JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

D.-A. GRAVÉ

Sur la construction des Cartes géographiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 317-361.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__317_0>

Sur la construction des Cartes géographiques;

PAR M. D.-A. GRAVÉ,
Professeur à Saint-Pétersbourg.

Dans les deux célèbres Mémoires *Sur la construction des Cartes géographiques*, Lagrange a trouvé toutes les projections orthomorphes d'une surface de révolution dont les méridiens et les parallèles sont rectilignes ou circulaires.

Il restait jusqu'à présent à résoudre le pareil problème pour les Cartes équivalentes, c'est-à-dire pour les Cartes qui conservent les aires.

J'ai réussi à résoudre complètement ce problème, qui présentait certaines difficultés, et j'espère que ma solution pourra intéresser les géomètres.

Nous appellerons dans tout ce qui suit les projections *rectilignes*, quand les deux systèmes, les méridiens ainsi que les parallèles, sont représentés par des droites; projections *mixtes*, quand les méridiens sont représentés par des droites et les parallèles par des cercles, ou *vice versa;* enfin, nous les appellerons projections *circulaires*, quand les deux systèmes sont représentés par des cercles.

Soit donnée une surface S par les équations

$$x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v), \qquad z = \Omega(u, v),$$

où u, v sont les coordonnées curvilignes.

On peut faire correspondre aux points (u, v) de la surface les points (x, y) d'un plan, où x, y sont les coordonnées rectangulaires.

Si nous prenons deux fonctions $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, finies et continues pour un certain domaine des variables u, v, les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

donneront une certaine représentation (projection, carte) d'une partie de la surface S, ou cette surface tout entière.

Pour que la projection soit équivalente, il faut que les fonctions φ et ψ satisfassent à l'équation différentielle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \mathrm{K}\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2},$$

où K est une constante et les fonctions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sont les coefficients de l'élément linéaire de la surface

$$ds^2 = \mathcal{E}\,du + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2.$$

Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas de la surface de révolution

$$x = \varphi(u)\cos v, \qquad y = \varphi(u)\sin v, \qquad z = u,$$

où v est la longitude, et u peut être pris, ou pour la latitude même, ou pour sa fonction.

Alors on a

$$\mathcal{E} = 1 + [\varphi'(u)]^2, \qquad \mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{G} = [\varphi(u)]^2$$

et nous obtiendrons l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \Omega(u),$$

où

$$\Omega(u) = \mathrm{K}\,\varphi(u)\sqrt{1 + [\varphi'(u)]^2}.$$

En prenant au lieu de u la nouvelle variable indépendante

$$\upsilon = \int \Omega(u)\,du,$$

nous parvenons à l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial \upsilon} = 1.$$

Si nous prenions, au lieu de la variable v, une nouvelle ϑ qui soit une fonction de v, nous aurions l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial \upsilon}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \upsilon} = \psi,$$

où ψ est une fonction de ϑ.

Ainsi, nous voyons que, indépendamment de la forme de la surface de révolution donnée, la recherche des Cartes équivalentes dépend de la considération de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1.$$

Prenons pour les nouvelles variables indépendantes x et v, leurs fonctions seront y et u, ainsi que

$$y = \omega(x, v), \qquad u = \lambda(x, v).$$

L'équation se transformera en la suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Nous aurons la solution générale de l'équation (1) de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} y = f'_x(x, v), \\ u = f'_v(x, v), \end{cases}$$

où f est une fonction arbitraire.

En prenant x et v pour les variables indépendantes, nous avons exclu le cas de $x = \mu(v)$; dans ce cas, la solution obtient la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \mu(v), \\ y = \nu(v) - \dfrac{u}{\mu'(v)}, \end{cases}$$

où μ et ν sont des fonctions arbitraires.

L'expression de la solution générale du problème, à l'aide des formules (2) et (3), va jouer un rôle très important; nous allons en montrer les conséquences.

Considérons d'abord le problème général.

Il faut trouver les fonctions

$$(4)\qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

qui satisfont à l'équation (1) et qui donnent, pour les méridiens et les parallèles, des courbes d'une espèce donnée.

En éliminant la latitude u entre les équations (4), nous obtenons l'équation des méridiens qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$(5)\qquad y = f(x, v).$$

De la même manière, l'équation des parallèles aura la forme

$$(6)\qquad y = \mathrm{F}(x, u).$$

En différentiant l'équation (5), nous obtenons

$$y'_u = f'_x x'_u; \qquad y'_v = f'_x x'_v + f'_v.$$

En substituant dans l'équation (1), nous obtenons

$$f'_v x'_u = 1.$$

En intégrant par rapport à u, nous aurons

$$\int f_v(x, v)\, dx = u + w,$$

où w est une fonction arbitraire de v et l'intégrale est prise en considérant v constante. Cette équation obtient la forme

$$(7)\qquad \omega(x, v) = u + w.$$

Si la forme des méridiens est donnée, la fonction ω s'exprime explicitement par rapport à x, tandis que la variable v y entre implicitement comme l'argument des paramètres, inconnu, de l'équation des méridiens.

Prenons compte de la forme donnée des parallèles.

Si nous disons que la forme des parallèles est donnée, cela signifie que, dans l'équation (6), la partie F est donnée comme une fonction explicite de x, dont les paramètres sont les fonctions arbitraires de u.

Nous pouvons éliminer de l'équation (6) la variable u, au moyen de la différentiation, en d'autres termes, nous pouvons écrire l'équation différentielle des parallèles, en considérant u comme constante. Toutes les différentiations seront évidemment faites par rapport à v.

Comme nous aurons, dans tout ce qui suit, presque exclusivement les dérivées prises par rapport à v, nous écrirons les dérivées de x et y, prises par rapport à v, tout simplement

$$x', \quad y', \quad x'', \quad y'', \quad \ldots.$$

Alors soit l'équation différentielle des parallèles de la forme

$$(8)\qquad \Omega(x, y, x', y', x'', y'', \ldots) = 0.$$

En différentiant l'équation (5) par rapport à v, nous aurons

$$\begin{aligned} y' &= f'_x x' + f'_v, \\ y'' &= f'_x x'' + f''_{xx} x'^2 + 2 f''_{xv} x' + f''_{vv}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ces formules permettent de faire disparaître de l'équation (8) les quantités $y, y', y'', \ldots$.

Nous obtenons l'équation

$$(9) \qquad \Pi(v, x, x', x'', \ldots) = 0.$$

On peut éliminer les dérivées de x dans l'équation (9) au moyen de l'équation (7). En effet, en différentiant l'équation (7), nous aurons

$$\omega'_x x' + \omega'_v = w',$$

d'où l'on a

$$x' = \xi_1(x, v).$$

En différentiant, nous aurons

$$x'' = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = \xi_2(x, v), \qquad \ldots.$$

En substituant dans l'équation (9) au lieu des quantités x', x'', ... les fonctions $\xi_1(x, v)$, $\xi_2(x, v)$, ..., nous aurons définitivement l'équation

$$(10) \qquad \Psi(x, v) = 0.$$

Il faut bien remarquer que x entre dans cette dernière équation d'une façon explicite.

Cette équation doit être une identité, car autrement elle déterminerait x comme fonctions de v seule, ce qui est impossible, car, dans ce cas, l'équation (7) donnerait la liaison entre u et v, introduites comme variables indépendantes. Il est évident aussi que x ne peut pas devenir constante.

Résoudre le problème posé n'est autre chose que satisfaire à l'identité (10) de la manière la plus générale.

Quand on trouvera les expressions des paramètres de l'équation (5) en fonction de v et la fonction w, de la façon la plus générale à satisfaire à l'identité (10), on aura les projections complètement déterminées par les équations (5), (7).

En revenant à notre problème des réseaux rectilignes ou circulaires, il est aisé de voir que, quand on a une projection quelconque de cette espèce, on obtiendra immédiatement une autre de la même espèce en changeant les rôles des méridiens et des parallèles.

Ainsi nous voyons que notre problème peut être partagé en deux autres : 1° trouver toutes les projections rectilignes et mixtes qui aient les méridiens rectilignes ; 2° trouver toutes les projections circulaires.

Considérons d'abord le problème suivant :

Trouver toutes les représentations de la surface de révolution sur un plan, qui conservent les aires, dont les méridiens soient représentés par des droites et les parallèles soient rectilignes ou circulaires.

Prenons l'équation différentielle des projections sous la forme

$$x'_v y'_u - x'_u y'_v = \mathrm{V}, \tag{11}$$

où u, v sont des fonctions de la latitude et de la longitude, V étant fonction de v.

Nous considérerons d'abord le cas général, où les méridiens sont représentés par des droites enveloppées par une certaine courbe Σ. De cette façon, nous laissons à part les deux cas suivants : 1° les méridiens se croisent dans un point ; 2° les méridiens sont parallèles entre eux. Nous examinerons ces deux cas plus tard.

Prenons pour la variable indépendante v l'arc de la courbe Σ dont tous les méridiens sont tangents. Alors, en désignant par a, b les coordonnées du point de contact d'un certain méridien avec la courbe Σ, nous pouvons considérer les coordonnées a, b comme fonctions de v, satisfaisant à l'équation

$$a'^2 + b'^2 = 1.$$

Les coordonnées x, y d'un point quelconque N de la courbe peuvent être exprimées par des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= a + \rho a', \\ y &= b + \rho b', \end{aligned}\right. \tag{12}$$

où ρ est une certaine fonction de u et v.

Introduisons la courbure

$$k = a''b' - b''a'$$

de la courbe Σ.

En substituant les formules (12) dans l'équation (11), nous aurons

$$\rho\rho'_u(a''b' - a'b'') = \mathrm{V}.$$

En intégrant par rapport à u, on a

$$\rho^2 k = 2\mathrm{V}u + \sigma,$$

σ étant une fonction de v introduite par l'intégration.

Cette équation peut être mise sous la forme

$$(13) \qquad \rho^2\mu = 2u + \varpi,$$

où

$$\mu = \frac{k}{\mathrm{V}}, \qquad \varpi = \frac{\sigma}{\mathrm{V}}.$$

Le problème consiste à trouver la fonction ρ, c'est-à-dire les fonctions μ et ϖ, de sorte que les parallèles soient rectilignes ou circulaires.

Prenons l'équation différentielle des parallèles circulaires

$$3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - x'''y') = 0,$$

où les dérivées sont prises par rapport à v. Désignons, dans tout ce qui suit, par

$$\rho', \quad \rho'', \quad \ldots$$

les dérivées prises par rapport à v.

