JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL GORDAN

Le résultant de trois formes ternaires quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 3 (1897), p. 195-201.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__195_0>

Le résultant de trois formes ternaires quadratiques;

PAR M. PAUL GORDAN.

Soient données trois formes ternaires

$$f, \quad f_1, \quad f_2$$

et m, n, p leurs degrés dans les variables x; le résultant R est une fonction entière des coefficients, qui a les degrés np, mp, mn.

Soient

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad u_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad u_{\alpha_{np}}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2; on sait que le résultant R a la valeur

$$\mathrm{R} = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots f(\alpha_{np}).$$

Dans cette expression de R, les coefficients de f entrent rationnellement; les coefficients de f_1 et f_2 y figurent implicitement dans les α: il s'agit de la transformer de manière que les coefficients de f_1 et de f_2 paraissent aussi rationnellement.

Pour résoudre cette question, je me sers du théorème de réciprocité de M. Hermite.

Je commence en établissant le système de f et en formant les produits symboliques

$$\mathrm{P}_1, \quad \mathrm{P}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{P}_\rho,$$

qui sont les covariants et invariants, etc., asyzygétiques de f, qui ont dans les coefficients le degré np.

Dans ces produits, je remplace les symboles $a, b, c, \ldots$ de f par les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{np}$ et les variables x, u par les variables u, x. Dans les produits, qui résultent, je permute les indices $1, 2, \ldots, np$ et fais l'addition. De cette manière, on obtient des covariants, invariants, etc., Q simultanés et symétriques des formes linéaires α.

Les formes P, qui ont les degrés λ et μ dans les variables x et u, vont être combinées avec les formes Q, qui ont les degrés μ et λ, de manière que l'on obtienne des invariants U,

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_\sigma.$$

Le résultant R peut alors être représenté par un agrégat,

$$R = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \ldots + c_\sigma U_\sigma,$$

où les c sont des coefficients numériques.

Les produits Q sont des covariants, invariants, etc., simultanés (combinants et semicombinants) des formes f_1 et f_2; un grand nombre peuvent être remplacés par les covariants, invariants, etc., de la forme

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_{np}}.$$

Dans le cas

$$n = p = 2 \qquad \text{et} \qquad m > 3;$$

ce fait a lieu pour tous les Q et dans le cas

$$n = p = 2 \qquad \text{et} \qquad m = 2 \text{ ou } 3,$$

il a lieu pour tous les Q, excepté une forme.

Pour calculer les coefficients numériques c, on peut remplacer les formes f, f_1, f_2 par des formes spéciales. Il est avantageux de remplacer la forme f par le produit de m formes linéaires.

Pour donner un exemple de nos procédés, je veux calculer de cette manière le résultant de trois formes ternaires quadratiques.

I. — Les combinaisons (P, Q).

Le résultant R des formes

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2, \qquad f_1 = r_x^2 = r_{1,x}^2, \qquad f_2 = s_x^2 = s_{1,x}^2$$

est un invariant simultané de ces formes, qui a le degré 4 dans leurs coefficients.

Les trois formes ont les systèmes

$$\begin{array}{lll} f, & (abu)^2 = \mathrm{A}, & a_{\mathrm{A}}^2 = \mathrm{D}, \\ f_1, & (rr_1u)^2 = \mathrm{R}, & r_{\mathrm{R}}^2 = \mathrm{D}, \\ f_2, & (ss_1u)^2 = \mathrm{S}, & s_{\mathrm{S}}^2 = \mathrm{D}_2; \end{array}$$

il faut les combiner.

Soient

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad u_{\alpha_3}, \quad u_{\alpha_4}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2.

R a la valeur

$$\mathrm{R} = a_{\alpha_1}^2 b_{\alpha_2}^2 c_{\alpha_3}^2 d_{\alpha_4}^2; \tag{1}$$

il faut le transformer pour que les coefficients de f, f_1, f_2 y entrent rationnellement.

Les produits symboliques asyzygétiques, qui sont invariants, etc. de f et qui ont le degré 4 dans ses coefficients, sont

$$\mathrm{P}_1 = a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2, \qquad \mathrm{P}_2 = (abu)^2 c_x^2 d_x^2,$$
$$\mathrm{P}_3 = (abu)^2 (cdu)^2, \qquad \mathrm{P}_4 = (abc)^2 d_x^2.$$

On en déduit les formes simultanées symétriques des quatre formes linéaires α :

