# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


G. KOENIGS

**Sur un théorème de Kronecker**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 2 (1896), p. 41-49.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__41_0>

# *Sur un théorème de Kronecker;*

PAR M. G. KOENIGS.

---

1. Soient $F_1$, $F_2$, $F_3$ trois fonctions de $x, y, z$ finies, continues et uniformes dans une région de l'espace dont nous conviendrons de ne pas sortir.

Posons

$$X = \begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\|$$

et pareillement

$$Y = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\|, \qquad Z = \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\|.$$

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Les intégrales du système (1) vérifient l'équation

$$(2) \qquad \mathcal{A}(\theta) = X\frac{\partial \theta}{\partial x} + Y\frac{\partial \theta}{\partial y} + Z\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Or $\mathcal{A}(\theta)$ peut s'écrire

$$(3) \qquad \mathcal{A}(\theta) = F_1 \frac{D(\theta, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} + F_2 \frac{D(\theta, F_3 F_1)}{D(x, y, z)} + F_3 \frac{D(\theta, F_1, F_2)}{D(x, y, z)},$$

en adoptant la notation connue pour les déterminants fonctionnels.

Si l'on pose, pour abréger, $\Delta = \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$, on trouve, en faisant $\theta = F_1$, $F_2$ ou $F_3$ dans l'équation (3), la relation

$$(4) \qquad \mathcal{A}(F_i) = \Delta F_i$$

ou encore

$$(5) \qquad \mathcal{A}(\log F_i) - \Delta = 0.$$

Désignons maintenant par M un multiplicateur, au sens de Jacobi, du système d'équations (1). La fonction M vérifie l'équation

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\mathcal{A}(\log M) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

L'expression de X permet de calculer très facilement $\frac{\partial X}{\partial x}$; on trouve

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial x} \right\|,$$

et de même

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z}, \frac{\partial F_i}{\partial x} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial z}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \right\|,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \Delta + \left\| F_i, \frac{\partial^2 F_i}{\partial z \partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y} \right\| + \left\| F_i, \frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z} \right\|,$$

d'où résulte par addition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 3\Delta.$$

L'équation du multiplicateur s'écrit donc

$$\mathcal{A}(\log M) + 3\Delta = 0. \tag{6}$$

Si l'on rapproche cette équation de l'équation (5) on voit que $\frac{1}{F_1^3}, \frac{1}{F_2^3}, \frac{1}{F_3^3}$ sont trois multiplicateurs.

Mais le quotient de deux multiplicateurs est une intégrale; en conséquence $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}$ sont deux intégrales, et l'on en conclut que l'intégrale générale a cette expression $\varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$, car on ne suppose pas qu'il existe une relation entre $F_1$, $F_2$ et $F_3$.

D'un autre côté, on déduit tout multiplicateur de l'un d'eux en le multipliant par l'intégrale générale. Dès lors

$$\frac{1}{F_1^3}\varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}\right)$$

est l'expression générale du multiplicateur.

On voit donc que tout multiplicateur du système (1) est une fonction homogène de degré $-3$ de $F_1$, $F_2$, $F_3$ et réciproquement toute fonction de cette nature est un multiplicateur.

Prenons en particulier, pour le multiplicateur M, la forme que voici :

$$M_0 = \frac{1}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}};$$

de la relation

$$\frac{\partial(M_0 X)}{\partial x} + \frac{\partial(M_0 Y)}{\partial y} + \frac{\partial(M_0 Z)}{\partial z} = 0,$$

on conclut que l'intégrale de surface

$$I = \int\int M_0 (X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy)$$

ne dépend que du contour ou qu'elle est nulle suivant toute surface fermée S ne contenant dans son intérieur aucun point de discontinuité.

Les seuls points de discontinuité sont ceux qui annulent $\frac{1}{M_0}$, c'est-à-dire qui rendent $F_1$, $F_2$, $F_3$ nuls. Supposons qu'à l'intérieur de S il y ait $p$ de ces points qui rendent positif le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et $n$ qui le rendent négatif; l'intégrale I a alors pour valeur

$$I = 4\pi(p - n):$$

tel est le théorème de Kronecker ([1]).

**2.** Mais la méthode même que nous venons de suivre nous montre la possibilité d'étendre la proposition de Kronecker en prenant au lieu de $M_0$ d'autres multiplicateurs.