Formons l'expression

$$x'y'' - y'x''.$$

$$x' = a'(1 + \rho') + \rho a'', \qquad y' = b'(1 + \rho') + \rho b'',$$

$$x'' = a'\rho'' + a''(1 + 2\rho') + \rho a''', \qquad y'' = b'\rho'' + b''(1 + 2\rho') + b'''\rho,$$

on obtient

$$x'y'' - x''y' = k[\rho\rho'' - (1+\rho')(1+2\rho')] \\ - k'\rho(1+\rho') - \rho^2(a'''b'' - a''b'''),$$

et l'on sait que l'on a

$$a'''b'' - b'''a'' = k^3 \text{ (}^1\text{)}.$$

Nous obtenons ainsi

$$x'y'' - x''y' = k[\rho\rho'' - (1+\rho')(1+2\rho')] - k'\rho(1+\rho') - k^3\rho^2.$$

Dans cette expression, on peut supprimer les dérivées ρ', ρ'' en différentiant l'équation (13) par rapport à v

$$2\rho\rho'\mu + \rho^2\mu' = \varpi'. \tag{14}$$

$$2(\rho'^2 + \rho\rho'')\mu + 4\rho\rho'\mu' + \rho^2\mu'' = \varpi''. \tag{15}$$

En substituant l'expression $2\rho\rho''\mu$ de (15) dans $2\mu(x'y'' - x''y')$, on obtient

$$2\mu(x'y'' - x''y') = A_0\rho'^2 + A_1\rho' + A_2, \tag{16}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= -6k\mu, \\ A_1 &= -6k\mu - 2\rho(k'\mu + 2k\mu'), \\ A_2 &= \quad k\varpi'' - 2k\mu - 2k'\mu\rho - \rho^2(k\mu'' + 2k^3\mu). \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (16) par $4\rho^2\mu^2$, on aura

$$8\rho^2\mu^3(x'y'' - y'x'') = A_0(2\rho\rho'\mu)^2 + 2\rho\mu A_1(2\rho\rho'\mu) + 4\rho^2\mu^2 A_2.$$

Au moyen de l'équation (14), nous aurons

$$\begin{aligned} 8\rho^2\mu^3(x'y'' - x''y') &= A_0(\varpi' - \rho^2\mu')^2 + 2\rho\mu A_1(\varpi' - \rho^2\mu') + 4\rho^2\mu^2 A_2 \\ &= 2\mu[M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + M_2\rho^2 + M_3\rho + M_4] \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* Ch. Hermite, *Cours d'Analyse*, p. 157 ; 1873.

où

$$\begin{aligned}
M_0 &= \quad k\mu'^2 + 2k'\mu\mu' - 2\mu(k\mu'' + 2\mu k^3),\\
M_1 &= \quad 6k\mu\mu' - 4k'\mu^2,\\
M_2 &= \quad 6k\mu'\varpi' - 2\varpi'(k'\mu + 2k\mu') + 2\mu(k\varpi'' - 2k\mu),\\
M_3 &= -6k\mu\varpi',\\
M_4 &= -3k\varpi'^2.
\end{aligned}$$

En divisant par 2μ, on aura

$$(17)\qquad 4\rho^2\mu^2(x'y'' - x''y') = M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + M_2\rho^2 + M_3\rho + M_4.$$

De même façon, nous aurons

$$4\rho^2\mu^2(x'^2 + y'^2) = P_0\rho^4 + P_1\rho^3 + P_2\rho^2 + P_3\rho + P_4$$

où

$$P_0 = \mu'^2 + 4\mu^2 k^2, \qquad P_1 = -4\mu\mu', \qquad P_2 = -2\mu'\varpi' + 4\mu^2,$$
$$P_3 = 4\mu\varpi', \qquad P_4 = \varpi'^2.$$

Il ne reste qu'à trouver les expressions $x'x'' + y'y''$, $x'y''' - x'''y'$. En différentiant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
8\rho^2\mu^2(x'x'' + y'y'') = {} & P'_0\rho^4 + P'_1\rho^3 + P'_2\rho^2 + P'_3\rho + P'_4\\
& + [4\rho^3 P_0 + 3\rho^2 P_1 + 2\rho P_2 + P_3]\rho'\\
& - 4\mu(x'^2 + y'^2)[2\rho\rho'\mu + 2\rho^2\mu'].
\end{aligned}$$

En éliminant de cette expression la quantité ρ', nous aurons

$$\begin{aligned}
16\rho^4\mu^3(x'x'' + y'y'') = {} & R_0\rho^6 + R_1\rho^5 + R_2\rho^4 + R_3\rho^3 + R_4\rho^2\\
& + R_5\rho + R_6
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R_0 &= 2\mu P'_0 - 6\mu' P_0, & R_3 &= 2\mu P'_3 - 3\mu' P_3 + \varpi' P_1,\\
R_1 &= 2\mu P'_1 - 5\mu' P_1, & R_4 &= 2\mu P'_4 - 2\mu' P_4,\\
R_2 &= 2\mu P'_2 - 4\mu' P_2 + 2\varpi' P_0, & R_5 &= -\varpi' P_3,\\
& & R_6 &= -2\varpi' P_4.
\end{aligned}$$

En différentiant l'équation (17), on obtient

$$
\begin{aligned}
4\rho^2\mu^2(x'y''' - x'''y') = {} & M'_0\rho^4 + M'_1\rho^3 + M'_2\rho^2 + M'_3\rho + M'_4 \\
& + \rho'[4M_0\rho^3 + 3M_1\rho^2 + 2M_2\rho + M_3] \\
& - 4\mu(x'y'' - y'y'')[2\rho\rho'\mu + 2\rho^2\mu'];
\end{aligned}
$$

d'où il vient

$$
\begin{aligned}
8\rho^4\mu^3(x'y''' - x'''y') = {} & N_0\rho^6 + N_1\rho^5 + N_2\rho^4 + N_3\rho^3 + N_4\rho^2 \\
& + N_5\rho + N_6,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
N_0 &= 2\mu M'_0 - 6\mu' M_0, & N_3 &= 2\mu M'_3 - 3\mu' M_3 + w' M_1, \\
N_1 &= 2\mu M'_1 - 5\mu' M_1, & N_4 &= 2\mu M'_4 - 2\mu' M_4, \\
N_2 &= 2\mu M'_2 - 4\mu' M_2 + 2w' M_0, & N_5 &= - w' M_3, \\
& & N_5 &= - 2w' M_4.
\end{aligned}
$$

L'équation différentielle d'un cercle se transforme en la suivante :

$$
\begin{aligned}
& 3[R_0\rho^6 + R_1\rho^5 + \ldots + R_6][M_0\rho^4 + M_1\rho^3 + \ldots + M_4] \\
& \quad - 2[P_0\rho^4 + P_1\rho^3 + \ldots + P_4][N_0\rho^6 + N_1\rho^5 + \ldots + N_6] = 0.
\end{aligned}
$$

En ouvrant les parenthèses, nous obtenons l'équation

$$
(18) \qquad \mathfrak{M}_0\rho^{10} + \mathfrak{M}_1\rho^9 + \ldots + \mathfrak{M}_9\rho + \mathfrak{M}_{10} = 0.
$$

La fonction ρ contient nécessairement u qui doit être indépendante de v. L'équation (18) doit être satisfaite identiquement, d'où il vient

$$
(19) \qquad \mathfrak{M}_0 = 0, \qquad \mathfrak{M}_1 = 0, \qquad \mathfrak{M}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{M}_{10} = 0.
$$

Pour résoudre la question, il ne reste qu'à satisfaire à ce système de la manière la plus générale.

L'équation $\mathfrak{M}_{10} = 0$ donne

$$
3R_6M_4 - 2P_4N_6 = 6kw'^5 = 0.
$$

D'après la nature de la question, k ne peut être égal à zéro, par conséquent il faut poser $w' = 0$.

Tout le calcul se simplifie considérablement, car on a

$$M_3 = M_4 = P_3 = P_4 = 0$$

et par conséquent

$$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 0.$$

Notre équation (18) devient

$$\begin{gathered}3[R_0\rho^2 + R_1\rho + R_2][M_0\rho^2 + M_1\rho + M_2] \\ - 2[P_0\rho^2 + P_1\rho + P_2][N_0\rho^2 + N_1\rho + N_2] = 0.\end{gathered}$$

En égalant à zéro les coefficients de cette équation, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{gathered}3R_0M_0 - 2N_0P_0 = 0, \\ 3(R_1M_0 + M_1R_0) - 2(P_0N_1 + P_1N_0) = 0, \\ 3(M_0R_2 + M_1R_1 + M_2R_0) - 2(P_0N_2 + P_1N_1 + P_2N_0) = 0, \\ 3(M_1R_2 + M_2R_1) - 2(P_1N_2 + P_2N_1) = 0, \\ 3M_2R_2 - 2P_2N_2 = 0.\end{gathered}$$

Considérons la dernière équation. Si l'on a $w' = 0$, on obtiendra

$$M_2 = -4k\mu^2, \qquad P_2 = 4\mu^2, \qquad N_2 = -8k'\mu^3, \qquad R_2 = 0,$$

d'où

$$3M_2R_2 - 2P_2N_2 = 64k'\mu^5 = 0\,;$$

d'après les conditions du problème, μ n'est pas égal à zéro et par conséquent

$$k' = 0.$$

La courbure k de la courbe Σ doit être constante et par conséquent la courbe elle-même est un cercle.

Pour la détermination de la fonction μ, nous obtenons le système

$$3R_0M_0 - N_0P_0 = 0,$$
$$3(R_1M_0 + M_1R_0) - 2(P_0N_1 + P_1N_0) = 0,$$
$$3(R_1M_1 + M_2R_0) - 2(P_1N_1 + P_2N_0) = 0.$$

En éliminant R_0 et N_0, nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} M_0 & P_0 & 0 \\ M_1 & P_1 & 3R_1M_0 - 2P_0N_1 \\ M_2 & P_2 & 3R_1M_1 - 2P_1N_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, on aura

$$(2\mu\mu'' - 3\mu'^2)[(3\mu'^2 - 2\mu\mu'')^2 + 4k^3\mu^2\mu'^2] = 0.$$

Le facteur $(3\mu'^2 - 2\mu\mu'')^2 + 4k^2\mu^2\mu'^2$ égalé à zéro donne

$$\mu' = 0.$$

Si l'on a $2\mu\mu'' - 3\mu'^2 = 0$, on aura

$$R_1 = 0, \qquad N_1 = 0, \qquad N_0 = 8k^3\mu^2\mu'.$$

L'équation $3R_0M_2 - 2N_0P_2 = 0$ donne

$$32k^3\mu^4\mu' = 0,$$

d'où l'on a

$$\mu' = 0.$$

Si l'on a $N_0 = R_0 = 0$, on aura

$$3R_1M_1 - 2P_1N_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad -24k\mu^2\mu'(2\mu\mu'' - 3\mu'^2) = 0,$$

d'où l'on a

$$\mu' = 0.$$

Ainsi nous voyons qu'on a $\mu = \text{const.}$

Nous obtenons ainsi les projections, dont les parallèles sont les cercles concentriques et les méridiens sont les droites tangentes d'un de ces cercles.

