JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. ZAREMBA

Sur la méthode des approximations successives de M. Picard

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 311-329.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__311_0>

Sur la méthode des approximations successives de M. Picard;

PAR M. S. ZAREMBA.

1. Soient une équation aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \tag{1}$$

et une courbe fermée (C). M. Picard a imaginé une méthode, dite des *approximations successives*, permettant, moyennant quelques hypothèses très générales relatives à la nature de la fonction f et à celle de (C), de déterminer une intégrale de l'équation (1) satisfaisant à cette équation à l'intérieur de l'aire limitée par la courbe (C) et prenant sur cette courbe des valeurs données, pourvu cependant que l'étendue de la courbe (C) soit suffisamment petite.

L'extension de la méthode de M. Picard aux équations à trois variables indépendantes, pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \tag{2}$$

dépend, comme on le reconnaît très aisément, des propriétés de la fonction de Green qui peuvent s'énoncer comme il suit :

Soit

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$$

la fonction de Green relative à une surface fermée (S) et aux points $M(x, y, z)$ et $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ situés à l'intérieur de la surface, posons

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

et

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} - v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta): \tag{3}$$

1° On a, en désignant par Dv la dérivée de v prise par rapport à une des variables x, y ou z,

$$|Dv| < \frac{A}{\rho^2}, \tag{4}$$

où A est constante positive ne dépendant que de la surface S et ne croissant pas indéfiniment quand on fait décroître indéfiniment l'étendue de la surface S suivant une loi convenable;

2° On a, en désignant par $D_2 v$ l'une quelconque des dérivées secondes de v par rapport aux variables x, y et z,

$$|D_2 v| < \frac{B}{\rho^3}, \tag{5}$$

où B est une constante jouissant des propriétés analogues à celles dont jouit la constante A;

3° L'intégrale

$$\iiint D_2 v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{6}$$

étendue à tout le domaine limité par la surface S, ne dépasse jamais en valeur absolue une constante positive C dépendant uniquement de la nature de la surface (S).

J'ai déjà eu l'occasion de démontrer le premier des trois théorèmes précédents dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, mais je me suis borné alors au cas d'une surface convexe. Je me propose maintenant d'établir chacun de ces trois théorèmes en abandonnant en outre l'hypothèse de la convexité de la surface (S).

2. Nous supposerons que la surface (S) est simplement connexe, qu'elle possède en chaque point un plan tangent déterminé et qu'elle jouit en outre de la propriété suivante : Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque O de la surface S et dirigeons l'axe des z suivant la normale intérieure en O à la surface. Décrivons ensuite, du point O comme centre, dans le plan des x, y, un cercle (C) de rayon δ suffisamment petit, mais indépendant de la position du point O sur la surface S; considérons la perpendiculaire élevée en un point $P(x, y)$ de l'aire du cercle (C) ou de sa circonférence au plan des x, y et soit z la troisième coordonnée de celui des points de rencontre Q de cette perpendiculaire avec la surface S qui est le plus voisin du point P.

La fonction z admettra pour toutes les valeurs de x et de y satisfaisant à l'inégalité

$$(7) \qquad x^2 + y^2 \leqq \delta^2$$

des dérivées partielles finies et déterminées jusqu'au troisième ordre inclusivement.

Il résulte de ces hypothèses que, en désignant par a, b et c les demi-dérivées secondes de la fonction z pour $x = y = 0$ et en appelant m la limite supérieure des valeurs absolues des dérivées troisièmes de z, on aura

$$(8) \qquad |z - ax^2 - 2bxy - cy^2| < m(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$$

pourvu que la condition (7) soit satisfaite.

Lorsque le point P décrit l'aire du cercle (C), le point Q décrit une portion de la surface S. Nous désignerons constamment cette portion de la surface S par S′ et nous appellerons S″ le reste de la surface.

Voici maintenant quelques remarques d'un caractère géométrique sur lesquelles nous aurons sans cesse à nous appuyer. Il est évident tout d'abord que l'on pourra trouver une longueur R, telle que toute sphère de rayon R tangente à notre surface lui soit toujours tout entière extérieure, ou tout entière intérieure.

