trajectoire. Les points d'intersection seront tous distincts les uns des autres si la trajectoire n'est pas fermée. Un tel ensemble de points admettra au moins un point limite P_0. La trajectoire passera une infinité de fois dans le voisinage de ce point, et cela pour des valeurs indéfiniment croissantes de t; car il est clair que deux points voisins qui ne sont pas sur le même segment infiniment petit de trajectoire ne peuvent être reliés que par un segment de trajectoire à la longueur duquel on peut assigner une limite inférieure déterminée.

En déplaçant de toutes les manières possibles la surface Σ, il est évident que nous aurons, dans l'espace E_3, un ensemble de points P tels que la trajectoire passe infiniment près de chacun d'eux pour des valeurs infiniment grandes de t.

A cette dernière restriction près, la définition de cet ensemble est, comme on le voit, identique à celle de l'*ensemble dérivé* de M. Cantor. Il partage avec ce dernier la propriété d'être *fermé*, c'est-à-dire de contenir son propre dérivé.

C'est l'ensemble ainsi défini qu'on peut appeler *le domaine de la trajectoire dans l'espace* E_3. A la projection de ce domaine sur le plan des uv correspond, sur la surface s, l'ensemble des points M près desquels la trajectoire passe une infinité de fois, autrement dit le domaine tel que nous l'avons introduit précédemment.

51. Le domaine d'une trajectoire peut être considéré comme connu si l'on donne les points P_0 de ce domaine situés sur une portion de surface Σ qui rencontre toutes les trajectoires (nous savons, d'après ce qui précède, former de telles surfaces).

Si, à partir d'un point quelconque de Σ, nous portons sur la trajectoire issue de ce point une longueur déterminée t (positive ou négative), la position du nouveau point ainsi obtenu variera continûment avec celle du premier. Si donc notre trajectoire passe une infinité de fois aux environs de l'un, elle passera une infinité de fois aux environs de l'autre.

L'ensemble des points P se composera donc de l'ensemble des trajectoires menées par les différents points P_0; c'est l'ensemble des points P_0 qu'il suffit d'étudier.

32. *Si le point* P *appartient au domaine du point* M (¹) *et le point* Q *au domaine du point* P, *le point* Q *appartient au domaine de* M.

En effet, par hypothèse, on peut prendre sur la trajectoire du point P un arc $PP' = \lambda$ tel que le point P′ soit aussi voisin que l'on veut du point Q. D'autre part, puisque le point P fait partie du domaine du point M, il existe sur la trajectoire issue de ce dernier des points M′ aussi voisins qu'on le veut de P et, en particulier, assez voisins de P pour qu'en prenant l'arc $M'P'' = \lambda$, la distance $P'P''$ soit plus petite qu'une quantité quelconque donnée.

33. Si la trajectoire repasse une infinité de fois près d'un quelconque de ses points, cet ensemble des P_0 sera non seulement fermé, mais encore condensé en soi; ce sera ce que M. Cantor appelle un ensemble *parfait*.

On sait, depuis les travaux de M. Poincaré, que les trajectoires pour lesquelles il n'en est pas ainsi sont exceptionnelles (du moins en supposant le volume total fini), en ce sens que les points d'une région déterminée qui servent d'origines à de pareilles trajectoires peuvent être enfermés dans un volume total aussi petit qu'on le veut. M. Poincaré montre seulement, il est vrai, que les trajectoires qui ne passent que k fois (k étant un nombre quelconque) dans une région *déterminée* r de volume v aussi petit qu'on le veut, peuvent être enfermées dans un volume plus petit que $\frac{V}{kv}$ (V étant le volume total de la multiplicité E_3). Mais il est aisé de compléter à cet égard sa démonstration.

Comme le fait M. Poincaré, appelons *conséquent* d'un point quelconque, la nouvelle position que vient occuper ce point au bout d'un certain temps τ choisi une fois pour toutes, $N^{ième}$ conséquent du même point la position qu'il vient occuper au bout du temps $N\tau$ et prenons pour la région r un tube formé par les trajectoires issues des différents

(¹) C'est-à-dire au domaine de la trajectoire de ce point.

points d'une portion de surface et ayant pour longueur commune τ.

