# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



H. POINCARÉ


**Sur l'équilibre et les mouvements des mers**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 2 (1896), p. 57-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__57_0>

# *Sur l'équilibre et les mouvements des mers;*

**Par M. H. POINCARÉ.**

## Introduction.

Le problème des marées présente une telle complication qu'il ne peut guère être abordé du premier coup dans toute sa généralité et qu'il convient de partager la difficulté. Il faudrait tenir compte à la fois de l'attraction des astres, de celle du bourrelet liquide qu'ils soulèvent, de l'inertie du liquide, de la présence des continents, de la rotation du globe et de la force centrifuge composée, etc.

Peut-être serait-ce s'acheminer vers la solution complète que d'examiner séparément chacune de ces difficultés et de chercher à résoudre le problème quand on n'a à triompher que d'une seule d'entre elles.

Si les astres étaient fixes par rapport à la Terre et entraînés dans son mouvement de rotation, le problème serait beaucoup plus simple, puisque la surface des océans prendrait une position d'équilibre dont elle ne s'écarterait plus. On n'aurait plus alors à tenir compte ni de l'inertie du liquide, ni de la force centrifuge composée et l'on serait ramené à une simple question de Statique.

On pourrait encore se contenter de cette approximation si le mouvement des astres était très lent; les mers prendraient alors une forme très peu différente de leur figure d'équilibre.

Malheureusement il n'en est pas ainsi et cependant la solution de cette question peut avoir une importance pratique; les oscillations réelles des mers peuvent être regardées comme la superposition d'un grand nombre d'oscillations périodiques, les unes à courte, les autres à longue période. Chacune de ces oscillations partielles se comporte comme si elle était seule. Les oscillations à très longue période peuvent alors se calculer par la méthode statique. C'est ce qu'ont très bien aperçu lord Kelvin et M. Tait (*Cf.* Tait et Thomson, *Traité de Philosophie naturelle*).

Cette étude statique serait extrêmement simple si les océans recouvraient toute la surface de la Terre; l'emploi des fonctions sphériques donnerait une solution immédiate, soit que l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, soit qu'on en tienne compte.

La présence des continents complique le problème; si l'on néglige l'attraction du bourrelet liquide, il suffit d'appliquer une correction très simple; c'est ce qu'ont fait Tait et Thomson.

J'ai voulu le traiter en tenant compte à la fois de l'attraction du bourrelet et de la présence des continents; j'y suis parvenu en introduisant certaines fonctions dont les propriétés rappellent celles des fonctions sphériques, mais qui dépendent de la forme des continents.

Je me suis occupé ensuite des oscillations à courte période, mais *en négligeant d'abord l'attraction du bourrelet liquide*. Il est d'abord aisé de voir que l'étude des oscillations éprouvées par la mer sous l'influence des mouvements des astres se ramène à celle de ses oscillations propres, c'est-à-dire de celles qu'elle éprouverait, *si elle était soustraite à cette influence* et si elle était écartée de sa figure d'équilibre, puis abandonnée à elle-même. C'est ainsi que l'intégration des équations différentielles linéaires à second membre se ramène à l'intégration des équations sans second membre.

J'ai donc été conduit à étudier les oscillations propres d'un liquide. J'ai supposé d'abord que ce liquide était enfermé dans un vase assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface d'équilibre; j'ai distingué le cas où la profondeur est finie et celui où elle est infiniment petite.

J'ai abordé ensuite le cas où le vase est assez grand pour qu'on doive regarder la surface d'équilibre comme sphérique.

J'ai fait ressortir l'analogie de ce problème avec celui des vibrations d'une membrane tendue dont je me suis occupé dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Enfin j'ai abordé un problème se rapprochant beaucoup plus de la réalité et j'ai tenu compte de la rotation du Globe et de la force centrifuge composée.

## 1. — Équilibre des mers.

Soit $V_1$ le potentiel dû à la sphère terrestre, $V_2$ celui qui est dû au bourrelet liquide, $+\varphi$ celui qui est dû aux astres et à la force centrifuge. Le potentiel total $V_1+V_2+\varphi$ devra être égal à une constante C à la surface de la mer qui différera d'ailleurs peu d'une sphère

$$V_1+V_2+\varphi = C.$$

Soit $\rho$ la densité de la sphère terrestre, 1 son rayon, $h$ l'épaisseur du bourrelet, de telle façon que la distance de la surface de la mer au centre de la Terre soit $1+h$; nous aurons

$$V_1 = \tfrac{4}{3}\pi\rho(1+h)^{-1} = \tfrac{4}{3}\pi\rho - \tfrac{4}{3}\pi\rho h.$$

Soit $\sigma$ la densité du liquide, $V_2$ pourra être regardé comme le potentiel d'une surface attirante; cette surface pourra être confondue avec celle de la sphère terrestre et la densité superficielle de la matière attirante sera $\sigma h$.

Si j'envisage la dérivée $\frac{dV_2}{dr}$, elle aura des valeurs différentes en un point très voisin de la sphère, mais intérieur, et en un point très voisin de la sphère, mais extérieur. Pour éviter toute confusion, je désignerai par $\frac{dV_2}{dr}$ la dérivée en un point intérieur et par $\frac{dV'_2}{dr}$ la dérivée en un point extérieur; il viendra alors

$$\frac{dV_2}{dr} - \frac{dV'_2}{dr} = 4\pi\sigma h.$$

D'autre part, si $V_2$ à la surface de la sphère est développée en série de fonctions sphériques et que l'on ait

$$V_2 = \Sigma X_n,$$

il viendra

$$\frac{dV_2}{dr} = \Sigma n X_n, \qquad \frac{dV'_2}{dr} = -\Sigma(n+1)X_n,$$

d'où

$$4\pi\sigma h = \Sigma(2n+1)X_n = 2\frac{dV_2}{dr} + V_2.$$

L'équation d'équilibre devient donc

$$\tfrac{4}{3}\pi\rho - \tfrac{4}{3}\pi\rho h + V_2 = C$$

ou

$$V_2\left(1 - \frac{\rho}{3\sigma}\right) - \frac{2\rho}{3\sigma}\frac{dV_2}{dr} = C - \frac{4}{3}\pi\rho - \varphi.$$

Cette équation devra être satisfaite à la surface des mers; à la surface des continents, on devra avoir $h = 0$, d'où

$$2\frac{dV_2}{dr} + V_2 = 0.$$

Enfin, à l'intérieur de la sphère, on aura

$$\Delta V_2 = 0.$$

Nous pouvons simplifier un peu ces notations; supprimons d'abord l'indice 2 devenu inutile et écrivons V au lieu de $V_2$. Posons ensuite

$$\xi_0 = \frac{3\sigma}{\rho}, \qquad \varphi = \frac{3\sigma}{\rho}\Phi, \qquad \left(C - \frac{4}{3}\pi\rho\right)\frac{3\sigma}{\rho} = -k.$$

On devra avoir à la surface des mers

$$2\frac{dV}{dr} + V = \xi_0 V + \Phi + k$$

et à la surface des continents

$$2\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

Pour réunir ces deux équations en une seule, j'introduirai un coefficient ε qui sera égal à 1 sur la surface des mers et à o sur celle des continents et j'écrirai

$$(1) \qquad 2\frac{dV}{dr} + V = \xi_0 \varepsilon V + \varepsilon(\Phi + k).$$

Le problème consiste alors à trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation (1) à la surface de la sphère et à

$$\Delta V = 0$$

à l'intérieur de la sphère.

Pour cela remplaçons l'équation (1) par

$$(1\ bis) \qquad 2\frac{dV}{dr} + V = \xi \varepsilon V + \varepsilon(\Phi + k),$$

où $\xi$ est une indéterminée et développons V suivant les puissances de $\xi$. Soit

$$V = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 - \ldots.$$

Il viendra

$$2\frac{dv_0}{dr} + v_0 = \varepsilon(\Phi + k),$$

$$2\frac{dv_1}{dr} + v_1 = \varepsilon v_0,$$

$$2\frac{dv_2}{dr} + v_2 = \varepsilon v_1,$$

et, en général,

$$(2) \qquad 2\frac{dv_n}{dr} + v_n = \varepsilon v_{n-1}$$

à la surface de la sphère et

$$(3) \qquad \Delta v_n = 0$$

à l'intérieur.

Le théorème de Green nous donne

$$\int \left( v_n \frac{dv_m}{dr} - v_m \frac{dv_n}{dr} \right) d\omega = 0,$$

ou, en tenant compte de (2),

$$(4)\qquad \int (v_n v_{m-1} - v_m v_{n-1})\,\varepsilon\, d\omega = 0.$$

Les intégrations doivent être étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface de la sphère.