Cela posé, supposons que les axes soient disposés comme tout à l'heure et soit γ une longueur non supérieure à R. Désignons par M_1

et M_2 deux points placés sur l'axe des z, de façon que l'on ait

$$OM_1 = \gamma,$$
$$OM_2 = -\gamma,$$

et considérons un point quelconque A de l'espace qui ne soit pas intérieur à la sphère Σ_2 de rayon R, tangente extérieurement à la surface (S) au point O, origine des coordonnées.

On aura, en posant

$$l_0 = OA, \qquad l_1 = M_1 A \qquad \text{et} \qquad l_2 = M_2 A,$$

les inégalités suivantes :

$$\frac{l_0}{l_2} < 2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{l_2}{l_0 + \gamma} < 1, \tag{10}$$

$$\frac{l_1}{l_2} < 3. \tag{11}$$

Construisons encore la sphère (Σ_1) de rayon R, tangente intérieurement à la surface (S) au point O.

Nous établirons aisément, en désignant par t la distance du point A au plan des x, y et en supposant que le point A ne soit intérieur ni à la sphère Σ_1, ni à la sphère Σ_2, les inégalités suivantes :

$$\frac{l_1}{l_2} > \frac{1}{3}, \tag{12}$$

$$\frac{t}{l_0^2} < \frac{1}{2R}. \tag{13}$$

On en déduira, en supposant toujours que le point A ne soit intérieur ni à la sphère Σ_1, ni à la sphère Σ_2, les inégalités suivantes :

$$\left|\frac{1}{l_1^3} - \frac{1}{l_2^3}\right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R}\,\frac{\gamma}{l_2^3}, \tag{14}$$

$$\left|\frac{1}{l_1^5} - \frac{1}{l_2^5}\right| < \frac{9(3^5 - 1)}{R}\,\frac{\gamma}{l_2^5}. \tag{15}$$

3. On sait que la fonction v, figurant dans l'équation (3), considérée comme fonction de x, y, z, peut être regardée comme le potentiel d'une couche simple répandue sur la surface (S). Envisagée ainsi, cette fonction existera dans tout l'espace et elle sera égale à $\frac{1}{\rho}$ sur la surface (S) et à l'extérieur de cette surface. On aura, en désignant par u la densité de la couche donnant naissance au potentiel v, par $d\sigma$, un élément de la surface (S) et par r la distance de cet élément au point M,

$$v = \int_S \frac{u\,d\sigma}{r} \tag{16}$$

et

$$u = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{dv}{dn}\right], \tag{17}$$

le symbole

$$\frac{d}{dn},$$

servant, comme il est d'usage, à représenter la dérivée prise suivant la normale intérieure à la surface.

La fonction de Green étant positive à l'intérieur de la surface à laquelle elle se rapporte; il résulte de l'équation (17) que la fonction u sera constamment positive.

Disposons les axes des coordonnées comme dans les deux premiers numéros; envisageons les points M_1 et M_2, définis au n° **2** et conservons sa signification à la lettre γ. Nous allons démontrer que les dérivées de la fonction v, calculées pour le point M_1 jusqu'au deuxième ordre inclusivement, tendent vers des valeurs bien déterminées lorsque γ tend vers zéro et nous déterminerons des limites supérieures des valeurs absolues de ces dérivées. Considérons tout d'abord les dérivées du premier ordre et en premier lieu la dérivée par rapport à z. On aura, en désignant, par x', y' et z', les coordonnées de l'élément $d\sigma$ et par r_1 et r_2 les distances de cet élément aux points M_1 et M_2,

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_1} &= \int_S \frac{(z'-\gamma)\,u\,d\sigma}{r_1^3}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_1} &= \int_S \frac{(z'+\gamma)\,u\,d\sigma}{r_2^3}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

On sait d'ailleurs que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_1}$$

tendra vers une limite déterminée quand on fera tendre γ vers zéro; il nous suffira donc de chercher une limite supérieure de la valeur absolue de cette expression.