Soient maintenant n_i, N_i deux suites d'entiers augmentant indéfiniment et se correspondant deux à deux. Nous divisons la surface Σ en n_i portions, ce qui divisera la région r en n_i régions partielles r_i, et cela de manière que, lorsque n_i augmente indéfiniment, chacune des portions de Σ devienne infiniment petite dans toutes ses dimensions. Les points de l'une des régions r_i, origines de trajectoires qui, pendant le temps $N_i\tau$, ne passeront qu'une fois dans cette région, occuperont un volume total inférieur à $\frac{V}{N_i}$. La somme de ces volumes pour les n_i portions sera donc moindre que $\frac{Vn_i}{N_i}$. Or puisque nous supposons les nombres n_i et N_i indéfiniment croissants et les dimensions de chacune des parties de Σ indéfiniment décroissantes, l'origine de toute trajectoire qui ne passe pas infiniment près d'un quelconque de ses points sera comprise dans le volume v_i pour quelque valeur de i. On pourra donc enfermer tous ces points dans un volume total aussi petit qu'on le voudra, car il est clair qu'on peut déterminer la suite des N_i, de manière que la série $\sum \frac{n_i}{N_i}$ soit convergente et ait une somme aussi petite qu'on veut.

Ce raisonnement fournit même des renseignements sur la loi suivant laquelle les trajectoires non exceptionnelles se rapprochent d'une position déjà occupée. Car une dimension quelconque δ d'une des portions de Σ diminue comme $\frac{1}{\sqrt{n_i}}$ et, d'autre part, il suffit, pour la validité du raisonnement précédent, de supposer que $\frac{n_i}{N_i}$ tende vers zéro (car on peut toujours, s'il en est ainsi, donner à i une série de valeurs telles que la somme des valeurs correspondantes de $\frac{n_i}{N_i}$ donne une série convergente et de somme aussi petite qu'on veut). Donc la distance minima δ entre un point et les points de la trajectoire correspondante non consécutifs, mais séparés du premier par un arc moindre que $N_i\tau$, diminue (si cette trajectoire n'est pas exceptionnelle) de telle façon que le produit $\delta\sqrt{N_i}$ reste fini ou augmente indéfiniment aussi lentement qu'on veut.

54. Une trajectoire qui ne passe pas infiniment près d'un de ses points peut d'ailleurs être considérée en un certain sens comme une trajectoire asymptotique. Il existe, en effet, au moins une trajectoire de chaque point de laquelle la première s'approche indéfiniment pour des valeurs infiniment grandes de t.

55. Dans tous les problèmes de Dynamique que l'on sait traiter jusqu'au bout, les points P_0 correspondant à une trajectoire qui n'est ni fermée, ni asymptotique forment sur Σ une ligne, de sorte que le domaine est une certaine surface, dont la projection sur le plan des uv donnera la portion S de s remplie par la géodésique, et le contour apparent relatif à ce plan donnant les lignes qui limitent cette portion. En chaque point de ces lignes limites passeront une ou plusieurs géodésiques qui appartiennent tout entières à S, et qui leur seront, en général, tangentes. Les lignes limites auront donc en chaque point une tangente déterminée ou deux tangentes formant un angle rentrant.

Si, au lieu d'une géodésique, l'on a à considérer une trajectoire de dynamique, le domaine S pourra, au contraire, présenter des angles sortants, en des points où $U + h$ s'annule (h étant la valeur de la constante des forces vives sur la trajectoire considérée); c'est ce qui arrive, par exemple, comme on sait, dans le plan, pour

$$U = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2), \tag{42}$$

a et b étant incommensurables entre eux : le domaine est alors un rectangle. La valeur précédente de la fonction de forces est celle qui convient aux petits mouvements d'un point autour d'une position d'équilibre stable. Il n'en résulte pas, bien entendu, que la conclusion que nous venons d'obtenir relativement à la forme du domaine subsiste pour ces sortes de mouvements, puisque la fonction de forces correspondante n'est représentée que d'une façon *approchée* par l'expression (42); cependant cette conclusion est exacte pour le mouvement sur le paraboloïde elliptique à concavité supérieure, d'après les résultats de M. de Saint-Germain : le domaine est (lorsque la courbe n'est pas fermée) limité par quatre lignes de courbure formant une sorte de rectangle à quatre angles saillants.