Posons

$$\int v_m v_n\, \varepsilon\, d\omega = V_{m,n}.$$

L'équation (4) montre que

$$V_{m,n-1} = V_{m-1,n},$$

et comme, d'ailleurs,

$$V_{m,n} = V_{n,m},$$

on conclut que

$$V_{m,n} = V_{0,m+n},$$

ce qui me permettra d'écrire avec un seul indice

$$V_{m,n} = V_{m+n}.$$

Je dis que $V_n$ est essentiellement positif; en effet, si $n = 2p$, on a

$$V_n = \int v_p^2\, \varepsilon\, d\omega > 0,$$

et si $n = 2p - 1$, on a

$$V_n = \int v_p v_{p-1}\, \varepsilon\, d\omega = \int v_p\left(2\frac{dv_p}{dr} + v_p\right) d\omega = \int 2 v_p \frac{dv_p}{dr}\, d\omega + \int v_p^2\, d\omega,$$

ou, en vertu du théorème de Green,

$$V_n = 2\int \sum \left(\frac{dv_p}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_p^2\, d\omega > 0.$$

La première intégrale doit être étendue à tous les éléments $d\tau$ du volume de la sphère et $\sum\left(\frac{dv_p}{dx}\right)^2$ est la somme des carrés des trois dérivées partielles de $v_p$.

Si l'on change $\varphi$ en $\varphi + \lambda v_0$, $v_n$ se change en $v_n + \lambda v_{n+1}$; $V_{2n}$ et $V_{2n-1}$ se changent en

$$\int (v_n + \lambda v_{n+1})^2 \varepsilon\, d\omega = V_{2n} + 2\lambda V_{2n+1} + \lambda^2 V_{2n+2}$$

et

$$\int (v_n + \lambda v_{n+1})(v_{n-1} + \lambda v_n)\varepsilon\, d\omega = V_{2n-1} + 2\lambda V_{2n} + \lambda^2 V_{2n+1}.$$

Ces expressions, quel que soit $\lambda$, doivent être positives; c'est-à-dire que les équations en $\lambda$

$$V_{2n} + 2\lambda V_{2n+1} + \lambda^2 V_{2n+2} = 0, \qquad V_{2n-1} + 2\lambda V_{2n} + \lambda^2 V_{2n+1} = 0$$

doivent avoir leurs racines imaginaires. On a donc

$$V_{2n+1}^2 < V_{2n} V_{2n+2}, \qquad V_{2n}^2 < V_{2n-1} V_{2n+1},$$

d'où

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} < \frac{V_{2n+1}}{V_{2n}} < \frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}}.$$

Le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ va donc en croissant avec $n$.

Or

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} = \frac{\int v_n^2 \varepsilon\, d\omega}{2\int \sum\left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_n^2 d\omega} < \frac{\int v_n^2 d\omega}{2\int \sum\left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau + \int v_n^2 d\omega}.$$

Si $v_n$ est développé en série de fonctions sphériques sous la forme

$$v_n = \Sigma X_p,$$

nous aurons

$$\frac{dv_n}{dr} = \Sigma p X_p.$$

Si nous posons

$$\int X_p^2 d\omega = A_p^2,$$

il viendra

$$\int v_n^2\,d\omega = \Sigma A_p^2$$

et

$$\int \sum \left(\frac{dv_n}{dx}\right)^2 d\tau = \int \frac{dv_n}{dr} v_n\,d\omega = \Sigma p A_p^2,$$

d'où

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} = \frac{\Sigma A_p^2}{\Sigma(2p+1)A_p^2} < 1, \qquad \frac{V_{n+1}}{V_n} < 1.$$

Soit

$$\Phi + k = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_q\varphi_q,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ sont $q$ fonctions données et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont des indéterminées. Les fonctions V et $v_n$ seront des fonctions linéaires et homogènes des $\alpha$, et nous pourrons poser

$$v_n = \alpha_1 v_n^{(1)} + \alpha_2 v_n^{(2)} + \ldots + \alpha_q v_n^{(q)}.$$

Le rapport

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}}$$

dépend aussi des $\alpha$.

Or, si $q = \nu^2$, je puis, quels que soient les fonctions $\varphi_i$, choisir les indéterminées $\alpha$ de telle façon que le développement de $v_n$ en série de fonctions sphériques, commence par une fonction d'ordre $\nu - 1$.

On aura alors

$$(5) \qquad \frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} < \frac{1}{2\nu - 1}.$$

Considérons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $q - 1$ dimensions. On pourra trouver dans cet espace une région $R_n$ telle qu'à l'intérieur de cette région l'inégalité (5) soit vérifiée.

On pourra également trouver une région $R_{n+1}$ telle que dans cette région on ait

$$\frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}} < \frac{1}{2\nu - 1}.$$

Cette région sera tout entière contenue dans $R_n$, puisque

$$\frac{V_{2n}}{V_{2n-1}} < \frac{V_{2n+2}}{V_{2n+1}}.$$

On peut en conclure que, quand $n$ croît indéfiniment, $R_n$ tend à se réduire à une région limite que j'appelle R, qui peut se réduire à un seul point, mais qui contient au moins un point.

Le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ allant en croissant et étant plus petit que 1 tend vers une limite qui est au plus égale à 1; mais d'après ce qui précède, si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R, cette limite sera plus petite que $\frac{1}{2\nu - 1}$.

On peut donc trouver un nombre A tel que l'on ait

$$V_n < A(2\nu - 1)^{-n},$$

pourvu que le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ soit dans la région R.

Cela posé, il est aisé d'intégrer l'équation (2). Soient $d\omega$ et $d\omega'$ deux éléments de la surface de la sphère; D la distance de ces deux éléments; soient $\varepsilon'$ et $v'_{n-1}$ les valeurs des fonctions $\varepsilon$ et $v_{n-1}$ au centre de gravité de l'élément $d\omega'$; on aura

$$v_n = \int \frac{\varepsilon' v'_{n-1}\, d\omega'}{4\pi D}. \tag{6}$$

Je me propose de trouver la limite supérieure de $|v_n|$ que j'appelle $g_n$.

Pour cela, je divise la surface de la sphère en deux régions, que j'appelle $R''$ et $R'''$. Ces deux régions seront séparées l'une de l'autre par un petit cercle qui sera l'intersection de la sphère terrestre avec une autre sphère ayant pour centre l'élément $d\omega$ et pour rayon $\mu$. La région $R''$ sera celle des deux régions qui contiendra l'élément $d\omega$. Nous poserons

$$v_n = v''_n + v'''_n.$$

$v''_n$ sera défini comme $v_n$ par l'intégrale (6); seulement cette intégrale, au lieu d'être étendue à la sphère tout entière, sera étendue à la région R″; de même, $v_n'''$ sera l'intégrale (6) étendue à R‴.

Cela posé, nous aurons

$$(v_n''')^2 = \left[\int \frac{\varepsilon'^2 v'_{n-1}}{4\pi D}\,d\omega'\right]^2 < \int \varepsilon'^2 v'^2_{n-1}\,d\omega' \int \frac{d\omega'}{16\pi^2 D^2}.$$

Les intégrales doivent être étendues à R‴. La première est plus petite que

$$\int \varepsilon'^2 v'^2_{n-1}\,d\omega'$$

étendue à la sphère tout entière; mais cette dernière est égale à

$$\int \varepsilon' v'^2_{n-1}\,d\omega' = V_{2n-2};$$

car

$$\varepsilon' = 0 \quad \text{ou } 1 \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon' = \varepsilon'^2.$$

D'autre part,

$$\int \frac{d\omega'}{16\pi^2 D^2} < \int \frac{d\omega'}{16\pi^2\mu^2} < \frac{1}{4\pi\mu^2};$$

car dans R‴ on a $D > \mu$.

Il vient ainsi

$$|v_n'''| < \frac{\sqrt{V_{2n-2}}}{2\mu\sqrt{\pi}} < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{A}{\pi}}(2\nu - 1)^{-(n-1)}$$

(si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R).

On a ensuite

$$|v_n''| = \left|\int \frac{\varepsilon' v'_{n-1}}{4\pi D}\,d\omega'\right| < \int \frac{g_{n-1}\,d\omega'}{4\pi D}.$$

Les intégrales doivent être étendues à R″; la seconde est aisée à calculer; elle est égale à

$$\frac{\mu g_{n-1}}{2}.$$

Il vient donc

$$|v_n''| < \frac{\mu g_{n-1}}{2},$$

d'où

$$|v_n| < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{A}{\pi}}(2\nu-1)^{-(n-1)} + \frac{\mu}{2}g_{n-1}$$

et

$$g_n < \frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{A}{\pi}}(2\nu-1)^{-(n-1)} + \frac{\mu}{2}g_{n-1}.$$

La quantité $\mu$ est arbitraire; mais il nous suffit de lui donner une valeur quelconque; l'inégalité précédente peut s'écrire

$$g_n < \frac{a}{(2\nu-1)^n} + b g_{n-1},$$

$a$ et $b$ étant des constantes.