En examinant le cas des parallèles rectilignes, nous parvenons à une contradiction.

Considérons le cas où la courbe Σ se réduit en un point auquel se croisent tous les méridiens.

Prenons le point de rencontre des méridiens pour origine des coordonnées, alors les méridiens seront exprimés par l'équation

$$y = ax, \tag{20}$$

où a est une fonction de v seule.

En différentiant l'équation (20), on obtient, après la substitution dans l'équation (1), l'égalité

$$a' x x'_u = 1,$$

d'où l'on obtient, en intégrant par rapport à u,

$$\frac{a'}{2} x^2 = u + w, \tag{21}$$

où w est une fonction de v.

En désignant par x', y', x'', y'', ... les dérivées prises par rapport à v, nous aurons

$$x'y'' - x''y' = a''xx' + 2a'x'^2 - a'xx'',$$
$$x'^2 + y'^2 = (1 + a^2)x'^2 + 2aa'xx' + a'^2 x^2.$$

On peut éliminer les dérivées x', x'' au moyen de l'équation (21). En effet, différentiant deux fois cette équation

$$a'xx' + \frac{a''}{2} x^2 = w',$$

$$a'xx'' + a'x'^2 + 2a''xx' + \frac{a'''}{2} x^2 = w'',$$

nous obtenons définitivement

$$(22) \qquad a'x^2(x'y''-y'x'') = M_0x^4 + M_1x^2 + M_2,$$

où

$$M_0 = \tfrac{1}{4}(2a'a''' - 3a''^2), \qquad M_1 = -\varpi''a', \qquad M_2 = 3\varpi'^2,$$

$$(23) \qquad a'^2x^2(x'^2+y'^2) = P_0x^4 + P_1x^2 + P_2,$$

où

$$P_0 = a'^2(a'^2 - aa'') + \frac{a''^2}{4}(1+a^2),$$

$$P_1 = [2aa'^2 - a''(1+a^2)]\varpi', \qquad P_2 = (1+a^2)\varpi'^2.$$

En différentiant les équations (22) et (23), nous aurons

$$(24) \qquad a'^2x^4(x'y''' - x'''y') = N_0x^6 + N_1x^4 + N_2x^2 + N_3,$$

où

$$N_0 = a'M'_0 - 2a''M_0, \qquad N_2 = a'M'_2,$$

$$N_1 = a'M'_1 - a''M_1 + 2\varpi'M_0, \qquad N_3 = -2\varpi'M_2.$$

Enfin

$$2a'^3x^4(x'x''+y'y'') = R_0x^6 + R_1x^4 + R_2x^2 + R_3,$$

où

$$R_0 = a'P'_0 - 3a''P_0, \qquad R_2 = a'P'_2 - a''P_2,$$

$$R_1 = a'P'_1 - 2a''P_1 + 2\varpi'P_0, \qquad R_3 = -2\varpi'P_2.$$

En désignant x^2 par z, nous aurons l'équation sous la forme

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} &3(R_0z^3 + R_1z^2 + R_2z + R_3)(M_0z^2 + M_1z + M_2) \\ &\quad - 2(N_0z^3 + N_1z^2 + N_2z + N_3)(P_0z^2 + P_1z + P_2) = 0. \end{aligned} \right.$$

En substituant $z = 0$, on aura

$$3R_3M_2 - 2N_3P_2 = -6\varpi'^3(1+a^2) = 0;$$

d'où l'on a

$$w' = 0$$

et

$$M_1 = M_2 = P_1 = P_2 = 0,$$
$$N_1 = N_2 = N_3 = R_1 = R_2 = R_3 = 0.$$

L'équation (25) se transforme en la suivante :

$$3R_0 M_0 - 2N_0 P_0 = 0.$$

En substituant les expressions de R_0 et N_0, on a

$$(26) \qquad 3(a'P' - 3a''P)M - 2P(a'M' - 2a''M) = 0,$$

où

$$M = 4M_0 = 2a'a''' - 3a''^2,$$
$$P = 4P_0 = a''^2 + (aa'' - 2a'^2)^2.$$

L'équation (26), qui sert à déterminer la fonction a, est du quatrième ordre. Malgré la complexité apparente de cette équation, son intégration est facile. En effet, l'équation (26) peut être mise sous la forme

$$a'(3P'M - 2PM') = 5a''MP.$$

Il est évident, d'après les conditions du problème, que les fonctions a', P ne peuvent s'annuler.

Le cas $M = 0$ donne les projections avec les parallèles rectilignes. En faisant tous les calculs, qui ne sont pas difficiles, il est aisé de se convaincre que, dans ce cas, les parallèles sont représentés par des droites parallèles entre elles.

En revenant au cas général, on a

$$\frac{3P'}{P} - \frac{2M'}{M} = \frac{5a''}{a'}.$$

En intégrant, on obtient

$$M = c\frac{P^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{5}{2}}},$$

c étant une constante.

En désignant $a'' = \xi$, $aa'' - 2a'^2 = \eta$, on aura

$$P = \xi^2 + \eta^2, \qquad M = \frac{\xi^2}{a'}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)',$$

d'où, en posant $\frac{\eta}{\xi} = \rho$, nous aurons

$$\frac{\xi^2}{a'}\rho' = \frac{\xi^3(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}}}c,$$

d'où

$$\frac{\rho'}{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\xi c}{a'^{\frac{3}{2}}} = c\frac{a''}{a'^{\frac{3}{2}}}.$$

En désignant

$$\frac{1}{\sqrt{a'}} = p, \qquad c_1 = -2c,$$

on aura

$$\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = c_1 p + c_2,$$

c_2 étant une nouvelle constante arbitraire.

Ensuite, nous aurons, en posant $c_2 = -\alpha c_1$, $c_1 = \frac{1}{\nu}$,

$$\rho = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2 - (p-\alpha)^2}}. \tag{27}$$

En posant

$$\frac{a'}{a^2} = q, \qquad q' = \frac{aa'' - 2a'^2}{a^3} = \frac{\eta}{a^3}, \qquad \eta = q'a^3,$$

nous aurons

$$\frac{q'a^3}{\xi} = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}};$$

mais

$$\xi = a'', \qquad p^2 = \frac{1}{a'},$$

d'où l'on a

$$2pp' = -\frac{a''}{a'^2}, \qquad \xi = -2pp'a'^2.$$

En substituant dans l'équation (27), nous aurons

$$\frac{q'a^3}{-2pp'a'^2} = \frac{p-\alpha}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}},$$

où

$$\frac{(p-\alpha)p'}{\sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}} = -\frac{1}{2}\frac{q'a^3}{a'^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{q'}{\left(\frac{a'}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{q'}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant, on a

$$\frac{1}{\sqrt{q}} = \beta - \sqrt{\nu^2-(p-\alpha)^2}.$$

Mais $a'p^2 = 1$; par conséquent $1 = p^2 q a^2$, d'où $\frac{1}{\sqrt{p}} = pa$, nous obtenons le système suivant :

$$(28) \qquad \begin{cases} (ap-\beta)^2 + (p-\alpha)^2 = \nu^2, \\ a'p^2 = 1. \end{cases}$$

En éliminant p du système (28), nous aurons pour a l'expression en quadratures.

En effet, la première des équations (28) donne

$$p^2 = 2\left(\frac{a\beta+\alpha}{a^2+1}\right)^2 - \frac{\beta^2+\alpha^2-\nu^2}{a^2+1} + 2\frac{a\beta+\alpha}{(a^2+1)^2}\Delta,$$

où

$$\Delta = \sqrt{a^2(\nu^2-\alpha^2)+2a\beta\alpha+\nu^2-\beta^2}.$$

D'où il vient

$$(29) \qquad \begin{cases} v+\gamma = 2\int\left[\frac{a\beta+\alpha}{a^2+1}\right]^2 da + (\nu^2-\alpha^2-\beta^2)\operatorname{arc\,tang} a \\ \qquad\qquad + 2\int\frac{(a\beta+\alpha)\Delta}{(a^2+1)^2}\,da, \end{cases}$$

où γ est une dernière (quatrième) constante arbitraire.

Les quadratures s'expriment, comme on voit, par des logarithmes.

Pour obtenir la relation définitive entre a et v de la façon la plus simple, introduisons une nouvelle variable ω.

En effet, en ajoutant au système (28) l'équation

$$p = \alpha + \nu \cos\omega, \tag{30}$$

on aura

$$ap = \beta + \nu \sin\omega. \tag{31}$$

Ainsi la fonction cherchée a s'exprimera d'une façon très simple au moyen de ω :

$$a = \frac{\beta + \nu \sin\omega}{\alpha + \nu \cos\omega}. \tag{32}$$

Il ne reste qu'à déterminer ω en fonction de v. Pour cela, différentions les équations (30), (31) :

$$\left\{\begin{aligned} p' &= -\nu \sin\omega\, \omega', \\ a'p + ap' &= \quad \nu \cos\omega\, \omega'. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

En multipliant l'équation (33) par p et tenant compte de l'équation $a'p^2 = 1$, nous aurons

$$1 = p\nu \cos\omega\, \omega' - app',$$

et au moyen des équations (30), (31), on aura

$$1 = \nu[\cos\omega(\alpha + \nu\cos\omega) + \sin\omega(\beta + \nu \sin\omega)]\omega',$$

d'où il vient

$$v + \gamma = \nu(\alpha \sin\omega - \beta\cos\omega + \nu\omega). \tag{34}$$

Nous parvenons à l'équation (29) en éliminant ω entre (32), (34).

Nous obtenons donc les projections dans lesquelles les centres des parallèles se trouvent sur une droite passant par l'origine des coordonnées.

Ajoutons maintenant deux mots pour le cas des méridiens représentés par les droites parallèles entre elles.

Soient les méridiens parallèles à l'axe des x, alors on a

$$y = a,$$

où a est une fonction de v, de sorte que $y'_v = a'$, $y'_u = 0$.

En intégrant l'équation fondamentale

$$x'_u y'_v - x'_v y'_u = 1,$$

nous aurons

$$a' x = u + w. \tag{35}$$

Si les parallèles sont des droites, on aura

$$x' y'' - x'' y' = x' a'' - x'' a' = 0. \tag{36}$$

En différentiant l'équation (35) par rapport à v, on a

$$a'' x + a' x' = w', \tag{37}$$

$$a''' x + 2 a'' x' + a' x'' = w''. \tag{38}$$

En éliminant x', x'' entre les équations (36), (37), (38), on aura définitivement

$$x(a' a''' - 3 a''^2) + 3 a'' w' - w'' a' = 0,$$

d'où il vient

$$a' a''' - 3 a''^2 = 0, \tag{39}$$

$$3 a'' w' - w'' a' = 0. \tag{40}$$

Il faut considérer deux cas : $a'' = 0$, a'' différent de zéro. Si $a'' = 0$, on aura $w'' = 0$ et les projections cherchées auront les parallèles, parallèles entre eux.