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_4}^2,\\
Q_2 &= (\alpha_1\alpha_2 x)^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_1\alpha_3 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_1\alpha_4 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2\\
&\quad + (\alpha_2\alpha_3 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_4}^2 + (\alpha_2\alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_3\alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2,\\
Q_3 &= (\alpha_1\alpha_2 x)^2(\alpha_3\alpha_4 x)^2 + (\alpha_1\alpha_3 x)^2(\alpha_2\alpha_4 x)^2 + (\alpha_1\alpha_4 x)^2(\alpha_2\alpha_3 x)^2,\\
Q_4 &= (\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2 u_{\alpha_1}^2 + (\alpha_1\alpha_3\alpha_4)^2 u_{\alpha_2}^2 + (\alpha_1\alpha_2\alpha_4)^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 u_{\alpha_4}^2.
\end{aligned}
$$

Comme le résultant est un invariant simultané de f et des formes linéaires α, il est un agrégat des combinaisons des P et Q,

$$
(2)\qquad R = c_1(P_1, Q_1)_{0,8} + c_2(P_2, Q_2)_{0,4}^{2,0} + c_3(P_3, Q_3)^{4,0} + c_4(P_4, Q_4)_{0,2},
$$

les c y sont des coefficients numériques.

Il y a deux opérations à exécuter :

1° Il faut transformer les Q, pour qu'ils contiennent les coefficients de f_1 et f_2 rationnellement;

2° Il faut calculer les coefficients numériques c.

II. — Transformation des Q.

Les Q sont invariants, covariants, etc. (combinants) de f_1 et f_2 : ils peuvent être exprimés en fonctions entières des formes du système simultané.

Ce système a entre autres formes celles-ci :

$$
(rsu)^2 = T, \qquad s_R^2 = D_1, \qquad r_S^2 = D_2,
$$
$$
v = RS - T^2, \qquad g = (TTx)^2,
$$
$$
\mu = \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix}.
$$

Les formes v et μ ont, à un facteur constant près, qui peut être supprimé, les valeurs

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4}, \qquad \mu = Q_1.$$

La dernière formule peut être démontrée par le fait que Q_1 est du degré 2 dans les variables u et par les formules

$$(r, Q_1)_{0,2} = 0, \qquad (s, Q_1)_{0,2} = 0.$$

La forme Q_1 a la valeur

$$Q_1 = v^2.$$

v est un covariant simultané des formes linéaires α; les covariants et invariants de v le sont aussi. $(vv_1x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2$ est un agrégat de Q_2 et $Q_1 u_x^2$, et $(vv_1x)^4$ est, à un facteur constant près, Q_3.

Il est donc permis de remplacer dans la formule (2) les formes Q par

$$v^2, \quad (vv_1x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2, \quad (vv_1x)^4, \quad \mu.$$

De cette manière, nous arrivons à un agrégat de combinaisons; en remplaçant chacune d'elles par un produit symbolique équivalent, la valeur de R devient

$$(3)\quad R = c_1(a_v^2 b_v^2)^2 + c^2\left(ab\widehat{vv_1}\right)^2 a_v^2 b_{v_1}^2 + c_3\left(ab\widehat{vv_1}\right)^2\left(cd\widehat{vv_1}\right)^2 + c_4 \Delta a_\mu^2.$$

Voilà une formule dans laquelle les coefficients de toutes les trois formes entrent rationnellement.

Il reste à calculer les coefficients numériques c, en introduisant pour f, f_1, f_2 des formes spéciales.

Pour trouver c_1, c_2, c_3, nous choisissons pour f le produit de deux facteurs linéaires, et pour trouver c_4 nous prenons pour f la forme $r_x^2 + \lambda g_x^2$ et pour f_1 et f_2 des formes dont les invariants satisfont aux relations

$$D = D_3 = 1, \qquad D_1 = D_2 = 0.$$

III. — Calcul de c_1, c_2, c_3.

En posant $f = p_x q_x$, on a $\Lambda = -\frac{1}{2}(pqu)^2$, $\Delta = 0$,

$$p_\nu^4 q_\nu^4 = c_1(p_\nu^2 q_\nu^2)^2 - \frac{1}{2}c_2\left(pq\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 p_\nu q_\nu p_{\nu_1} q_{\nu_1} + \frac{1}{4}c_3\left(pq\widehat{\nu\nu_1}\right)^4,$$

et en comparant les coefficients des termes $p_\nu^4 q_\nu^4, (p_\nu^3 p_{\nu_1} q_{\nu_1}^3 q_\nu), (p_\nu^2 q_\nu^2)^2$:

$$\frac{1}{2}c_3 = 1, \qquad c_2 + 2c_3 = 0, \qquad c_1 + c_2 + \frac{3}{2}c_3 = 0,$$
$$c_3 = 2, \qquad c_2 = -4, \qquad c_1 = 1.$$

La formule (3) devient

$$(4)\quad \mathrm{R} = (a_\nu^2 b_\nu^2)^2 - 4\left(ab\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 c_\nu^2 d_{\nu_1}^2 + 2\left(ab\widehat{\nu\nu_1}\right)^2\left(cd\widehat{\nu\nu_1}\right)^2 + c_1\Delta a_\mu^2.$$