Nous avons

$$(19) \qquad \left|\int_S \frac{z' u\, d\sigma}{r_2^3}\right| < \int_S \frac{|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^3}.$$

Or, on trouve, en se reportant à l'inégalité (13) d'abord et à l'inégalité (9) ensuite, que

$$\int_S \frac{|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R}\int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2},$$

d'où, en désignant par ρ_2 la distance du point M_2 au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ défini au n° **1** et en se rappelant que le point M_2 est extérieur à la surface (S),

$$(20) \qquad \int_S \frac{|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R}\frac{1}{\rho_2}.$$

J'observe maintenant que

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{M_2}\right| < \frac{1}{\rho_2^2},$$

on aura donc, en tenant compte de la deuxième des équations (18) et des inégalités (20) et (19),

$$(21) \qquad \gamma\int_S \frac{u\, d\sigma}{r_2^3} < \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{R}\frac{1}{\rho_2}.$$

On déduit, d'ailleurs, aisément du théorème exprimé par l'inégalité (12), les conséquences suivantes,

$$\left|\int_S \frac{z' u\, d\sigma}{r_1^3}\right| < 3^3 \int \frac{|z'|\, u\, d\sigma}{r_2^3}$$

et

$$\gamma \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_1^3} < 3^3 \gamma \left| \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^3} \right|.$$

La première des équations (18) nous donnera donc, en tenant compte des inégalités (20) et (21),

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} \right| < 3^3 \left(\frac{4}{R} \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \right);$$

d'où, en désignant par ρ_1 la distance du point M_1 au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, en appelant d le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S) et en nous appuyant sur l'inégalité (11),

$$(22) \qquad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| > 3^3 \left(12 \frac{d}{R} + 9 \right) \frac{1}{\rho_1^2}.$$

Considérons maintenant la dérivée par rapport à x.

On a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} = \int_S \frac{u\,x'\,d\sigma}{r_1^3},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} = \int_S \frac{u\,x'\,d\sigma}{r_2^3},$$

ce qui donne, en tenant compte de l'inégalité (14),

$$(23) \qquad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} \right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R} \gamma \int_S \frac{|x'|\,u\,d\sigma}{r_2^3}.$$

Il serait évidemment aisé de calculer une limite supérieure du second membre de cette inégalité tendant vers zéro avec γ. Il en résulte que $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1}$ tend, lorsque γ tend vers zéro vers une limite déterminée, celle vers laquelle tend $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2}$ dans les mêmes conditions. D'ailleurs, nous pourrons nous contenter d'une limite supérieure moins rapprochée de la valeur réelle de cette quantité et qui s'obtient ainsi :

On a

$$|x'| < r_2 \qquad \text{et} \qquad \gamma < r_2,$$

par conséquent,

$$\gamma\int_S \frac{|x'|\,u\,d\sigma}{r_2^3} < \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2}.$$

Il suit de là, des inégalités (23) et (11) et de l'inégalité

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2}\right| < \frac{1}{\rho_2^2},$$

que

(24) $$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right| < \left[9 + \frac{27(3^3-1)d}{R}\right]\frac{1}{\rho_1^2},$$

où d représente, comme plus haut, le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S).

On trouvera de même

(25) $$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{M_1}\right| < \left[9 + \frac{27(3^3-1)d}{R}\right]\frac{1}{\rho_1^2}.$$

Désignons maintenant par Dv une dérivée première de v par rapport à une des variables x, y ou z, calculée pour un point M intérieur à la surface (S) dont la plus courte distance à cette surface ne soit pas inférieure à R.