Dans le cas a'' différent de zéro, on obtient la fonction a de l'équation (39) par une simple intégration. On aura la fonction w par l'équation (40). De cette façon, on obtient les projections dans lesquelles les parallèles se croisent en un point. Ces projections sont déjà trouvées, car on peut changer de rôles les méridiens et les parallèles.

Pour achever la solution de notre problème de trouver toutes les projections rectilignes ou mixtes, il ne reste qu'à *trouver les projections qui, ayant les méridiens parallèles entre eux, donnent pour parallèles des cercles.*

Traitons cette dernière question d'une autre façon en appliquant la méthode par laquelle nous trouverons plus tard les projections circulaires.

Soit l'équation des parallèles

$$(41) \qquad y = b + \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}$$

où a, b, ρ sont les fonctions de u et x la fonction de v seule. Si nous supposons que les méridiens sont représentés par des droites, parallèles à l'axe de y, alors en intégrant l'équation (1), on aura

$$\int y'_u \, dx = \mathrm{U} - v,$$

où U est une fonction de u, introduite par l'intégration, y'_u est une dérivée partielle dans la supposition de x constante, c'est-à-dire

$$y'_u = b' + \frac{\rho\rho' + (x-a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}}.$$

En substituant, on aura

$$b'x + \int \frac{\rho\rho' + (x-a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}} \, dx = \mathrm{U} - v.$$

En différentiant par rapport à u, on aura

$$b''x - a''\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} - a' \frac{\rho\rho' + (\rho - a)a'}{\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}}$$
$$+ (\rho\rho')' \arcsin \frac{x-a}{\rho} + \rho\rho' \frac{\left(\frac{x-a}{\rho}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{\rho}\right)^2}} = \mathrm{U}'.$$

Il faut évidemment poser $(\rho\rho')' = 0$, car autrement on aurait arc sin $\frac{x-a}{\rho}$ exprimée algébriquement en fonction de x. On a, par conséquent,

$$\rho\rho'' + \rho'^2 = 0.$$

Nous aurons

$$b''x - U' - a''\sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} = \frac{2a'\rho\rho' + (x-a)(a'^2+\rho'^2)}{\sqrt{\rho^2 + (x-a)^2}},$$

En supprimant les radicaux on a

$$(b''x - U')^2[\rho^2 - (x-a)^2]$$
$$= \{a''[\rho^2 - (x-a)^2] + 2a'\rho\rho' + (x-a)(\rho'^2 + a'^2)\}^2.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^4, nous aurons

$$a''^2 + b''^2 = 0,$$

d'où il vient

$$a'' = 0, \qquad b'' = 0.$$

L'équation se simplifie

$$U'^2[\rho^2 - (x-a)^2] = [2a'\rho\rho' + (x-a)(\rho'^2 + a'^2)]^2.$$

En égalant à zéro le coefficient de x^2, nous aurons

$$U'^2 + (\rho'^2 + a'^2)^2 = 0,$$

d'où l'on a

$$U' = 0, \qquad \rho' = 0, \qquad a' = 0.$$

Ainsi nous obtenons les projections *dont les parallèles sont des cercles de rayon constant, les centres de ces cercles se trouvant sur une droite parallèle à l'axe de y.*

En abordant le problème des projections circulaires, qui avait présenté de considérables difficultés, j'exposerai ma solution avec certains détails, qui, quoique n'étant pas nécessaires pour la démonstration, sont néanmoins utiles pour mieux comprendre la question. J'ai surtout en vue le lecteur qui voudrait généraliser mes recherches pour les cas des méridiens et des parallèles représentés par des coniques.

Soient, en effet, les méridiens circulaires sur la carte et soient leurs équations,

$$(42)\qquad \begin{cases} x = a + \rho\cos\varphi, \\ y = b + \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

où a, b, ρ sont certaines fonctions de v et φ la fonction de u et de v.

Pour satisfaire à l'équation (1) il faut différentier les équations (42); nous obtiendrons

$$\rho[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho']\varphi'_u = 1.$$

En intégrant par rapport à u, nous aurons

$$(43)\qquad \rho a'\sin\varphi - \rho b'\cos\varphi + \rho\rho'\varphi = u + \omega.$$

En désignant, dans ce qui suit, par x', y', x'', y'', ..., φ', φ'', ... les dérivées prises par rapport à v, nous formerons l'équation différentielle des parallèles

$$3(x'x''+y'y'')(x'y''' - x'''y') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') = 0.$$

Introduisant les notations suivantes :

$$k = \rho\rho',$$

$$\begin{aligned} A_1 &= a'\cos\varphi + b'\sin\varphi, & B_1 &= a'\sin\varphi - b'\cos\varphi, \\ A_2 &= a''\cos\varphi + b''\sin\varphi, & B_2 &= a''\sin\varphi - b''\cos\varphi, \\ A_3 &= a'''\cos\varphi + b'''\sin\varphi, & B_3 &= a'''\sin\varphi - b'''\cos\varphi, \\ &\dots\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Après les simples calculs, nous aurons

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' = a'b'' - b'a'' + \rho''B_1 - \rho'B_2 & \\ + \varphi'[2\rho'A_1 - \rho A_2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''] + \varphi'^2[-\rho B_1] & \\ + \varphi'^3\rho^2 + \varphi''[\rho A_1 + k], & \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho'A_1 - 2\rho\varphi'B_1 + \rho^2\varphi'^2.$$

$$x'x''+y'y''=a'a''+b'b''+\rho'\rho''+\rho'A_2+\rho''A_1$$
$$+\varphi'[-2\rho'B_1-\rho B_2]+\varphi'^2[-\rho A_1+k]$$
$$+\varphi''[-\rho B_1]+\varphi'\varphi''\rho^2,$$

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}x'y'''-y'x'''&=a'b'''-b'a'''+\rho'''B_1-\rho'B_3\\&+\varphi'[3\rho''A_1-\rho A_3+3\rho'\rho''-\rho\rho''']\\&+\varphi'^2[-3\rho'B_1]+\varphi'^3[-\rho A_1+2k]\\&+\varphi''3\rho'[A_1+\rho']+\varphi''\varphi'^2 3\rho^2+\varphi''\varphi'[-3\rho B_1]\\&+\varphi'''[\rho A_1+k].\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, l'équation (43) peut être écrite ainsi

$$(45)\qquad B_1\rho+k\varphi=u+w.$$

En différentiant trois fois cette équation, on aura

$$(46)\qquad \rho'B_1+\rho B_2-w'+k'\varphi+\varphi'[\rho A_1+k]=0,$$

$$(47)\quad\left\{\begin{aligned}&-w''+\rho''B_1+2\rho'B_2+\rho B_3+k''\varphi\\&\quad+\varphi'2[\rho'A_1+\rho A_2+k']\\&\quad+\varphi'^2[-\rho B_1]+\varphi''[\rho A_1+k]=0.\end{aligned}\right.$$

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}&-w'''+\rho'''B_1+3\rho''B_2+3\rho'B_3+\rho B_4+k'''\varphi\\&\quad+\varphi'3[\rho''A_1+2\rho'A_2+\rho A_3+k'']\\&\quad+\varphi'^2 3[-\rho'B_1-\rho B_2]+\varphi'^3[-\rho A_1]\\&\quad+\varphi''3[\rho'A_1+\rho A_2+k']\\&\quad+\varphi'\varphi''3[-\rho B_1]+\varphi'''[\rho A_1+k]=0.\end{aligned}\right.$$

En soustrayant l'équation (43) de (44), nous aurons

$$x'y'''-y'x'''=a'b'''-b'a'''+w'''-3\rho''B_2-4\rho'B_3-\rho B_4-k'''\varphi$$
$$+\varphi'[-6\rho'A_2-4\rho A_3-6\rho'\rho''-4\rho\rho''']+\varphi'^2[3\rho B_2]$$
$$+\varphi'^3 2k+\varphi''[-3\rho A_2-3\rho\rho'']+\varphi'^2\varphi''3\rho^2.$$

Éliminons de l'expression $x'y'''-x'''y'$ la dérivée φ'' au moyen de l'équation (47).

En effet, en multipliant par $(A_1+\rho')$, nous aurons

$$\begin{aligned}(A_1+\rho')&(x'y'''-x'''y')\\ &=(A_1+\rho')H+3[-\varphi''(\rho A_1+k)](A_2+\rho''-\rho\varphi'^2),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}H=a'b'''-a'''b'+w'''-3\rho''B_2-4\rho'B_3-\rho B_4-k'''\varphi\\ +\varphi'[-6\rho'(A_2+\rho'')-4\rho(A_3+\rho''')]+\varphi'^2[3\rho B_2]+\varphi'^3 2k.\end{aligned}$$

L'équation (47) donne

$$\begin{aligned}(A_1+\rho')(x'y'''-x'''y')&=(A_1+\rho')H\\ &+3(A_2+\rho''-\rho\varphi'^2)\left\{\begin{matrix}-w''+\rho''B_1+2\rho'B_2+\rho B_3+k''\varphi\\ +\varphi'2(\rho'A_1+\rho A_2+k')-\varphi'^2\rho B_1\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

On a

$$(A_1+\rho')(x'y'''-x'''y')=P_0+P_1\varphi'+P_2\varphi'^2+P_3\varphi'^3+P_4\varphi'^4,$$

où

$$\begin{aligned}P_0&=(A_1+\rho')[a'b'''-a'''b'+w'''-3\rho''B_2-4\rho'B_3-\rho B_4-k'''\varphi]\\ &\quad+3(A_2+\rho'')[-w''+\rho''B_1+2\rho'B_2+\rho B_3+k''\varphi],\\ P_1&=6\rho(A_2+\rho'')^2-4\rho(A_1+\rho')(A_3+\rho'''),\\ P_2&=3\rho[w''+A_1B_2-A_2B_1-k''\varphi-2\rho''B_1-\rho'B_2-\rho B_3],\\ P_3&=\rho[-4\rho'(A_1+\rho')-6\rho(A_2+\rho'')],\\ P_4&=3\rho^2B_1.\end{aligned}$$

En outre, on a :

$$x'y''-y'x''=N_0+N_1\varphi'+N_2\varphi'^2+N_3\varphi'^3,$$

où

$$\begin{aligned}N_0&=a'b''-a''b'+w''-3\rho'B_2-\rho B_3-k''\varphi,\\ N_1&=-3\rho(A_2+\rho''),\\ N_2&=\quad 0,\\ N_3&=\quad \rho^2.\end{aligned}$$

On a aussi

$$x'^2+y'^2=L_0+L_1\varphi'+L_2\varphi'^2,$$

où

$$\begin{aligned}
L_0 &= a'^2+b'^2+\rho'^2+2\rho'A_1,\\
L_1 &= -2\rho B_1,\\
L_2 &= \quad \rho^2.
\end{aligned}$$