IV. — Calcul de c_4.

$$f = r_x^2 + \lambda g_x^2, \qquad \mathrm{D} = \mathrm{D}_3 = 1, \qquad \mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2 = 0.$$

En comparant le coefficient de λ, on a

$$(5)\quad \begin{cases} 0 = r_\nu^2 g_\nu^2 . r_\nu^2 r_{1,\nu}^2 - 2\left(\nu\nu_1\widehat{rg}\right)^2 r_{1,\nu}^2 r_{2,\nu_1}^2 - 2(\nu\nu_1\mathrm{R})^2 r_\nu^2 g_{\nu_1}^2 \\ \qquad + 2(\nu\nu_1\mathrm{R})^2\left(\nu\nu_1\widehat{rg}\right)^2 + \frac{1}{4}c_4 g_\mu^2; \end{cases}$$

nous voulons calculer les valeurs de ces produits symboliques. Partant des formules générales

$$3(\mathrm{RR}_1 x)^2 = 4\mathrm{D}r, \qquad 3(\mathrm{RT}x)^2 = 3\mathrm{D}_1 r + \mathrm{D}s,$$
$$3(\mathrm{SS}_1 x)^2 = 4\mathrm{D}_3 s, \qquad 3(\mathrm{ST}x)^2 = \mathrm{D}_3 r + 3\mathrm{D}_2 s,$$
$$\mathrm{D}_2 r + \mathrm{D}_1 s = \frac{1}{2}(\mathrm{RS}x)^2 + (\mathrm{TT}_1 x)^2, \qquad (\mathrm{TT}_1 x)^2 = g,$$
$$\nu = \mathrm{RS} - \mathrm{T}^2, \qquad \mu = \begin{vmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{D} & \mathrm{D}_1 \\ \mathrm{T} & \mathrm{D}_1 & \mathrm{D}_2 \\ \mathrm{S} & \mathrm{D}_2 & \mathrm{D}_3 \end{vmatrix},$$

on trouve dans notre cas

$$r_S^2 = r_T^2 = s_R^2 = s_T^2 = 0, \qquad \mu = -T,$$

$$(RR_1 x)^2 = \tfrac{1}{3} r, \qquad (RTx)^2 = \tfrac{1}{3} s, \qquad (STx)^2 = \tfrac{1}{3} r,$$

$$(SS_1 x)^2 = \tfrac{1}{3} s, \qquad (RSx)^2 = -2g,$$

$$(gru)^2 = -\tfrac{1}{6} S, \qquad g_R^2 = 0, \qquad g_S^2 = 0, \qquad g_T^2 = -\tfrac{1}{6}, \qquad g_\mu^2 = \tfrac{1}{6},$$

$$(TT_1 T_2)^2 = -\tfrac{1}{6}, \qquad (gg_1 u)^2 = -\tfrac{2}{9} T,$$

$$u_v^2 v_v^2 = \tfrac{1}{2} R v_S^2 + \tfrac{1}{2} S v_R^2 - T v_T^2 + (guv)^2, \qquad r_v^2 u_v^2 = \tfrac{1}{3} S, \qquad s_v^2 u_v^2 = \tfrac{1}{3} R,$$

$$g_v^2 u_v^2 = -\tfrac{1}{18} T, \qquad r_v^2 s_v^2 = \tfrac{1}{3}, \qquad r_v^2 g_v^2 = 0, \qquad r_v^2 r_{1.v_1}^2 (vv_1 x)^2 = \tfrac{1}{27} s,$$

$$r_v^2 g_{v_1}^2 (vv_1 x)^2 = -\tfrac{1}{162} r, \qquad (vRx)^2 (vSx)^2 = -\tfrac{7}{92} rs,$$

$$r_v^2 r_{1.v_1}^2 \left(vv_1 \widehat{rg}\right)^2 = -\tfrac{2}{81}, \qquad r_v^2 g_{v_1}^2 (vv_1 R)^2 = -\tfrac{1}{162},$$

$$(vv_1 R)^2 \left(vv_1 \widehat{rg}\right)^2 = -\tfrac{7}{162}.$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (5), on trouve

$$0 = \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{81} - \tfrac{7}{81} + \tfrac{1}{24} c_4, \qquad c_4 = \tfrac{16}{27},$$

et la formule (4) devient

$$(6) \quad R = (a_v^2 b_v^2)^2 - 4\left(vv_1 \widehat{ab}\right)^2 a_v^2 b_{v_1}^2 + 2\left(vv_1 \widehat{ab}\right)^2 \left(vv_1 \widehat{cd}\right)^2 + \tfrac{16}{27} \Delta a_\mu^2.$$