Si $\lambda$ est la plus petite des deux quantités

$$b = \frac{\mu}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\nu-1},$$

cela s'écrit

$$g_n < a\lambda^n + \lambda g_{n-1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&g_1 < (a+g_0)\lambda,\\
&g_2 < a\lambda^2 + \lambda g_1 < \lambda^2(2a+g_0),\\
&g_3 < a\lambda^3 + \lambda g_2 < \lambda^3(3a+g_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&g_n < \lambda^n(na+g_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Comme $\mu$ est arbitraire, je puis prendre

$$\mu < \frac{2}{2\nu-1},$$

d'où

$$\lambda = \frac{1}{2\nu-1}.$$

Il résulte de là que la série

$$v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \ldots$$

est (pourvu que le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ soit dans la région R) absolument et uniformément convergente toutes les fois que

$$|\xi| < 2\nu - 1.$$

Soit maintenant

$$\varphi^* = \alpha_1(\Phi + k) + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \ldots + \alpha_q v_{q-2} \qquad (q = \nu^2),$$

$$v_n^* = \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1} + \ldots + \alpha_q v_{n+q-1},$$

$$\text{(7)} \qquad V^* = v_0^* + \xi v_1^* + \xi^2 v_2^* + \ldots,$$

d'où

$$2\frac{dV^*}{dr} + V^* = \xi\varepsilon V^* + \varepsilon\varphi^*.$$

Si alors $V^*$ est regardée comme une fonction de $\xi$ définie par la série (7) et si le point $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est dans la région R, cette fonction de $\xi$ sera holomorphe dans le cercle de rayon $2\nu + 1$.

Mais on a

$$V^* = \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{V - v_0}{\xi} + \alpha_3 \frac{V - v_0 - v_1\xi}{\xi^2} + \ldots$$
$$+ \alpha_q \frac{V - v_0 - v_1\xi - \ldots - v_{q-2}\xi^{q-2}}{\xi^{q-1}},$$

d'où l'on peut conclure que V est une fonction rationnelle de $V^*$ et de $\xi$ et que, par conséquent, à l'intérieur du cercle de rayon $2\nu + 1$, V est une fonction méromorphe de $\xi$ dont les pôles sont les racines de l'équation

$$\alpha_1\xi^{q-1} + \alpha_2\xi^{q-2} + \alpha_3\xi^{q-3} + \ldots + \alpha_{q-1}\xi + \alpha_q = 0.$$

Comme $\nu$ est arbitraire, il résulte de là que V est méromorphe dans tout le plan et que ses pôles sont fixes, je veux dire indépendants du centre de gravité de l'élément $d\omega$.

Je vais maintenant montrer que les pôles sont simples et étudier les résidus; je veux démontrer que, si $\xi_i$ est un pôle et $U_i$ le résidu correspondant, on a à la surface de la sphère

$$\text{(8)} \qquad 2\frac{dU_i}{dr} + U_i = \varepsilon\xi_i U_i,$$

et à l'intérieur

$$\Delta U_i = 0.$$

Il me suffirait pour cela de répéter le raisonnement que j'ai fait dans mon Mémoire sur les équations de la Physique mathématique qui a été inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo;* il est inutile de le reproduire ici.

Le théorème de Green nous donne

$$\int\left(V\frac{dU_i}{dr} - U_i\frac{dV}{dr}\right)d\omega = 0,$$

ou en vertu des équations (1 *bis*) et (8)

$$\int \varepsilon\, d\omega[V\xi_i U_i - U_i(\xi V + \Phi + k)] = 0,$$

ou

$$(\xi_i - \xi)\int \varepsilon V U_i\, d\omega = \int \varepsilon U_i(\Phi + k)\, d\omega.$$

Soit alors

$$V = \frac{U_i}{\xi - \xi_i} + V',$$

$V'$ ne deviendra pas infini pour $\xi = \xi_i$; il viendra donc

$$-\int \varepsilon U_i^2\, d\omega + \int(\xi_i - \xi)V' U_i \varepsilon\, d\omega = \int \varepsilon U_i(\Phi + k)\, d\omega,$$

ou pour $\xi = \xi_i$

$$(9) \qquad -\int \varepsilon U_i^2\, d\omega = \int \varepsilon U_i(\Phi + k)\, d\omega.$$

### 2. — Fonctions fondamentales.

Il n'y aura, en général, qu'une seule fonction $U_i$ qui satisfasse à l'équation (8) ou plutôt toutes les fonctions qui satisferont à cette équation ne différeront que par un facteur constant.

Soit $u_i$ une de ces fonctions; je la choisirai de telle façon que

$$\int \varepsilon u_i^2 \, d\omega = 1,$$

et la solution la plus générale de l'équation (8) sera

$$U_i = A_i u_i,$$

$A_i$ étant un facteur constant; je dirai que $u_i$ est une fonction *fondamentale.*

Il est aisé de voir que, si $u_i$ et $u_k$ sont deux fonctions fondamentales correspondant à deux nombres différents $\xi_i$ et $\xi_k$, on aura

$$\int \varepsilon u_i u_k \, d\omega = 0. \tag{10}$$

Mais il peut arriver aussi que plusieurs fonctions linéairement indépendantes satisfassent à une même équation (8). Il n'y en aura en tout cas qu'un nombre fini (au plus $\nu^2$, si $|\xi_i| < 2\nu - 1$).

Toutes les fonctions $U_i$ qui satisfont à l'équation (8) peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q + 1$ fonctions linéairement indépendantes que j'appellerai *fondamentales* et que je désignerai par

$$u_i, \quad u_{i+1}, \quad \ldots, \quad u_{i+q}.$$

Je pourrai choisir ces fonctions fondamentales de telle façon que

$$\int \varepsilon u_i^2 \, d\omega = 1, \qquad \int \varepsilon u_i u_k \, d\omega = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Nous aurons alors

$$U_i = A_i u_i + A_{i+1} u_{i+1} + \ldots + A_{i+q} u_{i+q},$$

les A étant des facteurs constants.

Voici quelles règles je suivrai pour le numérotage des fonctions $u_i$ et des nombres $\xi_i$.

J'observe d'abord que les nombres $\xi_i$ sont essentiellement positifs et plus grands que 1.

Je les rangerai par ordre de grandeur croissante. Mais il pourra arriver, comme je viens de le dire, qu'un même nombre $\xi_i$ corresponde à $q+1$ fonctions fondamentales

$$u_i, \quad u_{i+1}, \quad \ldots, \quad u_{i+q}.$$

Dans ce cas, je désignerai indifféremment le nombre $\xi_i$ par les lettres

$$\xi_i, \quad \xi_{i+1}, \quad \ldots, \quad \xi_{i+q},$$

et le nombre suivant sera $\xi_{i+q+1}$.

Dans ces conditions le nombre $\xi_k$ correspondra toujours à la fonction $u_k$ de même indice, et au lieu d'écrire le terme infini de V correspondant au pôle $\xi = \xi_i$ sous la forme

$$\frac{U_i}{\xi - \xi_i},$$

je pourrai l'écrire

$$\frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i} + \frac{A_{i+1} u_{i+1}}{\xi - \xi_{i+1}} + \ldots + \frac{A_{i+q} u_{i+q}}{\xi - \xi_{i+q}}.$$

Les coefficients $A_i$ se calculent aisément à l'aide de la formule (9); on trouve

$$A_i = -\int \varepsilon\, u_i(\Phi + k)\, d\omega.$$

On aura évidemment l'inégalité

$$\xi_{\nu^2} > 2\nu - 1. \tag{11}$$

Si une fonction quelconque F est développable en série de fonctions fondamentales sous la forme

$$F = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \ldots,$$

on aura, en vertu des relations (10),

$$B_i = \int \varepsilon u_i F \, d\omega.$$

L'analogie avec les fonctions sphériques est donc évidente.

D'ailleurs, il y a un cas où nos fonctions fondamentales se réduisent aux fonctions sphériques elles-mêmes: c'est le cas de $\varepsilon = 1$; c'est-à-dire celui où les mers recouvrent toute la surface du Globe.

De l'égalité (6) nous avons déduit plus haut l'inégalité suivante, où $g_n$ représente le maximum de $|v_n|$ :

$$g_n < \frac{1}{2\mu\sqrt{\pi}}\sqrt{V_{2n-2}} + \frac{\mu}{2} g_{n-1}. \tag{12}$$

Nous avons de même

$$2\frac{du_i}{dr} + u_i = \varepsilon \xi_i u_i,$$

d'où

$$u_i = \xi_i \int \frac{\varepsilon' u'_i \, d\omega'}{4\pi D}.$$

Cette relation, où les notations ont le même sens que dans la relation (6), est analogue à l'égalité (6); seulement $v_n$ et $v_{n-1}$ sont remplacés par $u_i$ et $\xi_i u_i$.