Il viendra

$$|Dv| < \int_S \frac{u\,d\sigma}{r^2} < \frac{1}{R^2}\int_S u\,d\sigma = \frac{1}{R^2};$$

on aura donc *a fortiori*

$$|Dv| < \frac{d^2}{R^2}\frac{1}{\rho^2}.$$

Il résulte de cette inégalité et des inégalités (22), (24) et (25) que l'on aura en posant

(26) $$A = 3^5 + 27.26\frac{d}{R} + \frac{d^2}{R^2},$$

en désignant par Dv une dérivée première de v par rapport à une des variables x, y ou z, calculée pour un point *quelconque* intérieur à la surface (S) et en appelant ρ la distance de ce point au point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$,

$$|Dv| < \frac{A}{\rho^2}.$$

Or A reste fini quand l'étendue de la surface (S) décroît suivant une loi convenable : ainsi, par exemple, si la surface reste constamment semblable à une surface fixe, A reste constant. Le premier des trois théorèmes que nous voulions établir est donc démontré.

4. Passons à l'étude des dérivées secondes de v. Conservons à cet effet les notations du numéro précédent, continuons à désigner par x', y', z' les coordonnées d'un élément $d\sigma$ de la surface (S) et soit toujours r_2 la distance de cet élément au point M_2. Nous obtiendrons facilement, comme on le verra plus loin, tous les résultats qui nous sont nécessaires après avoir démontré que l'intégrale

$$J = \int_S \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_2^5} \tag{27}$$

tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro et après avoir calculé une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale.

Désignons, dans ce but, comme au n° **2**, par (S′) la portion de la surface (S) à laquelle se rapporte l'inégalité (8) et par S″ le reste de cette surface.

Posons

$$J' = \int_{S'} \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_2^5}$$

et

$$J'' = \int_{S''} \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_2^5}.$$

Nous aurons alors

$$J = J' + J''. \tag{28}$$

L'étude de l'intégrale J′ peut seule donner lieu à des difficultés; c'est donc d'elle qu'il convient de nous occuper en premier lieu.

L'inégalité (8) nous montre que l'on peut poser

$$z' = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + \theta m(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{29}$$

en désignant par θ une fonction de x' et y' qui, en valeur absolue, reste plus petite que l'unité pour toutes les valeurs de x' et y' satisfaisant à l'inégalité

$$x'^2 + y'^2 \leqq \delta^2.$$

La fonction θ sera visiblement une fonction continue de x' et y' pour toutes les valeurs de ces variables vérifiant l'inégalité précédente, sauf pour

$$x' = y' = 0.$$

Portons la valeur (29) de z' dans l'intégrale J′, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} J' = {} & a\int_{S'} \frac{x'^3 u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} + 2b\int_{S'} \frac{x'^2 y' u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} + c\int_{S'} \frac{x' y'^2 u\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} \\ & + m\int_{S'} \frac{u x' \theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Il résulte immédiatement de la continuité des fonctions u et θ que la dernière intégrale du deuxième membre de cette équation tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro : il nous suffira donc de calculer une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale.

Or, on a

$$|x'| < r_2$$

et

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} < r_2;$$

il s'ensuit que

$$\left| \int_{S'} \frac{u x' \theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}\, d\sigma}{r_2^{\frac{5}{2}}} \right| < \int_{S'} \frac{u\, d\sigma}{r_2} < \int_{S} \frac{u\, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2}. \tag{31}$$

Nous nous servirons, pour établir les propriétés des autres intégrales qui figurent au deuxième membre de l'équation (30), des valeurs connues des dérivées du troisième ordre de v à l'extérieur de la surface (S).

Soit M un point situé sur l'axe des z à l'extérieur de la surface (S) à une distance non supérieure en valeur absolue à R de cette surface. Posons

$$z = \mathrm{OM};$$

désignons par r la distance du point M à l'élément $d\sigma$ de la surface (S) et considérons l'expression

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{\mathrm{M}} = -9\int_{\mathrm{S}} \frac{x' u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_{\mathrm{S}} \frac{x'^3 u\, d\sigma}{r^7}.$$

Il vient, en multipliant cette équation par z et en effectuant une transformation facile,

$$\begin{aligned} z\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{\mathrm{M}} = &-9\int_{\mathrm{S}} \frac{x'(z-z') u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_{\mathrm{S}} \frac{x'^3(z-z') u\, d\sigma}{r^7} \\ &-9\int_{\mathrm{S}} \frac{x' z' u\, d\sigma}{r^5} + 15\int_{\mathrm{S}} \frac{x'^3 z' u\, d\sigma}{r^7}. \end{aligned}$$