En différentiant et multipliant par $(A_1+\rho')$, on aura

$$(A_1+\rho')(x'x''+y'y'')=M_0+M_1\varphi'+M_2\varphi'^2+M_3\varphi'^3,$$

où

$$\begin{aligned}
M_0 &= (A_1+\rho')[a'a''+b'b''+\rho'\rho''+\rho'A_2+\rho''A_1]\\
&\quad +B_1[-w''+\rho''B_1+2\rho'B_2+\rho B_3+k''\varphi],\\
M_1 &= w''\rho+2\rho A_2B_1-\rho A_1B_2+(k'-\rho'^2)B_1-3kB_2-\rho^2B_3-k''\varphi\rho,\\
M_2 &= -\rho[A_1^2+B_1^2-\rho'^2+2k'+2\rho'A_1+2\rho A_2],\\
M_3 &= \quad \rho^2B_1.
\end{aligned}$$

En substituant les expressions obtenues dans l'équation différentielle des parallèles, on aura

$$\begin{aligned}
&3[N_0+N_1\varphi'+N_2\varphi'^2+N_3\varphi'^3][M_0+M_1\varphi'+M_2\varphi'^2+M_3\varphi'^3]\\
&-[L_0+L_1\varphi'+L_2\varphi'^2][P_0+P_1\varphi'+P_2\varphi'^2+P_3\varphi'^3+P_4\varphi'^4]=0.
\end{aligned}$$

En ouvrant les parenthèses, on aura

$$(19)\qquad \mathfrak{M}_0+\mathfrak{M}_1\varphi'+\mathfrak{M}_2\varphi'^2+\mathfrak{M}_3\varphi'^3+\mathfrak{M}_4\varphi'^4+\mathfrak{M}_5\varphi'^5+\mathfrak{M}_6\varphi'^6=0,$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_6 &= 3N_3M_3-L_2P_4=3\rho^2\rho^2B_1-\rho^2 3\rho^2B_1=0,\\
\mathfrak{M}_5 &= 3N_3M_2+3N_2M_3-L_2P_3-L_1P_4\\
&= 3N_3M_2-L_2P_3-L_1P_4=\rho^3[3(B_1^2-A_1^2)-2A_1\rho'+\rho'^2].
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à éliminer de l'équation (49) φ' au moyen de l'équation (46); de cette manière on aura l'équation de la forme

$$f(\varphi, \sin\varphi, \cos\varphi) = 0,$$

où f est une fonction entière de φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, avec les coefficients dépendant seulement de v.

Voyons comment l'arc φ entre dans cette équation.

Les coefficients M_0, M_1, N_0, P_0, P_2 sont du premier degré par rapport au φ, par conséquent φ peut paraître au second degré seulement dans les coefficients $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, tandis que les coefficients $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ sont du premier degré.

Quant au coefficient $\mathfrak{M}_4$, il est indépendant de φ, car on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_4 &= 3N_1M_0 + 3N_3M_1 - L_0P_1 - L_1P_3 - L_2P_2 \\
&= 3\rho^2B_1[-3\rho(A_2+\rho'')] \\
&\quad + 3\rho^2[w''\rho + 2\rho A_2B_1 - \rho A_1B_2 \\
&\qquad\qquad + (k' - \rho'^2)B_1 - 3kB_2 - \rho^2B_3 - k''\varphi\rho] \\
&\quad - 3\rho^2B_1[a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho'A_1] \\
&\quad + 2\rho^2B_1[-4\rho'(A_1+\rho') - 6\rho(A_2+\rho'')] \\
&\quad - 3\rho^3[w'' + A_1B_2 - A_2B_1 - k''\varphi - 2\rho''B_1 - \rho'B_2 - \rho B_3].
\end{aligned}$$

Nous voyons que, après la multiplication de l'équation par $(\rho A_1 + k)^5$, nous obtiendrons

$$(50) \qquad \mathfrak{M}_5 k'^5\varphi^5 + \varphi^4Q_1 + \varphi^3Q_2 + \varphi^2Q_3 + \varphi Q_4 + Q_5 = 0.$$

Les coefficients

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad Q_4, \quad Q_5$$

seront les fonctions entières des $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, avec les coefficients dépendant uniquement de v.

Il est évident qu'on ne peut satisfaire à l'équation (50) qu'en posant

$$\mathfrak{M}_5 k'^5 = 0, \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad Q_5 = 0,$$

car autrement φ, dépendant nécessairement de u, s'exprimerait algébriquement par $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Considérons le cas $\mathfrak{M}_5 = 0$.

On obtient

$$3(B_1^2 - A_1^2) - 2A_1\rho' + \rho'^2 = 0$$

ou

$$3(a'^2 - b'^2)\sin^2\varphi - 12a'b'\sin\varphi\cos\varphi + 3(b'^2 - a'^2)\cos^2\varphi \\ - 2\rho' a'\cos\varphi - 2\rho' b'\sin\varphi + \rho'^2 = 0.$$

Il ne faut pas oublier que φ dépend de u et, par conséquent, il est impossible de satisfaire à cette équation autrement qu'en posant

$$a'^2 - b'^2 = 0, \qquad a'b' = 0, \qquad \rho' a' = 0, \qquad \rho' b' = 0, \qquad \rho' = 0,$$

d'où l'on a

$$a' = 0, \qquad b' = 0, \qquad \rho' = 0$$

et il n'existe point de projections.

Il reste le cas uniquement possible

$$k' = 0,$$

alors

$$\rho = \sqrt{2kv + l},$$

où k et l sont des nombres constants.

Ainsi nous avons démontré que les projections possibles ont lieu à la condition $k' = 0$; il ne reste qu'à les trouver.

Il faut à présent aborder la recherche des coordonnées a, b des centres des méridiens en fonction de v et de la fonction w introduite par intégration.

Introduisons dans nos calculs les quantités complexes, en posant

$$\left.\begin{aligned} a + bi &= c \\ a - bi &= \gamma \end{aligned}\right\} \qquad 2iw = \sigma,$$

$$e^{i\varphi} = z, \qquad e^{-i\varphi} = t,$$

de sorte que $zt = 1$.

Il est évident que nous nous rappellerons, dans tout ce qui suit, le résultat obtenu $k' = 0$.

On aura, après les calculs analogues aux précédents,

$$
\begin{aligned}
2i(x'y''' - x'''y') &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\varphi' i + \mathcal{A}_2\varphi'^2 + \mathcal{A}_3\varphi'^3 i \\
&\quad + i\varphi''[\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_2\varphi'^2], \\
x'^2 + y'^2 &= \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 i\varphi' + \mathcal{C}_2\varphi'^2, \\
2i(x'y'' - y'x'') &= \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 i\varphi' + \mathcal{D}_3 i\varphi'^3, \\
2(x'x'' + y'y'') &= \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1\varphi' i + \mathcal{E}_2\varphi'^2 \\
&\quad + \varphi'' i[\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1\varphi'],
\end{aligned}
$$

où les notations expriment

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \sigma''' + c'''\gamma' - c'\gamma''' - z[3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{\text{iv}}] \\
&\quad + t[3\rho''c'' + 4\rho'c''' + \rho c^{\text{iv}}], \\
\mathcal{A}_1 &= 6\rho'\rho'' - 2\rho\rho''' - z(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - t(6\rho'c'' + 4\rho c'''), \\
\mathcal{A}_2 &= 3\rho[z\gamma'' - tc''], \qquad \mathcal{A}_3 = 4k; \\
\mathcal{B}_0 &= 6\rho'^2 - 3\rho\gamma''z - 3\rho c''t, \qquad \mathcal{C}_0 = \rho'^2 + c'\gamma' + z\rho'\gamma' + t\rho'c', \\
\mathcal{B}_1 &= 0, \qquad \mathcal{C}_1 = \rho(z\gamma' - tc'), \\
\mathcal{B}_2 &= 6\rho^2, \qquad \mathcal{C}_2 = \rho^2; \\
\mathcal{D}_0 &= \sigma'' + c''\gamma' - \gamma''c' - z(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') + t(3\rho'c'' + \rho c'''), \\
\mathcal{D}_1 &= -3\rho[z\gamma'' + tc'' + 2\rho''], \\
\mathcal{D}_3 &= 2\rho^2, \\
\mathcal{E}_0 &= c''\gamma' + c'\gamma'' + 2\rho'\rho'' + z(\rho'\gamma')' + t(\rho'c')', \\
\mathcal{E}_1 &= z(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') - t(2\rho'c' + \rho c''), \\
\mathcal{E}_2 &= 2k - z\rho\gamma' - t\rho c', \\
\mathcal{F}_0 &= \rho(z\gamma' - tc'), \\
\mathcal{F}_1 &= -2\rho^2.
\end{aligned}
$$

En substituant dans l'équation différentielle des cercles et en ouvrant les parenthèses, nous aurons

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &M_0+i\varphi' M_1+\varphi'^2 M_2+i\varphi'^3 M_3+\varphi'^4 M_4+i\varphi'^5 M_5\\ &\qquad +i\varphi''[N_0+i\varphi' N_1+\varphi'^2 N_2+i\varphi'^3 N_3+\varphi'^4 N_4]=0,\end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{aligned}
M_0 &= 3\mathfrak{D}_0\mathcal{C}_0-2\mathfrak{E}_0\mathcal{B}_0,\\
M_1 &= 3\mathfrak{D}_1\mathcal{C}_0+3\mathfrak{D}_0\mathcal{C}_1-2\mathfrak{E}_0\mathcal{B}_1-2\mathcal{B}_0\mathfrak{E}_1,\\
M_2 &= 3\mathfrak{D}_0\mathcal{C}_2-3\mathfrak{D}_1\mathcal{C}_1-2\mathfrak{E}_0\mathcal{B}_2+2\mathfrak{E}_1\mathcal{B}_1-2\mathfrak{E}_2\mathcal{B}_0,\\
M_3 &= 3\mathfrak{D}_1\mathcal{C}_2+3\mathfrak{D}_3\mathcal{C}_0-2\mathfrak{E}_0\mathcal{B}_3-2\mathfrak{E}_1\mathcal{B}_2-2\mathfrak{E}_2\mathcal{B}_1,\\
M_4 &= -3\mathfrak{D}_3\mathcal{C}_1+2\mathfrak{E}_1\mathcal{B}_3-2\mathfrak{E}_2\mathcal{B}_2,\\
M_5 &= \quad 3\mathfrak{D}_3\mathcal{C}_2-2\mathfrak{E}_2\mathcal{B}_3;\\
N_0 &= \quad 3\mathfrak{D}_0\mathcal{F}_0-2\mathfrak{E}_0\mathfrak{B}_0,\\
N_1 &= \quad 3\mathfrak{D}_0\mathcal{F}_1+3\mathfrak{D}_1\mathcal{F}_0-2\mathfrak{E}_1\mathfrak{B}_0,\\
N_2 &= -3\mathfrak{D}_1\mathcal{F}_1-2\mathfrak{E}_0\mathfrak{B}_2-2\mathfrak{E}_2\mathfrak{B}_0,\\
N_3 &= \quad 3\mathfrak{D}_3\mathcal{F}_0-2\mathfrak{E}_1\mathfrak{B}_2,\\
N_4 &= -3\mathfrak{D}_3\mathcal{F}_1-2\mathfrak{E}_2\mathfrak{B}_2.
\end{aligned}$$