Nous pourrons donc récrire l'inégalité (12) en y remplaçant $g_n$ par le maximum de $|u_i|$, que j'appelle $G_i$, $g_{n-1}$ par le maximum de $|\xi_i u_i|$, qui est $\xi_i G_i$, et

$$V_{2n-2} = \int \varepsilon v_{n-1}^2 \, d\omega,$$

par

$$\int \varepsilon \xi_i^2 u_i^2 \, d\omega = \xi_i^2.$$

L'inégalité devient ainsi

$$G_i < \frac{\xi_i}{2\mu\sqrt{\pi}} + \frac{\mu}{2}\xi_i G_i.$$

Comme $\mu$ est arbitraire, je puis le choisir de façon à rendre le second membre minimum ; je prendrai donc

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{G_i}\,\pi^{\frac{1}{4}}},$$

d'où

$$G_i < \xi_i \frac{\sqrt{G_i}}{\sqrt[4]{\pi}},$$

d'où enfin

$$G_i < \frac{\xi_i^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Nous avons ensuite, par l'inégalité de Schwarz,

$$A_i^2 = \left[\int \varepsilon\, u_i(\Phi + k)\, d\omega\right]^2 < \int \varepsilon^2 u_i^2\, d\omega \int (\Phi + k)^2\, d\omega.$$

La première des intégrales du dernier membre est égale à 1 par la relation (10); la seconde peut être regardée comme donnée; je l'appelle $Q^2$ et j'en déduis

$$|A_i| < Q.$$

Envisageons la série

$$\sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}\left(\frac{\xi}{\xi_i}\right)^p.$$

Cette série sera absolument convergente si la suivante l'est

$$\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^{p+1}}.$$

Or, le terme général de cette série est plus petit que

$$\frac{Q}{\sqrt{\pi}} \xi_i^{-(p-1)}.$$

Or

$$\xi_{\nu^2} > 2\nu - 1.$$

Donc

$$\xi_i > C'\sqrt{i},$$

C′ étant une constante. Le terme général est donc plus petit qu'un facteur constant multiplié par

$$\xi_i^{-\frac{p-1}{2}}.$$

La condition de convergence est donc que

$$p > 3.$$

Considérons alors la série

$$\mathrm{W} = \sum \frac{\mathrm{A}_i u_i \xi^5}{(\xi - \xi_i)\xi_i^5};$$

elle converge uniformément et représente une fonction méromorphe W qui a mêmes pôles et mêmes résidus que V; on a donc

$$\mathrm{V} = \mathrm{W} + \mathrm{E}(\xi),$$

E désignant une fonction entière de $\xi$.

D'autre part, on a

$$2\frac{d\mathrm{W}}{dr} + \mathrm{W} = \varepsilon \sum \frac{\mathrm{A}_i u_i \xi^5}{(\xi - \xi_i)\xi_i^4},$$

la série du second membre convergeant uniformément, d'où

$$2\frac{d\mathrm{W}}{dr} + \mathrm{W} = \varepsilon\xi\mathrm{W} - \varepsilon\xi^5 \sum \frac{\mathrm{A}_i u_i}{\xi_i^5};$$

la série du dernier terme du second membre est encore absolument et uniformément convergente. Comme on a, d'autre part,

$$2\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \mathrm{V} = \varepsilon\xi\mathrm{V} + \varepsilon(\Phi + k),$$

on en déduira

$$2\frac{d\mathrm{E}}{dr} + \mathrm{E} = \varepsilon\xi\mathrm{E} + \varepsilon(\Phi + k) + \varepsilon\xi^5 \sum \frac{\mathrm{A}_i u_i}{\xi_i^5}.$$

Soit alors

(13) $$\mathrm{E} = e_0 + e_1\xi + e_2\xi^2 + \ldots,$$

on aura

$$\frac{2\,de_n}{dr}+e_n=\varepsilon e_{n-1},$$

sauf pour $n=0$ et $n=5$, pour lesquels nous devrons écrire les équations suivantes :

$$\frac{2\,de_0}{dr}+e_0=\varepsilon(\Phi+k); \qquad \frac{2\,de_5}{dr}+e_5=\varepsilon e_4+\varepsilon\sum\frac{A_i u_i}{\xi_i^5}.$$

Les équations qui définissent les $e_n$ sont donc à partir de $n=6$ tout à fait de même forme que les équations qui définissent les $v_n$.

Si donc nous désignons par $E_{m,n}$ les intégrales analogues aux $V_{m,n}$, nous voyons que

$$E_{m,n}=E_{m+n},$$

$$E_n>0, \qquad \frac{E_{n+1}}{E_n}<\frac{E_{n+2}}{E_{n+1}}.$$

Ces inégalités sont vraies pour $n>10$; donc à partir de $n=10$, le rapport $\frac{E_{n+1}}{E_n}$ qui est positif va en croissant; et alors à moins que ce rapport ne soit constamment nul, il tendra vers une limite différente de 0 qui sera l'inverse du rayon de convergence de la série (13).

Mais la fonction E doit être entière : il faut donc que ce rapport soit constamment nul et que l'on ait

$$E_{n+1}=0,$$

pour $n>10$; on a donc

$$\int\varepsilon e_n^2\,d\omega=0,$$

et, par conséquent

$$e_n=0,$$

pour $n\geqq 6$.

La fonction E est donc un polynome du 5e degré.

Comme W est divisible par $\xi^5$, on aura évidemment

$$E=v_0+v_1\xi+v_2\xi^2+v_3\xi^3+v_4\xi^4+v_5\xi^5.$$

On a, d'ailleurs, en comparant les développements de E, V et W,

$$v_5 = e_5 - \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^6}, \qquad v_6 = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^7}.$$

L'équation

$$2\frac{dv_6}{dr} + v_6 = \varepsilon v_5$$

donne alors

$$\varepsilon v_5 = -\varepsilon \sum \frac{A_i u_i}{\xi_i^6},$$

d'où

$$\varepsilon e_5 = 0.$$

Si maintenant je suppose que l'on puisse trouver cinq fonctions $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$, $w_5$ telles que

$$2\frac{dw_2}{dr} + w_2 = \varepsilon w_1, \qquad 2\frac{dw_3}{dr} + w_3 = \varepsilon w_2, \qquad 2\frac{dw_4}{dr} + w_4 = \varepsilon w_3,$$

$$2\frac{dw_5}{dr} + w_5 = \varepsilon w_4, \qquad 2\frac{d\Phi + k}{dr} + \Phi + k = \varepsilon w_5,$$

la série

$$(14) \qquad \sum A_i u_i$$

convergera et l'on aura tout simplement

$$(15) \qquad V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

C'est ce qui arrivera si la fonction $\Phi + k$ est continue ainsi que toutes ses dérivées et si elle s'annule ainsi que ses dérivées des cinq premiers ordres sur le bord des continents.

J'ajouterai que, selon toutes les analogies, la série (14) est probablement toujours convergente et la formule (15) toujours vraie.

### 3-4. — Application aux marées.

Supposons donc que la série (14) soit toujours convergente, ce qui donne

$$\Phi + k = -\sum A_i u_i,$$

$$V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i}.$$

La fonction $\Phi$ est donnée; nous pourrons donc la développer sous la forme

$$\Phi = \sum B_i u_i,$$

et nous aurons de même

$$1 = \sum C_i u_i.$$

Une fois qu'on a admis la possibilité du développement, rien n'est plus facile, comme nous l'avons vu, que de calculer les coefficients $B_i$ et $C_i$.

On a alors

$$A_i = -B_i - C_i k.$$

Il reste à calculer la constante $k$; nous le ferons en remarquant que le volume du liquide doit demeurer constant.

Or la variation de ce volume est proportionnelle à

$$\int \left(2\frac{dV}{dr} + V\right) d\omega.$$

Je fais remarquer que sur les continents

$$2\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

On doit donc avoir

$$\int \left(2\frac{dV}{dr} + V\right) d\omega = 0.$$

Or

$$2\frac{dV}{dr} + V = \varepsilon \sum \frac{A_i u_i \xi_i}{\xi - \xi_i}.$$

Il vient ainsi

$$(16)\qquad k\sum\frac{C_i\xi_i}{\xi-\xi_i}\int\varepsilon u_i\,d\omega+\sum\frac{B_i\xi_i}{\xi-\xi_i}\int\varepsilon u_i\,d=\omega o,$$

ce qui déterminerait la constante $k$.

Il faut faire finalement $\xi=\xi_0$.

Si l'on suppose que les mers recouvrent tout le globe, les fonctions fondamentales $u_i$ se réduisent aux fonctions sphériques $X_i$; les nombres $\xi_i$ sont égaux à $2\nu-1$; $\nu$ étant la racine carrée de $i$ à une unité près *par excès*.

On a alors

$$C_i=\int\varepsilon u_i\,d\omega=\int X_i\,d\omega,$$

ce qui montre que tous les $C_i$ sont nuls, sauf $C_1$.

De plus, dans l'équation (16), tous les termes $\int\varepsilon u_i\,d\omega$ sont nuls, sauf le premier; il reste donc

$$kC_1+B_1=0.$$

Dans le cas particulier des marées $\Phi$ a une forme particulière; c'est une fonction sphérique du deuxième ordre; je puis toujours supposer que

$$\Phi=B_5X_5,$$

puisque le choix des cinq fonctions fondamentales

$$u_i=X_i\qquad(i=5,6,7,8,9),$$

qui doivent être des fonctions sphériques du deuxième ordre, reste arbitraire dans une certaine mesure.

On a, d'ailleurs,

$$B_1=0,$$

d'où

$$k=0,\qquad A_5=-B_5,$$

$$V=\frac{-\Phi}{\xi-\xi_5}=\frac{\Phi}{5-\xi}.$$

Si l'on fait d'abord $\xi = 0$, c'est-à-dire si l'on néglige l'attraction du liquide sur lui-même, il vient

$$V = \frac{\Phi}{5}.$$

Si l'on fait ensuite $\xi = \xi_0$, il vient

$$V = \frac{\Phi}{5 - \xi_0} = \frac{\Phi}{5} \frac{5}{5 - \xi_0}.$$

Comme on a à peu près $\xi_0 = \frac{3}{5}$, cela fait

$$V = \frac{\Phi}{5} \frac{25}{22}.$$

On voit que l'erreur commise en négligeant l'attraction du liquide sur lui-même est assez faible.