Multiplions l'équation précédente par dz, intégrons de $-\mathrm{R}$ à $-\gamma$ et désignons par C le point ayant pour coordonnées

$$x = y = 0,$$
$$\mathrm{Z} = -\mathrm{R},$$

et soit en outre r_c la distance de l'élément $d\sigma$ au point C, il viendra

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\mathrm{R}}^{-\gamma} z\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{\mathrm{M}} dz = 3\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}_2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_c\right] \\ &\quad - 3\left(\int_{\mathrm{S}} \frac{u x'^3 d\sigma}{r_2^5} - \int_{\mathrm{S}} \frac{u x'^3 d\sigma}{r_c^5}\right) \\ &\quad - 9\int_{-\mathrm{R}}^{-\gamma} dz \int_{\mathrm{S}} \frac{u x' z' d\sigma}{r^5} + 15\int_{-\mathrm{R}}^{-\gamma} dz \int_{\mathrm{S}} \frac{u x'^3 z' d\sigma}{r^7}. \end{aligned}\right.$$

On ne manquera pas d'apercevoir, en considérant cette équation avec quelque attention et en se rappelant que

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{\mathrm{M}} = -9\frac{\xi}{\rho^5} + 15\frac{\xi^3}{\rho^7},$$

que l'intégrale

$$(33)\qquad \int_S \frac{u x'^2 d\sigma}{r_2^3}$$

tend vers une limite finie et déterminée lorsque γ tend vers zéro.

Cherchons une limite supérieure de la valeur absolue de cette intégrale et observons à cet effet que l'on a évidemment

$$(34)\qquad \begin{cases} \left|\int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u x' z' d\sigma}{r^5}\right| < \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4}, \\ \left|\int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u x'^3 z' d\sigma}{r^7}\right| < \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4}. \end{cases}$$

Or, si l'on désigne par r_0 la distance du point O à l'élément $d\sigma$, on aura, à cause de l'inégalité (13)

$$|z'| < \frac{r_0^2}{2R},$$

et par conséquent, eu égard à l'inégalité (9),

$$|z'| < \frac{2r^2}{R},$$

il s'ensuit que

$$(35)\qquad \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4} < \frac{2}{R}\int_{-R}^{-\gamma} dz \int \frac{u d\sigma}{r^2};$$

mais l'inégalité (10) nous montre que

$$r > \frac{1}{4}(r_0 - z):$$

il viendra donc

$$(36)\qquad \begin{cases} \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u d\sigma}{r^2} < 16 \int_{-R}^{-\gamma} dz \int_S \frac{u d\sigma}{(r_0 - z)^2} \\ \qquad < 16 \int_S \frac{u d\sigma}{r_0 + \gamma} < 16 \int_S \frac{u d\sigma}{r_2} = \frac{16}{\rho_2}. \end{cases}$$

On trouve d'ailleurs, sans aucune difficulté, en faisant un usage convenable de l'inégalité (10), que

$$\left|\int_{-R}^{-\gamma} z\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M dz\right| < \frac{5.2^{10}}{\rho_2^2}. \tag{37}$$

D'ailleurs

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_c\right| < \frac{1}{R^2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_1}\right| < \frac{1}{\rho_2^2}, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

et

$$\left|\int_S \frac{u\,x'^3\,d\sigma}{r_c^5}\right| < \frac{1}{R^2}. \tag{39}$$

Cela posé, on déduit de l'équation (32) et des inégalités (34), (35), (36), (37), (38) et (39), la conséquence suivante :

$$\left|\int_S \frac{x'^3\,u\,d\sigma}{r_2^5}\right| < \frac{5.2^{10}+3}{3\rho_2^2} + \frac{2^8}{R\rho_2} + \frac{2}{R^2}. \tag{40}$$