56. En continuant à supposer que le domaine d'une trajectoire quelconque non exceptionnelle soit une surface de l'espace E_3, nous pourrons ajouter à la propriété énoncée au n° **52** la suivante :

Si un point P *fait partie du domaine d'un point* M, *réciproquement celui-ci appartient au domaine du premier.*

Nous savons, en effet, que le domaine du point M contient celui du point P. Or, ici, ces deux domaines sont des lignes ou des segments de ligne. Il en résulte évidemment que le domaine du point P contient un point de la trajectoire issue de M et, par conséquent (**51**), M lui-même.

57. Le domaine du point P contenant à son tour le domaine du point M, ces deux domaines coïncident. Ainsi, en se plaçant toujours dans l'hypothèse adoptée aux deux numéros précédents, il existe une simple infinité de géodésiques qui ont même domaine : autrement dit, *les domaines ne dépendent que d'un paramètre.*

Seulement il est permis de se demander jusqu'à quel point cette hypothèse est légitime. Elle est, comme nous l'avons remarqué, réalisée dans tous les exemples où il est possible d'intégrer.

Mais, dans tous ces exemples, l'intégrabilité est due à l'existence d'une intégrale uniforme, laquelle entraîne évidemment ce fait que les domaines sont des surfaces.

Or on peut supposer que, inversement, ce fait ne se rencontre qu'avec une intégrale uniforme. En effet, les domaines ne dépendant que d'un paramètre, ce paramètre aura, pour chaque trajectoire, une valeur déterminée; ce sera une fonction univoque des coordonnées d'un point de E_3, laquelle restera constante sur une trajectoire quelconque.

Nous n'avons d'ailleurs pas démontré que cette fonction soit analytique, ni même ait des dérivées; nous sommes donc bien loin des conditions dans lesquelles s'applique le théorème connu de M. Poincaré; néanmoins ce théorème rend l'existence d'une pareille fonction très invraisemblable et, par conséquent, il est très probable que l'hypothèse dont nous sommes partis n'est pas vérifiée, en général.

58. Le domaine dont nous avons parlé jusqu'ici peut être appelé le domaine *propre* de la trajectoire considérée, par opposition avec ce que l'on peut nommer le domaine *étendu* de la même trajectoire et qui est son domaine propre, joint au domaine propre des trajectoires infiniment voisines. Autrement dit, un point de l'espace E_3 sera dit appartenir au domaine étendu d'une trajectoire donnée si, ε étant une quantité aussi petite qu'on le veut et $\mathfrak{T}$ un temps aussi grand qu'on le veut, il existe des trajectoires passant à une distance moindre que ε d'un point déterminé quelconque de la trajectoire donnée et passant également à une distance moindre que ε du point considéré, le second fait ayant lieu après le premier et au bout d'un temps supérieur à $\mathfrak{T}$.

Ce domaine étendu ne coïncide pas toujours avec le domaine propre. Par exemple, sur une surface de révolution dont toutes les géodésiques ne sont pas fermées, le domaine propre d'une géodésique fermée se réduit à cette ligne elle-même, tandis que le domaine étendu comprend, comme celui d'une géodésique non fermée, toute la bande de surface comprise entre deux parallèles. Il y aurait lieu, cependant, de rechercher si les trajectoires pour lesquelles cette coïncidence n'a pas lieu ne sont pas exceptionnelles.

59. Le domaine étendu possède, en toute hypothèse, la propriété dont il est question au n° **56**.

Supposons, en effet, que le point P appartienne au domaine étendu du point M. Soient s et s' les sphères de rayon ε ayant pour centres respectifs les points M et P : il existera, par hypothèse, des points de s dont les trajectoires iront passer, au bout d'un temps supérieur à $\mathfrak{T}$, dans s'. Ces points formeront dans s une région r_1. Il existera des trajectoires traversant une infinité de fois la région r_1 : ces trajectoires traverseront donc la région s après avoir traversé la région s et cela au bout d'un temps aussi grand qu'on le voudra. C'est ce que nous voulions démontrer.