D'abord nous voyons que $N_4=0$, car

$$-3\mathfrak{D}_3\mathcal{F}_1-2\mathfrak{E}_2\mathfrak{B}_2=-6\rho^2(-2\rho^2)-2\rho^2 6\rho^2=0.$$

Nous avons aussi

$$i\varphi'' A_0=K_0+i\varphi' K_1+\varphi'^2 K_2,$$

où

$$A_0=a z+A+\alpha t,$$

$$a=\rho\gamma',\qquad A=2k,\qquad \alpha=\rho c',$$

$$\begin{aligned}
K_0 &= \sigma''-(\rho\gamma')'' z+(\rho c')'' t,\\
K_1 &= -2[z(\rho\gamma')'+t(\rho c')'],\\
K_2 &= \quad \rho[z\gamma'-tc'].
\end{aligned}$$

En multipliant l'équation (51) par A_0, nous aurons

$$\begin{aligned} &A_0[M_0+i\varphi' M_1+\varphi'^2 M_2+i\varphi'^3 M_3+\varphi'^4 M_4+i\varphi'^5 M_5]\\ &\quad +(K_0+K_1 i\varphi'+K_2\varphi'^2)[N_0+N_1 i\varphi'+N_2\varphi'^2+N_3 i\varphi'^3]=0.\end{aligned}$$

Nous obtenons définitivement

$$(52)\qquad \mathfrak{M}_0 + i\varphi'\mathfrak{M}_1 + \varphi'^2\mathfrak{M}_2 + i\varphi'^3\mathfrak{M}_3 + \varphi'^4\mathfrak{M}_4 + i\varphi'^5\mathfrak{M}_5 = 0$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_0 &= A_0 M_0 + K_0 N_0,\\
\mathfrak{M}_1 &= A_0 M_1 + K_0 N_1 + K_1 N_0,\\
\mathfrak{M}_2 &= A_0 M_2 + K_0 N_2 - K_1 N_1 + K_2 N_0,\\
\mathfrak{M}_3 &= A_0 M_3 + K_0 N_3 + K_1 N_2 + K_2 N_1,\\
\mathfrak{M}_4 &= A_0 M_4 \qquad\qquad - K_1 N_3 + K_2 N_2,\\
\mathfrak{M}_5 &= A_0 M_5 \qquad\qquad\qquad\qquad + K_2 N_3.
\end{aligned}$$

Pour faire disparaître dans l'équation (52) la dérivée φ', multiplions-la par A_0^5 et prenons en vue l'équation

$$i\varphi' A_0 = B_0,$$

où

$$B_0 = 6z + B + \beta t,$$

où

$$6 = -(\rho\gamma')', \qquad B = \sigma', \qquad \beta = (\rho c')'.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 A_0^4 (i\varphi' A_0) - \mathfrak{M}_2 A_0^3 (i\varphi' A_0)^2\\
&\qquad - \mathfrak{M}_3 A_0^2 (i\varphi' A_0)^3 + \mathfrak{M}_4 A_0 (i\varphi' A_0)^4 + \mathfrak{M}_5 (i\varphi' A_0)^5 = 0,
\end{aligned}$$

d'où il vient

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 B_0 A_0^4 - \mathfrak{M}_2 B_0^2 A_0^3\\
&\qquad - \mathfrak{M}_3 B_0^3 A_0^2 + \mathfrak{M}_4 B_0^4 A_0 + \mathfrak{M}_5 B_0^5 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les degrés des coefficients par rapport aux z et t ne peuvent surpasser les nombres indiqués dans la Table suivante :

N_3.... 1	M_5.... 1	K_2.... 1	A_0.... 1	$\mathfrak{M}_5$.... 2
N_2.... 1	M_4.... 1	K_1.... 1	B_0.... 1	$\mathfrak{M}_4$.... 2
N_1.... 2	M_3.... 2	K_0.... 1		$\mathfrak{M}_3$.... 3
N_0.... 2	M_2.... 2			$\mathfrak{M}_2$.... 3
	M_1.... 2			$\mathfrak{M}_1$.... 3
	M_0.... 2			$\mathfrak{M}_0$.... 3

Il n'est pas difficile de se convaincre que dans le coefficient $\mathfrak{M}_3$ disparaissent les membres du troisième degré z^3, t^3.

Ainsi l'on voit que l'équation dont dépend la solution de notre problème reçoit définitivement la forme suivante :

$$(54)\qquad O_0 z^8 + O_1 z^7 + \ldots + O_7 z + \mathfrak{O} + \Omega_0 t^8 + \Omega_1 t^7 + \ldots + \Omega_7 t = 0.$$

Les coefficients $\mathfrak{O}$, O_i, Ω_i dépendent des fonctions γ, c, σ et de leurs dérivées jusqu'au quatrième ordre.

En nous souvenant que z et t doivent dépendre de u qui n'entre dans les fonctions γ, σ, c, il résulte que, pour satisfaire à l'équation (54) d'une façon la plus générale, il faut poser

$$(55)\qquad \begin{cases} O_0 = 0, & O_1 = 0, & O_2 = 0, & \ldots, & O_7 = 0, & \mathfrak{O} = 0 \\ \Omega_0 = 0, & \Omega_1 = 0, & \Omega_2 = 0, & \ldots, & \Omega_7 = 0. \end{cases}$$

Il reste pour résoudre la question de trouver les expressions les plus générales des fonctions a, b, w satisfaisant au système (55).

Formons l'équation $O_0 = 0$; il pourra composer le coefficient de z^8.

En ayant compte de la Table précédente, nous voyons que le degré z^8 résultera des membres

$$\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 A_0^4 B_0 - \mathfrak{M}_2 A_0^3 B_0^2.$$

En désignant les coefficients de z^3 dans les expressions $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ par

$$\mathfrak{M}_0^0,\quad \mathfrak{M}_1^0,\quad \mathfrak{M}_2^0,$$

nous verrons que notre équation sera

$$\alpha^3(\alpha^2\mathfrak{M}_0^0 + \alpha\beta\mathfrak{M}_1^0 - \beta^2\mathfrak{M}_2^0) = 0,$$

où

$$\alpha = \rho\gamma', \qquad \beta = -(\rho\gamma')'.$$

Calculons les coefficients $\mathfrak{M}_0^0$, $\mathfrak{M}_1^0$, $\mathfrak{M}_2^0$:

$$\begin{aligned} M_0 = 3\mathfrak{D}_0\mathfrak{C}_0 - 2\mathfrak{E}_0\mathfrak{A}_0 &= 3[-(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')z + \ldots][(\rho'\gamma')'z + \ldots] \\ &\quad - 2(\rho'\gamma' z + \ldots)[-(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{\text{iv}})z + \ldots] \\ &= z^2[2\rho'\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + 5\gamma^{\text{iv}}) - 3(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')(\rho'\gamma'' + \rho''\gamma')] + \ldots \end{aligned}$$

$$N_0 = 3\mathfrak{D}_0\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{E}_0\mathfrak{B}_0 = z^2[2.3\rho\gamma''\rho'\gamma' - 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')] + \ldots$$

Ainsi nous avons

$$\mathfrak{M}_0 = A_0 M_0 + K_0 N_0 = \mathfrak{M}_0^0 z^3 + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{M}_0^0 = \rho\gamma'(2k\gamma'\gamma^{\text{IV}} - 3\rho'^2\gamma''^2 + 3\rho^2\gamma'''^2 + 6k\gamma''\gamma''' + 8\rho'^2\gamma'\gamma''').$$

Calcul de $\mathfrak{M}_1^0$:

$$\begin{aligned}
M_1 &= 3\varpi_1 \mathcal{E}_0 + 3\varpi_0 \mathcal{E}_1 - 2\mathfrak{S}_1 \mathcal{A}_0 - 2\mathfrak{S}_0 \mathcal{A}_1 \\
&= z^2[2\rho\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{\text{IV}}) + 2\rho'\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') \\
&\qquad - 9\rho\gamma''(\rho'\gamma')' - 3(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'')] + \ldots
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}_1 = A_0 M_1 + K_1 N_0 + K_0 N_1 = \mathfrak{M}_1^0 z^3 + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{M}_1^0 = \rho\gamma'(2\rho^2\gamma'\gamma^{\text{IV}} + 16k\gamma'\gamma''' - 6k\gamma''^2 + 6\rho^2\gamma''\gamma''').$$

Enfin

$$\begin{aligned}
M_2 &= -3\varpi_1 \mathcal{E}_1 + 3\varpi_0 \mathcal{E}_2 - 2\mathcal{A}_0 \mathfrak{S}_2 + 2\mathfrak{S}_1 \mathcal{A}_1 - 2\mathfrak{S}_0 \mathcal{A}_2 \\
&= z^2[9\rho\gamma''(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') + 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') \\
&\qquad\qquad - 2\rho\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - 6\rho\rho'\gamma'\gamma''] + \ldots,
\end{aligned}$$

d'où il vient

$$\mathfrak{M}_2 = A_0 M_2 + K_2 N_0 - K_1 N_1 + K_0 N_2 = \mathfrak{M}_2^0 z^3 + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{M}_2^0 = \rho^3\gamma'(3\gamma''^2 - 8\gamma'\gamma''').$$

On pourrait satisfaire à l'équation $O_0 = 0$ de deux manières différentes :

$$(56) \qquad \alpha = 0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2\mathfrak{M}_0^0 + \alpha\beta\mathfrak{M}_1^0 - \beta^2\mathfrak{M}_2^0 = 0.$$

Le cas $\alpha = 0$ donne

$$\gamma = \text{const.}$$

On obtient des projections avec les méridiens concentriques.

Dans le cas général, on aura l'équation (56), qui, après toutes les réductions, se transforme en

$$-2\gamma'^2\gamma''\gamma^{\text{IV}} - 3\gamma''^4 + 3\gamma'^2\gamma'''^2 + 2\gamma'\gamma''^2\gamma''' = 0,$$

où, en posant $\gamma' = y$, on aura

$$(57) \qquad -2y^2y'y''' - 3y'^4 + 3y^2y''^2 + 2yy'^2y'' = 0.$$

Il faut considérer des cas à part

$$y = 0, \qquad y' = 0,$$

car autrement l'équation (57), par la substitution

$$u = \frac{y'}{y},$$

se transforme en la suivante :

$$(58) \qquad u'^2 - 2uu' = 0.$$

On voit que, outre la solution générale donnée par l'équation (58), il faut examiner à part les solutions singulières

$$y = 0, \qquad y' = 0, \qquad u' = 0.$$

En prenant la solution générale de l'équation $O_8 = 0$, on voit qu'en même temps sera satisfaite l'équation $\Omega_8 = 0$; il restera à satisfaire par le choix convenable des constantes arbitraires les quinze autres équations du système (55).