Décomposons l'intégrale (33) en deux parties de la manière dont nous avions décomposé l'intégrale J (*voir* le commencement du n° 4). Il viendra

$$\int_S \frac{x'^3\,u\,d\sigma}{r_2^5} = \int_{S'} \frac{x'^3\,u\,d\sigma}{r_2^5} + \int_{S''} \frac{x'^3\,u\,d\sigma}{r_2^5}.$$

Or, la seconde des intégrales du deuxième membre est en valeur absolue inférieure à

$$\frac{1}{\delta\rho_2};$$

il résulte de là et de l'inégalité (40) que

$$\left|\int_{S'} \frac{x'^3\,u\,d\sigma}{r_2^5}\right| = \frac{H}{\rho_2^2}, \tag{41}$$

en posant

$$H = \frac{1}{3}5.2^{10} + 1 + 2^8\frac{d}{R} + 2\frac{d^2}{R^2} + \frac{d}{\delta}, \tag{42}$$

où d représente, comme dans le numéro précédent, le maximum de la distance de deux points mobiles sur la surface (S).

On trouvera aisément, en appliquant la même méthode que tout à l'heure,

$$(43)\qquad \begin{cases} \left|\int_{S'} \frac{x'^2 y' u\, d\sigma}{r_2^5}\right| < \frac{H}{\rho_2^2}, \\ \left|\int_{S'} \frac{x' y'^2 u\, d\sigma}{r_2^5}\right| < \frac{H}{\rho_2^2}. \end{cases}$$

Désignons par N la limite supérieure des valeurs absolues des nombres a, b et c qui figurent dans l'équation (8); l'équation (30) nous donnera, en tenant compte des inégalités (31), 41 et (43),

$$|J'| < \frac{4NH}{\rho_2^2} + \frac{m}{\rho_2}.$$

Or, on a manifestement

$$|J''| < \frac{1}{\delta^2 \rho_2};$$

il résulte donc de l'équation (28) que

$$(44)\qquad |J| < \frac{F}{\rho_2^2},$$

en posant

$$(45)\qquad F = 4NH + md + \frac{d}{\delta^2}.$$

Observons qu'il suit de tout ce qui précède que non seulement l'intégrale J vérifie l'inégalité (44) mais qu'elle tend en outre vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro.

5. Nous voici en mesure d'étudier les dérivées secondes de la fonction v à l'intérieur de la surface (S).

Nous avons

$$(46)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_1} = 3\int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_1^5} - 3\gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_1^5}, \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_2} = 3\int_S \frac{x' z' u\, d\sigma}{r_2^5} + 3\gamma \int_S \frac{x' u\, d\sigma}{r_2^5}. \end{cases}$$

On trouve, en faisant usage de l'inégalité (15),

$$(47)\qquad \left|\int_S \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_1^3} - \int_S \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_2^3}\right| < \frac{9(3^3-1)}{R}\gamma\int_S \frac{|x'|\,|z'|\,u\,d\sigma}{r_2^3},$$

et comme les inégalités (9) et (13) nous donnent

$$|z'| < \frac{2r_2^2}{R},$$

il vient

$$\int_S \frac{|x'|\,|z'|\,u\,d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R}\int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^2},$$

ce qui montre que la différence (47) tend vers zéro en même temps que γ. D'ailleurs

$$\gamma\int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^2} < \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\rho_2},$$

ce qui donne

$$\left|\int_S \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_1^3} - \int \frac{x'z'u\,d\sigma}{r_2^3}\right| < \frac{2.9(3^3-1)}{R^2}\frac{1}{\rho_2}.$$

On obtient, par une méthode analogue,

$$\left|\gamma\left|\int_S \frac{x'u\,d\sigma}{r_1^3} - \int_S \frac{x'u\,d\sigma}{r_2^3}\right|\right| < \gamma^2\frac{9(3^3-1)}{R}\int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^4} < \frac{9(3^3-1)}{R}\gamma\int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^3}$$

d'où, eu égard à l'inégalité (21)

$$(49)\qquad \left|\gamma\int_S \frac{x'u\,d\sigma}{r_1^3} - \gamma\int_S \frac{x'u\,d\sigma}{r_2^3}\right| < \frac{9(3^3-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{2}{R}\frac{1}{\rho_2}\right).$$