Supposons maintenant que la mer ne recouvre plus le globe tout entier, mais négligeons l'attraction du liquide sur lui-même, il viendra

$$V = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i},$$

d'où, à la surface des mers,

$$2 \frac{dV}{dr} + V = \Phi + k.$$

La constante $k$ doit être déterminée par la condition que la variation du volume total soit nulle.

Lord Kelvin et M. Tait, dans leur *Traité de Philosophie naturelle,* ont appliqué cette méthode aux oscillations lentes dont la période est de six mois ou de quinze jours; ils ont comparé le résultat obtenu avec l'observation; cette comparaison n'est pas satisfaisante si l'on tient compte de ce fait que la marée apparente devrait être diminuée par la déformation éprouvée par la croûte terrestre elle-même, qui n'est pas absolument rigide. Le résultat ne pourrait s'expliquer qu'en admettant, non seulement, que le globe terrestre est un solide plein, mais qu'il est beaucoup plus rigide que l'acier.

Sans doute, la méthode employée par les deux illustres savants anglais consiste à négliger l'attraction du liquide sur lui-même. Nous venons de voir que, dans le cas où les mers recouvrent le globe entier, l'erreur relative qui est commise est de $\frac{3}{22}$. Les auteurs concluent qu'elle doit être aussi très faible dans le cas de la nature.

Je ne m'inscris pas en faux contre cette conclusion, elle est probablement exacte; je voudrais seulement montrer qu'elle n'est pas aussi évidente qu'on pourrait d'abord le croire.

Nous avons

$$V = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i - \xi_0},$$

au lieu de

$$V = -\sum \frac{A_i u_i}{\xi_i}.$$

L'erreur relative commise *sur un terme* de la série est donc

$$\frac{\xi_0}{\xi_i - \xi_0}.$$

Comme $\xi_i$ est plus grand que $2\nu - 1$, s'il y a des continents, et égal à $2\nu - 1$ s'il n'y en a pas, cette erreur est plus petite dans le premier cas que dans le second.

Mais, d'autre part, les termes en

$$A_1 u_1, \quad A_2 u_2, \quad A_3 u_3, \quad A_4 u_4,$$

qui disparaissent quand il n'y a pas de continents, ne sont pas nuls quand il y a des continents.

D'un autre côté, on peut concevoir que les valeurs de $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ soient voisines de ce qu'elles seraient si les continents n'existaient pas, c'est-à-dire de 1 et de 3.

Les erreurs relatives commises sur ces quatre termes seraient alors voisines de $\frac{3}{2}$ ou de $\frac{1}{4}$.

On peut donc concevoir que, pour certaines formes particulières des continents, l'erreur relative commise sur V soit notablement plus grande que $\frac{3}{22}$.

Il est probable qu'il n'en est pas ainsi, mais pour le vérifier il faudrait faire le calcul complet, et à cause de la forme capricieuse des continents ce calcul, même réduit à une approximation grossière, serait absolument inextricable.

## 5. — Généralités sur les oscillations.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des oscillations à longue période, ce qui est une simple question de Statique; les oscillations à courte période doivent, au contraire, être traitées en tenant compte de l'inertie, c'est-à-dire comme une question de Dynamique.

Considérons d'abord un système dont la position est définie par $n$ coordonnées quelconques $q_1, q_2, \ldots, q_n$; soient $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ les vitesses, c'est-à-dire les dérivées de ces coordonnées.

Soient T l'énergie cinétique, U l'énergie potentielle due aux forces intérieures. Soit

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_n\,\delta q_n$$

le travail virtuel des forces extérieures correspondant à une variation virtuelle $\delta q_i$ de la coordonnée $q_i$.

Les équations de Lagrange nous donneront

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a} - \frac{dT}{dq_a} + \frac{dU}{dq_a} = Q_a \qquad (a = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Les $Q_a$ sont des fonctions données du temps.

Je suppose que le système ne s'écarte jamais beaucoup d'un certain état d'équilibre stable. Cet état d'équilibre stable devra correspondre à un minimum de la fonction U. Je suppose, par exemple, qu'il corresponde aux valeurs

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0, \qquad U = 0.$$

Je suppose que U s'annule avec les $q$, ce qui est permis, puisque U n'est déterminé qu'à une constante près. Alors U est développable suivant les puissances des $q_a$; le développement commence par des termes du second degré. Comme les $q_a$ sont très petits, je m'arrêterai à ces termes et U sera un polynome homogène du second degré par rapport aux $q_a$.

Avec cette même approximation, T sera un polynome homogène du second degré par rapport aux $q'_a$, indépendant des $q_a$ et nos équations deviendront

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a} + \frac{dU}{dq_a} = Q_a. \tag{2}$$

Les premiers membres de ces équations sont des polynomes linéaires et à coefficients constants par rapport aux $q$ et aux $q''$; les seconds membres sont des fonctions connues de $t$. Nous avons donc des équations différentielles linéaires à second membre et il faut d'abord intégrer les équations sans second membre,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a} + \frac{dU}{dq_a} = 0. \tag{3}$$

Il faut, pour faire l'intégration, poser

$$q_a = \alpha_a \cos\lambda t, \qquad q'_a = -\alpha_a \lambda \sin\lambda t, \tag{4}$$

les $\alpha_a$ et $\lambda$ étant des constantes qu'il s'agit de déterminer.

Soient $T_0$ et $U_0$ ce que deviennent T et U quand on y remplace les $q_a$ et les $q'_a$ par les $\alpha_a$. Quand on y remplacera les $q_a$ et les $q'_a$ par leurs valeurs (4), on trouvera

$$U = U_0 \cos^2\lambda t, \qquad T = T_0 \lambda^2 \sin^2\lambda t; \qquad \frac{dU}{dq_a} = \frac{dU_0}{d\alpha_a}\cos\lambda t$$

$$\frac{dT}{dq'_a} = -\lambda \sin\lambda t \frac{dT_0}{d\alpha_a}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_a} = -\lambda^2 \cos\lambda t \frac{dT_0}{d\alpha_a},$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$\lambda^2 \frac{dT_0}{d\alpha_a} = \frac{dU_0}{d\alpha_a}. \tag{5}$$

L'ensemble des équations (5) signifie que $\lambda^2 T_0 - U_0$, qui est une forme quadratique par rapport aux $\alpha_a$, a son discriminant nul.

L'équation qui exprime que ce discriminant est nul est une équation algébrique de degré $n$ en $\lambda^2$; comme T et U sont deux formes quadratiques définies positives, cette équation en $\lambda^2$ a toutes ses racines réelles et positives.

Le théorème des fonctions homogènes, comparé aux équations (5), nous donne évidemment

$$\lambda^2 T_0 = U_0,$$

et les équations (5) deviennent

$$\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{d\alpha_a} = \frac{1}{U_0}\frac{dU_0}{d\alpha_a}$$

ou

$$\frac{d}{d\alpha_a}\left(\frac{T_0}{U_0}\right) = 0,$$

de sorte que la résolution des équations (5) revient à la recherche des maxima et des minima, ou des *maxima minimorum* du rapport

$$\frac{T_0}{U_0}.$$

Je désignerai par

$$\pm\lambda_1, \quad \pm\lambda_2, \quad \ldots, \quad \pm\lambda_n$$

les $n$ racines de l'équation en $\lambda^2$; les lettres $\alpha_a^{(i)}$ seront les valeurs des $\alpha_a$ qui satisfont aux équations (5) en y faisant $\lambda = \lambda_i$.

D'après la théorie des formes quadratiques, les deux formes $T_0$ et $U_0$ peuvent toujours se décomposer comme il suit

$$T_0 = P_1^2 + \ldots + P_n^2,$$
$$U_0 = \mu_1 P_1^2 + \ldots + \mu_n P_n^2,$$

les P étant des polynomes linéaires et homogènes par rapport aux $\alpha_a$ et les $\mu$ étant des constantes.

On voit tout de suite alors que

$$\mu_i = \lambda_i^2$$

et que les valeurs des $\alpha_a^{(i)}$ satisferont aux équations suivantes équivalentes aux équations (5) et qui sont au nombre de $n-1$

$$P_k = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, i-1 \\ k = i+1, i+2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Comme ces équations ne déterminent les $\alpha_a^i$ qu'à un facteur constant près, nous disposerons de ce facteur constant de telle sorte que

$$P_i(\alpha_a^{(i)}) = 1.$$

On a alors

$$2\,P_i(\alpha_a) = \sum \alpha_a \frac{dT_0(x_a^{(i)})}{dx_a^{(i)}} = \frac{1}{\lambda_i^2} \sum \alpha_a \frac{dU_0(x_a^{(i)})}{dx_a^{(i)}},$$

ce qui entraîne les équations

$$(6) \qquad \sum \alpha_a^{(i)} \frac{dT_0(x_a^{(i)})}{dx_a^{(i)}} = 2; \qquad \sum \alpha_a^{(k)} \frac{dT_0(x_a^{(i)})}{dx_a^{(i)}} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Voici maintenant comment on pourra conduire le raisonnement.