Prenons, par exemple, pour multiplicateur l'expression $\frac{1}{\Omega^{\frac{3}{2}}}$, où $\Omega$ désigne une forme quadratique de $F_1$, $F_2$, $F_3$ définie et positive, en sorte que $\Omega$ ne s'annule qu'avec $F_1$, $F_2$, $F_3$. Désignons par $\omega$ le discriminant de la forme $\Omega$. On obtient une première extension de la proposition de Kronecker sous la forme suivante :

*L'intégrale de surface*

$$I = \int\int \frac{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}},$$

*prise suivant une surface fermée* S, *a pour valeur*

$$4\pi \frac{p - n}{\sqrt{\omega}},$$

*où* $\omega$ *est le discriminant de* $\Omega$, *p le nombre des points intérieurs à* S *qui annulent* $F_1$, $F_2$, $F_3$ *en rendant* $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ *positif et n le nombre de ceux de ces mêmes points qui rendent* $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ *négatif.*

La démonstration est des plus faciles.

([1]) Voir le *Traité* de M. Émile Picard, t. I, p. 123.

Puisque $\Omega$ est une forme définie positive, on ramènera $\Omega$ à la forme

$$\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$$

par la substitution linéaire

$$\begin{aligned} F_1 &= a\Phi_1 + b\Phi_2 + c\Phi_3, \\ F_2 &= a'\Phi_1 + b'\Phi_2 + c'\Phi_3, \\ F_3 &= a''\Phi_1 + b''\Phi_2 + c''\Phi_3. \end{aligned}$$

Désignons par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les déterminants analogues à X, Y, Z, mais où $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ remplacent $F_1, F_2, F_3$; désignons enfin par $\rho$ le déterminant

$$\rho = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

On a

$$X = \rho\mathfrak{X}, \qquad Y = \rho\mathfrak{Y}, \qquad Z = \rho\mathfrak{Z},$$

$$\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} = \rho\,\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}.$$

Enfin, puisque 1 est le discriminant de la forme $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2$ et $\omega$ celui de la forme $\Omega$, on a

$$\rho^2\omega = 1,$$

d'où

$$\rho = \pm\frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Si $\rho = \frac{+1}{\sqrt{\omega}}$, on a

$$\begin{aligned} I &= \int\!\!\int \frac{X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy}{\Omega^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\!\!\int \frac{\mathfrak{X}\,dy\,dz + \mathfrak{Y}\,dz\,dx + \mathfrak{Z}\,dx\,dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Kronecker, on a

$$\int\!\!\int \frac{\mathfrak{X}\,dy\,dz + \mathfrak{Y}\,dz\,dx + \mathfrak{Z}\,dx\,dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)} = (p - n)4\pi,$$

où $p$ est le nombre des points qui annulent $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ (ou $F_1, F_2, F_3$) en rendant $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ $\left[\text{ou } \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)} \text{ qui est de même signe}\right]$ positif et $n$ le nombre de ceux de ces points qui donnent, au contraire, un résultat négatif.

On a donc bien dans ce cas

$$I = 4\pi \frac{p-n}{\sqrt{\omega}}.$$

Si maintenant $\rho = -\frac{1}{\sqrt{\omega}}$, $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ et $\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{D(x, y, z)}$ sont de signes contraires. Soenit $p$ le nombre des points intérieurs à la surface S d'intégration qui rendent $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ positif et $n$ le nombre de ceux qui rendent ce déterminant négatif. On aura, eu égard à l'interversion des signes quand on passe des $F_i$ aux $\Phi_i$,

$$I_0 = \int\int \frac{\mathfrak{X}\, dy\, dz + \mathfrak{Y}\, dz\, dx + \mathfrak{Z}\, dx\, dy}{(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2)^{\frac{3}{2}}} = (n-p) \times 4\pi;$$

et l'on a ici

$$I = \rho I_0 = -\frac{I_0}{\sqrt{\omega}} = 4\pi \frac{p-n}{\sqrt{\omega}},$$

comme dans le premier cas.