Ce résultat n'est pas tout à fait suffisant parce qu'il ne permet pas d'affirmer avec certitude que le produit

$$\gamma\int_S \frac{x'u\,d\sigma}{r_1^3}$$

tend vers une limite bien déterminée lorsque γ tend vers zéro. Pour mettre ce point en lumière, considérons l'expression

$$\gamma \int_S \frac{u\,d\sigma}{r_2^3};$$

elle tend, comme on sait, vers $2\pi u$ lorsque γ tend vers zéro. On en conclut par un calcul facile que dans le cas où l'expression

$$(50) \qquad + \frac{3\gamma}{2\pi} \int_S \frac{x' u\,d\sigma}{r_2^5}$$

tend vers une limite lorsque γ tend vers zéro, la fonction u admet une dérivée première en O par rapport à un arc tracé sur la surface (S) et tangent en O à l'axe des x, cette dérivée étant égale à la limite de l'expression (50).

Or, on a vu au numéro précédent que le premier terme du second membre de la deuxième des équations (46) tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro, et comme le premier membre de cette équation tend manifestement vers une limite déterminée quand γ tend vers zéro, il est évident qu'il en est de même du deuxième terme du second membre. Par conséquent, l'expression (50) tend bien vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro. Cela prouve que la fonction u possède des dérivées premières sur la surface (S). Sachant cela, on voit de suite que le premier membre de l'inégalité (49) tend vers zéro lorsque γ tend vers zéro. On conclut de tout ce qui précède que l'expression

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_1}$$

tend vers une limite déterminée lorsque γ tend vers zéro.

Les équations (46) et les inégalités (44), (48) et (49) nous donnent

$$\left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_2} \right| < 6\frac{F}{\rho_2^2} + \frac{27(3^5-1)}{R}\left(\frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{R\rho_2}\right),$$

d'où

$$\left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}\right)_{M_1} \right| < \left[6Fd + 27(3^5-1)\frac{d}{R}\left(1 + 4\frac{d}{R}\right) + 3\right]\frac{1}{\rho_2^3}.$$

Ce qui donne, en remarquant que d'après l'inégalité (11)

$$\rho_2 > \frac{1}{3}\rho_1$$

et, en posant

$$(51) \qquad G = 27\left[3 + 6Fd + 27(3^5 - 1)\frac{d}{R}\left(1 + 4\frac{d}{R}\right)\right],$$

$$(52) \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}\right)_{M_1}\right| < \frac{G}{\rho_1^3}.$$

Je remarque maintenant que l'on peut très aisément déduire des expressions connues des dérivées de la fonction v à l'extérieur de la surface (S) et du fait établi plus haut que la fonction u admet des dérivées du premier ordre sur la surface (S), la conclusion suivante : les expressions

$$(53) \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{M_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right)_{M_1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{M_1}$$

tendent chacune vers une limite parfaitement déterminée lorsque l'on fait tendre γ vers zéro. On trouve d'ailleurs, en évaluant par excès, les valeurs absolues des différences des expressions précédentes et des expressions analogues relatives au point M_2, et en se servant pour cela des procédés employés plus haut :

$$(54) \qquad \begin{cases} \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \\ \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \\ \left|\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{M_1}\right| < \dfrac{G_1}{\rho_1^3}, \end{cases}$$

en posant

$$G_1 = 27\left\{3 + [9(3^3 - 1) + 27(3^5 - 1)]\left(1 + 2\frac{d}{R}\right)\frac{d}{R}\right\}.$$

Les expressions (53) tendant vers des limites déterminées lorsque γ tend vers zéro, il en sera de même de l'expression

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{M_1}.$$

On déduit d'ailleurs des inégalités (54) que l'on a

$$(55)\qquad \left|\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)_{M_1}\right| < 2\,\frac{G_1}{\rho_1^3}.$$

Cela posé, désignons par $D_2 v$ une dérivée seconde de v calculée pour un point quelconque intérieur à la surface, mais tel que sa plus courte distance à la surface ne soit pas inférieure à R.