Le rapport $\frac{U_0}{T_0}$ ne peut s'annuler, il a donc un minimum $\lambda_1^2$ qui est atteint pour $\alpha_a = \alpha_a^{(1)}$; assujettissons ensuite les $\alpha_a$ à la condition

$$(7) \qquad \sum \alpha_a^{(1)} \frac{dT_0(x_a)}{dx_a} = 0;$$

il y aura encore un minimum (plus grand que le premier), que j'appelle $\lambda_2^2$ et qui sera atteint pour $\alpha_a = \alpha_a^{(2)}$.

J'assujettis ensuite les $\alpha_a$ à la condition (7) et de plus à la condition

$$(7\,bis) \qquad \sum \alpha_a^{(2)} \frac{dT_0(x_a)}{dx_a} = 0,$$

et j'obtiens un nouveau minimum $\lambda_3^2$, et ainsi de suite.

Toutes ces considérations permettent de définir les $\alpha_a^{(i)}$ et les $\lambda_i$ et nous fournissent par conséquent la solution complète des équations sans second membre ; revenons maintenant aux équations à second membre (2).

Les $Q_a$ sont des fonctions de $t$ qui pourront toujours se mettre sous la forme d'intégrales de Fourier ; mais il nous suffira de nous réduire pour ainsi dire à l'un des éléments de ces intégrales et à poser

$$Q_a = R_a \cos \lambda t,$$

les $R_a$ étant des constantes données.

Nous pourrons alors résoudre les équations (2) en posant

$$q_a = \alpha_a \cos \lambda t;$$

c'est cette solution qui constituera ce qu'on peut appeler une oscillation simple *forcée*, tout à fait analogue aux ondes élémentaires dont la réunion constitue les marées ; tandis que nous réserverons le nom d'oscillations simples *propres* aux solutions

$$q_a = \alpha_a^{(i)} \cos \lambda_i t$$

des équations (3).

Les équations (2) deviennent alors (en divisant par $\cos \lambda t$)

$$(8) \qquad -\lambda^2 \frac{dT_0}{d\alpha_a} + \frac{dU_0}{d\alpha_a} = R_a.$$

Multiplions les équations (8) par $\alpha_a^{(i)}$ et ajoutons, il viendra

$$(9) \qquad 2(\lambda_i^2 - \lambda^2) P_i(\alpha_a) = \Sigma R_a \alpha_a^{(i)}.$$

Les $n$ équations (8) sont ainsi remplacées par les $n$ équations (9).

Si l'on avait

$$R_a = k \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(i)}} \quad \left[\text{j'écris } \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(i)}} \text{ pour } \frac{dT_0(\alpha_a^{(i)})}{d\alpha_a^{(i)}}\right].$$

la solution serait immédiate et l'on aurait

$$\alpha_a = \frac{k\alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

On est donc conduit à chercher à déterminer les $n$ coefficients

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

par les $n$ équations

$$\text{(10)} \qquad R_a = k_1 \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(1)}} + k_2 \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(2)}} + \ldots + k_n \frac{dT_0}{d\alpha_a^{(n)}}.$$

Pour cela, multiplions ces équations par $\alpha_a^{(i)}$ et ajoutons; il viendra, en vertu de (6),

$$\Sigma R_a \alpha_a^{(i)} = 2k_i.$$

Les coefficients $k_i$ étant ainsi déterminés, on aura

$$\text{(11)} \qquad \alpha_a = \sum_i \frac{k_i \alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^2 - \lambda^2}.$$

On voit comment l'étude des oscillations forcées se ramène à celle des oscillations propres.

Dans les problèmes que nous aurons à traiter, la situation du système n'est plus définie par un nombre fini de paramètres, mais par une infinité; T et U ne s'expriment plus par des sommes de termes, mais par des intégrales définies.

Tout ce que nous avons dit subsiste d'ailleurs; la manière d'étudier les oscillations propres par la suite des minima successifs du rapport de T à U; celle de ramener les oscillations forcées aux oscillations propres; enfin les équations (6) où il faut remplacer les sommes par des intégrales et qui deviennent ainsi ces séries d'équations, analogues aux équations (10) du n° **2**, et que l'on rencontre dans tous les problèmes de Physique mathématique.

La première idée de cette généralisation, qui est le fondement de tout ce qui va suivre, est due à lord Rayleigh.

Les équations (11) montrent que les $\alpha_a$ sont des fonctions rationnelles de $\lambda^2$; ces fonctions sont les analogues de la fonction V étudiée dans le n° **1** et qui est une fonction méromorphe de $\xi$.

Nous pouvons tirer de ces mêmes équations (11) $\alpha_a$ développé suivant les puissances de $\lambda^2$; il viendra

$$\alpha_a = \beta_a^{(0)} + \beta_1^{(1)}\lambda^2 + \beta_2^{(2)}\lambda^4 + \ldots$$

avec la condition

$$\beta_a^{(k)} = \sum \frac{k_i \alpha_a^{(i)}}{\lambda_i^{2k+2}}.$$

Formons maintenant les expressions

$$(12) \qquad \sum_a \beta_a^{(m)} \frac{dT_0}{d\beta_a^{(n)}}; \qquad \sum \beta_a^m \frac{dU_0}{d\beta_a^{(n)}}$$

(je suppose, bien entendu, que dans $T_0$ et $U_0$ les $\alpha_a$ ont été remplacés par $\beta_a^{(n)}$).

Ces expressions sont analogues aux intégrales $V_{m,n}$ considérées dans le n° 1.

On trouve aisément

$$\sum_a \beta_a^{m} \frac{dT_0}{d\beta_a^{(n)}} = \sum \frac{2k_i^2}{\lambda_i^{2m+2n+2}},$$

$$\sum_a \beta_a^{(m)} \frac{dU_0}{d\beta_a^{(n)}} = \sum \frac{2k_i^2}{\lambda_i^{2m+2n+2}}.$$

Ces équations montrent que les expressions (12) ne changent pas quand on change $m$ et $n$ en $m+h$ et $n-h$.

Cette proposition est analogue à l'équation

$$V_{m,n} = V_{m+1,n-1}$$

démontrée dans le n° 1.

## 6. — Oscillations propres des liquides.

Considérons un liquide enfermé dans un vase assez petit pour qu'à l'intérieur de ce vase la pesanteur puisse être regardée comme une force constante en grandeur et en direction. La surface libre du liquide en équilibre se réduira à un plan horizontal.

Nous supposerons que l'on peut négliger l'attraction mutuelle des diverses portions du liquide et les effets de la force centrifuge composée; et nous proposons d'étudier les petites oscillations de ce liquide lorsqu'il a été peu écarté de sa position d'équilibre, puisqu'il est abandonné à lui-même.

A l'origine du temps, le liquide est écarté de sa position d'équilibre, mais il est en repos; si la forme initiale de la surface libre, écartée de l'équilibre, est convenablement choisie, le mouvement du liquide sera périodique, et nous aurons ce qu'on appelle *une oscillation propre simple*.

Si cette forme initiale est quelconque, le mouvement du liquide résulte de la superposition d'une infinité d'oscillations simples. Dans tous les cas, d'après le théorème de Lagrange, comme nous partons du repos, il y aura une fonction des vitesses.

Considérons le cas d'une oscillation simple; comme le mouvement est périodique, cette fonction sera de la forme

$$\Phi = \varphi \sin \lambda t,$$

$\varphi$ étant indépendant du temps. L'équation de continuité sera

$$\Delta\varphi = 0.$$

La pression $p$, si nous prenons la densité du liquide pour unité et l'axe des $z$ dirigé de haut en bas, sera donnée par la formule

$$p = gz - \frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right].$$

Mais les mouvements étant très petits, nous pouvons négliger le carré de $\Phi$ et il reste

$$p = gz - \frac{d\Phi}{dt} = gz - \lambda\varphi \cos \lambda t.$$

La force vive du liquide est égale

$$\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right] d\tau = \frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau.$$

L'intégration doit être étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du liquide.

Quant à l'énergie potentielle, elle est égale à

$$\frac{1}{2}\int g z^2 \, d\omega,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre du liquide.

Cette surface libre, en négligeant des infiniment petits, peut être assimilée à un plan horizontal et nous prendrons ce plan pour plan des $xy$.

Une molécule qui se trouve à la surface libre était dans le plan des $xy$ quand le liquide était en équilibre. La quantité $z$ qui entre dans notre intégrale n'est donc autre chose que la projection sur l'axe des $z$ du déplacement de cette molécule.

Or les projections du déplacement d'une molécule sur les trois axes sont évidemment égales à

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx}, \quad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dy}, \quad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

L'énergie potentielle est donc égale à

$$\frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega = \frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dx\,dy.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, le problème est ainsi ramené à rechercher les maxima et minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

à l'intégrale

$$B = \int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega.$$

La première intégrale est étendue aux éléments $d\tau$ du volume du liquide et ce volume est limité, d'une part, par la surface de la paroi du vase et, d'autre part, par la surface libre qui est une portion du plan des $xy$. La seconde intégrale est étendue à la surface libre.