Si nous faisions cet examen, nous verrions que la solution générale mène à la contradiction, et que les projections sont données par les solutions singulières. Cet examen conduirait à des calculs trop pénibles qui exagéreraient les difficultés du problème.

Pour arriver à notre but d'une façon la plus directe, examinons d'abord le cas des projections concentriques, c'est-à-dire le cas

$$y = \gamma' = 0.$$

Alors on aura

$$\mathcal{A}_0 = \sigma''', \qquad \mathcal{A}_1 = 12\rho'\rho'', \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{A}_3 = 4k.$$

$$\mathcal{B}_0 = 6\rho'^2, \qquad \mathcal{B}_2 = 6\rho^2.$$

$$\mathcal{C}_0 = \rho'^2, \qquad \mathcal{C}_1 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 = \rho^2.$$

$$\mathcal{D}_0 = \sigma'', \qquad \mathcal{D}_1 = -6\rho\rho'', \qquad \mathcal{D}_3 = 2\rho^2.$$

$$\mathcal{E}_0 = 2\rho'\rho'', \qquad \mathcal{E}_1 = 0, \qquad \mathcal{E}_2 = 2k.$$

$$\mathcal{F}_0 = 0, \qquad \mathcal{F}_1 = -2\rho^2.$$

$$A_0 = 2k, \qquad B_0 = \sigma', \qquad K_0 = \sigma'', \qquad K_1 = 0, \qquad K_2 = 0.$$

L'équation a la forme

$$2^5 k^5(24\rho\rho'^2\rho''\sigma'' - 4k\rho'^2\sigma''') + 2^4 k^4\sigma'(-24\rho^2\rho'^2\rho''^2 - 6\rho^2\sigma''^2)$$
$$- 2^3 k^3\sigma'^2(24k^2\sigma'' - 4k\rho^2\sigma''') + 2^2k^2\sigma'^3 80\rho^2\rho'\rho''k + \sigma'^5 8\rho^2k^2 = 0.$$

En introduisant au lieu de σ la quantité réelle w au moyen des formules

$$\sigma' = 2iw', \qquad \sigma'' = 2iw'', \qquad \sigma''' = 2iw''',$$

on aura

$$k^3(6\rho\rho'^2\rho''w'' - k\rho'^2w''') + k^2w'(-3\rho^2\rho'^2\rho''^2 + 3\rho^2w''^2)$$
$$+ kw'^2(6k^2w'' - k\rho^2w''') - 10k\rho^2\rho'\rho''w'^3 + \rho^2w'^5 = 0.$$

En ouvrant les parenthèses

$$w'''\left(\frac{k^6}{\rho^2} + k^2\rho^2w'^2\right) - 3\rho^2k^2w'w''^2 + 6w''\left(\frac{k^7}{\rho^4} - k^3w'^2\right)$$
$$+ 3\frac{k^8}{\rho^6}w' - 10\frac{k^4}{\rho^2}w'^3 - \rho^2w'^5 = 0\ (^1).$$

Prenons ρ pour la variable indépendante, en la désignant par x, et pour sa fonction y prenons la quantité

$$\frac{1}{k}\frac{dw}{d\rho}.$$

---

(1) Il faut se souvenir que $\rho' = \dfrac{k}{\rho}$, $\rho'' = -\dfrac{k^2}{\rho^3}$.

On aura

$$dw = ky\,d\rho,$$

d'où

$$w' = \frac{dw}{dv} = ky\frac{d\rho}{dv} = k^2\frac{y}{x}.$$

$$w'' = k^3\frac{xy'-y}{x^3}, \qquad w''' = k^4\frac{x^2y''-3xy'+3y}{x^5}.$$

Notre équation devient

$$xy''(1+x^2y^2) - 3x^3yy'^2 + 3y'(1-x^2y^2) - xy^3(4+x^2y^2) = 0.$$

Introduisons la nouvelle variable u

(59) $$xy = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}};$$

on aura, après toutes les réductions,

$$x^2u'' + xu' - u = 0.$$

En intégrant, on aura

(60) $$u' + \frac{u}{x} = l_0,$$

où l_0 est une constante arbitraire.

En intégrant (60), on aura

$$u = \frac{c + l_0x^2}{2x}.$$

La formule (59) donne

$$y = \frac{\frac{u}{x}}{\sqrt{1-u^2}};$$

au moyen de (60) on a

$$y = -\frac{u'-l_0}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Introduisons encore une nouvelle variable

(61) $$u - l_0x = q,$$

on aura

$$q = \frac{c - l_0 x^2}{2x},$$

$$1 - u^2 = 1 - l_0 c - q^2.$$

Désignons $1 - l_0 c = l_0^2 A_0^2$.

L'équation (61) donne $u' - l_0 = q'$, de sorte que

$$y = \frac{dw}{k d\rho} = -\frac{q'}{\sqrt{l_0^2 A^2 - q^2}};$$

mais $q' d\rho = dq$, d'où

$$w = -k \int \frac{dq}{\sqrt{l_0^2 A^2 - q^2}} = k \arccos \frac{q}{l_0 A} + w_0;$$

w_0 est la troisième constante arbitraire.

En substituant la quantité q, on aura

$$w = w_0 + k \arccos \frac{\frac{1}{l_0^2} - A^2 - x^2}{2Ax}.$$

La formule

$$w = w_0 + k \arccos \frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho}, \qquad \text{où} \qquad R = \frac{1}{l_0},$$

détermine complètement les projections. Nous obtenons

$$\varphi = \frac{u + w_0}{k} + \arccos \frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho}.$$

En substituant dans les équations fondamentales (42), nous aurons

$$x = a + \rho\left(\cos \frac{u + w_0}{k} \frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho} - \sin \frac{u + w_0}{k} \frac{\Delta}{2A\rho}\right),$$

$$y = b + \rho\left(\sin \frac{u + w_0}{k} \frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho} + \cos \frac{u + w_0}{k} \frac{\Delta}{2A\rho}\right),$$

où

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2 + A^2 - R^2)^2} \\ &= \sqrt{(R + \rho + A)(R + A - \rho)(R + \rho - A)(\rho + A - R)}.\end{aligned}$$

Les équations définitives des projections seront

$$(62)\qquad x = a + \cos\frac{u+iv_0}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} - \sin\frac{u+iv_0}{k}\,\frac{\Delta}{2A},$$

$$(63)\qquad y = b + \sin\frac{u+iv_0}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} + \cos\frac{u+iv_0}{k}\,\frac{\Delta}{2A}.$$

Examinons la forme des méridiens et des parallèles.

Des formules (62), (63), on aura

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2=2kv+l;$$

les méridiens sont évidemment des cercles concentriques.

Pour avoir les parallèles, éliminons ρ.

En multipliant par $\cos\frac{u+iv_0}{k}$ l'équation (62), et par $\sin\frac{u+iv_0}{k}$ l'équation (63), on aura, après une addition,

$$2A(x-a)\cos\frac{u+iv_0}{k}+2A(y-b)\sin\frac{u+iv_0}{k}=\rho^2+A^2-R^2;$$

mais on a $(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$, d'où il vient

$$(x-a)^2+(y-b)^2-2A\cos\frac{u+iv_0}{k}(x-a)$$
$$-2A\sin\frac{u+iv_0}{k}(y-b)+A^2=R^2.$$

Nous aurons définitivement

$$\left(x-a-A\cos\frac{u+iv_0}{k}\right)^2+\left(y-b-A\sin\frac{u+iv_0}{k}\right)^2=R^2.$$

Ainsi nous voyons que les parallèles sont des cercles avec le rayon constant R. En désignant par ξ et η les coordonnées du centre d'une des parallèles, on aura

$$\xi=a+A\cos\frac{u+iv_0}{k},\qquad \eta=b+A\sin\frac{u+iv_0}{k},$$

d'où il vient

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=A^2.$$

Ce cercle représente le lieu géométrique des centres des parallèles.

En revenant au cas général, tâchons de simplifier autant que possible le problème, en nous souvenant du résultat fondamental, que le rayon des méridiens s'exprime par la formule

$$\sqrt{2kv + l}.$$

Nous voyons qu'à cause de la symétrie de l'équation (1) par rapport à u et à v le rayon des parallèles doit s'exprimer par la formule semblable

$$\sqrt{2Ku + L},$$

ou, en conservant nos notations, on aura

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2} = 2Ku + L,$$

K et L étant des constantes.

Quant à l'expression

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2},$$

nous voyons qu'elle doit être une fonction rationnelle des $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, que nous désignons par

$$R(\sin\varphi, \cos\varphi).$$

On aura

$$R(\sin\varphi, \cos\varphi) = 2Ku + L.$$

Au moyen de l'équation (43), nous aurons

$$2kK\varphi + 2K(a'\sin\varphi - b'\cos\varphi)\rho - 2K\omega + L = R(\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Si R ne devient pas indéterminée ou infinie, ce qui aurait lieu quand $x'y'' - y'x'' = 0$, l'équation donnera

$$kK = 0,$$

d'où nous voyons qu'un des systèmes des lignes composant le réseau, les méridiens ou les parallèles doivent avoir le rayon constant. Cette remarque permet de simplifier considérablement le problème.

En effet, supposons que les méridiens sont des cercles avec le rayon constant. En prenant la longueur de ce rayon pour unité, nous aurons les équations des projections en forme

$$(64) \qquad \begin{cases} x = a + \cos\varphi, \\ y = b + \sin\varphi, \end{cases}$$

où a et b exprimées en v donnent les coordonnées d'un point de la courbe Σ, qui sera le lieu des centres des méridiens ; soit v l'angle que fait la tangente de cette courbe Σ avec l'axe des x. Introduisons en outre le rayon de courbure ρ de la courbe Σ ; nous aurons alors ou $\rho = \infty$, ou

$$a = \int \rho \cos v \, dv, \qquad b = \int \rho \sin v \, dv.$$

Il faudra évidemment satisfaire à l'équation

$$(65) \qquad x'_v y'_u - x'_u y'_v = \mathrm{V},$$

où V est une certaine fonction de v.