On aura

$$|D_2 v| < \frac{3}{R^3},$$

et *a fortiori*

$$(56)\qquad |D_2 v| < 3\left(\frac{d}{R}\right)^3 \frac{1}{\rho^3},$$

où ρ désigne la distance du point considéré au point $u(\xi, \eta, \zeta)$.

Désignons par B le plus grand des nombres

$$(57)\qquad G, \qquad 2G_1 \qquad \text{et} \qquad 3\left(\frac{d}{R}\right)^3;$$

nous pouvons écrire, en vertu des inégalités (52), (54) et (55), en désignant maintenant par $D_2 v$ l'une quelconque des dérivées secondes de v prises par rapport aux variables x, y et z, pour un point *quelconque* intérieur à la surface (S) :

$$|D_2 v| < \frac{B}{\rho^3},$$

où ρ désigne la distance du point considéré au point u.

Or, on reconnaît, en se reportant aux valeurs trouvées pour les nombres (57), que si l'on fait décroître l'étendue de la surface (S) suivant une loi convenable, le nombre B ne dépassera jamais un nombre fixe; ainsi, par exemple, si la surface (S) reste semblable à une surface fixe, le nombre B reste constant. Le deuxième des théorèmes que nous voulions établir est donc démontré.

6. Il ne nous reste plus qu'à démontrer le dernier des trois théorèmes énoncés au n° **1**. Posons

$$w = \int\!\!\int\!\!\int v\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

où l'intégration doit être étendue à tout le domaine limité par la surface (S).

L'intégrale (6) n'est pas autre chose qu'une dérivée seconde de w. On sait que w peut être regardé comme le potentiel d'une simple couche répandue sur la surface (S) avec une densité telle que, à l'extérieur de la surface, la fonction w soit identique au potentiel Ψ d'un solide homogène de densité égale à 1, limité par la surface (S). La densité ϖ de la couche donnant lieu au potentiel w sera manifestement positive en chaque point de la surface (S); cela résulte de ce que la densité de la couche donnant lieu au potentiel v est positive. D'ailleurs, on calculera sans peine une limite supérieure de ϖ.

Disposons les axes des coordonnées, comme nous l'avons constamment fait dans les numéros précédents, et envisageons les points M_1 et M_2 que nous avons déjà considérés tant de fois, ou plutôt, bornons notre attention au point M_2 qui est extérieur à la surface (S). Si l'on calcule pour le point M_2 les dérivées de la fonction Ψ, par rapport à x et y jusqu'au troisième ordre inclusivement, on reconnaîtra sans la moindre peine, en tenant compte des hypothèses faites au sujet de la surface (S), que ces dérivées tendent vers des limites finies et parfaitement déterminées quand on fait tendre γ vers zéro. Comme d'ailleurs, à l'extérieur de la surface (S), w est égale à Ψ, les dérivées de la fonction w jouissent des mêmes propriétés. Il résulte de là que la méthode employée au n° 4 pourra être appliquée.

On prouvera ensuite, par un procédé analogue à celui que nous avons employé au n° 5, que la fonction ϖ admet des dérivées premières sur la surface (S) et que si l'on calcule les dérivées de la fonction w jusqu'au deuxième ordre inclusivement, pour un point intérieur à la surface (S) et si l'on fait tendre ce point vers un point quelconque de la surface (S), ces dérivées tendront vers des limites déterminées pour les valeurs absolues desquelles l'on pourra déterminer une limite supérieure C qu'elles ne dépasseront en aucun point de la surface. D'ailleurs, il est clair qu'*a fortiori* les dérivées secondes de w calculées pour un point intérieur à la surface (S) ne pourront jamais dépasser le nombre C. Ainsi donc le troisième théorème se trouve démontré.