**3.** Nous allons maintenant traiter le cas général et nous serons amené à un résultat tout à fait analogue.

Soit P une fonction de $F_1, F_2, F_3$, homogène et du degré 3 d'homogénéité. Nous considérons l'intégrale

$$I = \int\int \frac{X\, dy\, dz + Y\, dz\, dx + Z\, dx\, dy}{P},$$

prise suivant une surface fermée S, à l'intérieur de laquelle P ne s'annule qu'avec $F_1, F_2, F_3$, sans qu'en aucun de ces points le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ s'annule.

Pour $p$ de ces points ce déterminant sera positif, pour $n$ autres négatif.

L'intégrale I sera la somme des $p+n$ intégrales prises chacune suivant une très petite surface fermée entourant chacune un des points précédents.

Soit un de ces points que nous pouvons supposer être à l'origine des coordonnées ; on aura dans le voisinage de ce point

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots, \\ F_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots, \\ F_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au premier. On a de plus

$$a_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0, \qquad b_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0, \qquad c_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0,$$

en sorte que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

n'est autre que le déterminant $\dfrac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(x, y, z)}$ pour les valeurs particulières $x = y = z = 0$.

Le calcul de X, Y, Z donne alors, en s'en tenant aux termes du premier ordre, approximation qui se justifie aisément (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, p. 125),

$$X = \Delta . x, \qquad Y = \Delta . y, \qquad Z = \Delta . z,$$

tandis que l'on a

$$P = P(a_1 x + b_1 y + c_1 z,\ a_2 x + b_2 y + c_2 z,\ a_3 x + b_3 y + c_3 z),$$

et l'intégrale de surface autour du point considéré s'écrira

$$I_1 = \Delta . \int\int \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{P(a_1x + b_1y + c_1z,\ a_2x + b_2y + c_2z,\ a_3x + b_3y + c_3z)}.$$

Si l'on choisissait, par exemple, une petite sphère de rayon très petit $r$, l'intégrale s'écrirait, $d\sigma$ étant l'élément superficiel de la sphère

$$I_1 = \Delta . \int\int \frac{r\,d\sigma}{P}.$$

Comme $\int\int \frac{r\,d\sigma}{P}$ a une valeur essentiellement positive, *on voit que* $I_1$ *aura le signe de* $\Delta$.

Pour calculer l'intégrale double nous ferons le changement de variables

$$a_1x + b_1y + c_1z = x',$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = y',$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = z';$$

on trouve aisément que l'intégrale

$$\int\int \frac{x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy}{P(a_1x + \ldots,\ a_2x + \ldots,\ a_3x + \ldots)},$$

qui est positive comme nous venons de le voir, se change en

$$\int\int \frac{x'\,dy'\,dz' + y'\,dx'\,dz' + z'\,dx'\,dy'}{\Delta P(x', y', z')},$$

en sorte que la valeur absolue de $I_1$ est l'intégrale

$$\int\int \frac{x'\,dy'\,dz' + y'\,dx'\,dz' + z'\,dx'\,dy'}{P(x', y', z')},$$

effectuée suivant une surface fermée, par exemple une sphère entourant le point $x' = y' = z' = 0$. Plaçons en ce point le centre de la sphère; posons $x' = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y' = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z' = \rho \cos\theta$, l'intégrale devient

$$\int\int \frac{\sin\theta\, d\, d\varphi}{P(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)} = \alpha;$$

car $\rho$ disparaît parce que P est homogène et du degré 3 d'homogénéité. Donc enfin $I_1$ est égal à $\pm\alpha$ selon que $\Delta$ est positif ou négatif.

Conséquemment, l'intégrale I, relative à la surface S qui comprend $p$ points à déterminant positif et $n$ à déterminant négatif, aura pour expression

$$\alpha(p-n).$$

Telle est la généralisation du théorème de Kronecker, qu'il serait du reste aisé d'étendre au cas de plus de trois variables.

Quant à $\alpha$, c'est une intégrale définie qu'il serait peut-être intéressant d'étudier comme fonction des coefficients qui figurent dans P.

La présente Note répond, comme on voit, à certains *desiderata* que laissait subsister le théorème de Kronecker et que M. Émile Picard avait formulés à la fin de sa démonstration (*Traité d'Analyse*, t. I, p. 127). Plus récemment, dans les *Comptes rendus* et dans le Tome III de son *Traité*, M. Picard a introduit une modification importante qui permet d'évaluer le nombre exact des racines comprises dans un contour ou dans une surface. Mais les remarques précédentes s'appliquent aussi bien au théorème dû à M. Picard.