En substituant dans l'équation (65) les expressions (64) et en intégrant par rapport à u, on aura

$$\rho \sin(\varphi - v) = \mathrm{V}u + \sigma,$$

où

$$\mu \sin\xi = u + w,$$

ayant compte des notations suivantes

$$\mu \mathrm{V} = \rho, \qquad \sigma = w\mathrm{V}, \qquad \varphi - v = \xi.$$

En employant les méthodes précédentes, on aura

$$\begin{aligned} \mu^2 \cos^2\xi (x'^2 + y'^2) = {} & \mathrm{A}_0 \cos^3\xi + \mathrm{A}_1 \cos^2\xi \sin\xi + \mathrm{A}_2 \cos\xi \sin^2\xi + \mathrm{A}_3 \sin^3\xi \\ & + \mathrm{B}_0 \cos^2\xi + \mathrm{B}_1 \cos\xi \sin\xi + \mathrm{B}_2 \sin^2\xi \\ & + \mathrm{C}_0 \cos\xi + \mathrm{C}_1 \sin\xi + \mathrm{D}_0, \end{aligned}$$

où

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = -2\rho\mu^2, \qquad A_2 = 2\rho\mu\mu', \qquad A_3 = 0,$$
$$B_0 = \mu^2(\rho^2+1), \qquad B_1 = -2\mu(\mu'+\rho\varpi'), \qquad B_2 = \mu'^2,$$
$$C_0 = 2\mu\varpi', \qquad C_1 = -2\mu'\varpi', \qquad D_0 = \varpi'^2.$$

Calculons l'expression $x'y'' - x''y'$:

$$\begin{aligned}\mu^3\cos^3\xi(x'y''-y'x'') = {} & \mathcal{A}_0\cos^4\xi + \mathcal{A}_1\cos^3\xi\sin\xi + \mathcal{A}_2\cos^2\xi\sin^2\xi \\ & + \mathcal{A}_3\cos\xi\sin^3\xi + \mathcal{A}_4\sin^4\xi + \mathcal{B}_0\cos^3\xi \\ & + \mathcal{B}_1\cos^2\xi\sin\xi + \mathcal{B}_2\cos\xi\sin^2\xi + \mathcal{B}_3\sin^3\xi \\ & + \mathcal{C}_0\cos^2\xi + \mathcal{C}_1\cos\xi\sin\xi + \mathcal{C}_2\sin^2\xi \\ & + \mathcal{D}_0\cos\xi + \mathcal{D}_1\sin\xi + \mathcal{E}_0,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{A}_0 = -\mu^3\rho', \qquad \mathcal{A}_1 = -\rho(2\mu^3+\mu^2\mu''-2\mu\mu'^2)+\rho'\mu^2\mu',$$
$$\mathcal{A}_2 = 3\mu^2\mu'\rho, \qquad \mathcal{A}_3 = 0, \qquad \mathcal{A}_4 = 0,$$
$$\mathcal{B}_0 = \mu^2[\rho\varpi''+\mu(\rho^2+1)] - \mu\varpi'(\mu\rho'+2\mu'\rho),$$
$$\mathcal{B}_1 = -3\mu^2(\mu'+\varpi'\rho), \qquad \mathcal{B}_2 = 3\mu\mu'^2, \qquad \mathcal{B}_3 = -\mu'^3,$$
$$\mathcal{C}_0 = 3\mu^2\varpi', \qquad \mathcal{D}_0 = 3\mu\varpi'^2,$$
$$\mathcal{C}_1 = -6\mu\mu'\varpi', \qquad \mathcal{D}_1 = -3\mu'\varpi'^2,$$
$$\mathcal{C}_2 = 3\varpi'\mu'^2, \qquad \mathcal{E}^0 = \varpi'^3.$$

Pour résoudre le problème, il faut satisfaire à l'identité

$$(x'^2+y'^2)^3 = [2Ku+L](x'y''-x''y')^2,$$

laquelle, à cause de nos calculs, prendra la forme suivante :

$$\left\{\begin{matrix} A_0\cos^3\xi + \ldots + A_3\sin^3\xi \\ B_0\cos^2\xi + \ldots + B_2\sin^2\xi \\ C_0\cos\xi + C_1\sin\xi \\ D_0 \end{matrix}\right\}^3$$
$$= [2K(\mu\sin\xi - \varpi)+L]\left\{\begin{matrix} \mathcal{A}_0\cos^4\xi + \ldots + \mathcal{A}_4\sin^4\xi \\ \mathcal{B}_0\cos^3\xi + \ldots + \mathcal{B}_3\sin^3\xi \\ \mathcal{C}_0\cos^2\xi + \ldots + \mathcal{C}_2\sin^2\xi \\ \mathcal{D}_0\cos\xi + \mathcal{D}_1\sin\xi \\ \mathcal{E}_0 \end{matrix}\right\}^2$$

Cette équation doit évidemment être satisfaite identiquement.

En posant $\xi = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$[D_0 + C_1 + B_2 + A_3]^3 = [2K(\mu - \varpi) + L][\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_3 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{E}_0]^2,$$

où

$$\begin{aligned}(\varpi'^2 - 2\mu'\varpi' + \mu'^2)^3 \\ = [2K(\mu - \varpi) + L](\varpi'^3 - 3\mu'\varpi'^2 + 3\mu'^2\varpi' - \mu'^3)^2,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mu - \varpi = \text{const.}$$

De la même manière, si l'on pose $\xi = -\frac{\pi}{2}$, on aura

$$\mu + \varpi = \text{const.},$$

d'où l'on reçoit

$$\mu = \text{const.}, \qquad \varpi = \text{const.}$$

et par conséquent ξ est une fonction de u seule.

L'équation se simplifie considérablement

$$\mathcal{A}_0 = -\mu^3\rho', \qquad \mathcal{A}_1 = -2\mu^3\rho, \qquad \mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{A}_3 = 0, \qquad \mathcal{A}_4 = 0,$$

$$\mathcal{B}_0 = \mu^3(\rho^2 + 1), \qquad \mathcal{B}_1 = 0, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_3 = 0,$$

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{E}_0 = 0.$$

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = -2\rho\mu^2, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0.$$

$$B_0 = \mu^2(\rho^2 + 1), \qquad B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad C_0 = C_1 = D_0 = 0.$$

On aura

$$\begin{aligned}(-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^3 \\ = [2K(\mu\sin\xi - \varpi) + L](-\rho'\cos\xi - 2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^2.\end{aligned}$$

En substituant $\xi = \frac{\pi}{2}$, on aura $\rho = \text{const.}$, d'où il vient

$$-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1 = 2K(\mu\sin\xi - \varpi) + L,$$

d'où

$$\rho = -K\mu,$$
$$\rho^2 + 1 = L - 2K\varpi.$$

On obtient $V = -K$, et nous pouvons passer de la variable v, exprimant l'angle de la tangente avec l'axe de x, à la véritable longitude en changeant v en $Kv + \varpi$.

La courbe Σ est un cercle, et les projections seront déterminées par les équations

$$x = a - K\mu \sin v + \cos\varphi,$$
$$y = b + K\mu \cos v + \sin\varphi,$$

où

$$\mu \sin(\varphi - v) = u + \varpi.$$

On voit aisément que les parallèles sont des cercles concentriques; de sorte que nous parvenons au cas déjà examiné.

Dans le cas $\rho = \infty$ on aura, par les raisonnements semblables, les projections dont les parallèles sont des droites parallèles entre elles et parallèles à la droite, lieu géométrique des centres des méridiens. On peut concevoir ce cas comme un cas limite du cas général.

Ainsi nous voyons que notre problème est complètement résolu.

En résumant tous nos résultats, *nous obtenons onze sortes de projections satisfaisant à toutes les conditions du problème.*

En prenant pour v la longitude, et pour u la fonction de la latitude correspondant à la forme

$$x'_u y'_v - y'_u x'_v = \pm 1,$$

de l'équation du problème nous aurons les projections suivantes :

I. $$\left\{ \begin{aligned} x &= au + \alpha v, \\ y &= bu + \beta v, \end{aligned} \right\} \text{ où } a\beta - \alpha b = 1.$$

II. $$\left\{ \begin{aligned} x &= (av + b)\sqrt{2ku + l}, \\ y &= (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l}, \end{aligned} \right\} \text{ où } k(a\beta - b\alpha) = 1.$$

III. $$\left\{\begin{aligned} x &= (au+b)\sqrt{2kv+l}, \\ y &= (\alpha u+\beta)\sqrt{2kv+l}, \end{aligned}\right\} \text{ où } k(b\alpha - a\beta) = 1.$$

IV. $$\left\{\begin{aligned} x &= a - \frac{u+w}{b}, \\ y &= bv + \beta + \frac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (u+w)^2}. \end{aligned}\right.$$

V. $$\left\{\begin{aligned} x &= a - \frac{v+w}{b}, \\ y &= bu + \beta + \frac{1}{b}\sqrt{b^2\rho^2 - (v+w)^2}. \end{aligned}\right.$$

VI. $$\left\{\begin{aligned} x &= \delta\cos\frac{u+\varepsilon}{k} - \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\sqrt{2kv+l}, \\ y &= \delta\sin\frac{u+\varepsilon}{k} + \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\sqrt{2kv+l}. \end{aligned}\right.$$

VII. $$\left\{\begin{aligned} x &= \delta\cos\frac{v+\varepsilon}{k} - \sin\frac{v+\varepsilon}{k}\sqrt{2ku+l}, \\ y &= \delta\sin\frac{v+\varepsilon}{k} + \cos\frac{v+\varepsilon}{k}\sqrt{2ku+l}. \end{aligned}\right.$$

VIII. $$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2kv+l}\left[\frac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right], \\ y &= \sqrt{2kv+l}\left[\frac{\mu}{k} + \sin\varphi\right], \\ &\text{où } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = u + \sigma. \end{aligned}\right.$$

IX. $$\left\{\begin{aligned} x &= \sqrt{2ku+l}\left[\frac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right], \\ y &= \sqrt{2ku+l}\left[\frac{\mu}{k} + \sin\varphi\right], \\ &\text{où } \lambda\sin\varphi - \mu\cos\varphi + k\varphi = v + \sigma. \end{aligned}\right.$$

X. $$\left\{\begin{aligned} x &= \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} - \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A}, \\ y &= \sin\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} + \cos\frac{u+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A}, \\ &\text{où } \rho = \sqrt{2kv+l}, \qquad \Delta = \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2+A^2-R^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

$$\text{XI.}\quad\left\{\begin{aligned} x &= \cos\frac{v+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} - \sin\frac{v+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A},\\ y &= \sin\frac{v+\varepsilon}{k}\,\frac{\rho^2+A^2-R^2}{2A} + \cos\frac{v+\varepsilon}{k}\,\frac{\Delta}{2A},\\ &\text{où } \rho=\sqrt{2ku+l},\qquad \Delta=\sqrt{4A^2\rho^2-(\rho^2+A^2-R^2)^2}.\end{aligned}\right.$$

Pour fixer les idées, nous avons considéré la représentation des surfaces de révolution; mais il faut bien remarquer que tous nos résultats s'appliquent aussi bien à la représentation de chaque surface courbe; car, quelle que soit la surface représentée, on peut, par un choix convenable des coordonnées curvilignes, ramener à la forme (1) l'équation des projections qui conservent les aires.