La fonction $\varphi$ est assujettie à deux conditions :

1° A l'intérieur du vase, on aura

$$\Delta\varphi = 0.$$

2° Sur la surface de la paroi, on aura

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On trouve

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int \sum \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d\,\delta\varphi}{dx}\,d\tau,$$

ou, en vertu du théorème de Green,

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int \frac{d\varphi}{dn}\,\delta\varphi\,d\omega + \int \frac{d\varphi}{dn}\,\delta\varphi\,d\omega' - \int \Delta\varphi\,\delta\varphi\,d\tau.$$

La première intégrale est étendue à la surface libre, le long de laquelle on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

La seconde est étendue à la surface de la paroi; elle est nulle.

La troisième est étendue au volume du vase; elle est également nulle.

Il reste donc

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int \frac{d\varphi}{dz}\,\delta\varphi\,d\omega.$$

On trouve, d'autre part,

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int \frac{d\varphi}{dz}\,\delta\,\frac{d\varphi}{dz}\,d\omega.$$

Mais le théorème de Green nous donne également

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int \varphi\,\frac{d\,\delta\varphi}{dn}\,d\omega + \int \varphi\,\frac{d\,\delta\varphi}{dn}\,d\omega' - \int \varphi\,\delta\,\Delta\varphi\,d\tau.$$

Mais la fonction $\varphi$ étant *assujettie* aux deux conditions $\Delta\varphi = 0$, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, on devra avoir :

Sur la surface de la paroi

$$\frac{d\,\delta\varphi}{dn} = 0.$$

Donc la seconde intégrale est nulle.

Dans l'intérieur du vase

$$\Delta\delta\varphi = 0.$$

Donc la troisième intégrale est nulle.

Sur la surface libre

$$\frac{d\delta\varphi}{dn} = \frac{d\delta\varphi}{dz} = \delta\frac{d\varphi}{dz}.$$

Donc enfin

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \varphi\delta\frac{d\varphi}{dz}d\omega.$$

Soit U le volume du liquide, ce volume est constant; on a donc

$$\delta U = -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\left(\int\frac{d\delta\varphi}{dn}d\omega + \int\frac{d\delta\varphi}{dn}d\omega'\right) = 0,$$

donc

$$\int\delta\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Pour que $\delta\frac{A}{B}$ soit nul, il faut que $\delta B = 0$ soit une conséquence de $\delta A = 0$ et $\delta U = 0$, ce qui exige qu'à la surface libre on ait

$$\frac{d\varphi}{dz} = a\varphi + b,$$

$a$ et $b$ étant des constantes. Mais la fonction des vitesses n'est définie qu'à une constante près; je puis donc supposer $b = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\delta\frac{A}{B} = 0;$$

c'est donc que le rapport de $\varphi$ à $\frac{d\varphi}{dz}$ soit constant en tous les points de la surface libre.

Ainsi la recherche des oscillations propres simples du liquide se ramène à la détermination d'une fonction $\varphi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur du vase

$$\Delta\varphi = 0.$$

2° Sur la paroi du vase

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

3° Sur la surface libre

$$\frac{d\varphi}{dz} : \varphi = \text{const.}$$

On peut arriver à ce résultat d'une autre manière. Nous avons trouvé

$$p = gz - \lambda\varphi \cos\lambda t.$$

A la surface libre $p$ est nul, et $z$ est égal à la projection du déplacement sur l'axe des $z$, ainsi que je l'ai dit plus haut, c'est-à-dire à

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

On a donc

$$g\frac{d\varphi}{dz} = -\lambda^2\varphi.$$

La recherche des fonctions $\varphi$, qui correspondent aux différentes oscillations simples et qui sont analogues dans une certaine mesure aux fonctions fondamentales du n° **2**, le développement d'une fonction quelconque en série procédant suivant ces fonctions fondamentales, se ferait d'après des procédés analogues à ceux des premiers numéros de ce travail ou de mon Mémoire cité des *Rendiconti*.

Mais je préfère ne pas m'y attarder et passer tout de suite au cas où la profondeur du vase est très petite.

Soit $h$ la profondeur du vase, de telle façon que la surface de la paroi ait pour équation

$$z = h(x, y).$$

Je supposerai que $h$ est très petit ainsi que ses dérivées $\frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dy}$.

Je développe $\varphi$ suivant les puissances croissantes de $z$ et j'ai

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \ldots.$$

A la surface libre, c'est-à-dire pour $z = 0$, nous devons avoir

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi,$$

d'où

(1) $$\varphi_1 = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0.$$

A l'intérieur nous devons avoir $\Delta\varphi = 0$, ce qui s'écrit

$$(\Delta\varphi_0 + z\Delta\varphi_1 + \ldots) + (2\varphi_2 + 6z\varphi_3 + 12z^2\varphi_4 + \ldots) = 0,$$

ou, en faisant $z = 0$,

(2) $$\Delta\varphi_0 + 2\varphi_2 = 0.$$

Au fond du vase, c'est-à-dire pour $z = h$, nous devons avoir

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Comme les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à

$$\frac{dh}{dx}, \quad \frac{dh}{dy} \quad \text{et} \quad -1,$$

cela peut s'écrire

(3) $$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dh}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dh}{dy}.$$

Or, pour $z = h$, on a

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi_1 + 2\varphi_2 h + 3\varphi_3 h^2 + \ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi_0}{dx} + h\frac{d\varphi_1}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi_0}{dy} + h\frac{d\varphi_1}{dy} + \ldots.$$

Je substitue dans l'équation (3) en négligeant le carré de $h$ et j'obtiens

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 h = \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi_0}{dy}. \tag{4}$$

Tirons $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de (1) et de (2) et substituons dans (4) il viendra

$$-\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0 = h\Delta\varphi_0 + \sum \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi_0}{dx}$$

ou

$$\sum \frac{d}{dx}\left[h\frac{d\varphi_0}{dx}\right] + \frac{\lambda^2}{g}\varphi_0 = 0. \tag{5}$$

Au bord du vase, on a

$$z = h = 0,$$

et par conséquent on a, à la fois,

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dh}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dh}{dy}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Si nous négligeons $h$, nous tirons de là

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0, \qquad \varphi = 0$$

et, comme $z$ est nul,

$$\varphi_0 = 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi_0$ doit satisfaire à l'équation (5) en tous les points de la surface libre qui est une aire plane et, au bord de cette aire plane, elle doit s'annuler.

C'est cette condition à la limite que nous adopterons; mais je dois observer que, pour l'établir, j'ai dû supposer non seulement que $h$ est très petit, mais que ses dérivées le sont également; de sorte que, sur le bord, le fond du vase présente une pente très douce.

Si, au contraire, j'avais supposé que près du bord la paroi du vase est verticale, j'aurais dû remplacer la condition à la limite

$$\varphi_0 = 0$$

par la suivante

$$\frac{d\varphi_0}{dn} = 0.$$

On peut arriver au même résultat d'une autre manière.

La force vive est égale à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau = \frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\int dx\,dy\int^h dz\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2.$$

Or

$$\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx} + z\frac{d\varphi_1}{dx} + \ldots\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy} + z\frac{d\varphi_1}{dy} + \ldots\right)^2$$
$$+ (\varphi_1 + 2z\varphi_2 + \ldots)^2,$$

ou, puisque $z$ est très petit,

$$\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy}\right)^2 + \varphi_1^2,$$

et, comme on a

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda^2}{g}\varphi_0,$$

la force vive est égale à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int h\,d\omega\left[\left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy}\right)^2 + \frac{\lambda^4}{g^2}\varphi_0^2\right].$$

L'énergie potentielle est égale à

$$\frac{g\cos^2\lambda t}{2\lambda^2}\int\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 d\omega = \frac{\lambda^2\cos^2\lambda t}{g}\int\varphi_0^2\,d\omega.$$

Mais l'équation (4) montre que $\varphi_1$ (et par conséquent $\lambda^2$) est une quantité très petite de l'ordre de $h$; nous devons donc négliger le terme en $\varphi_1^2$ dans l'expression de la force vive qui se réduit à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int h\,d\omega\sum\left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2.$$

D'ailleurs, nos formules montrent suffisamment que l'énergie cinétique moyenne est de l'ordre de $h$ et l'énergie potentielle moyenne de l'ordre de $\lambda^2$; et comme, dans une oscillation simple, ces deux énergies moyennes doivent être égales, on doit conclure que $\lambda^2$ est de l'ordre de $h$, ce qui justifie une fois de plus la réduction que nous venons de faire.

Cela posé, la recherche des oscillations simples se ramène à la détermination des maxima et des minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int h\, d\omega \sum \left(\frac{d\varphi_0}{dx}\right)^2$$

à l'intégrale

$$B = \int \varphi_0^2\, d\omega.$$

L'application des règles du calcul des variations nous conduirait à l'équation (5) que nous avons obtenue directement.

Comparons à un problème en apparence très différent, celui des vibrations d'une membrane tendue.

L'énergie cinétique est proportionnelle alors à l'intégrale

$$B = \int \rho \varphi^2\, d\omega,$$

$\rho$ désignant l'épaisseur de la membrane et $\varphi$ le déplacement d'un point de la membrane par rapport à sa position d'équilibre. Ce déplacement est supposé normal à la membrane.

L'énergie potentielle est proportionnelle à l'intégrale

$$A = \int h \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] d\omega,$$

$h$ désignant la tension de la membrane.

D'autre part, sur le bord de la membrane, la fonction $\varphi$ doit s'annuler.

Le problème consiste à rechercher les maxima et les minima relatifs du rapport $\frac{A}{B}$.

Mais les intégrales A et B sont les mêmes que dans le problème qui nous occupait d'abord; il suffit d'y faire $\rho = 1$.

Le problème des oscillations d'un liquide dans un vase peu profond est donc identique au problème des vibrations d'une membrane d'épaisseur constante, mais de tension variable.

J'ai traité complètement le problème de la membrane dans mon Mémoire cité des *Rendiconti;* j'y ai supposé, il est vrai, la tension constante; mais mon analyse serait encore applicable, *mutatis mutandis,* au cas de la tension variable.

## § 7. — Influence de la courbure.

Supposons maintenant que le vase soit assez grand pour que la surface libre d'équilibre ne puisse plus être regardée comme plane, mais doive être considérée comme sphérique.

Je suppose toujours qu'il n'y a pas de rotations et que l'on néglige l'attraction du liquide.

On aura, dans une oscillation simple, pour la fonction des vitesses,

$$\Phi = \varphi \sin \lambda t,$$

$\varphi$ étant indépendant du temps. A l'intérieur du liquide, il viendra

$$\Delta\varphi = 0.$$

La pression $p$ sera, en négligeant le carré de $\Phi$,

$$p = \frac{a}{r} - \frac{d\Phi}{dt} - b,$$

$a$ et $b$ désignent des constantes et $r$ la distance au centre de la sphère. Cela peut s'écrire d'ailleurs

$$p = \frac{a}{r} - \lambda\varphi\cos\lambda t - b.$$

La force vive est égale encore à

$$\frac{\sin^2\lambda t}{2}\int\sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

et l'énergie potentielle à

$$\frac{1}{2}\frac{a}{R^2}\int \rho^2 d\omega.$$

L'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface libre sphérique d'équilibre ; R est le rayon de cette surface et $R+\rho$ la distance au centre d'une molécule de la surface libre après la déformation.

Les projections d'une molécule sur les trois axes sont

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dy}, \qquad -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dz}.$$

La projection sur le rayon vecteur sera

$$-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Il est clair qu'en un point de la surface libre on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dz}.$$

L'énergie potentielle est donc égale à

$$\frac{\cos^2\lambda t}{\lambda^2}\frac{a}{2R^2}\int \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega.$$

Il faut maintenant chercher les maxima et les minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

à l'intégrale

$$B = \int \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \sum \frac{d\varphi}{dx}\,\delta\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau = \int \varphi\,\frac{d\delta\varphi}{dr}\,d\omega + \int \varphi\,\delta\frac{d\varphi}{dn}\,d\omega' - \int \varphi\,\delta\Delta\varphi\,d\tau.$$

Les notations ont même signification que dans le paragraphe précédent; on a encore

$$\delta\Delta\varphi = 0,$$

et sur la paroi du vase

$$\delta\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Il reste

$$\frac{1}{2}\delta A = \int \varphi \frac{d\delta\varphi}{dr}\,d\omega.$$

D'autre part

$$\frac{1}{2}\delta B = \int \frac{d\varphi}{dr}\frac{d\delta\varphi}{dr}\,d\omega.$$

Enfin, U étant le volume total du liquide, on doit avoir

$$\delta U = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{d\delta\varphi}{dr}\,d\omega = 0.$$

Il faut que $\delta A = 0$ soit une conséquence de $\delta B = 0$, $\delta U = 0$. Cela exige

$$\frac{d\varphi}{dr} = \alpha\varphi + \beta.$$

Comme $\varphi$ n'est déterminé qu'à une constante près, je puis supposer $\beta = 0$. D'ailleurs, à la surface, la pression est nulle; d'où

$$\frac{a}{r} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b,$$

ou

$$\frac{a}{R+\rho} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b,$$

ou

$$\frac{a}{R} - \frac{a\rho}{R^2} = \lambda\varphi\cos\lambda t + b.$$

Il faut prendre la constante $b$ égale à $\frac{a}{R}$ et il vient, en remplaçant $\rho$ par sa valeur,

$$\frac{a}{\lambda}\cos\lambda t\frac{d\varphi}{dr} = \lambda\varphi\cos\lambda t,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\lambda^2 \varphi}{a}.$$

Passons maintenant au cas où la profondeur est infiniment petite.

Soit $R + \rho$ la distance d'une molécule au centre; développons $\varphi$ suivant les puissances de $\rho$ et écrivons

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \rho + \varphi_2 \rho + \ldots.$$

On devra avoir à la surface libre

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \varphi_1,$$

d'où

$$\varphi_1 = \frac{\lambda^2 \varphi_0}{a}.$$

La force vive est égale à

$$\frac{\sin^2 \lambda t}{2} \int h \, d\omega \left[ D\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right].$$

Ici $h$ est la profondeur et $D\varphi$ le carré de la composante de la vitesse perpendiculaire au rayon vecteur.

On peut prendre

$$D\varphi = D\varphi_0, \qquad \frac{d\varphi}{dr} = \varphi_1 = \frac{\lambda^2 \varphi_0}{a},$$

et, comme $\lambda^2$ est très petit, négliger le terme en $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2$. Il reste pour la force vive

$$\frac{\sin^2 \lambda t}{2} \int h \, D\varphi_0 \, d\omega.$$

L'énergie potentielle est, d'autre part,

$$\frac{\cos^2 \lambda t}{\lambda} \frac{a}{2R^2} \int \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 d\omega = \frac{\lambda^2}{a} \frac{\cos^2 \lambda t}{2R^2} \int \varphi_0^2 \, d\omega.$$

Le problème est donc ramené à la recherche des maxima et minima relatifs du rapport de l'intégrale

$$A = \int h \, D\varphi_0 \, d\omega$$

à l'intégrale

$$B = \int \varphi_0^2 \, d\omega.$$

De plus, $\varphi_0$ doit s'annuler au bord de la mer.

Considérons sur la sphère les courbes $\varphi_0 = \text{const.}$; envisageons deux de ces courbes infiniment voisines, correspondant aux valeurs $\varphi_0$ et $\varphi_0 + d\varphi_0$; soit $d\nu$ la distance d'un point de la seconde courbe à la première courbe, estimée suivant la normale à cette première courbe; nous aurons

$$D\varphi_0 = \left(\frac{d\varphi_0}{d\nu}\right)^2.$$

Faisons la représentation conforme de la surface sphérique de la mer sur une aire plane; par exemple par projection stéréographique.

Considérons les projections des deux courbes $\varphi_0 = \text{const.}$ et soit $d\nu'$ la distance de ces deux courbes estimée suivant la normale; on aura

$$d\nu' = \gamma \, d\nu,$$

$\gamma$ étant le rapport de similitude d'une figure plane infiniment petite à la figure sphérique correspondante.

Soit $d\omega'$ la projection de l'élément $d\omega$ de la sphère, on aura

$$d\omega' = \gamma^2 \, d\omega.$$

Il vient ainsi

$$A = \int h \left(\frac{d\varphi_0}{d\nu'}\right)^2 d\omega',$$

$$B = \int \frac{1}{\gamma^2} \varphi_0^2 \, d\omega'.$$

Rapportons la figure plane à deux axes rectangulaires, celui des $x'$ et celui des $y'$, nous aurons

$$d\omega' = dx' \, dy',$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\nu'}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi_0}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy'}\right)^2,$$

d'où

$$A = \int h\, dx'\, dy' \left[\left(\frac{d\varphi_0}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy'}\right)^2\right],$$

$$B = \int \frac{1}{\gamma^2}\, dx'\, dy'\, \varphi_0^2.$$

Le problème est ainsi ramené à celui de la membrane, avec une épaisseur variable $\frac{1}{\gamma^2}$ et une tension variable $h$.

Je me réserve de revenir dans un prochain numéro sur le même sujet. J'ai jusqu'ici négligé les effets de la rotation du globe et de la force centrifuge composée; il me faut maintenant en tenir compte; les résultats obtenus subsisteront dans leurs traits généraux, mais ils seront sensiblement modifiés et compliqués.

La recherche des oscillations propres simples dans le mouvement relatif se ramène, comme dans le cas du mouvement absolu, à l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et le principe de moindre action nous apprend que cette intégration se rattache aussi à une question de minimum.

Après avoir exposé les principes généraux qui régissent cette question, nous les appliquerons d'abord au cas d'un liquide oscillant dans un vase tournant assez petit pour qu'on puisse négliger la courbure de la surface; puis, enfin, au cas des mers; mais nous négligerons toujours l'attraction interne du liquide.